Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий,
Изв. РАН. Сер. матем., 1998, том 62, выпуск 3, 121–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/im198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:54:59

УДК 513.83

В. А. Смирнов

Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий

Настоящая работа посвящена развитию алгебраического аппарата, необходимого для описания гомотопических групп топологических пространств. Как показано в заметке [1], для этого нужно использовать понятие алгебры Ли над операдой E_∞ . Здесь мы подробнее рассмотрим это понятие, докажем важнейшие его свойства и выясним вопрос об алгебраической структуре на гомотопических группах топологических пространств. В частности, покажем, что на гомотопических группах топологического пространства имеется структура E_∞ -алгебры Ли, которая в односвязном случае определяет гомотопический тип этого пространства.

Поскольку понятие операды является аналогом понятия алгебры, то вначале мы напоминаем понятия алгебры, коалгебры и рассматриваем основные конструкции над ними, которые затем переносятся на случай операд и используются при исследовании структуры алгебры и коалгебры Ли над операдой.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Алгебры и коалгебры

Пусть A – дифференциальная градуированная алгебра с единицей и ассоциативным умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$, K – дифференциальная градуированная коалгебра с коединицей и ассоциативным коумножением $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$.

Дифференциальные градуированные алгебры и коалгебры в дальнейшем мы будем называть просто *алгебрами* и *коалгебрами* соответственно.

Скрещивающей коцепью $\phi: K \rightarrow A$ называется [2] гомоморфизм, понижающий размерность на единицу и удовлетворяющий условию $d(\phi) + \phi \cup \phi = 0$, где $\phi \cup \phi = \pi(\phi \otimes \phi)\nabla: K \rightarrow A$.

Для алгебры A рассмотрим B -конструкцию BA , являющуюся коалгеброй, и скрещивающую коцепь $\beta: BA \rightarrow A$. Как градуированная коалгебра BA совпадает с тензорной коалгеброй $T\Sigma A$ над надстройкой ΣA над A .

Образующие в BA обозначаются через $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in A$, и имеют размерность, равную сумме размерностей x_i плюс n .

Коумножение $\nabla: BA \rightarrow BA \otimes BA$ задается формулой

$$\nabla[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^{n-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_n].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01049).

Скрещивающая коцепь $\beta: BA \rightarrow A$ определена формулой

$$\beta[x_1, \dots, x_n] = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Дифференциал в коалгебре BA определяется условием скрещивающей коцепи β и имеет вид

$$\begin{aligned} d[x_1, \dots, x_n] &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\epsilon_{i-1}+1} [x_1, \dots, d(x_i), \dots, x_n] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\epsilon_i} [x_1, \dots, \pi(x_i \otimes x_{i+1}), \dots, x_n], \end{aligned}$$

где $\epsilon_i = \dim(x_1) + \dots + \dim(x_i) + i$.

Двойственным образом для коалгебры K рассмотрим ко- B -конструкцию FK , являющуюся алгеброй, и скрещивающую коцепь $\alpha: K \rightarrow FK$. Как градуированная алгебра FK совпадает с тензорной алгеброй $T\Sigma^{-1}K$ над денадстройкой $\Sigma^{-1}K$ над K .

Образующие в FK обозначаются через $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in K$, и имеют размерность, равную сумме размерностей x_i минус n .

Умножение $\pi: FK \otimes FK \rightarrow FK$ задается формулой

$$\pi([x_1, \dots, x_n] \otimes [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]) = [x_1, \dots, x_{n+m}].$$

Скрещивающая коцепь $\alpha: K \rightarrow FK$ определена формулой $\alpha(x) = [x]$.

Дифференциал в алгебре FK определяется условием скрещивающей коцепи α и имеет вид

$$\begin{aligned} d[x_1, \dots, x_n] &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\epsilon_{i-1}+1} [x_1, \dots, d(x_i), \dots, x_n] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{\epsilon_i} [x_1, \dots, x'_i, x''_i, \dots, x_n], \end{aligned}$$

где $\nabla(x_i) = \sum x'_i \otimes x''_i$.

Каждая скрещивающая коцепь $\phi: K \rightarrow A$ индуцирует отображение алгебр $F(\phi): FK \rightarrow A$,

$$F(\phi)[x_1, \dots, x_n] = \pi(\phi(x_1) \otimes \dots \otimes \phi(x_n)).$$

С отображением коалгебр $B(\phi): K \rightarrow BA$ дело обстоит несколько сложнее. А именно, это отображение следует задавать формулой

$$B(\phi)(x) = [\phi(x)] + \sum [\phi(x'), \phi(x'')] + \sum [\phi(x'), \phi(x''), \phi(x''')] + \dots,$$

где $\sum x' \otimes x'' = \nabla(x)$, $\sum x' \otimes x'' \otimes x''' = (\nabla \otimes 1)\nabla(x)$ и т.д. Однако в результате может получиться бесконечное число слагаемых. Избежать этого можно, наложив на коалгебру K некоторые условия конечности.

Будем говорить, что K – коалгебра конечного типа, если для любого $x \in K$ найдется номер n , для которого $\nabla(n)(x) = 0$, где $\nabla(n) = (\nabla \otimes \cdots \otimes 1) \cdots (\nabla \otimes 1) \nabla$ – итерация коумножения ∇ .

В этом случае мы будем иметь отображение коалгебр $B(\phi): K \rightarrow BA$. Если же коалгебра K не такова, то рассмотрим фильтрацию $K^1 \subset K^2 \subset \cdots \subset K$, для которой

$$K^1 = \{x \in K \mid \nabla(x) = 0\}, \quad \dots, \quad K^n = \left\{ x \in K \mid \nabla(x) \in \sum_{i=1}^{n-1} K^i \otimes K^{n-i} \right\}, \dots$$

Положим $\check{K} = \varinjlim K^n$. Ясно, что $\check{K}$ – подкоалгебра коалгебры K конечного типа и имеет место отображение коалгебр $B(\phi): \check{K} \rightarrow BA$.

В частности, скрепляющая коцепь $\alpha: K \rightarrow FK$ индуцирует отображение коалгебр $B(\alpha): \check{K} \rightarrow BFK$ и скрепляющая коцепь $\beta: BA \rightarrow A$ индуцирует отображение алгебр $F(\beta): FBA \rightarrow A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для произвольной алгебры A отображение*

$$F(\beta): FBA \rightarrow A$$

является цепной эквивалентностью.

Обозначим для краткости отображение $F(\beta)$ через η и определим отображение $\xi: A \rightarrow FBA$, положив $\xi(x) = [[x]]$. Ясно, что ξ является цепным отображением (но не отображением алгебр) и $\eta \circ \xi = \text{Id}$.

Покажем, что $\xi \circ \eta \simeq \text{Id}: FBA \rightarrow FBA$. Для этого определим цепную гомотопию $h: FBA \rightarrow FBA$, положив

$$h[[x_1], [x_2, \dots, x_n], \dots, [y_1, \dots, y_m]] = [[x_1, \dots, x_n], \dots, [y_1, \dots, y_m]]$$

и $h(x) = 0$ в остальных случаях.

Непосредственные вычисления показывают, что имеет место требуемая формула, т.е. h является искомой цепной гомотопией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1'. *Для произвольной коалгебры K конечного типа отображение $B(\alpha): K \rightarrow BFK$ является цепной эквивалентностью.*

Обозначим для краткости отображение $B(\alpha)$ через ξ и определим отображение $\eta: BFK \rightarrow K$, положив $\eta[[x]] = x$ и $\eta(x) = 0$ в остальных случаях. Ясно, что η является цепным отображением (но не отображением коалгебр) и $\eta \circ \xi = \text{Id}$. Покажем, что $\xi \circ \eta \simeq \text{Id}$. Для этого определим цепную гомотопию $h: BFK \rightarrow BFK$, положив

$$h[[x_1, \dots, x_n], \dots, [y_1, \dots, y_m]] = [[x_1], [x_2, \dots, x_n], \dots, [y_1, \dots, y_m]], \quad n \geq 2,$$

и 0, если $n = 1$.

Непосредственные вычисления показывают, что имеет место требуемая формула, т.е. h является искомой цепной гомотопией.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда коалгебра K не является коалгеброй конечного типа. Стандартная фильтрация в ко- B -конструкции FK индуцирует фильтрацию в B -конструкции BFK . Обозначим через $\widehat{BFK}$ ее пополнение относительно этой фильтрации. Скрепывающая коцепь $\alpha: K \rightarrow FK$ индуцирует отображение коалгебр $\xi = \widehat{B}(\alpha): K \rightarrow \widehat{BFK}$. Кроме этого имеется проекция $\eta: \widehat{BFK} \rightarrow K$. Поскольку определенная выше гомотопия $h: BFK \rightarrow BFK$ сохраняет фильтрацию, она индуцирует гомотопию $h: \widehat{BFK} \rightarrow \widehat{BFK}$, $d(h) = \xi \circ \eta - \text{Id}$. Следовательно, имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1''. *Для произвольной коалгебры K отображение коалгебр $\widehat{B}(\alpha): K \rightarrow \widehat{BFK}$ является цепной эквивалентностью.*

§ 2. Модули и комодули

Дифференциальный градуированный модуль L называется *левым комодулем над коалгеброй K* , если задано отображение $\tau: L \rightarrow K \otimes L$, удовлетворяющее условию $(\nabla \otimes 1)\tau = (1 \otimes \tau)\tau$.

Дифференциальный градуированный модуль M называется *левым модулем над алгеброй A* , если задано отображение $\mu: A \otimes M \rightarrow M$, удовлетворяющее условию $\mu(\pi \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu)$.

Аналогично определяются *правые модуль и комодуль*.

Если L – правый K -комодуль, M – левый A -модуль и $\phi: K \rightarrow A$ – скрепывающая коцепь, то *скрепленным тензорным произведением $L \otimes_\phi M$* называется дифференциальный градуированный модуль, который как градуированный модуль совпадает с обычным тензорным произведением и в котором дифференциал d_ϕ определен формулой

$$d_\phi = d \otimes 1 + 1 \otimes d + \phi \cap,$$

где $\phi \cap = (1 \otimes \mu)(1 \otimes \phi \otimes 1)(\tau \otimes 1): L \otimes M \rightarrow L \otimes M$ [2].

В частности, определены следующие скрепленные тензорные произведения: $K \otimes_\phi M$, $L \otimes_\phi A$ и $K \otimes_\phi A$.

Если L – левый K -комодуль, M – левый A -модуль, $\phi: K \rightarrow A$ – скрепывающая коцепь, то *скрепленным модулем гомоморфизмов $\text{Hom}_\phi(L, M)$* называется дифференциальный градуированный модуль, который как градуированный модуль совпадает с обычным модулем гомоморфизмов и в котором дифференциал определен формулой $d_\phi(f) = d(f) + \phi \cup f$, $f \in \text{Hom}(L, M)$.

Для левого A -модуля M рассмотрим B -конструкцию $B(A, M)$, являющуюся левым комодулем над коалгеброй BA .

Образующие в $B(A, M)$ обозначаются через $[x_1, \dots, x_n]x$, $x_i \in A$, $x \in M$, и имеют размерность, равную сумме размерностей элементов x_i , x плюс n .

Дифференциал на этих элементах определен формулой

$$\begin{aligned} d([x_1, \dots, x_n]x) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\epsilon_{i-1}+1} [x_1, \dots, d(x_i), \dots, x_n] \\ &\quad - (-1)^{\epsilon_n} [x_1, \dots, x_n] d(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\epsilon_i} [x_1, \dots, \pi(x_i \otimes x_{i+1}), \dots, x_n] \\ &\quad + (-1)^{\epsilon_n} [x_1, \dots, x_{n-1}] \mu(x_n \otimes x). \end{aligned}$$

Аналогичным образом для правого A -модуля M определяется B -конструкция $B(M, A)$, являющаяся правым BA -комодулем.

Двойственным образом для левого K -комодуля L рассмотрим ко- B -конструкцию $F(K, L)$, являющуюся левым модулем над алгеброй FK .

Образующие в $F(K, L)$ обозначаются через $[x_1, \dots, x_n]x$, $x_i \in K$, $x \in L$, и имеют размерность, равную сумме размерностей x_i , x минус n .

Дифференциал на этих элементах определен формулой

$$\begin{aligned} d([x_1, \dots, x_n]x) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\epsilon_{i-1}+1} [x_1, \dots, d(x_i), \dots, x_n]x \\ &\quad - (-1)^{\epsilon_n} [x_1, \dots, x_n]d(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{\epsilon_i} [x_1, \dots, x'_i, x''_i, \dots, x_n]x \\ &\quad + (-1)^{\epsilon_{n+1}} [x_1, \dots, x_n, x']x'', \end{aligned}$$

где $\sum x'_i \otimes x''_i = \nabla(x_i)$, $\sum x' \otimes x'' = \tau(x)$.

Аналогично для правого K -комодуля L определяется ко- B -конструкция $F(L, K)$, являющаяся правым FK -модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для произвольного левого модуля M над алгеброй A имеет место цепная эквивалентность $F(BA, B(A, M)) \simeq M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'. Для произвольного левого комодуля L над коалгеброй конечного типа K имеет место цепная эквивалентность

$$B(FK, F(K, L)) \simeq L.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2''. Для произвольного левого комодуля L над коалгеброй K имеет место цепная эквивалентность $\hat{B}(FK, F(K, L)) \simeq L$.

Доказательства проводятся аналогично доказательствам предложений 1, 1' и 1''.

Аналогичные предложения имеют место для правых модулей и комодулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для произвольного правого A -модуля M имеет место цепная эквивалентность правых A -модулей $B(M, A) \otimes_\beta A \simeq M$.

Определим отображение правых A -модулей $\eta: B(M, A) \otimes_\beta A \rightarrow M$, положив $\eta(x \otimes y) = \mu(x \otimes y)$, $x \in M \subset B(M, A)$, $y \in A$, и $\eta(x \otimes y) = 0$ в остальных случаях. Ясно, что отображение η является цепным, т.е. перестановочно с дифференциалом.

Определим цепное отображение $\xi: M \rightarrow B(A, M) \otimes_\beta A$, но не A -модульное отображение, положив $\xi(x) = x \otimes 1$. Ясно, что $\eta \circ \xi = \text{Id}$. Покажем, что $\xi \circ \eta$ гомотопно тождественному отображению. Для этого определим цепную гомотопию $h: B(M, A) \otimes_\beta A \rightarrow B(M, A) \otimes_\beta A$, положив $h(x[x_1, \dots, x_n] \otimes y) = x[x_1, \dots, x_n, y] \otimes 1$. Непосредственные вычисления показывают, что выполняется равенство $d(h) = \xi \circ \eta - \text{Id}$ и, следовательно, h является искомой цепной гомотопией.

Двойственным образом показывается, что имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3'. Для произвольного левого комодуля L над коалгеброй K имеет место цепная эквивалентность левых K -комодулей $K \otimes_{\alpha} F(K, L) \simeq L$.

Заметим, что скрещенное тензорное произведение $B(M, A) \otimes_{\beta} A$ изоморфно B -конструкции $B(M, A, A)$, являющейся тотальным комплексом A -модульной резольвенты M . Двойственным образом скрещенное тензорное произведение $K \otimes_{\alpha} F(K, L)$ изоморфно ко- B -конструкции $F(K, K, L)$.

