Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Штепин, Промежуточная ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ и ее конечномерные представления, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 3, 201–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/im199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:39:00

УДК 519.46

В. В. Штепин

Промежуточная ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ и ее конечномерные представления

Предложен метод разделения кратных точек спектра в редукции $B_n \downarrow B_{n-1}$ с помощью введения неполупростой промежуточной подалгебры. Исследуется категория модулей над этой промежуточной подалгеброй, играющих роль модулей со старшим весом.

Библиография: 11 наименований.

Одна из известных проблем спектрального анализа конечномерных представлений классических групп Ли состоит в следующем. Рассматривается конечномерное неприводимое представление T_m комплексной простой группы Ли G серии A_n , B_n , C_n или D_n (m – старший вес представления T_m). Требуется описать спектр сужения представления T_m на максимальную одноименную подгруппу G_0 меньшего ранга (соответственно A_{n-1} , B_{n-1} , C_{n-1} или D_{n-1}). Решение этой проблемы хорошо известно. Оно получено Г. Вейлем [1] (для унимодулярной серии; применяя современную терминологию, Г. Вейль рассматривал алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$), И. М. Гельфандом и М. Цетлиным [2] (для ортогональных серий), Д. П. Желобенко [3] (для симплектической серии). Во всех четырех сериях спектр может содержать кратные точки.

Предположим, что спектр сужения $T_m|_{G_0}$ не прост. Традиционный метод “освобождения от кратностей” (метод Гельфанда–Цетлина) состоит в разделении кратных точек с помощью включения между группами Ли G_0 и G одной или нескольких промежуточных полупростых (или редуктивных) подгрупп $G_1, \dots, G_{s-1}$:

$$G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{s-1} \subset G_s = G,$$

таких, что спектр сужения каждого неприводимого G_i -подмодуля модуля T_m на G_{i-1} ($i = 1, 2, \dots, s$) однократен. Наиболее ярким примером использования метода Гельфанда–Цетлина является построение ортогональных базисов в пространстве конечномерного неприводимого представления группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ с помощью цепочки вложенных подгрупп

$$\mathbb{C}^* \simeq \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \subset \dots \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

и в пространстве конечномерного неприводимого представления группы $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ с помощью цепочки вложенных подгрупп

$$\mathbb{T} \simeq \mathrm{SO}(2, \mathbb{C}) \subset \mathrm{SO}(3, \mathbb{C}) \subset \dots \subset \mathrm{SO}(n, \mathbb{C}).$$

Однако в редукциях $A_n \downarrow A_{n-1}$ и $C_n \downarrow C_{n-1}$ метод Гельфанда–Цетлина неприменим (по причине отсутствия между A_n и A_{n-1} , C_n и C_{n-1} промежуточных полупростых подгрупп), а в редукциях $B_n \downarrow B_{n-1}$ и $D_n \downarrow D_{n-1}$ он приводит к построению базиса в пространстве представления, не являющегося весовым.

В работах [4], [5] автором предложено обобщение метода Гельфанда–Цетлина, использующее неполупростые промежуточные подгруппы $A_{n-1/2}$ (для унимодулярной серии) и $C_{n-1/2}$ (для симплектической серии). Показано, что “освобождения от кратностей” можно добиться не за счет разложения T_m в прямую сумму $G_{n-1/2}$ -модулей ($G_{n-1/2} = A_{n-1/2}$ или $G_{n-1/2} = C_{n-1/2}$), а путем построения в T_m фильтрации $G_{n-1/2}$ -модулей. Возникающие при этом факторы фильтраций образуют категорию $\mathcal{L}$ конечномерных $G_{n-1/2}$ -модулей, играющих роль представлений со старшим весом. В частности, для них справедливы формулы для характеров и размерностей, аналогичные формулам Г. Вейля для характеров и размерностей неприводимых представлений классических групп Ли.