§ 3. Модули и комодули Ли

Здесь мы определим понятия модуля и комодуля Ли, которые в дальнейшем распространим на случай алгебр и коалгебр Ли над операдами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дифференциальный градуированный модуль X будем называть *модулем Ли над коалгеброй K* , если задано отображение $\phi: K \otimes X \rightarrow X$, понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее условию скрепляющей коцепи $d(\phi) + \phi \cup \phi = 0$, где $\phi \cup \phi = \phi(1 \otimes \phi)(\nabla \otimes 1): K \otimes X \rightarrow X$.

Пусть M – левый модуль над алгеброй A и $\psi: K \rightarrow A$ – скрепляющая коцепь. Тогда на M можно задать структуру модуля Ли над коалгеброй K , $\phi: K \otimes M \rightarrow M$, положив $\phi = \mu(\psi \otimes 1)$. В частности, если L – левый комодуль над коалгеброй K , то ко- B -конструкция $X = F(K, L)$ является левым модулем над алгеброй FK и, следовательно, X является K -модулем Ли. Таким образом, примеры модулей Ли дают рассмотренные ранее ко- B -конструкции.

Если X – модуль Ли над коалгеброй K и L – правый K -комодуль, то в скрещенном тензорном произведении $L \otimes X$ можно определить новый дифференциал $d_{\phi} = d \otimes 1 + 1 \otimes d + \phi \cap$, превращающий $L \otimes X$ в скрещенное тензорное произведение, обозначаемое $L \otimes_{\phi} X$. В частности, для коалгебры K имеет место скрещенное тензорное произведение $K \otimes_{\phi} X$.

Если X – модуль Ли над коалгеброй K и L – левый K -комодуль, то в модуле гомоморфизмов $\text{Hom}(L, X)$ можно определить новый дифференциал d_{ϕ} , $d_{\phi}(f) = d(f) + \phi \cup f$, $f \in \text{Hom}(L, X)$, превращающий $\text{Hom}(L, X)$ в скрещенный модуль гомоморфизмов, обозначаемый $\text{Hom}_{\phi}(L, X)$.

Таким образом, мы имеем функтор $F = F(K, -)$ из категории левых K -комодулей в категорию K -модулей Ли, который K -комодулю L сопоставляет K -модуль Ли $F(K, L)$. Обозначим через G функтор из категории K -модулей Ли в категорию K -комодулей, сопоставляющий K -модулю Ли X комодуль $G(X) = K \otimes_{\phi} X$ над коалгеброй K . Имеет место естественное преобразование функторов $\alpha: \text{Id} \rightarrow G \circ F$, $\alpha(L): L \rightarrow K \otimes_{\phi} F(K, L)$, которое, как следует из предложения 3', является цепной эквивалентностью.

Аналогичным образом показывается, что имеет место естественное преобразование функторов $\beta: F \circ G \rightarrow \text{Id}$, $\beta(X): F(K, K \otimes_{\phi} X) \rightarrow X$, являющееся цепной эквивалентностью.

Таким образом, функторы F и G являются сопряженными и имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для коалгебры K категория K -комодулей цепно эквивалентна категории K -модулей Ли.

Переформулировкой на язык модулей Ли теоремы Брауна [2] получается

ТЕОРЕМА (Брауна). Для коалгебры K конечного типа и произвольного K -модуля Ли X , $\phi: K \otimes X \rightarrow X$, на гомологиях $X_* = H_*(X)$ имеются структура K -модуля Ли $\phi_*: K \otimes X_* \rightarrow X_*$ и цепная эквивалентность K -комодулей $K \otimes_\phi X \simeq K \otimes_{\phi_*} X_*$.

Действительно, обозначим через $\xi: X_* \rightarrow X$ отображение выбора представителей в классах гомологий; $\eta: X \rightarrow X_*$ – обратное отображение, $\eta \circ \xi = \text{Id}$; $h: X \rightarrow X$ – цепная гомотопия, $d(h) = \xi \circ \eta - \text{Id}$, $h \circ \xi = 0$, $\eta \circ h = 0$, $h \circ h = 0$.

Определим структуру K -модуля Ли на X_* , $\phi_*: K \otimes X_* \rightarrow X_*$, положив $\phi_* = \eta\phi(1 \otimes \xi) + \eta\phi(1 \otimes h)(1 \otimes \phi)(\nabla \otimes 1)(1 \otimes \xi) + \dots$.

Определим отображения $\xi_*: K \otimes_{\phi_*} X_* \rightarrow K \otimes_\phi X$, $\eta_*: K \otimes_\phi X \rightarrow K \otimes_{\phi_*} X_*$ и гомотопию $h_*: K \otimes_\phi X \rightarrow K \otimes_\phi X$, положив

$$\begin{aligned}\phi_* &= \eta\phi(1 \otimes \xi) + \eta\phi(1 \otimes h)(1 \otimes \phi)(\nabla \otimes 1)(1 \otimes \xi) + \dots, \\ \xi_* &= 1 \otimes \xi + (1 \otimes h)(1 \otimes \phi)(\nabla \otimes 1)(1 \otimes \xi) + \dots, \\ \eta_* &= 1 \otimes \eta + (1 \otimes \eta)(1 \otimes \phi)(1 \otimes 1 \otimes h)(\nabla \otimes 1) + \dots, \\ h_* &= 1 \otimes h + (1 \otimes h)(1 \otimes \phi)(1 \otimes 1 \otimes h)(\nabla \otimes 1) + \dots.\end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что справедливы требуемые формулы $\eta_* \circ \xi_* = \text{Id}$, $d(h_*) = \xi_* \circ \eta_* - \text{Id}$, $h_* \circ \xi_* = 0$, $\eta_* \circ h_* = 0$, $h_* \circ h_* = 0$.

Заметим, что в этой теореме X_* можно считать не только гомологиями X , а произвольным дифференциальным градуированным модулем, цепно эквивалентным X , в смысле существования отображений $\xi: X_* \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow X_*$ и цепной гомотопии $h: X \rightarrow X$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда коалгебра K не является коалгеброй конечного типа. В этом случае следует рассматривать K -модули Ли X с фильтрацией $X = X^1 \supset X^2 \supset \dots \supset X^n \supset \dots$ такой, что $\phi(K \otimes X^n) \subset X^{n+1}$. Обозначим через $\hat{X}$ пополнение X относительно этой фильтрации.

Воспользуемся следующим вариантом теории возмущений дифференциальных градуированных модулей [3].

ТЕОРЕМА (Гугенхейма–Ламбе–Сташеффа). Пусть X – дифференциальный градуированный модуль с фильтрацией $X = X^1 \supset X^2 \supset \dots$, в котором дифференциал d представляется в виде суммы $d' + d''$, где дифференциал d' сохраняет фильтрацию, а d'' увеличивает фильтрацию на единицу. Обозначим $\hat{X}'_* = H_*(\hat{X}, d')$. Тогда на $\hat{X}'_*$ можно определить новый дифференциал d''_* , а также отображения $\xi: \hat{X}'_* \rightarrow \hat{X}$, $\eta: \hat{X} \rightarrow \hat{X}'_*$ и гомотопию $h: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$, удовлетворяющие перечисленным выше условиям.

Действительно, пусть $\xi': \hat{X}'_* \rightarrow \hat{X}$ – отображение выбора представителей в классах гомологий, $\eta': \hat{X} \rightarrow \hat{X}'_*$, $h': \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ таковы, что $\eta' \circ \xi' = \text{Id}$, $d'(h') = \xi' \circ \eta' - \text{Id}$, $\eta' \circ h' = 0$, $h' \circ \xi' = 0$, $h' \circ h' = 0$. Тогда искомым дифференциал d''_* , отображения $\xi: \hat{X}'_* \rightarrow \hat{X}$, $\eta: \hat{X} \rightarrow \hat{X}'_*$ и гомотопия $h: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ выражаются формулами

$$\begin{aligned}d''_* &= \eta' d'' \xi' + \eta' d'' h' d'' \xi' + \dots, \\ \xi &= \xi' + h' d'' \xi' + h' d'' h' d'' \xi' + \dots, \\ \eta &= \eta' + \eta' d'' h' + \eta' d'' h' d'' h' + \dots, \\ h &= h' + h' d'' h' + h' d'' h' d'' h' + \dots.\end{aligned}$$

Из этого и теоремы Брауна получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть K – коалгебра, X – K -модуль Ли с фильтрацией и дифференциалом $d = d' + d''$, где d' – дифференциал, сохраняющий фильтрацию, а d'' повышает фильтрацию на единицу. Тогда на $\hat{X}'_* = H_*(\hat{X}, d')$ можно определить дифференциал d''_* и структуру K -модуля Ли $\phi_*: K \otimes \hat{X}'_* \rightarrow \hat{X}'_*$, дающую цепную эквивалентность K -комодулей $K \otimes_\phi \hat{X} \simeq K \otimes_{\phi_*} \hat{X}'_*$.

Двойственным образом определим понятие комодуля Ли над алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть *комодулем Ли над алгеброй* A , если задано отображение $\psi: Y \rightarrow Y \otimes A$, понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее условию скрепляющей коцепи $d(\psi) + \psi \cup \psi = 0$.

Все перечисленные выше свойства модулей Ли легко дуализируются на случай комодулей Ли. В частности, дуализация теоремы Брауна была рассмотрена нами в работе [4].

§ 4. Коммутативные коалгебры и алгебры Ли

Коалгебра K с коумножением $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$ называется *коммутативной*, если выполняется условие $T\nabla = \nabla$, где $T: K \otimes K \rightarrow K \otimes K$ – отображение перестановки сомножителей, $T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$.

Аналогично алгебра A с умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$ называется *коммутативной*, если $\pi T = \pi$.

В случае поля нулевой характеристики в работе [5] было показано, что категория коммутативных коалгебр гомотопически эквивалентна категории алгебр Ли. Здесь мы рассмотрим соотношение между коммутативными коалгебрами и алгебрами Ли, а также двойственную ситуацию в случае произвольного кольца коэффициентов.

Для модуля X обозначим через $X \wedge X$ фактормодуль тензорного произведения $X \otimes X$ по отношению $x \otimes y + T(x \otimes y) \sim 0$. Аналогично обозначим через $X^{\wedge n} = X \wedge \dots \wedge X$ фактормодуль $X^{\otimes n} = X \otimes \dots \otimes X$ по этим соотношениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дифференциальный градуированный модуль X будем называть *$\wedge$ -коалгеброй*, если задано отображение $\nabla: X \rightarrow X \wedge X$, удовлетворяющее условию $(\nabla \wedge 1 - 1 \wedge \nabla)\nabla = 0: X \rightarrow X \wedge X \wedge X$.

Двойственным образом для модуля Y обозначим через $Y \vee Y$ подмодуль тензорного произведения $Y \otimes Y$, состоящий из элементов $z \in Y \otimes Y$, для которых $T(z) + z = 0$, где $T: Y \otimes Y \rightarrow Y \otimes Y$ – отображение перестановки сомножителей. Аналогично определяется подмодуль $Y^{\vee n}$ тензорного произведения $Y^{\otimes n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2'. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть *$\vee$ -алгеброй*, если задано отображение $\pi: Y \vee Y \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $\pi(\pi \vee 1 - 1 \vee \pi) = 0: Y \vee Y \vee Y \rightarrow Y$.

Если K – обычная коалгебра, то коумножение $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$ индуцирует коумножение $\nabla: K \rightarrow K \wedge K$, превращая K в $\wedge$ -коалгебру.

Если A – обычная алгебра, то умножение $\pi: A \otimes A \rightarrow A$ индуцирует умножение $\pi: Y \vee Y \rightarrow Y$, превращая Y в $\vee$ -алгебру.

Если A – алгебра Хопфа с умножением π и коумножением ∇ , то модуль $QA = A/\text{Im } \pi$ ее неразложимых элементов будет являться $\wedge$ -коалгеброй относительно

коумножения $Q\nabla: QA \rightarrow QA \wedge QA$, индуцированного коумножением ∇ . Аналогично модуль $PA = \text{Ker } \nabla$ ее примитивных элементов будет являться $\vee$ -алгеброй относительно умножения $P\pi: PA \vee PA \rightarrow PA$, индуцированного умножением π .

Если R – поле характеристики, не равной 2, то для модуля Y имеет место отображение $\psi: Y \otimes Y \rightarrow Y \otimes Y$, $\psi(x \otimes y) = \frac{1}{2}(x \otimes y - (-1)^{|x||y|}y \otimes x)$. Если теперь Y является $\vee$ -алгеброй, то композиция $\pi \circ \psi$ задает умножение $[\ , \]: Y \otimes Y \rightarrow Y$, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} [x, y] + (-1)^{|x||y|}[y, x] &= 0, \\ [[x, y], z] - (-1)^{|y||z|}[[x, z], y] + (-1)^{|x||y|+|x||z|}[[y, z], x] &= 0, \end{aligned}$$

т.е. превращает Y в алгебру Ли. И наоборот, если Y является алгеброй Ли с умножением $[\ , \]: Y \otimes Y \rightarrow Y$, то это умножение индуцирует отображение $\pi: Y \vee Y \rightarrow Y$, превращающее Y в $\vee$ -алгебру.

Таким образом, в случае поля характеристики, не равной 2, понятия $\vee$ -алгебры и алгебры Ли совпадают. Однако для наших целей даже в этом случае оказывается удобным пользоваться языком $\vee$ -алгебр.

Иногда умножение в алгебре Ли удобно считать операцией, понижающей размерность на единицу. В этом случае определение $\vee$ -алгебры также изменяется. А именно, в качестве $Y \vee Y$ следует рассматривать подмодуль тензорного произведения $Y \otimes Y$, состоящий из всех устойчивых относительно перестановки сомножителей элементов. Аналогично при определении $\wedge$ -коалгебры X , коумножение в которой понижает размерность на единицу, в качестве $X \wedge X$ следует рассматривать фактормодуль тензорного произведения $X \otimes X$ по действию симметрической группы Σ_2 .

Ясно, что если Y – $\vee$ -алгебра, в которой умножение сохраняет размерность, то надстройка ΣY будет $\vee$ -алгеброй, в которой умножение понижает размерность на единицу, и наоборот. Аналогично, если X – $\wedge$ -коалгебра, в которой коумножение сохраняет размерность, то денадстройка $\Sigma^{-1}X$ будет $\wedge$ -коалгеброй, в которой коумножение понижает размерность на единицу, и наоборот.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать $\vee$ -алгебры и $\wedge$ -коалгебры с сохраняющими размерности структурами.

Для $\vee$ -алгебры Y так же, как и для алгебры Ли, можно определить понятие универсальной обертывающей алгебры $U(Y)$ как факторалгебры тензорной алгебры TY по идеалу, порожденному элементами $i(z) - \pi(z)$, где $z \in Y \vee Y$, $i: Y \vee Y \rightarrow Y \otimes Y$ – вложение. Универсальность означает, что для любой алгебры A и любого отображения $\vee$ -алгебр $f: Y \rightarrow A$ существует единственное отображение алгебр $\tilde{f}: U(Y) \rightarrow A$, для которого $\tilde{f} \circ i = f$.

Если умножение в $\vee$ -алгебре Y тривиально, то универсальная обертывающая алгебра $U(Y)$ является факторалгеброй тензорной алгебры по идеалу, порожденному элементами $i(z)$, $z \in Y \vee Y$, т.е. такими элементами $z \in Y \otimes Y$, для которых $T(z) = -z$. Такую факторалгебру будем обозначать $W(Y)$.

Для универсальной обертывающей алгебры $U(Y)$ над $\vee$ -алгеброй Y стандартным образом определяются фильтрация

$$U_0(Y) = R \subset U_1(Y) \subset \dots \subset U_n(Y) \subset \dots$$

(см. [6]) и ассоциативная алгебра

$$\mathrm{gr} U(Y) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{gr}_n U(Y), \quad \mathrm{gr}_n U(Y) = U_n(Y)/U_{n-1}(Y),$$

умножение в которой $\mathrm{gr}_p U(Y) \otimes \mathrm{gr}_q U(Y) \rightarrow \mathrm{gr}_{p+q} U(Y)$ индуцируется умножением в $U(Y)$.

Так же, как и для обычных алгебр Ли, показывается, что имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА (Пуанкаре–Биркгофа–Витта). *Каноническое отображение модулей $Y \rightarrow \mathrm{gr} U(Y)$ продолжается до отображения алгебр $W(Y) \rightarrow \mathrm{gr} U(Y)$, которое является изоморфизмом.*

Двойственным образом для $\wedge$ -коалгебры X определяется универсальная обертывающая коалгебра $\cap(X)$ и рассматриваются соответствующие свойства.

Для модуля M определим $\wedge$ -коалгебру $\Lambda M = \sum \Lambda^n M$, положив $\Lambda^1 M = M$, $\Lambda^2 M = M \wedge M$ и $\nabla^2: \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^1 M \wedge \Lambda^1 M$ – тождественное отображение. Предположим, что мы определили модули $\Lambda^1 M, \dots, \Lambda^{n-1} M$ и отображения $\nabla^1, \dots, \nabla^{n-1}$. Рассмотрим отображение

$$\nabla \wedge 1 - 1 \wedge \nabla: \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda^i M \wedge \Lambda^{n-i} M \rightarrow \sum_{i,j} \Lambda^i M \wedge \Lambda^j M \wedge \Lambda^{n-i-j} M$$

и определим $\Lambda^n M$ как ядро этого отображения, а коумножение ∇^n как естественное вложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *$\wedge$ -коалгебра ΛM является свободной $\wedge$ -коалгеброй над M , т.е. для любой $\wedge$ -коалгебры X и любого отображения модулей $f: X \rightarrow M$ существует единственное отображение $\wedge$ -коалгебр $\tilde{f}: X \rightarrow \Lambda M$, для которого $p \circ \tilde{f} = f$.*

Положим $\tilde{f}^1 = f: X \rightarrow M$. Предположим, что мы определили отображения $\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^{n-1}$. Для определения отображения $\tilde{f}^n: X \rightarrow \Lambda^n M$ рассмотрим отображение

$$(\tilde{f} \wedge \tilde{f})\nabla: X \rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda^i M \wedge \Lambda^{n-i} M.$$

Непосредственные вычисления показывают, что образ этого отображения лежит в ядре отображения $\nabla \wedge 1 - 1 \wedge \nabla$ и, следовательно, это отображение можно поднять до отображения $\tilde{f}^n: X \rightarrow \Lambda^n M$.

Двойственным образом для модуля M можно определить $\vee$ -алгебру $V(M)$, являющуюся свободной $\vee$ -алгеброй над M .

В тензорной алгебре TM рассмотрим коумножение $\nabla: TM \rightarrow TM \otimes TM$, превращающее ее в кокоммутативную алгебру Хопфа, положив $\nabla(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ на образующих $x \in M$. Эта структура алгебры Хопфа в тензорной алгебре TU индуцирует структуру алгебры Хопфа в универсальной обертывающей алгебре $U(Y)$ над $\vee$ -алгеброй Y . Двойственным образом для $\wedge$ -коалгебры X универсальная обертывающая коалгебра $\cap(X)$ имеет структуру коммутативной алгебры Хопфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Для модуля M имеют место изоморфизмы алгебр Хопфа $U(VM) \cong TM$, $\cap(\Lambda M) \cong TM$.*

Действительно, вложение $M \rightarrow TM$ индуцирует отображение $\vee$ -алгебр $VM \rightarrow TM$ и отображение алгебр $U(VM) \rightarrow TM$. С другой стороны, отображение $M \rightarrow U(VM)$ индуцирует отображение алгебр $TM \rightarrow U(VM)$, которое является взаимно обратным к отображению $U(VM) \rightarrow TM$.

Так же, как и в случае алгебр Ли, показывается, что для $\vee$ -алгебры Y модуль примитивных элементов $PU(Y)$ универсальной обертывающей алгебры $U(Y)$, рассматриваемой как алгебра Хопфа, изоморфен самой $\vee$ -алгебре Y . Аналогично для универсальной обертывающей коалгебры $\cap(X)$ над $\wedge$ -коалгеброй X модуль неразложимых элементов $Q \cap(X)$ изоморфен самой $\wedge$ -коалгебре X .

Из предложения 7 отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Для модуля M имеют место изоморфизмы $\vee$ -алгебр и $\wedge$ -коалгебр $V(M) \cong PTM$, $\Lambda M \cong QTM$, где в первом случае TM рассматривается как кокоммутативная алгебра Хопфа, а во втором как коммутативная алгебра Хопфа.*

§ 5. B -конструкции для $\vee$ -алгебр и $\wedge$ -коалгебр

Для коммутативной коалгебры K обычная ко- B -конструкция FK является алгеброй Хопфа, коумножение $\nabla: FK \rightarrow FK \otimes FK$ на образующих $[x] \in FK$ задается формулой $\nabla([x]) = 1 \otimes [x] + [x] \otimes 1$. В силу сказанного выше модуль примитивных элементов PFK этой алгебры Хопфа является $\vee$ -алгеброй, которую мы будем обозначать $F_{\vee}K$ и называть $\vee$ -ко- B -конструкцией над коммутативной коалгеброй K . Вложение $F_{\vee}K \rightarrow FK$ индуцирует отображение алгебр $U(F_{\vee}K) \rightarrow FK$, которое является изоморфизмом алгебр.

Двойственным образом для коммутативной алгебры A обычная B -конструкция BA является алгеброй Хопфа, умножение в которой задается формулой

$$[x_1, \dots, x_n] \cdot [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}] = \sum (-1)^{\epsilon} [x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+m}}],$$

где сумма берется по всем (n, m) -перетасовкам чисел $1, \dots, n + m$, ϵ – знак перетасовки.

Модуль неразложимых элементов QBA этой алгебры Хопфа является $\wedge$ -коалгеброй, которую мы будем обозначать $B_{\wedge}A$ и называть $\wedge$ - B -конструкцией над коммутативной алгеброй A . Проекция $BA \rightarrow B_{\wedge}A$ индуцирует отображение коалгебр $BA \rightarrow \cap(B_{\wedge}A)$, которое является изоморфизмом коалгебр.

Для $\vee$ -алгебр и $\wedge$ -коалгебр так же, как и для обычных алгебр и коалгебр, можно определить понятия скрещивающей коцепи и скрещенного тензорного произведения. А именно, пусть X – $\wedge$ -коалгебра и A – коммутативная алгебра. *Скрещивающей коцепью* называется отображение $\phi: X \rightarrow A$, понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее соотношению $d(\phi) + \phi \cup \phi = 0$, где $\phi \cup \phi = \pi(\phi \wedge \phi) \nabla$. Для $\wedge$ - B -конструкции $B_{\wedge}A$ над коммутативной алгеброй A имеет место стандартная скрещивающая коцепь $\beta: B_{\wedge}A \rightarrow A$.

Если M – модуль над коммутативной алгеброй A , L – комодуль над $\wedge$ -коалгеброй X и $\phi: X \rightarrow A$ – скрещивающая коцепь, то *скрещенным тензорным произведением* называется дифференциальный градуированный модуль $L \otimes_{\phi} M$, который

как градуированный модуль совпадает с обычным тензорным произведением и в котором дифференциал d_ϕ определен формулой $d_\phi = d \otimes 1 + 1 \otimes d + \phi \cap$.

Двойственным образом для коммутативной коалгебры K и $\vee$ -алгебры Y *скрещивающей коцепью* называется отображение $\phi: K \rightarrow Y$, понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее условию $d(\phi) + \phi \cup \phi = 0$, где $\phi \cup \phi = \pi(\phi \vee \phi) \nabla$. Для $\vee$ -ко- B -конструкции $F_\vee K$ над коммутативной коалгеброй K имеет место стандартная скрещивающая коцепь $\alpha: K \rightarrow F_\vee K$.

Если M – модуль над $\vee$ -алгеброй Y , L – комодуль над коммутативной коалгеброй K и $\phi: K \rightarrow Y$ – скрещивающая коцепь, то *скрещенным тензорным произведением* называется дифференциальный градуированный модуль $L \otimes_\phi M$, который как градуированный модуль совпадает с обычным тензорным произведением и в котором дифференциал d_ϕ определен формулой $d_\phi = d \otimes 1 + 1 \otimes d + \phi \cap$.

Определим теперь понятия B -конструкции и ко- B -конструкции для $\vee$ -алгебр и $\wedge$ -коалгебр соответственно.

Пусть X – $\wedge$ -коалгебра с коумножением $\nabla: X \rightarrow X \wedge X$. Рассмотрим свободную коммутативную алгебру $S\Sigma^{-1}X$ над денадстройкой над X и определим в ней дифференциал, превращающий ее в коммутативную дифференциальную градуированную алгебру, положив

$$d[x] = -[d(x)] - \sum (-1)^{|x'|} [x', x''],$$

где $\sum x' \wedge x'' = \nabla(x)$. На остальных элементах дифференциал определяется по формуле дифференциала от произведения. Полученную коммутативную дифференциальную градуированную алгебру будем называть *ко- B -конструкцией над X* и обозначать FX .

Двойственным образом для $\vee$ -алгебры Y определяется B -конструкция BY , являющаяся коммутативной дифференциальной градуированной коалгеброй, которая как градуированная коалгебра совпадает со свободной коммутативной коалгеброй $C\Sigma Y$ над надстройкой над Y .

Таким образом, мы имеем функтор $F_\vee$ из категории коммутативных коалгебр в категорию $\vee$ -алгебр и функтор B из категории $\vee$ -алгебр в категорию коммутативных коалгебр.

Для коммутативной коалгебры K конечного типа скрещивающая коцепь $\alpha: K \rightarrow F_\vee K$ индуцирует отображение коалгебр $B(\alpha): K \rightarrow BF_\vee K$ и естественное преобразование функторов $\text{Id} \rightarrow B \circ F_\vee$.

Для $\vee$ -алгебры Y скрещивающая коцепь $\beta: BY \rightarrow Y$ индуцирует отображение $\vee$ -алгебр $F_\vee(\beta): F_\vee BY \rightarrow Y$ и естественное преобразование функторов $F_\vee \circ B \rightarrow \text{Id}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Функторы $F_\vee$ и B являются сопряженными для категорий коммутативных коалгебр конечного типа и $\vee$ -алгебр. Причем для коммутативной коалгебры K конечного типа и $\vee$ -алгебры Y отображения*

$$B(\alpha): K \rightarrow BF_\vee K, \quad F_\vee(\beta): F_\vee BY \rightarrow Y$$

являются цепными эквивалентностями.

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 1'.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9'. Функторы $B_{\wedge}$ и F являются сопряженными для категорий коммутативных алгебр и $\wedge$ -коалгебр конечного типа. Причем для коммутативной алгебры A и $\wedge$ -коалгебры X конечного типа отображения

$$F(\beta): FB_{\wedge}A \rightarrow A, \quad B(\alpha): X \rightarrow B_{\wedge}FX$$

являются цепными эквивалентностями.

В категории градуированных модулей рассмотрим функтор S , сопоставляющий модулю M свободную коммутативную алгебру $S(M)$, порожденную M . Функтор S является монадой и коммутативная алгебра A является алгеброй над этой монадой. Поэтому имеет место B -конструкция

$$B(S, A): A \leftarrow S(A) \leftarrow \dots \leftarrow S^n(A) \leftarrow \dots$$

(см. [7]).

Двойственным образом функтор C , сопоставляющий модулю M свободную коммутативную коалгебру $C(M)$, порожденную M , является комонадой, и коммутативная коалгебра K является коалгеброй над этой комонадой. Поэтому имеет место ко- B -конструкция

$$F(C, K): K \rightarrow C(K) \rightarrow \dots \rightarrow C^n(K) \rightarrow \dots$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для коммутативных алгебры A и коалгебры K конечного типа имеют место цепные эквивалентности

$$B(S, A) \simeq \Sigma^{-1}B_{\wedge}A, \quad F(C, K) \simeq \Sigma F_{\vee}K.$$

Действительно, для коммутативной алгебры A в силу предложения 9' имеет место цепная эквивалентность $FB_{\wedge}A \simeq A$, которая индуцирует цепную эквивалентность $B(S, FB_{\wedge}A) \simeq B(S, A)$. Алгебра $FB_{\wedge}A$ как градуированная алгебра является свободной коммутативной алгеброй, порожденной $\Sigma^{-1}B_{\wedge}A$. Поэтому имеет место цепная эквивалентность $B(S, FB_{\wedge}A) \simeq \Sigma^{-1}B_{\wedge}A$. Следовательно, $B(S, A) \simeq B_{\wedge}A$. Аналогично показывается цепная эквивалентность $F(C, K) \simeq \Sigma F_{\vee}K$.

§ 6. Операд и алгебры над операдами

Напомним основные понятия, касающиеся операд и алгебр над операдами в категории дифференциальных градуированных модулей [7], [8].

Симметрическим семейством $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$ называется семейство дифференциальных градуированных модулей $\mathcal{E}(j)$, на которых действуют симметрические группы Σ_j . Отображением симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ называется семейство $f = \{f(j)\}$ отображений $f(j): \mathcal{E}'(j) \rightarrow \mathcal{E}''(j)$ дифференциальных градуированных модулей, перестановочных с действием симметрических групп.

Для симметрических семейств определены произведения $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}''$, $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}''$, для которых $(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}'')(j) = \mathcal{E}'(j) \otimes \mathcal{E}''(j)$, $(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)$ – фактормодуль Σ_j -свободного модуля, порожденного модулем

$$\sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \mathcal{E}'(k) \otimes \mathcal{E}''(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}''(j_k)$$

по отношению эквивалентности $\sim$, определяемому соотношениями

$$\begin{aligned} x'\sigma \otimes x_1'' \otimes \cdots \otimes x_k'' &\sim x' \otimes x_{\sigma^{-1}(1)}'' \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(k)}'' \sigma(j_1, \dots, j_k), \\ x' \otimes x_1'' \sigma_1 \otimes \cdots \otimes x_k'' \sigma_k &\sim x' \otimes x_1'' \otimes \cdots \otimes x_k'' (\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_k), \end{aligned}$$

где $\sigma \in \Sigma_k$, $\sigma_i \in \Sigma_{j_i}$, $1 \leq i \leq k$ (см. [7], [8]).

Симметрическое семейство $\mathcal{E}$ называется *операдой*, если задано отображение симметрических семейств $\gamma: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, удовлетворяющее условию $\gamma(\gamma \times 1) = \gamma(1 \times \gamma)$. *Отображением операд* $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ называется отображение симметрических семейств, удовлетворяющее условию $f\gamma' = \gamma''(f \times f)$.

Основными примерами операд являются следующие.

1. Операта E_0 , для которой $E_0(j)$ – свободный модуль с одной нульмерной образующей $e(j)$ и тривиальным действием симметрической группы Σ_j . Структура операты $\gamma: E_0 \times E_0 \rightarrow E_0$ задается формулой

$$\gamma(e(k) \otimes e(j_1) \otimes \cdots \otimes e(j_k)) = e(j_1 + \cdots + j_k).$$

2. Операта A , для которой $A(j)$ – свободный Σ_j -модуль, порожденный $E_0(j)$, и структура операты в A индуцируется структурой операты в E_0 .