Настоящая работа посвящена изучению редукции $B_n \downarrow B_{n-1}$ (серия D будет рассмотрена отдельно). Как было отмечено, разделить кратные точки в этой редукции можно путем последовательных сужений $B_n \downarrow D_n \downarrow B_{n-1}$. Регулярное вложение D_n в B_n устроено просто (достаточно в стандартном представлении B_n взять стабилизатор неизотропного вектора), но всякое вложение B_{n-1} в D_n не является регулярным, в результате чего цепочка указанных сужений приводит к построению базиса в пространстве неприводимого представления группы B_n , не являющегося весовым. В настоящей работе разделение кратных точек спектра в редукции $B_n \downarrow B_{n-1}$ достигается путем введения неполупростой промежуточной подгруппы $B_{n-1/2}$ ($B_{n-1} \subset B_{n-1/2} \subset B_n$). Использование цепочки сужений $B_n \downarrow B_{n-1/2} \downarrow B_{n-1}$ в некоторых вопросах представляется предпочтительнее цепочки $B_n \downarrow D_n \downarrow B_{n-1}$. В данной работе оно позволяет явно построить весовой базис в пространстве конечномерного неприводимого представления группы B_n . Далее, при нашем подходе промежуточные строчки в таблицах Гельфанда–Цетлина, нумерующих базисные векторы в пространстве неприводимого представления B_n , получают естественное истолкование в терминах конечномерных представлений группы Ли $B_{n-1/2}$. Эти конечномерные представления группы $B_{n-1/2}$ образуют категорию $\mathcal{L}$, элементы которой находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством P_n^B старших весов группы Ли B_n . Сравнения с сериями A и C позволяют предположить, что категория $\mathcal{L}$ (не вполне приводимых, вообще говоря) $B_{n-1/2}$ -модулей играет для этой неполупростой группы Ли такую же роль, какую неприводимые представления играют для классических комплексных полупростых групп Ли. В частности, модули этой категории однозначно определяются своими старшими весами. Отметим также, что представления неполупростых групп Ли представляют самостоятельный интерес ввиду их малой изученности.

В § 1 мы определим “промежуточную” группу Ли $B_{n-1/2}$ и ее алгебру Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$, опишем их строение, включая разложение Леви–Мальцева.

В § 2 мы введем понятия полустарших и квазистарших векторов в пространстве V_m конечномерного неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{b}_n$ со старшим весом m . Эти понятия очень удобны для описания спектров сужений представлений V_m на $\mathfrak{b}_{n-1}$.

Далее, в § 3 мы изложим обобщение традиционного метода разделения крат-

ных точек спектра (метода Гельфанда–Цетлина), использующее неполупростую промежуточную подалгебру, и докажем основную теорему о том, что сужение V_m на $\mathfrak{b}_{n-1}$ допускает разделение изоморфных компонент с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{b}_{n-1/2}$. В отличие от метода Гельфанда–Цетлина разделение достигается не за счет разложения V_m в прямую сумму $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей, а путем построения в V_m фильтрации $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей.

Множество факторов фильтраций, разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модулей V_m , образует категорию $\mathcal{L}$, являющуюся предметом изучения в § 4. Каждый такой фактормодуль является циклическим $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулем, порожденным образом квазистаршего вектора $q_{\lambda,m}$, $\lambda \in P_n^D$ (P_n^D – множество старших весов группы Ли D_n). Мы покажем, что фактормодули, порожденные образами квазистарших векторов $q_{\lambda,m}$ и $q_{\lambda^*,m}$ (λ и λ^* – зеркально сопряженные веса P_n^D), изоморфны. По этой причине элементы категории $\mathcal{L}$ (рассматриваемые с точностью до изоморфизма) находятся во взаимно однозначном соответствии не с множеством P_n^D , что можно было бы предположить априори, исходя из правила ветвления для ортогональных групп Ли, а с множеством P_n^B . Это объясняет на первый взгляд неочевидное отнесение рассматриваемой промежуточной группы Ли именно к серии B .