3. Операта A_∞ , являющаяся Σ_j -свободной операдой, порожденной элементами $\pi_n \in A_\infty(n+2)$ размерности n , и дифференциал на этих элементах определен формулой

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n+1)(k+1)+ik} \pi_i (1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется также по всем местам k , на которых может стоять π_{n-i} .

4. Операта E , для которой $E(j) = \text{Hom}(\Delta^*, \Delta^* \otimes \cdots \otimes \Delta^*)$, где $\Delta^* = \{\Delta^n\}$ – ко-симплициальный объект, состоящий из цепных комплексов стандартных n -мерных симплексов; Hom рассматривается в категории косимплициальных объектов; действие симметрических групп определяется перестановками сомножителей в $\Delta^* \otimes \cdots \otimes \Delta^*$, и структура операты определена формулой

$$\gamma(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) = (g_1 \otimes \cdots \otimes g_k)f, \quad f \in E(k), \quad g_i \in E(j_i), \quad 1 \leq i \leq k.$$

5. Операта E_∞ , являющаяся свободной, Σ -свободной и ацикличной операдой.

Двойственным образом симметрическое семейство $\mathcal{G}$ называется *кооперадой*, если задано отображение симметрических семейств $\delta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, удовлетворяющее условию $(\delta \times 1)\delta = (1 \times \delta)\delta$. *Отображением кооперат* $f: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}''$ называется отображение симметрических семейств, удовлетворяющее условию $\delta''f = (f \times f)\delta'$.

Ясно, что если семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}$, состоящее из конечно порожденных Σ_j -модулей $\mathcal{E}(j)$, является операдой, то двойственное семейство $\bar{\mathcal{E}}$, состоящее из двойственных Σ_j -модулей $\bar{\mathcal{E}}(j) = \text{Hom}(\mathcal{E}(j), R)$, является кооперадой.

Симметрическое семейство $\mathcal{E}$ определяет функтор в категории дифференциальных градуированных модулей, который мы также будем обозначать через $\mathcal{E}$, по формуле

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{j \geq 1} \mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j}.$$

Структура операд $\gamma: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ определяет структуру монады $\gamma: \mathcal{E} \circ \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Дифференциальный градуированный модуль X называется *алгеброй над операдой* $\mathcal{E}$, если он является алгеброй над соответствующей монадой, т.е. задано отображение $\mu: \mathcal{E}(X) \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям

$$\mu \circ (\gamma(X)) = \mu \circ (\mathcal{E}(\mu)), \quad \mu \circ i = \text{Id}: X \rightarrow X.$$

Двойственным образом симметрическое семейство $\mathcal{G}$ определяет функтор в категории дифференциальных градуированных модулей, который мы будем обозначать через $\mathcal{G}$, по формуле

$$\overline{\mathcal{G}}(X) = \prod_{j \geq 1} \mathcal{G}(j) \otimes^{\Sigma_j} X^{\otimes j}.$$

Структура кооперад $\delta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ определяет структуру комонады $\delta: \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}} \circ \overline{\mathcal{G}}$.

Дифференциальный градуированный модуль X называется *коалгеброй над кооперадой* $\mathcal{G}$, если он является коалгеброй над соответствующей комонадой $\overline{\mathcal{G}}$, т.е. задано отображение $\tau: X \rightarrow \overline{\mathcal{G}}(X)$, удовлетворяющее условиям

$$\overline{\delta}(X) \circ \tau = \overline{\mathcal{G}}(\tau) \circ \tau, \quad p \circ \tau = \text{Id}: X \rightarrow X.$$

Если операда $\mathcal{E}$ состоит из конечно порожденных Σ_j -модулей, то комонаду, соответствующую кооперате $\overline{\mathcal{E}}$, будем также обозначать $\overline{\mathcal{E}}$. Ясно, что

$$\overline{\mathcal{E}}(X) = \prod_{j \geq 1} \text{Hom}_{\Sigma_j}(\mathcal{E}(j), X^{\otimes j}).$$

Дифференциальный градуированный модуль X называется *коалгеброй над операдой* $\mathcal{E}$, если он является коалгеброй над соответствующей комонадой $\overline{\mathcal{E}}$.

Ясно, что алгебры (коалгебры) над операдой E_0 являются коммутативными алгебрами (коалгебрами). Алгебры (коалгебры) над операдой A являются просто алгебрами (коалгебрами). Алгебры (коалгебры) над операдой A_∞ называются *A_∞ -алгебрами* (*A_∞ -коалгебрами*) [9]. Алгебры (коалгебры) над операдой E_∞ называются *E_∞ -алгебрами* (*E_∞ -коалгебрами*) [7], [8].

Как было показано в работе [8], сингулярный цепной комплекс топологического пространства допускает естественную структуру коалгебры над операдой E_∞ .

§ 7. B -конструкции для операд и алгебр над операдами

Аналогия понятия операд с понятием алгебры позволяет определить для операд $\mathcal{E}$ понятие B -конструкции $B\mathcal{E}$. Образующие в $B\mathcal{E}$ будем обозначать $[x_1, \dots, x_n]$, где $x_1 \times \dots \times x_n \in \mathcal{E}^{\times n}$, и их размерностью будем считать сумму размерностей x_i , $1 \leq i \leq n$, плюс n . Дифференциал определяется так же, как и в обычной B -конструкции, только вместо обычного умножения участвует операдное умножение γ .

Двойственным образом для кооперад $\mathcal{G}$ определяется ко- B -конструкция $F\mathcal{G}$. Образующие в $F\mathcal{G}$ будем обозначать $[x_1, \dots, x_n]$ и их размерностью будем считать сумму размерностей x_i , $1 \leq i \leq n$, плюс n . Дифференциал определяется так же,

как и в обычной ко- B -конструкции, только вместо обычного коумножения берется кооперативное коумножение δ .

Выясним, какие структуры имеются на этих конструкциях. С этой целью для симметрического семейства $\mathcal{E}$ обозначим через $\mathcal{E} \vee \mathcal{E}$ подсемейство семейства $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, для которого $(\mathcal{E} \vee \mathcal{E})(j)$ порождается тензорными произведениями

$$\mathcal{E}(k) \otimes \mathcal{E}(j_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}(j_k),$$

в которых все j_i , $1 \leq i \leq k$, за исключением одного, равны единице. Таким образом, семейство $\mathcal{E} \vee \mathcal{E}$ порождается элементами вида

$$x \vee y = x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes y \otimes \cdots \otimes 1.$$

Заметим, что так определенное произведение неассоциативно, т.е. нет естественного изоморфизма $\mathcal{E} \vee (\mathcal{E} \vee \mathcal{E}) \cong (\mathcal{E} \vee \mathcal{E}) \vee \mathcal{E}$. Имеется только вложение $\mathcal{E} \vee (\mathcal{E} \vee \mathcal{E}) \subset (\mathcal{E} \vee \mathcal{E}) \vee \mathcal{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Семейство $\mathcal{E}$ будем называть $\vee$ -оперативой, если задано отображение $\gamma: \mathcal{E} \vee \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, удовлетворяющее условию

$$\gamma(1 \vee \gamma) = \gamma(\gamma \vee 1): \mathcal{E} \vee (\mathcal{E} \vee \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}.$$

Ясно, что всякая операда является $\vee$ -оперативой, но не наоборот. Для установления обратной связи определим понятие коммутативной $\vee$ -операды. Рассмотрим элементы вида

$$x \vee y = (1 \otimes \cdots \otimes x(i) \otimes \cdots \otimes 1) \otimes (1 \otimes \cdots \otimes y(j) \otimes \cdots \otimes 1),$$

где $x(i) \in \mathcal{E}(i)$ стоит на месте с номером n_i , $y(j) \in \mathcal{E}(j)$ стоит на месте с номером m_j . Перестановкой этого элемента будем считать тот же самый элемент, если выполняются неравенства $n_i \leq m_j \leq n_i + i - 1$. Если же выполняется неравенство $m_j < n_i$ или неравенство $m_j > n_i + i - 1$, то перестановкой этого элемента будем считать элемент $(-1)^{xy} y \vee x$,

$$y \vee x = (1 \otimes \cdots \otimes y(j) \otimes \cdots \otimes 1) \otimes (1 \otimes \cdots \otimes x(i) \otimes \cdots \otimes 1),$$

для которого в первом случае $y(j)$ стоит на месте с номером m_j и $x(i)$ на месте с номером $n_i + j - 1$. Во втором случае $y(j)$ стоит на месте с номером $m_j - i + 1$ и $x(i)$ на месте с номером n_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $\vee$ -операду $\mathcal{E}$ будем называть *коммутативной*, если отображение $\gamma \circ (\gamma \vee 1): (\mathcal{E} \vee \mathcal{E}) \vee \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ устойчиво относительно определенных выше перестановок.

Ясно, что задание на семействе $\mathcal{E}$ структуры коммутативной $\vee$ -операды равносильно заданию на $\mathcal{E}$ структуры операды.

Двойственным образом для симметрического семейства $\mathcal{G}$ обозначим через $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$ факторсемейство семейства $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, для которого $(\mathcal{G} \wedge \mathcal{G})(j)$ порождается тензорными произведениями $\mathcal{G}(k) \otimes \mathcal{G}(j_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(j_k)$, для которых все j_i , $1 \leq i \leq k$, за исключением одного, равны единице. Таким образом, семейство $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$ порождается элементами вида $x \wedge y = x \otimes (1 \otimes \cdots \otimes y \otimes \cdots \otimes 1)$.

Заметим, что так определенное произведение неассоциативно, т.е. нет естественного изоморфизма $\mathcal{G} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}) \cong (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{G}$. Имеется только проекция $(\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3'. Семейство $\mathcal{G}$ будем называть $\wedge$ -кооперадой, если задано отображение $\delta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, удовлетворяющее условию

$$(1 \wedge \delta)\delta = (\delta \wedge 1)\delta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4'. $\wedge$ -кооперату $\mathcal{G}$ будем называть коммутативной, если отображение $(\delta \wedge 1) \circ \delta: \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{G}$ устойчиво относительно определенных выше перестановок.

Ясно, что задание на $\mathcal{G}$ структуры коммутативной $\wedge$ -кооператы равносильно заданию на $\mathcal{G}$ структуры кооператы.

Легко видеть, что B -конструкция $B\mathcal{E}$ над операдой $\mathcal{E}$ является $\wedge$ -кооперадой. Двойственным образом ко- B -конструкция $F\mathcal{G}$ над кооперадой $\mathcal{G}$ является $\vee$ -операдой.

Рассмотрим теперь понятия $B_\vee$ -конструкции и ко- $B_\wedge$ -конструкции. Для этого для семейства $\mathcal{E}$ определим семейство $\mathcal{E} \vee \mathcal{E} \vee \mathcal{E}$ как подсемейство семейства $(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}) \vee \mathcal{E}$, устойчивое относительно определенных выше перестановок элементов. Аналогичным образом определяется $\vee$ -произведение большего числа сомножителей $\mathcal{E}^{\vee n} = \mathcal{E} \vee \dots \vee \mathcal{E}$.

Двойственным образом для семейства $\mathcal{G}$ определяется семейство $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$ как факторсемейство семейства $(\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{G}$ относительно определенных выше перестановок элементов. Аналогичным образом определяется $\wedge$ -произведение большего числа сомножителей $\mathcal{G}^{\wedge n} = \mathcal{G} \wedge \dots \wedge \mathcal{G}$.

Для операты $\mathcal{E}$ определим $B_\vee$ -конструкцию $B_\vee \mathcal{E}$ как подсемейство семейства $B\mathcal{E}$ относительно вложений $\mathcal{E}^{\vee n} \subset \mathcal{E}^{\times n}$. Легко видеть, что $B_\vee \mathcal{E}$ является кооператой.

Для кооператы $\mathcal{G}$ определим ко- $B_\wedge$ -конструкцию $F_\wedge \mathcal{G}$ как факторсемейство семейства $F\mathcal{G}$ относительно проекций $\mathcal{G}^{\times n} \rightarrow \mathcal{G}^{\wedge n}$. Легко видеть, что $F_\wedge \mathcal{G}$ является операдой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для операты $\mathcal{E}$ вложение $B_\vee \mathcal{E} \subset B\mathcal{E}$ является цепной эквивалентностью. Двойственным образом для кооператы $\mathcal{G}$ проекция $F\mathcal{G} \rightarrow F_\wedge \mathcal{G}$ является цепной эквивалентностью.

Покажем, что вложение $B_\vee \mathcal{E} \subset B\mathcal{E}$ является цепной эквивалентностью. Для этого определим фильтрацию в $B\mathcal{E}$, и тем самым в $B_\vee \mathcal{E}$, считая фильтрацию $1 \in \mathcal{E}(1)$ равной нулю, фильтрацию элементов $x \in \mathcal{E}(j)$, $j > 1$, равной единице и фильтрацию элементов $x_1 \times \dots \times x_n \in \mathcal{E} \times \dots \times \mathcal{E}$ равной сумме фильтратий элементов x_i . Исходное вложение $B_\vee \mathcal{E} \subset B\mathcal{E}$ сохраняет фильтрацию и индуцирует изоморфизм членов E_2 спектральных последовательностей. Следовательно, это вложение является цепной эквивалентностью.

Отметим, что хотя в общем случае B -конструкция $B\mathcal{E}$ над операдой $\mathcal{E}$ не обладает естественной структурой кооператы, тем не менее в некоторых случаях такая структура существует. Рассмотрим эти случаи. Обозначим через $\Delta^* = \{\Delta^n\}$ косимплициальный объект в категории дифференциальных градуированных модулей, состоящий из цепных комплексов Δ^n стандартных n -мерных симплексов. Предположим, что для операты $\mathcal{E}$ заданы перестановочные отображения $T: \Delta^n \otimes \mathcal{E}(j) \rightarrow \mathcal{E}(j) \otimes \Delta^n \otimes \dots \otimes \Delta^n$, согласованные с косимплициальной и операдной

структурами. Эти перестановочные отображения будем кратко обозначать в виде $T: \Delta^* \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times \Delta^*$.

B -конструкцию $B\mathcal{E}$ над операдой $\mathcal{E}$ можно представить в виде

$$B\mathcal{E} = \sum_{n \geq 0} \Delta^n \otimes \mathcal{E}^{\times n} / \sim.$$

Искомая структура кооперადы $\delta: B\mathcal{E} \rightarrow B\mathcal{E} \times B\mathcal{E}$ индуцируется отображениями

$$\Delta^n \otimes \mathcal{E}^{\times n} \rightarrow \Delta^i \otimes \Delta^{n-i} \otimes \mathcal{E}^{\times i} \times \mathcal{E}^{\times n-i} \rightarrow (\Delta^i \otimes \mathcal{E}^{\times i}) \times (\Delta^{n-i} \otimes \mathcal{E}^{\times n-i}).$$

Двойственным образом если для кооперადы $\mathcal{G}$ задано перестановочное отображение $T: \Delta^* \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \times \Delta^*$, то ко- B -конструкция $F\mathcal{G}$ является операдой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Функторы $B_\vee$ и $F_\wedge$ являются сопряженными для категории операд и кооперад. Причем для операд $\mathcal{E}$ и кооперад $\mathcal{G}$ отображения*

$$F(\beta): F_\wedge B_\vee \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad B(\alpha): G \rightarrow B_\vee F_\wedge G$$

являются цепными эквивалентностями.

Доказательства требуемых цепных эквивалентностей проводятся аналогично доказательствам предложений 1 и 1'.

Пусть теперь X – алгебра над операдой $\mathcal{E}$. Рассмотрим B -конструкции

$$\begin{aligned} B(\mathcal{E}, X): X &\leftarrow \mathcal{E}X \leftarrow \mathcal{E}^{\times 2}X \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{E}^{\times n}X \leftarrow \dots, \\ B_\vee(\mathcal{E}, X): X &\leftarrow \mathcal{E}X \leftarrow \mathcal{E}^{\vee 2}X \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{E}^{\vee n}X \leftarrow \dots. \end{aligned}$$

Двойственным образом для коалгебры Y над кооперадой $\mathcal{G}$ рассмотрим ко- B -конструкции

$$\begin{aligned} F(\mathcal{G}, Y): Y &\rightarrow \mathcal{G}Y \rightarrow \mathcal{G}^{\times 2}Y \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}^{\times n}Y \rightarrow \dots, \\ F_\wedge(\mathcal{G}, Y): Y &\rightarrow \mathcal{G}Y \rightarrow \mathcal{G}^{\wedge 2}Y \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}^{\wedge n}Y \rightarrow \dots. \end{aligned}$$

Аналогично предложению 11 доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Для $\mathcal{E}$ -алгебры X вложение $B_\vee(\mathcal{E}, X) \subset B(\mathcal{E}, X)$ является цепной эквивалентностью. Двойственным образом для $\mathcal{G}$ -коалгебры проекция $F(\mathcal{G}, Y) \rightarrow F_\wedge(\mathcal{G}, Y)$ является цепной эквивалентностью.*

§ 8. Алгебры Ли над операдами

По аналогии с понятиями A_∞ -алгебры и A_∞ -коалгебры [9] определим понятия A_∞ - $\vee$ -алгебры и A_∞ - $\wedge$ -коалгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть A_∞ - $\vee$ -алгеброй, если заданы отображения $\pi_i: Y^{\vee(i+2)} \rightarrow Y$, $i \geq 0$, повышающие размерность на i и удовлетворяющие соотношениям

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^{(n+1)(k+1)+ik} \pi_i(1 \otimes \dots \otimes \pi_{n-i} \otimes \dots \otimes 1),$$

где сумма берется также по всем местам k , на которых может стоять π_{n-i} .

Например, при $n = 0$ имеет место соотношение

$$d(\pi_1) = \pi_0(\pi_0 \otimes 1 - 1 \otimes \pi_0),$$

означающее гомотопическую ассоциативность отображения π_0 .

Как и в случае A_∞ -алгебр, задание такого семейства отображений π_i равносильно заданию дифференциала в B -конструкции BY , который превращает BY в коммутативную дифференциальную коалгебру.

Заметим, что обычные дифференциальные $\vee$ -алгебры можно рассматривать как A_∞ - $\vee$ -алгебры, в которых высшие умножения π_i , $i \geq 1$, равны нулю.

Пусть Y', Y'' – A_∞ - $\vee$ -алгебры. A_∞ -отображением из Y' в Y'' будем называть семейство отображений $\xi_i: Y'^{\vee(i+1)} \rightarrow Y''$, $i \geq 0$, повышающих размерность на i и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} d(\xi_{n+1}) &= \sum_{i=0}^n (-1)^{(n+1)(k+1)+ki} \xi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi'_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n (-1)^{n_2+n_4+\cdots} \pi''_i(\xi_{n_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{n_{i+2}}), \end{aligned}$$

где k – номер места, на котором стоит π'_{n-i} , $n_1 + \cdots + n_{i+2} = n - i$.

Например, если $n = 0$, то имеем соотношение

$$d(\xi_1) = \xi_0 \pi'_0 - \pi''_0(\xi_0 \otimes \xi_0),$$

означающее гомотопическую мультипликативность отображения ξ_0 .

Задание A_∞ -отображения ξ из Y' в Y'' равносильно заданию отображения дифференциальных коалгебр $B\xi: BY' \rightarrow BY''$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5'. Дифференциальный градуированный модуль X будем называть A_∞ - $\wedge$ -коалгеброй, если заданы отображения $\nabla_i: X \rightarrow X^{\wedge(i+2)}$, $i \geq 0$, повышающие размерность на i и удовлетворяющие соотношениям

$$d(\nabla_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^{(n+1)(k+1)+i(k+n-i)} (1 \otimes \cdots \otimes \nabla_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) \nabla_i.$$

Как и в случае A_∞ -коалгебр, задание такого семейства отображений ∇_i равносильно заданию дифференциала в ко- B -конструкции FX , который превращает FX в коммутативную дифференциальную алгебру.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Если основное кольцо R является полем характеристики нуль, то на гомологиях Y_* дифференциальной градуированной $\vee$ -алгебры Y имеется структура A_∞ - $\vee$ -алгебры и цепная эквивалентность коалгебр $BY \simeq BY_*$. Двойственным образом на гомологиях X_* дифференциальной градуированной $\wedge$ -коалгебры X имеется структура A_∞ - $\wedge$ -коалгебры и цепная эквивалентность алгебр $\widehat{FX} \simeq \widehat{FX}_*$.

Доказательство проводится так же, как и для обычных дифференциальных алгебр и коалгебр [10]. Условие на основное кольцо R объясняется необходимостью, чтобы имели место изоморфизмы $H_*(Y^{\vee n}) \cong Y_*^{\vee n}$, $H_*(X^{\wedge n}) \cong X_*^{\wedge n}$.

Напомним также определения коммутативных A_∞ -алгебр и A_∞ -коалгебр (см. [11]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. A_∞ -коалгебра K называется *коммутативной A_∞ -коалгеброй*, если отображения $\nabla_i: K \rightarrow K^{\otimes(i+2)}$, $i \geq 0$, повышающие размерность на i , составляющие структуру A_∞ -коалгебры, дополнительно удовлетворяют соотношениям коммутативности, т.е. для любых $n \geq 0$ и $1 \leq i \leq n+1$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^\epsilon \sigma(i, n+2-i) \nabla_n = 0,$$

где сумма берется по всем $(i, n+2-i)$ -перетасовкам σ , ϵ – знак перетасовки.

Соотношения коммутативности означают, что операции ∇_n определяют на $F_\vee K$ структуру дифференциальной градуированной $\vee$ -алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6'. A_∞ -алгебра A называется *коммутативной A_∞ -алгеброй*, если отображения $\pi_i: A^{\otimes(i+2)} \rightarrow A$, $i \geq 0$, повышающие размерность на i , составляющие структуру A_∞ -алгебры, дополнительно удовлетворяют соотношениям коммутативности, т.е. для любых $n \geq 0$ и $1 \leq i \leq n+1$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^\epsilon \pi_n \sigma(i, n+2-i) = 0,$$

где сумма берется по всем $(i, n+2-i)$ -перетасовкам σ , ϵ – знак перетасовки.

Соотношения коммутативности означают, что операции π_n определяют на $B_\wedge A$ структуру дифференциальной градуированной $\wedge$ -коалгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14'. Если основное кольцо R является полем характеристики нуль, то на гомологиях A_* коммутативной дифференциальной градуированной алгебры A имеется структура коммутативной A_∞ -алгебры и цепная эквивалентность $\wedge$ -коалгебр $B_\wedge A \simeq B_\wedge A_*$. Двойственным образом на гомологиях K_* коммутативной дифференциальной градуированной коалгебры K имеется структура коммутативной A_∞ -коалгебры и цепная эквивалентность $\vee$ -алгебр $\widehat{F}_\vee K \simeq \widehat{F}_\vee K_*$.

Определения коммутативных A_∞ -алгебр и A_∞ -коалгебр можно переформулировать и на языке операд. А именно, обозначим через $S_\infty = \{S_\infty(j)\}$ операд, являющуюся фактором операд A_∞ , по соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^\epsilon \pi_n \sigma(i, n+2-i) = 0.$$

Тогда коммутативная A_∞ -алгебра является алгеброй над операдой S_∞ , а коммутативная A_∞ -коалгебра является коалгеброй над операдой S_∞ .

В случае, если основное кольцо R является полем рациональных чисел Q на сингулярном комплексе цепей $C_*(X, Q)$, имеется структура коммутативной A_∞ -коалгебры [11]. Функтор, сопоставляющий односвязному топологическому пространству X дифференциальную градуированную $\vee$ -алгебру $F_\vee C_*(X, Q)$, аналогичен функтору Квиллена [5], и гомологии $H_*(F_\vee C_*(X, Q))$ изоморфны рациональным гомотопическим группам $\pi_{*-1}(X) \otimes Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть *алгеброй Ли над кооператой* $\mathcal{G}$, если задано отображение $\phi: \overline{\mathcal{G}}(Y) \rightarrow Y$, понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее условию скрепляющей коцепи $d(\phi) + \phi \cup \phi = 0$, где $\phi \cup \phi = \phi(\overline{\mathcal{G}}(\phi)\delta(Y))$. В случае если $\mathcal{G}$ является кооператой, двойственной к опереде $\mathcal{E}$, т.е. $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{E}}$, алгебры Ли над кооператой $\overline{\mathcal{E}}$ будем называть также *алгебрами Ли над оператой* $\mathcal{E}$.

Из определения A_∞ - V -алгебры непосредственно следует, что задание на Y структуры A_∞ - V -алгебры равносильно заданию на ΣY структуры алгебры Ли над оператой E_0 .

Для нас наиболее важную роль будут играть алгебры Ли над оператой E_∞ или просто E_∞ -алгебры Ли. Проекция $p: E_\infty \rightarrow E_0$ индуцирует отображение $\overline{E}_0(Y) \rightarrow \overline{E}_\infty(Y)$, и если Y является E_∞ -алгеброй Ли, то Y будет также являться E_0 -алгеброй Ли.

Примеры алгебр Ли над оператой или кооператой дают ко- B -конструкции. А именно, если X является коалгеброй над кооператой $\mathcal{G}$, то ко- B -конструкция $F_\wedge(\mathcal{G}, X)$ является $\mathcal{G}$ -алгеброй Ли. В частности, если $\mathcal{G}$ является кооператой, двойственной к опереде $\mathcal{E}$, и X – коалгебра над оператой $\mathcal{E}$, то $F_\wedge(\mathcal{E}, X)$ будет алгеброй Ли над оператой $\mathcal{E}$.

Ко- B -конструкция $F(\mathcal{G}, X)$, вообще говоря, не является $\mathcal{G}$ -алгеброй Ли. Однако если задано перестановочное отображение $T: \Delta^* \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \times \Delta^*$, то ко- B -конструкция $F(\mathcal{G}, X)$ уже будет алгеброй Ли над кооператой $\mathcal{G}$. В дальнейшем мы будем рассматривать именно такие кооператы.

Таким образом, ко- B -конструкция дает нам функтор $F = F(\mathcal{G}, -)$ из категории $\mathcal{G}$ -коалгебр в категорию $\mathcal{G}$ -алгебр Ли. Определим обратный функтор. Пусть Y – алгебра Ли над кооператой $\mathcal{G}$. Тогда в $\overline{\mathcal{G}}(Y)$ можно определить новый дифференциал $d_\phi = d \times 1 + 1 \times d + \phi \cap$, превращающий $\overline{\mathcal{G}}(Y)$ в $\mathcal{G}$ -коалгебру.

Вложение $i: X \rightarrow F(\mathcal{G}, X)$ индуцирует отображение коалгебр над кооператой $\mathcal{G}$, $\alpha(X): X \rightarrow \overline{\mathcal{G}}_\phi(F(\mathcal{G}, X))$. Проекция $p: \overline{\mathcal{G}}_\phi(Y) \rightarrow Y$ индуцирует отображение $\mathcal{G}$ -алгебр Ли $\beta(Y): F(\mathcal{G}, \overline{\mathcal{G}}_\phi Y) \rightarrow Y$. Функторы α и β являются сопряженными для категории $\mathcal{G}$ -коалгебр и $\mathcal{G}$ -алгебр Ли. Аналогично тому, как это было для категорий K -комодулей и K -модулей Ли, отображения $\alpha(X)$ и $\beta(Y)$ являются цепными эквивалентностями, и, следовательно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Категория коалгебр над кооператой $\mathcal{G}$ цепно эквивалентна категории $\mathcal{G}$ -алгебр Ли. В частности, категория коалгебр над оператой $\mathcal{E}$ цепно эквивалентна категории $\mathcal{E}$ -алгебр Ли.

Аналогично предложению 5 имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть $\mathcal{G}$ – кооперата, Y – $\mathcal{G}$ -алгебра Ли с фильтрацией и дифференциалом $d = d' + d''$, где d' – дифференциал, сохраняющий фильтрацию, а d'' повышает фильтрацию на единицу. Тогда на $\hat{Y}'_* = H_*(\hat{Y}, d')$ можно определить дифференциал d'' и структуру $\mathcal{G}$ -алгебры Ли $\phi_*: \overline{\mathcal{G}}(\hat{Y}'_*) \rightarrow \hat{Y}'_*$, для которой имеет место цепная эквивалентность $\mathcal{G}$ -коалгебр $\overline{\mathcal{G}}_{\phi_*}(\hat{Y}'_*) \simeq \overline{\mathcal{G}}_\phi(Y)$.

Двойственным образом определим понятие коалгебры Ли над оператой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7'. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть *коалгеброй Ли над операдой* $\mathcal{E}$, если задано отображение $\psi: Y \rightarrow \mathcal{E}(Y)$, понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее условию $d(\psi) + \psi \cup \psi = 0$.

Рассмотренные выше свойства алгебр Ли легко дуализируются на случай коалгебр Ли.

§ 9. Гомотопическая теория E_∞ -алгебр Ли

Как было показано в предыдущем параграфе, категория E_∞ -алгебр Ли цепно эквивалентна категории E_∞ -коалгебр. В работе [12] для E_∞ -коалгебр была построена гомотопическая теория, позволяющая свести гомотопическую теорию топологических пространств к гомотопической теории E_∞ -коалгебр. Здесь мы покажем, что гомотопическая теория E_∞ -коалгебр эквивалентна гомотопической теории E_∞ -алгебр Ли. Но перед этим рассмотрим более простую ситуацию комодулей и модулей Ли.

Пусть Z, X – комодули над коалгеброй K . Слабым отображением K -комодулей $\tilde{f}: Z \rightsquigarrow X$ называется отображение K -комодулей $f: Z \rightarrow F(K, K, X)$. Два слабых отображения $\tilde{f}, \tilde{g}: Z \rightsquigarrow X$ называются *гомотопными* (обозначается $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$), если существует слабое отображение $\tilde{h}: Z \rightsquigarrow X$, повышающее размерность на единицу и такое, что $d(\tilde{h}) = \tilde{g} - \tilde{f}$. Модуль гомотопических классов слабых отображений K -комодулей $\tilde{f}: Z \rightsquigarrow X$ по введенному отношению гомотопности обозначим $[Z, X]$.

Пусть теперь Y – K -модуль Ли. *Скрещенным отображением* $f: Z \rightarrow Y$ будем называть отображение, сохраняющее размерность, для которого выполняется равенство $d(f) + \phi \cup f = 0$. Скрещенные отображения из Z в Y образуют модуль, который мы будем обозначать $\text{Hom}_\phi(Z, Y)$.

Для скрещенных отображений $f, g: Z \rightarrow Y$ определим отношение гомотопности $\simeq$, положив $f \simeq g$, если существует отображение $h: Z \rightarrow Y$, повышающее размерность на единицу и такое, что $d(h) + \phi \cup h = g - f$. Модуль гомотопических классов скрещенных отображений $f: Z \rightarrow Y$ будем обозначать $[Z, Y]_\phi$.