§ 1. Группа Ли $B_{n-1/2}$ и ее алгебра Ли

Комплексной простой группой Ли типа B_n называют собственную ортогональную группу $\mathrm{SO}(2n+1)$, состоящую из всех ортогональных преобразований комплексного $(2n+1)$ -мерного пространства $\mathbb{C}^{2n+1}$, не изменяющих ориентацию. Выберем в $\mathbb{C}^{2n+1}$ специальный базис $e_1, \dots, e_n, e_0, e_{-n}, \dots, e_{-1}$, в котором скалярное произведение определяется формой

$$(x, y) = x_1 y_{-1} + \dots + x_n y_{-n} + x_0 y_0 + x_{-n} y_n + \dots + x_{-1} y_1.$$

В этом случае каждый элемент g группы $\mathrm{SO}(2n+1)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\sigma^{-1} \cdot g \cdot \sigma = (g^t)^{-1},$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

“Промежуточная” подгруппа $B_{n-1/2}$ может быть определена как стабилизатор ненулевого изотропного вектора в пространстве стандартного представления группы Ли $\mathrm{SO}(2n+1)$. Так как стабилизатор всегда является замкнутой подгруппой, $B_{n-1/2}$ – замкнутая подгруппа комплексной группы Ли, и, следовательно, сама является комплексной группой Ли.

Зафиксируем выбор вложений $\mathrm{SO}(2n-1) \subset B_{n-1/2} \subset \mathrm{SO}(2n+1)$ следующим образом. Подгруппа $B_{n-1/2}$ группы Ли $\mathrm{SO}(2n+1)$ является стабилизатором n -го базисного вектора e_n пространства $\mathbb{C}^{2n+1}$, а $\mathrm{SO}(2n-1)$ наряду с e_n оставляет

неподвижным также базисный вектор e_{-n} . Аналогично определяются вложения алгебр Ли $\mathfrak{so}(2n-1) \subset \mathfrak{b}_{n-1/2} \subset \mathfrak{so}(2n+1)$ (для “промежуточной” алгебры Ли группы $B_{n-1/2}$ мы применяем обозначение $\mathfrak{b}_{n-1/2}$). Более точно, алгебру Ли $\mathfrak{so}(2n+1)$ (типа $\mathfrak{b}_n$) группы Ли $\mathrm{SO}(2n+1)$ будем отождествлять с алгеброй матриц $\|a_{ij}\| \in \mathfrak{gl}(2n+1)$, удовлетворяющих соотношению

$$a_{ij} = -a_{-j, -i},$$

она порождена образующими

$$X_{ij} = E_{ij} - E_{-j, -i}, \quad (1)$$

где E_{ij} – образующие $\mathfrak{gl}(2n+1)$ (матричные единицы).

Коммутационные соотношения в $\mathfrak{so}(2n+1)$ являются следствием (1) и коммутационных соотношений в $\mathfrak{gl}(2n+1)$; они имеют вид

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{kj}X_{il} - \delta_{il}X_{kj} + \delta_{-l, j}X_{k, -i} - \delta_{k, -i}X_{-j, l}.$$

Подалгебра $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ выделяется из $\mathfrak{so}(2n+1)$ наложением условий $a_{in} = 0$, $a_{-n, i} = 0$ ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm n$), а $\mathfrak{so}(2n-1)$ выделяется из $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ с помощью соотношений $a_{nj} = 0$, $a_{j, -n} = 0$ ($j = 0, \pm 1, \dots, \pm n$).

Подалгебра Картана $\mathfrak{h}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n+1)$ порождена образующими X_{ii} , $1 \leq i \leq n$. Пусть R_n – система корней алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n+1)$, $P(R_n)$ – ее группа весов. В качестве базиса B в $P(R_n)$ выберем элементы $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathfrak{h}_n^*$, определенные равенствами $\epsilon_i(X_{jj}) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогда

$$R_n = \{\pm\epsilon_i, 1 \leq i \leq n; \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\},$$

простыми корнями системы R_n являются

$$\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = \epsilon_n.$$

Система корней $R_{n-1/2}$ алгебры Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ состоит из следующих корней:

$$R_{n-1/2} = \{\alpha \in R_n \mid (\alpha, \epsilon_n) \geq 0\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ – произвольное скалярное произведение в $\mathfrak{h}_n^*$, инвариантное относительно группы Вейля. Соответственно система корней R_{n-1} алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n-1)$ состоит из следующих корней:

$$R_{n-1} = \{\alpha \in R_n \mid (\alpha, \epsilon_n) = 0\}.$$

Пусть $\mathfrak{so}(2n+1) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}_n \oplus \mathfrak{m}_+$ – разложение Картана–Вейля алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n+1)$, согласованное с базисом B , $\mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h}_n \oplus \mathfrak{n}_\pm$ – соответствующие борелевские подалгебры. Положим $\mathfrak{m}_\pm = \mathfrak{n}_\pm \cap \mathfrak{b}_{n-1/2}$. Мы имеем тогда следующее разложение, аналогичное разложению Картана–Вейля:

$$\mathfrak{b}_{n-1/2} = \mathfrak{m}_- \oplus \mathfrak{h}_{n-1} \oplus \mathfrak{m}_+.$$

Алгебры Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}^- = \mathfrak{h}_{n-1} \oplus \mathfrak{m}_-$ и $\mathfrak{b}_{n-1/2}^+ = \mathfrak{h}_{n-1} \oplus \mathfrak{m}_+$ являются аналогами борелевских подалгебр в $\mathfrak{b}_{n-1/2}$.

Докажем следующее простое предложение, которое дает разложение Леви–Мальцева группы Ли $B_{n-1/2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Группа Ли $B_{n-1/2}$ не редуцируема. Она изоморфна*

$$B_{n-1/2} \simeq \mathrm{SO}(2n-1) \ltimes \mathbb{C}^{2n-1}, \quad (2)$$

где $\mathbb{C}^{2n-1}$ – аддитивная группа Ли, $\ltimes$ – полупрямое произведение групп Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_i(t)$ (соответственно $y_i(t)$), $1 \leq i \leq n-1$, – однопараметрическая подгруппа в $B_{n-1/2}$, соответствующая образующему X_{ni} (соответственно $X_{i,-n}$) алгебры Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$. Пусть также $z(t)$ – однопараметрическая подгруппа в $B_{n-1/2}$, соответствующая образующему X_{n0} алгебры Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$. Однопараметрические подгруппы $x_i(t)$, $y_i(t)$, $1 \leq i \leq n-1$, и $z(t)$ порождают мультипликативную абелеву группу Ли H (абелевость вытекает из того, что образующие X_{ni} , $X_{j,-n}$, X_{n0} , $1 \leq i, j \leq n-1$, попарно коммутируют в $\mathfrak{so}(2n+1)$), изоморфную аддитивной группе $\mathbf{C}^{2n-1}$. Далее, группа $\mathrm{SO}(2n-1) \ltimes H$ есть по определению множество упорядоченных пар (s, h) , $s \in \mathrm{SO}(2n-1)$, $h \in H$, с групповым умножением $(s_1, h_1) \cdot (s_2, h_2) = (s_1 s_2, h_1 s_1 h_2 s_1^{-1})$. Определим аналитическое отображение $\varphi: \mathrm{SO}(2n-1) \ltimes H \rightarrow B_{n-1/2}$ равенством $\varphi(s, h) = hs$. Тогда φ осуществляет искомый изоморфизм (2).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Алгебра Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ имеет нетривиальный радикал r , изоморфный коммутативной алгебре Ли размерности $2n-1$, при этом

$$\mathfrak{b}_{n-1/2} \simeq \mathfrak{so}(2n-1) \dot{+} r,$$

где $\dot{+}$ – полупрямая сумма алгебр Ли.

Алгебра Ли $\mathfrak{b}_n$ обладает каноническим инволютивным автоморфизмом Θ , переставляющим положительные и отрицательные корневые векторы $\mathfrak{b}_n$. Автоморфизм Θ можно определить следующим образом: пусть R_n^+ – множество положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{b}_n$ относительно базиса B , тогда для любого $\alpha \in R_n^+$

$$\Theta(X_\alpha) = -X_{-\alpha}, \quad \Theta(X_{-\alpha}) = -X_\alpha,$$

а на подалгебре Картана $\mathfrak{h}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{b}_n$ автоморфизм Θ действует как “минус-тождественный” оператор. Сразу отметим, что этот автоморфизм Θ не является автоморфизмом $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ (так как не сохраняет эту подалгебру Ли).