Из теоремы Брауна следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Если K – коалгебра конечного типа, Z – K -комодуль, Y – K -модуль Ли, то на гомологиях $Y_* = H_*(Y)$ имеются структура K -модуля Ли и изоморфизм $[Z, Y]_\phi \cong [Z, Y_*]_{\phi_*}$.

Если коалгебра K не является коалгеброй конечного типа, то рассмотрим K -модуль Ли Y с фильтрацией и дифференциалом $d = d' + d''$, для которого d' сохраняет фильтрацию, а d'' повышает фильтрацию на единицу. Из предложения 5 следует, что в этом случае имеет место изоморфизм $[Z, \hat{Y}]_\phi \cong [Z, \hat{Y}_*]_{\phi_*}$.

Легко видеть, что задание скрещенного отображения $f: Z \rightarrow Y$ равносильно заданию K -комодульного отображения $\tilde{f}: Z \rightarrow K \otimes_\phi Y$ и задание гомотопии $h: Z \rightarrow Y$ между f и g равносильно заданию гомотопии $\tilde{h}: Z \rightarrow K \otimes_\phi Y$ между отображениями $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$. Учитывая изоморфизм $K \otimes_\alpha F(K, X) \cong F(K, K, X)$, получаем, что задание слабого отображения K -комодулей $\tilde{f}: Z \rightsquigarrow X$ равносильно заданию скрещенного отображения $f: Z \rightarrow F(K, X)$ и задание гомотопии между слабыми отображениями K -комодулей равносильно заданию гомотопии между соответствующими скрещенными отображениями. Таким образом, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. Для комодулей Z и X над коалгеброй K имеет место изоморфизм гомотопических классов $[Z, X] \cong [Z, F(K, X)]_\phi$.

Пусть теперь X – E_∞ -коалгебра, $\tau: X \rightarrow \overline{E}_\infty X$, $\gamma: E_\infty \times E_\infty \rightarrow E_\infty$. Рассмотрим ко- B -конструкцию $F(E_\infty, E_\infty, X)$, являющуюся тотальным комплексом E_∞ -коалгебрной резольвенты X . Слабым отображением E_∞ -коалгебр $\tilde{f}: Z \rightsquigarrow X$ будем называть отображение E_∞ -коалгебр $\tilde{f}: Z \rightarrow F(E_\infty, E_\infty, X)$. Два слабых отображения $\tilde{f}, \tilde{g}: Z \rightsquigarrow X$ называются *гомотопными* (обозначается $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$), если существует слабое отображение $\tilde{h}: \Delta^1 \otimes Z \rightsquigarrow X$ такое, что $\tilde{h}(\delta^0 \otimes 1) = \tilde{f}$ и $\tilde{h}(\delta^1 \otimes 1) = \tilde{g}$. Множество гомотопических классов слабых E_∞ -коалгебрных отображений из Z в X обозначим $[Z, X]$.

В работе [12] было показано что для односвязных топологических пространств X_1 и X_2 множество гомотопических классов $[X_1, X_2]$ непрерывных отображений топологических пространств находится в биективном соответствии с множеством гомотопических классов $[C_*(X_1), C_*(X_2)]$ слабых E_∞ -коалгебрных отображений их сингулярных цепных комплексов.

Пусть Y – E_∞ -алгебра Ли, Z – E_∞ -коалгебра. Скрещенным отображением $f: Z \rightarrow Y$ будем называть отображение, сохраняющее размерность и такое, что $d(f) + \phi \cup f = 0$. Заметим, что в отличие от ситуации, рассмотренной выше, множество скрещенных отображений не образует модуль. Для скрещенных отображений $f, g: Z \rightarrow Y$ определим отношение гомотопности $\simeq$, положив $f \simeq g$, если существует отображение $h: Z \rightarrow Y$ размерности единица такое, что $d(h) + \phi \cup h = g - f$. Множество гомотопических классов скрещенных отображений $f: Z \rightarrow Y$ будем обозначать $[Z, Y]_\phi$.

Из предложения 16 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. Пусть Z – E_∞ -коалгебра и Y – E_∞ -алгебра Ли с фильтрацией и дифференциалом $d = d' + d''$, для которого d' сохраняет фильтрацию, а d'' повышает фильтрацию на единицу. Тогда имеет место биекция $[Z, \hat{Y}]_\phi \longleftrightarrow [Z, \hat{Y}_*]_{\phi_*}$, где $\hat{Y}_* = H_*(\hat{Y})$, $\hat{Y}$ – пополнения Y .

Легко видеть, что задание скрещенного отображения $f: Z \rightarrow Y$ равносильно заданию E_∞ -коалгебрного отображения $\tilde{f}: Z \rightarrow \overline{E}_{\infty\phi}(Y)$, и задание гомотопии $h: Z \rightarrow Y$ между f и g равносильно заданию гомотопии $\tilde{h}: Z \rightarrow \overline{E}_{\infty\phi}(Y)$ между отображениями $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$. Учитывая изоморфизм $\overline{E}_{\infty\alpha} F(E_\infty, X) \cong F(E_\infty, E_\infty, X)$, получаем, что задание слабого отображения E_∞ -коалгебр $\tilde{f}: Z \rightsquigarrow X$ равносильно заданию скрещенного отображения $f: Z \rightarrow F(E_\infty, X)$ и задание гомотопии между слабыми отображениями E_∞ -коалгебр равносильно заданию гомотопии между соответствующими скрещенными отображениями. Таким образом, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Для коалгебр Z и X над операдой E_∞ имеет место биекция гомотопических классов $[Z, X] \longleftrightarrow [Z, F(E_\infty, X)]_\phi$.

Рассмотрим стандартную фильтрацию в ко- B -конструкции $Y = F(E_\infty, X)$ и вычислим гомологии $Y_* = H_*(Y, d')$.

Как было показано в работе [13], в случае $R = \mathbb{Z}/2$ имеет место изоморфизм $H_*(\overline{E}_\infty(X)) \cong C\overline{\mathcal{E}}_*(X_*)$, где $X_* = H_*(X)$; $\overline{\mathcal{E}}_*(X_*)$ – градуированный модуль, порожденный элементами вида $\bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_k} x_n$, $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$, размерности $n2^k - i_1 - 2i_2 - \dots - 2^{k-1}i_k$; $C\overline{\mathcal{E}}_*(X_*)$ – свободная коммутативная коалгебра,

порожденная $\bar{\mathcal{E}}_* X_*$, профакторизованная по соотношениям $\bar{e}_0 x = x \otimes x$. Таким образом, $C\bar{\mathcal{E}}_*(X_*)$ является свободной коммутативной коалгеброй, порожденной элементами $\bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_k} x_n$, для которых $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$.

Обозначим для краткости $C\bar{\mathcal{E}}_*(X_*)$ через $\bar{E}_*(X_*)$. Ясно, что как градуированный модуль Y_* изоморфен ко- B -конструкции $F(\bar{E}_*, X_*)$. Как следует из предложений 16 и 20, в этой ко- B -конструкции можно определить дифференциал d'' и структуру E_∞ -алгебры Ли ϕ_* так, что для E_∞ -коалгебры Z будут иметь место биекции $[Z, X] \longleftrightarrow [Z, F(E_\infty, X)]_\phi \longleftrightarrow [Z, F(\bar{E}_*, X_*)]_{\phi_*}$. В частности, если $Z = S^n$ — цепной комплекс n -мерной сферы, то имеет место биекция

$$[S^n, X] = \pi_n(X) \longleftrightarrow [S^n, F(\bar{E}_*, X_*)]_{\phi_*}.$$

Определим в $F(\bar{E}_*, X_*)$ новый дифференциал $\tilde{d}_*$, положив

$$\tilde{d}_*(y) = d''_*(y) + \phi_* \cup \bar{y},$$

где d''_* — старый дифференциал в $F(\bar{E}_*, X_*)$, $y \in F(\bar{E}_*, X_*)$, $\dim(y) = n$, $\bar{y}: S^n \rightarrow F(\bar{E}_*, X_*)$ — характеристическое отображение. Ко- B -конструкцию $F(\bar{E}_*, X_*)$ с таким дифференциалом $\tilde{d}_*$ обозначим $\tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)$. Из определения множества $[S^n, F(\bar{E}_*, X_*)]$ непосредственно следует, что имеет место биекция $[S^n, F(\bar{E}_*, X_*)] \longleftrightarrow H_n(\tilde{F}(\bar{E}_*, X_*))$, и, следовательно, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. *Для односвязного топологического пространства X гомотопические группы $\pi_*(X)$, точнее, член E^∞ их спектральной последовательности, изоморфны гомологиям ко- B -конструкции $\tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)$, где $X_* = H_*(X)$.*

Отметим, что дифференциал в ко- B -конструкции $\tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)$ выражается через высшие гомологические операции [14], а само предложение 21 является переформулировкой соответствующего утверждения работы [15].

Вясним теперь вопрос о структуре E_∞ -алгебры Ли на $\tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)$. Скрещивающая коцепь $\phi_*: \bar{E}_\infty F(\bar{E}_*, X_*) \rightarrow F(\bar{E}_*, X_*)$ будет индуцировать отображение $\phi_*: \bar{E}_\infty \tilde{F}(\bar{E}_*, X_*) \rightarrow \tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)$. Оно, конечно, не будет скрещивающей коцепью в старом понимании. Подправим определение скрещивающей коцепи с тем, чтобы устранить этот недостаток.

Для градуированного модуля Y_* определим отображение $i: Y_* \rightarrow \bar{E}_\infty(Y_*)$, положив $i(y_n) = \bar{E}_\infty(\bar{y}_n)\tau(u_n)$, где $\bar{y}_n: S^n \rightarrow Y_*$ — характеристическое отображение для $y_n \in Y_n$, u_n — образующая в S^n , $\tau: S^n \rightarrow \bar{E}_\infty(S^n)$ — структура E_∞ -коалгебры на S^n . Для $\phi_*: \bar{E}_\infty(Y_*) \rightarrow Y_*$ определим теперь новое $\cup$ -произведение, положив $\phi_* \cup \phi_* = \phi_*(\bar{E}_\infty \phi_*)(\bar{\gamma} Y_*) + \phi_*(\bar{E}_\infty \phi_*)\bar{E}_\infty(i)$, где первое слагаемое в этой сумме соответствует старому $\cup$ -произведению. Относительно нового $\cup$ -произведения отображение $\phi_*: \bar{E}_\infty(\tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)) \rightarrow \tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)$ уже будет скрещивающей коцепью, и, следовательно, оно задает на $\tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)$ структуру E_∞ -алгебры Ли, для которой имеет место цепная эквивалентность E_∞ -коалгебр $\bar{E}_{\infty \phi_*} \tilde{F}(\bar{E}_*, X_*) \simeq X_*$. Переходя к гомологиям, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Гомологии ко-В-конструкции $\tilde{F}(\bar{E}_*, X_*)$, а следовательно, и гомотопические группы $\pi_*(X)$ односвязного топологического пространства X (точнее, член E^∞ спектральной последовательности Боусфилда–Кана [16]) являются E_∞ -алгеброй Ли. Причем имеет место цепная эквивалентность E_∞ -коалгебр $\bar{E}_{\infty\phi_*}(\pi_*(X)) \simeq X_* = H_*(X)$.

Поскольку структура E_∞ -коалгебры на гомологиях топологического пространства определяет его слабый гомотопический тип, то получаем, что структура E_∞ -алгебры Ли на гомотопических группах топологического пространства (точнее, на члене E^∞ спектральной последовательности) определяет слабый гомотопический тип этого пространства.

§ 10. Описание A_∞ -алгебр и коалгебр

Здесь мы распространим метод описания обычных A_∞ -алгебр и коалгебр [15] на случай A_∞ - $\vee$ -алгебр и A_∞ - $\wedge$ -коалгебр. Основное кольцо будем предполагать полем характеристики нуля.

Пусть Y – градуированная A_∞ - $\vee$ -алгебра. Последовательность $(y^2, \dots, y^n)$ элементов $y^i \in Y^{\vee i}$ будем называть *последовательностью Масси* [17], если выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &(\pi_0 \otimes \dots \otimes 1 - \dots + (-1)^n 1 \otimes \dots \otimes \pi_0)(y^n) = 0, \\ &(\pi_1 \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes \pi_1)(y^n) \\ &= (\pi_0 \otimes \dots \otimes 1 - \dots + (-1)^n 1 \otimes \dots \otimes \pi_0)(y^{n-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ &(\pi_{n-3} \otimes 1 + 1 \otimes \pi_{n-3})(y^n) \\ &= (\pi_{n-4} \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \pi_{n-4})(y^{n-1}) + \dots + (\pi_0 \otimes 1 - 1 \otimes \pi_0)(y^3). \end{aligned}$$

Для таких последовательностей Масси $(y^2, \dots, y^n)$ определим произведение Масси $\mu(y^2, \dots, y^n) = \pi_0(y^2) + \dots + \pi_{n-2}(y^n)$. Элемент $y \in Y$ назовем *разложимым*, если он является образом какого-нибудь произведения Масси. Фактор Y по разложимым элементам называется *модулем неразложимых элементов* и обозначается JY .

Переведем это определение на язык В-конструкций. Рассмотрим В-конструкцию BY над A_∞ - $\vee$ -алгеброй Y . Вложение $i: Y \rightarrow BY$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} BY \xrightarrow{p} B^1Y = BY/Y \rightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow Y \xrightarrow{i_*} H_*(BY) \xrightarrow{p_*} H_*(B^1Y) \xrightarrow{\mu_*} Y \rightarrow \dots$$

Из определения последовательности Масси следует, что последовательность $(y^2, \dots, y^n)$ является последовательностью Масси в том и только том случае, когда элемент $y = y^2 + \dots + y^n$ является циклом в $B^1(Y)$. Более того, отображение μ_* индуцируется произведением Масси. Таким образом, элемент $y \in Y$

разложим тогда и только тогда, когда он принадлежит образу μ_* . Следовательно, модуль неразложимых элементов JY изоморфен образу отображения $i_*: Y \rightarrow H_*(BY)$.

Для нахождения соотношений нужно указать такие последовательности Масси $(y^2, \dots, y^n)$, произведения Масси $\mu(y^2, \dots, y^n)$ от которых равны нулю. Часть таких соотношений следует непосредственно из структуры A_∞ - $\vee$ -алгебры. Так же, как и в случае обычных A_∞ -алгебр, показывается, что это происходит в случаях, если циклы $y^2 + \dots + y^n \in B^1Y$ гомологичны нулю. Таким образом, соотношения, которые не следуют просто из структуры A_∞ - $\vee$ -алгебры в Y , определяются ядром гомоморфизма $\mu_*: H_*(B^1Y) \rightarrow Y$ или, что то же самое, образом гомоморфизма $p_*: H_*(BY) \rightarrow H_*(B^1Y)$.

Двойственным образом для градуированной A_∞ - $\wedge$ -коалгебры X рассмотрим ко- B -конструкцию FX . Проекция $p: FX \rightarrow X$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow F^1X \xrightarrow{i} FX \xrightarrow{p} X \rightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow H_*(F^1X) \xrightarrow{i_*} H_*(FX) \xrightarrow{p_*} H_*(X) \xrightarrow{\nu_*} H_*(F^1X) \rightarrow \dots$$

Элемент $x \in X$ называется *примитивным*, если он принадлежит ядру гомоморфизма $\nu_*: X \rightarrow H_*(F^1X)$ или, что то же самое, образу гомоморфизма $p_*: H_*(FX) \rightarrow H_*(X)$. Модуль примитивных элементов A_∞ - $\wedge$ -коалгебры X обозначим PX .

Аналогичным образом, используя $B_\wedge$ -конструкцию и ко- B - $\vee$ -конструкцию, можно определить понятие разложимых элементов и найти соотношения для коммутативной градуированной A_∞ -алгебры, а также понятие примитивных элементов для коммутативной градуированной A_∞ -коалгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. Для градуированной A_∞ - $\vee$ -алгебры Y модуль примитивных элементов $PH_*(BY)$ гомологий B -конструкции BY изоморфен модулю неразложимых элементов A_∞ - $\vee$ -алгебры Y : $PH_*(BY) \cong JY$.

Действительно, по определению модуля примитивных элементов имеем

$$PH_*(BY) = \text{Im}\{H_*(F_\vee H_*(BY)) \rightarrow H_*(BY)\}.$$

Используя изоморфизм $H_*(F_\vee H_*(BY)) \cong Y$, получаем изоморфизм $PH_*(BY) \cong \text{Im}\{Y \rightarrow H_*(BY)\}$. Легко видеть, что этот образ совпадает с образом гомоморфизма $Y \rightarrow H_*(BY)$, который по определению дает модуль неразложимых элементов A_∞ - $\vee$ -алгебры Y .

Двойственным образом имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22'. Для произвольной градуированной A_∞ - $\wedge$ -коалгебры X модуль неразложимых элементов $JH_*(FX)$ изоморфен модулю примитивных элементов PX A_∞ - $\wedge$ -коалгебры X .

Применяя предложение 22 к рациональным гомотопическим группам, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. Для рациональных гомотопических групп $\pi_*(X) \otimes Q$ одностовязного топологического пространства X , рассматриваемых как A_∞ - $\vee$ -алгебра, модуль неразложимых элементов $J(\pi_*(X) \otimes Q)$ изоморфен образу гомоморфизма Гуревича $H: \pi_*(X) \otimes Q \rightarrow H_*(X, Q)$. Соотношения определяются образом гомоморфизма $p_*: H_*(X, Q) \rightarrow H_*(B^1(\pi_*(X) \otimes Q))$.

§ 11. Описание модулей и алгебр Ли

Наша задача состоит в определении понятия разложимых элементов и соотношений для E_∞ -алгебр Ли, а также в их нахождении для гомотопических групп топологических пространств. Но прежде рассмотрим более простую ситуацию модулей Ли над коалгеброй.

Пусть K – коалгебра, $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$, Y – градуированный модуль Ли над коалгеброй K , $\phi: K \otimes Y \rightarrow Y$. Вложение $i: Y \rightarrow K \otimes_\phi Y$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} K \otimes_\phi Y \xrightarrow{p} K \otimes_\phi^1 Y \rightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow Y \xrightarrow{i_*} H_*(K \otimes_\phi Y) \xrightarrow{p_*} H_*(K \otimes_\phi^1 Y) \xrightarrow{\phi_*} Y \rightarrow \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Элемент $y \in Y$ назовем *разложимым*, если он принадлежит образу гомоморфизма ϕ_* , или, что то же самое, ядру гомоморфизма i_* . Фактормодуль модуля Y по модулю неразложимых элементов называется *модулем неразложимых элементов*.

Модуль неразложимых элементов модуля Y обозначим JY . Он будет изоморфен образу гомоморфизма i_* .

Пусть X – градуированный комодуль над коалгеброй K , $\tau: X \rightarrow K \otimes X$. Элемент $x \in X$ называется *примитивным*, если $\tau(x) = 1 \otimes x$. Модуль примитивных элементов обозначим PX .

Взаимосвязь между примитивными элементами в X и неразложимыми элементами в гомологиях ко- B -конструкции $Y = F(K, X)$ дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. Для градуированного комодуля X над коалгеброй K модуль неразложимых элементов JY_* модуля Ли $Y_* = H_*(F(K, X))$ над коалгеброй K изоморфен модулю примитивных элементов PX .

Действительно, воспользуемся цепной эквивалентностью $X \simeq K \otimes_\phi Y \simeq K \otimes_{\phi_*} Y_*$. Тогда имеют место изоморфизмы

$$JY_* \cong \text{Im}\{i_*: Y_* \rightarrow H_*(K \otimes_{\phi_*} Y_*)\} \cong \text{Im}\{Y_* \rightarrow X\} \cong \text{Im}\{H_*(F(K, X)) \rightarrow X\}.$$

Образ последнего гомоморфизма совпадает с модулем примитивных элементов в X , что и завершает доказательство.

Для нахождения соотношений в градуированном модуле Ли Y над коалгеброй K нужно найти элементы $\sum x \otimes y \in K \otimes Y$, для которых $\sum \phi(x \otimes y) = 0$. Конечно, некоторые из таких соотношений являются следствиями структуры K -модуля Ли в Y . А именно, если $x \otimes y \in K \otimes Y$, то элемент $d(x) \otimes y + \sum x' \otimes \phi(x'' \otimes y)$, где $\sum x' \otimes x'' = \nabla(x)$, порождает соотношение, являющееся следствием структуры K -модуля Ли в Y . Профакторизуем $K \otimes Y$ по таким элементам и полученный фактормодуль обозначим $K * Y$. Тогда для нахождения соотношений, которые не следуют просто из структуры K -модуля Ли, достаточно найти такие элементы в $K * Y$, которые переводятся в нуль отображением $\phi_*: K * Y \rightarrow Y$.

Пусть X – градуированный комодуль над коалгеброй K , $\tau: X \rightarrow K \otimes X$. Для нахождения соотношений в K -модуле Ли $Y_* = H_*(F(K, X))$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X \cong H_*(K \otimes_{\phi_*} Y_*) & \xrightarrow{p_*} & H_*(K \otimes_{\phi_*}^1 Y_*) & \xrightarrow{\phi_*} & Y_* \\ \tau \downarrow & & \cap \downarrow & & = \downarrow \\ K \otimes X & \xrightarrow{1 \otimes p_*} & K * Y_* & \xrightarrow{\phi_*} & Y_* \end{array}$$

Из нее следует, что $\text{Ker } \phi_* = \text{Im}(1 \otimes p_*)\tau$, и, таким образом, искомые соотношения определяются элементами из образа отображения $X \xrightarrow{\tau} K \otimes X \xrightarrow{1 \otimes p_*} K * Y_*$. Поэтому для нахождения соотношений достаточно найти образ этого отображения.

Перейдем теперь к алгебрам Ли над операдой. Пусть Y – градуированная алгебра Ли над операдой $\mathcal{E}$, $\phi: \mathcal{E}Y \rightarrow Y$. Вложение $i: Y \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_\phi(Y)$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} \overline{\mathcal{E}}_\phi(Y) \xrightarrow{p} \overline{\mathcal{E}}_\phi^1(Y) \rightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow Y \xrightarrow{i_*} H_*(\overline{\mathcal{E}}_\phi(Y)) \xrightarrow{p_*} H_*(\overline{\mathcal{E}}_\phi^1(Y)) \xrightarrow{\phi_*} Y \rightarrow \dots$$

Элемент $y \in Y$ назовем *разложимым*, если он принадлежит образу гомоморфизма ϕ_* , или, что то же самое, ядру гомоморфизма i_* . Фактормодуль модуля Y по модулю разложимых элементов называется *модулем неразложимых элементов* и обозначается JY . Модуль неразложимых элементов JY будет изоморфен образу гомоморфизма i_* .

Для градуированной коалгебры X над операдой $\mathcal{E}$ модуль примитивных элементов PX определяется как образ гомоморфизма $p_*: H_*(F(\mathcal{E}, X)) \rightarrow X$. Взаимосвязь между примитивными элементами в X и неразложимыми элементами в гомологиях ко- B -конструкции $Y = F(\mathcal{E}, X)$ дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25. *Для градуированной коалгебры X над операдой $\mathcal{E}$ модуль неразложимых элементов JY_* алгебры Ли $Y_* = H_*(F(\mathcal{E}, X))$ над операдой $\mathcal{E}$ изоморфен модулю примитивных элементов PX .*

Доказательство аналогично предыдущему.

Применяя это предложение к гомотопическим группам топологического пространства (точнее, к члену E^∞ спектральной последовательности Боусфилда–Кана), рассматриваемых как E_∞ -алгебра Ли, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Модуль неразложимых элементов $J\pi_*(X)$ гомотопических групп односвязного топологического пространства X изоморфен образу гомоморфизма Гуревича $\pi_*(X) \rightarrow H_*(X)$.*

Доказательство следует из того, что $H_*(\overline{E}_{\infty\phi_*}(\pi_*(X))) \cong H_*(X)$ (предложение 21), и того, что гомоморфизм $i_*: \pi_*(X) \rightarrow H_*(\overline{E}_{\infty\phi_*}(\pi_*(X))) \cong H_*(X)$ является гомоморфизмом Гуревича.

Для нахождения соотношений в алгебре Ли над операдой поступаем так же, как и для модулей Ли над коалгеброй. Пусть X – коалгебра над операдой $\mathcal{E}$, $Y = F(\mathcal{E}, X)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X \cong H_*(\overline{\mathcal{E}}_{\phi_*}(Y_*)) & \xrightarrow{p_*} & H_*(\overline{\mathcal{E}}_{\phi_*}^1(Y_*)) & \xrightarrow{\phi_*} & Y_* \\ \tau \downarrow & & \cap \downarrow & & = \downarrow \\ \overline{\mathcal{E}}(X) & \xrightarrow{\overline{\mathcal{E}}p_*} & \overline{\mathcal{E}}^1 * Y_* & \xrightarrow{\phi_*} & Y_* \end{array}$$

Соотношения в Y_* , не являющиеся следствием структуры $\mathcal{E}$ -алгебры Ли, определяются элементами из образа отображения $X \xrightarrow{\tau} \overline{\mathcal{E}}(X) \xrightarrow{\overline{\mathcal{E}}p_*} \overline{\mathcal{E}}^1 * Y_*$. Поэтому для нахождения соотношений достаточно найти образ этого отображения.

Применяя этот метод нахождения соотношений для гомотопических групп топологических пространств, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Для гомотопических групп $\pi_*(X)$ односвязного топологического пространства X , рассматриваемых как E_∞ -алгебра Ли, все соотношения определяются элементами из образа отображения*

$$H_*(X) \rightarrow \overline{E}_\infty(H_*(X)) \rightarrow \overline{E}_\infty^1 * \pi_*(X),$$

т.е. определяются структурой E_∞ -коалгебры на гомологиях $H_(X)$ топологического пространства X .*

В случае, если $X = S^n$ – n -мерная сфера, получаем, что гомотопические группы $\pi_*(S^n)$, рассматриваемые как E_∞ -алгебра Ли, имеют одну n -мерную образующую и все соотношения следуют из структуры E_∞ -алгебры Ли.

§ 12. Бимодули Хопфа и бимодули Ли

В следующем параграфе мы рассмотрим вопрос о том, какая структура, помимо структуры E_∞ -алгебры Ли, возникает на гомотопических группах топологического пространства X в случае, если топологическое пространство X само является E_∞ -пространством, например бесконечнократным пространством петель. Установим взаимосвязь между этими структурами, но сначала рассмотрим более простую ситуацию бимодулей.

Пусть K – коалгебра, A – алгебра, $T: A \otimes K \rightarrow K \otimes A$ – перестановочное отображение, согласованное со структурами алгебры и коалгебры, т.е. коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A \otimes K & \xrightarrow{(T \otimes 1)(1 \otimes T)} & K \otimes A \otimes A & & A \otimes K & \xrightarrow{T} & K \otimes A \\ \pi \otimes 1 \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \pi & & 1 \otimes \nabla \downarrow & & \downarrow \nabla \otimes 1 \\ A \otimes K & \xrightarrow{T} & K \otimes A & & A \otimes K \otimes K & \xrightarrow{(1 \otimes T)(T \otimes 1)} & K \otimes K \otimes A \end{array}$$

Модуль X будем называть (A, K) -*бимодулем*, если на X имеются структура K -комодуля $\tau: X \rightarrow K \otimes X$, структура A -модуля $\mu: A \otimes X \rightarrow X$, причем они согласованы, т.е. $\tau \circ \mu = (1 \otimes \mu)(T \otimes 1)(1 \otimes \tau)$.

Последнее равенство означает, что если на $K \otimes X$ мы введем структуру A -модуля

$$A \otimes K \otimes X \xrightarrow{T \otimes 1} K \otimes A \otimes X \xrightarrow{1 \otimes \mu} K \otimes X,$$

то отображение $\tau: X \rightarrow K \otimes X$ будет A -модульным отображением. Двойственным образом если на $A \otimes X$ ввести структуру K -комодуля

$$A \otimes X \xrightarrow{1 \otimes \tau} A \otimes K \otimes X \xrightarrow{T \otimes 1} K \otimes A \otimes X,$$

отображение $\mu: A \otimes X \rightarrow X$ будет K -комодульным отображением.

В некоторых случаях указанное выше равенство выполняется только с точностью до гомотопии $h: A \otimes X \rightarrow K \otimes X$, $d(h) = \tau \circ \mu - (1 \otimes \mu)(T \otimes 1)(1 \otimes \tau)$, и тогда приходится вводить и использовать понятие A_∞ -(A, K)-бимодуля, в структуре которого участвуют не только гомотопия h , но и высшие гомотопии $h(i, j): A^{\otimes i} \otimes X \rightarrow K^{\otimes j} \otimes X$. Однако в случае, если алгебра A и коалгебра K являются свободными, можно ограничиться только гомотопией h , потребовав от нее дополнительно выполнимость равенств

$$\begin{aligned} h(\pi \otimes 1) &= h(1 \otimes \mu) + (1 \otimes \mu)(T \otimes 1)(1 \otimes h), \\ (\nabla \otimes 1)h &= (1 \otimes \tau)h + (1 \otimes h)(T \otimes 1)(1 \otimes \tau). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Дифференциальный градуированный модуль X будем называть *слабым* (A, K)-бимодулем, если на нем имеются структура A -модуля $\mu: A \otimes X \rightarrow X$, структура K -комодуля $\tau: X \rightarrow K \otimes X$ и гомотопия $h: A \otimes X \rightarrow K \otimes X$, удовлетворяющая перечисленным выше условиям.

Аналогичным образом можно определить понятие (A_1, A_2)-бимодуля, где A_1, A_2 – алгебры с согласованными структурами алгебр, и понятие (K_1, K_2)-бикомодуля, где K_1, K_2 – коалгебры с согласованными структурами коалгебр.

Если X – (A, K)-бимодуль, то ко- B -конструкция $F(K, X)$ является FK -модулем и A -модулем. Перестановочное отображение $T: A \otimes K \rightarrow K \otimes A$ индуцирует перестановочное отображение $A \otimes FK \rightarrow FK \otimes A$, относительно которого эти структуры согласованы, т.е. $F(K, X)$ является (A, FK)-бимодулем. Двойственным образом B -конструкция $B(A, X)$ является (BA, K) -бикомодулем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть, как и ранее, A – алгебра, K – коалгебра. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть (A, K)-бимодулем Ли, если Y является A -модулем, K -модулем Ли и эти структуры согласованы, т.е. имеет место равенство $\mu(1 \otimes \phi) = \phi(1 \otimes \mu)(T \otimes 1): A \otimes K \otimes Y \rightarrow Y$.

Определим также понятие слабого (A, K)-бимодуля Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть *слабым* (A, K)-бимодулем Ли, если на нем имеются структуры A -модуля $\mu: A \otimes Y \rightarrow Y$, структура K -модуля Ли $\phi: K \otimes Y \rightarrow Y$ и отображение $c: A \otimes K \otimes Y \rightarrow Y$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} d(c) &= c(1 \otimes 1 \otimes \phi)(1 \otimes \nabla \otimes 1) - \phi(1 \otimes c)(T \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \nabla \otimes 1), \\ c(\pi \otimes 1 \otimes 1) &= c(1 \otimes 1 \otimes c)(1 \otimes T \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \nabla \otimes 1), \\ c(x \otimes 1 \otimes y) &= \mu(x \otimes y). \end{aligned}$$

Примеры (A, K) -бимодулей Ли дают рассмотренные выше ко- B -конструкции $F(K, X)$ над (A, K) -бимодулем X . Причем если X – слабый (A, K) -бимодуль, то $Y = F(K, X)$ является просто бимодулем Ли. Обратно, если Y – слабый (A, K) -бимодуль Ли, то $X = K \otimes_{\phi} Y$ будет просто (A, K) -бимодулем.

Естественные преобразования

$$\alpha(X): X \rightarrow K \otimes_{\phi} F(K, X), \quad \beta(Y): F(K, K \otimes_{\phi} Y) \rightarrow Y$$

сохраняют бимодульную структуру и являются цепными эквивалентностями.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какая структура возникает на гомологиях (A, K) -бимодуля Ли Y . В этом случае на Y имеются согласованные структура K -комодуля Ли $\phi: K \otimes Y \rightarrow Y$ и структура A -модуля $\mu: A \otimes Y \rightarrow Y$. На гомологиях $Y_* = H_*(Y)$ будет структура K -модуля Ли $\phi_*: K \otimes Y_* \rightarrow Y_*$ и структура A_{∞} - A -модуля $\mu_*^n: A^{\otimes n+1} \otimes Y_* \rightarrow Y_*$, $n \geq 0$. Поскольку мы рассматриваем случай, когда алгебра A является свободной, то структура A_{∞} - A -модуля сводится к структуре A -модуля $\mu_*: A \otimes Y_* \rightarrow Y_*$. Однако даже в этом случае структуры ϕ_* и μ_* не являются согласованными и не дают структуру (A, K) -бимодуля Ли на Y_* , а только структуру слабого бимодуля Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26. Пусть Y – слабый (A, K) -бимодуль Ли (K – коалгебра конечного типа). Тогда на гомологиях $Y_* = H_*(Y)$ имеется структура слабого (A, K) -бимодуля Ли и цепная эквивалентность $K \otimes_{\phi} Y \simeq K \otimes_{\phi_*} Y_*$ (A, K) -бимодулей.

Действительно, структура слабого (A, K) -бимодуля Ли на Y определяет структуру A -модуля на $K \otimes_{\phi} Y$. Следовательно, на $K \otimes_{\phi_*} Y_*$ также имеется структура A -модуля $A \otimes K \otimes_{\phi_*} Y_* \rightarrow K \otimes_{\phi_*} Y_*$ (алгебра A свободна как градуированная алгебра). Поскольку приведенная выше цепная эквивалентность скрещенных тензорных произведений сохраняет K -комодульную структуру, то эта A -модульная структура согласована с K -комодульной структурой. Следовательно, на $K \otimes_{\phi_*} Y_*$ имеется структура (A, K) -бимодуля. Заметим, что задание K -комодульного отображения $A \otimes K \otimes_{\phi_*} Y_* \rightarrow K \otimes_{\phi_*} Y_*$ равносильно заданию отображения $s_*: A \otimes K \otimes_{\phi_*} Y_* \rightarrow Y_*$, удовлетворяющего соотношению $d(s_*) = s_* \cup \phi_* - \phi_* \cup s_*$. Для того чтобы исходное отображение было A -модульным, нужно, чтобы выполнялось соотношение $s_*(\pi \otimes 1 \otimes 1) = \nu_* \cup s_*$. Ограничение s_* на $A \otimes Y_* \subset A \otimes K \otimes_{\phi_*} Y_*$ дает структуру A -модуля на Y_* .

Как и раньше, в случае, если коалгебра K не является коалгеброй конечного типа, нужно рассматривать фильтрацию в Y , и тогда для пополнения $\hat{Y}_*$ будет иметь место аналогичное предложение.

§ 13. E_{∞} -алгебры Хопфа и E_{∞} -биалгебры Ли

Понятия бимодуля Хопфа и бимодуля Ли, рассмотренные в предыдущем параграфе, можно распространить на случай алгебр и коалгебр над операдами. Для нас будет достаточным рассмотрение случая, когда алгебры и коалгебры берутся над операдой E_{∞} .

Пусть теперь, как и раньше, E_{∞} и $\overline{E}_{\infty}$ обозначают соответственно монаду и комонаду в категории цепных комплексов, соответствующую операде E_{∞} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. Для операд E_∞ имеет место перестановочное преобразование $T: E_\infty \circ \bar{E}_\infty \rightarrow \bar{E}_\infty \circ E_\infty$, для которого выполняются равенства

$$T \circ \gamma \bar{E}_\infty = \bar{E}_\infty \gamma \circ T E_\infty \circ E_\infty T, \quad \bar{\gamma} E_\infty \circ T = \bar{E}_\infty T \circ T \bar{E}_\infty \circ E_\infty \bar{\gamma}.$$

Действительно, имеет место отображение операд $\nabla: E_\infty \rightarrow E_\infty \otimes E_\infty$, представляющее собой семейство отображений $\nabla(j): E_\infty(j) \rightarrow E_\infty(j) \otimes E_\infty(j)$, задающее на E_∞ структуру операд Хопфа. Рассмотрим итерацию этого отображения $\nabla(j, i): E_\infty(j) \rightarrow E_\infty(j)^{\otimes i}$, $\nabla(j, 2) = \nabla(j)$. Это отображение, конечно, не коммутирует с перестановками сомножителей в $E_\infty(j)^{\otimes i}$, однако в силу ацикличности и Σ -свободности операд E_∞ его можно продолжить до отображения $\nabla(j, i): E_\infty(i) \otimes E_\infty(j) \rightarrow E_\infty(j)^{\otimes i}$, для которого будет выполняться равенство $\nabla(j, i)(x\sigma \otimes y) = \nabla(j, i)(x \otimes y)\sigma$, где $\sigma \in \Sigma_i$.

Перепишем это отображение в виде $\nabla(j, i): E_\infty(j) \rightarrow \bar{E}_\infty(i) \otimes E_\infty(j)^{\otimes i}$. В силу свободности операд E_∞ его можно выбрать согласованным с операдной структурой в E_∞ . Переходя к двойственному отображению, получим отображение $\bar{\nabla}(j, i): E_\infty(i) \otimes \bar{E}_\infty(j)^{\otimes i} \rightarrow \bar{E}_\infty(j)$.

Определим теперь отображение $T(j, i): E_\infty(j) \otimes \bar{E}_\infty(i)^{\otimes j} \rightarrow E_\infty(i) \otimes \bar{E}_\infty(j)^{\otimes i}$ как композицию

$$\begin{aligned} E_\infty(j) \otimes \bar{E}_\infty(i)^{\otimes j} &\xrightarrow{\nabla(j) \otimes 1^{\otimes j}} E_\infty(j) \otimes E_\infty(j) \otimes \bar{E}_\infty(i)^{\otimes j} \\ &\rightarrow E_\infty(j) \otimes \bar{E}_\infty(i)^{\otimes j} \otimes E_\infty(j) \xrightarrow{\bar{\nabla}(j, i) \otimes 1} \bar{E}_\infty(i) \otimes E_\infty(j) \\ &\xrightarrow{1 \otimes \nabla(j, i)} \bar{E}_\infty(i) \otimes \bar{E}_\infty(i) \otimes E_\infty(j)^{\otimes i} \xrightarrow{\bar{\nabla}(i) \otimes 1^{\otimes i}} \bar{E}_\infty(j) \otimes E_\infty(i)^{\otimes j}. \end{aligned}$$

Семейство отображений $T(j, i)$ определяет искомое перестановочное отображение $T: E_\infty \circ \bar{E}_\infty \rightarrow \bar{E}_\infty \circ E_\infty$. Непосредственные вычисления показывают коммутативность требуемых диаграмм.

В случае, если X является E_∞ -алгеброй, перестановочное отображение $T: E_\infty \circ \bar{E}_\infty \rightarrow \bar{E}_\infty \circ E_\infty$ позволяет определить на $\bar{E}_\infty X$ структуру E_∞ -алгебры как композицию $E_\infty \circ \bar{E}_\infty(X) \xrightarrow{T} \bar{E}_\infty \circ E_\infty(X) \xrightarrow{\bar{E}_\infty \mu} \bar{E}_\infty(X)$.

Аналогично, если X является E_∞ -коалгеброй, то перестановочное отображение позволяет определить на $E_\infty(X)$ структуру E_∞ -коалгебры как композицию $E_\infty(X) \xrightarrow{E_\infty \tau} E_\infty \circ \bar{E}_\infty(X) \xrightarrow{T} \bar{E}_\infty \circ E_\infty(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем говорить, что *дифференциальный градуированный модуль X является E_∞ -алгеброй Хопфа*, если на нем заданы структуры E_∞ -алгебры $\mu: E_\infty(X) \rightarrow X$ и E_∞ -коалгебры $\tau: X \rightarrow \bar{E}_\infty(X)$, которые согласованы в том смысле, что отображение τ является отображением E_∞ -алгебр, или, что то же самое, отображение μ является отображением E_∞ -коалгебр.

В некоторых случаях указанная выше согласованность выполняется только с точностью до гомотопии $h: E_\infty(X) \rightarrow \bar{E}_\infty(X)$, $d(h) = \tau \circ \mu - \bar{E}_\infty(\mu)(TX)E_\infty(\tau)$. Учитывая, что операда E_∞ -свободна, можно ограничиться только гомотопией h , потребовав от нее дополнительно выполнимость равенств

$$\begin{aligned} h \circ \gamma(X) &= h \circ E_\infty(\mu) + \bar{E}_\infty(\mu)(TX) \circ E_\infty(h), \\ \bar{\gamma}(X) \circ h &= \bar{E}_\infty(\tau) \circ h + \bar{E}_\infty(h) \circ (TX) \circ E_\infty(\tau). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Дифференциальный градуированный модуль X будем называть *слабой E_∞ -алгеброй Хопфа*, если на нем имеются структура E_∞ -алгебры $\mu: E_\infty(X) \rightarrow X$, структура E_∞ -коалгебры $\tau: X \rightarrow \overline{E}_\infty(X)$ и гомотопия $h: E_\infty(X) \rightarrow \overline{E}_\infty(X)$, удовлетворяющая перечисленным выше условиям.

Пусть X является E_∞ -алгеброй Хопфа. Рассмотрим ко- B -конструкцию $F(E_\infty, X)$. Тогда поскольку эта ко- B -конструкция является реализацией косимплициального объекта в категории E_∞ -алгебр, то она является E_∞ -алгеброй. Кроме этого, как мы знаем, $F(E_\infty, X)$ является E_∞ -алгеброй Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть *E_∞ -биалгеброй Ли*, если на нем заданы согласованные структуры E_∞ -алгебры и E_∞ -алгебры Ли.

Определим также понятие слабой E_∞ -биалгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Дифференциальный градуированный модуль Y будем называть *слабой E_∞ -биалгеброй Ли*, если на нем имеются структура E_∞ -алгебры $\mu: E_\infty(Y) \rightarrow Y$, структура E_∞ -алгебры Ли $\phi: \overline{E}_\infty(Y) \rightarrow Y$ и отображение $c: E_\infty \overline{E}_\infty(Y) \rightarrow Y$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} d(c) &= c \circ E_\infty \overline{E}_\infty(\phi) \circ E_\infty \overline{\gamma}(Y) - \phi \circ \overline{E}_\infty(c) \circ (T \overline{E}_\infty(Y)) \circ E_\infty \overline{\gamma}(Y), \\ c \circ \gamma \overline{E}_\infty(Y) &= c \circ E_\infty \overline{E}_\infty(c) \circ (E_\infty T \overline{E}_\infty(Y)) \circ E_\infty E_\infty \overline{\gamma}(Y), \\ c(x \times 1 \times y) &= \mu(x \times y). \end{aligned}$$

Примеры E_∞ -биалгебр Ли дают рассмотренные выше ко- B -конструкции $F(\overline{E}_\infty, X)$ над E_∞ -алгеброй Хопфа X . Причем если X – слабая E_∞ -алгебра Хопфа, то $Y = F(\overline{E}_\infty, X)$ является просто биалгеброй Ли. Обратно, если Y – слабая E_∞ -биалгебра Ли, то $X = \overline{E}_{\infty\phi}(Y)$ будет просто E_∞ -биалгеброй Хопфа.

Так же, как и в случае бимодулей Ли, показывается, что имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28. Пусть Y – E_∞ -слабая биалгебра Ли. Тогда на гомологиях $Y_* = H_*(Y)$ имеется структура слабой E_∞ -биалгебры Ли и цепная эквивалентность E_∞ -алгебр Хопфа $\overline{E}_{\infty\phi}(Y) \simeq \overline{E}_{\infty\phi_*}(Y_*)$.

Применяя это предложение к гомотопическим группам, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Если односвязное топологическое пространство X является E_∞ -пространством, то на гомотопических группах $\pi_*(X)$ (точнее, на члене E^∞ спектральной последовательности Боусфилда–Кана) имеется структура слабой E_∞ -биалгебры Ли. В частности, такая структура имеется на стабильных гомотопических группах топологического пространства.

Список литературы

1. *Смирнов В. А.* E_∞ -структуры на гомотопических группах // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 1. С. 152–156.
2. *Brown E. H.* Twisted tensor products // Ann. of Math. 1959. V. 69. P. 223–246.
3. *Gugenheim V. K. A. M., Lamb L. A., Stasheff J. D.* Perturbation Theory in Differential Homological Algebra // Ill. J. Math. 1991. V. 35. № 3. P. 357–373.
4. *Смирнов В. А.* Гомологии скрещенных тензорных произведений // ДАН СССР. 1975. Т. 222. № 5. С. 1041–1044.
5. *Quillen D.* Rational homotopy theory // Ann. of Math. 1969. V. 90. № 2. P. 205–295.
6. *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
7. *May J. P.* The Geometry of Iterated Loop Spaces // Lect. Notes in Math. 1972. V. 271.
8. *Смирнов В. А.* О коцепном комплексе топологического пространства // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 1. С. 146–158.
9. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H-spaces // Trans. A.M.S. 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
10. *Кадешивили Т. В.* К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. С. 183–188.
11. *Смирнов В. А.* Гомологии расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. С. 227–230.
12. *Смирнов В. А.* Гомотопическая теория коалгебр // Изв. АН СССР. Сер. метем. 1985. Т. 49. № 6. С. 1302–1321.
13. *Смирнов В. А.* Вторичные операции в гомологиях операды E // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 449–468.
14. *Смирнов В. А.* Функциональные гомологические операции и слабый гомотопический тип // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 5. С. 76–86.
15. *Смирнов В. А.* Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 80–96.
16. *Bousfield A. K., Kan D. M.* The homotopy spectral sequence of a space with coefficients in a ring // Topology. 1972. V. 11. P. 79–106.
17. *Massey W. S.* Products in exact couples // Ann. of Math. 1954. V. 59. P. 558–569.

Поступило в редакцию
12.III.1996