С другой стороны, канонический инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{b}_{n-1}$ может быть двумя способами продолжен до инволютивного автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$. Обозначим эти продолжения через Θ_+ и Θ_- . Поскольку Θ_+ и Θ_- совпадают на $\mathfrak{b}_{n-1}$, различить их можно лишь по их действию на корневые векторы $\mathfrak{b}_{n-1/2}$, дополнительные к $\mathfrak{b}_{n-1}$. Среди этих корневых векторов в точности один является собственным для автоморфизмов Θ_+ и Θ_- , это вектор X_{n0} , отвечающий последнему простому корню α_n алгебры Ли $\mathfrak{b}_n$. Автоморфизмы Θ_+ и Θ_- отличаются своими собственными значениями на векторе X_{n0} :

$$\Theta_\pm X_{n0} = \pm X_{n0}.$$

Как будет показано в § 3, корневой вектор X_{n0} имеет исключительное значение не только для различения автоморфизмов Θ_+ и Θ_- алгебры Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$, но и для различения изоморфных зеркально сопряженных $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -факторов, что является составной частью нашего метода (см. определение 3.3).

§ 2. Полустаршие и квазистаршие векторы

Пусть P_n^B – множество старших весов алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n+1)$, $P_n^B \subset \frac{1}{2}P(R_n)$. Хорошо известно (см., например, [6]), что в определенном выше базисе $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ эти веса задаются следующими целочисленными или полуцелочисленными векторами:

$$P_n^B = \left\{ (m_1, \dots, m_n); m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 0, m_i \in \mathbf{Z} \text{ или } m_i \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \right\}.$$

Старшие векторы с полуцелыми компонентами необходимы для описания двузначных представлений группы Ли $\mathrm{SO}(2n+1)$. Обозначим через V_m конечномерный неприводимый $\mathfrak{so}(2n+1)$ -модуль со старшим весом $m \in P_n^B$. Известно [7], что V_m обладает единственным с точностью до постоянного множителя контравариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. (Контравариантность означает, что операторы представления, соответствующие образующим X_{ij} и X_{ji} , эрмитово сопряжены относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$.) Всюду ниже под ортогональностью векторов в V_m мы будем подразумевать ортогональность относительно этого скалярного произведения. Определяемые ниже понятия полустарших и квазистарших векторов очень удобны в вопросах спектрального анализа сужений V_m на $\mathfrak{so}(2n-1)$ и $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ и будут использованы нами в § 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Вектор $v \in V_m$, собственный относительно $\mathfrak{h}_n$ и старший относительно $\mathfrak{so}(2n-1)$, называется *полустаршим*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 (ср. [4], [8]). Полустарший вектор $v \in V_m$, удовлетворяющий соотношениям $X_{in}v = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, называется *квазистаршим*. Обозначим через V_m^+ (соответственно V_m^{++}) линейную оболочку множества полустарших (соответственно квазистарших) векторов. Подпространство V_m^+ мы будем называть *пространством полустарших векторов*, соответственно V_m^{++} – *пространством квазистарших векторов*.

Сформулируем без доказательства два простых предложения, описывающих свойства пространства полустарших векторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Старший вектор v любого неприводимого $\mathfrak{so}(2n-1)$ -подмодуля модуля V_m принадлежит V_m^+ .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. а) Пусть $V_m|_{\mathfrak{so}(2n-1)} = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ – некоторое разложение V_m в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{so}(2n-1)$ -подмодулей. Тогда старшие векторы модулей V_i , $1 \leq i \leq k$, образуют базис V_m^+ .

б) Обратно, пусть $v_1, \dots, v_k$ образуют базис V_m^+ , состоящий из полустарших векторов. Пусть V_i – $\mathfrak{so}(2n-1)$ -подмодуль V_m , порожденный вектором v_i , $1 \leq i \leq k$. Тогда модули V_i , $1 \leq i \leq k$, неприводимы и

$$V_m|_{\mathfrak{so}(2n-1)} = \bigoplus_{i=1}^k V_i.$$

Предложения 2.1 и 2.2 доказываются стандартными методами (см., например, [9], [10]).

Для более наглядного описания пространств V_m^+ и V_m^{++} мы воспользуемся конструкцией Желобенко [3], реализующей любое конечномерное неприводимое представление T_m классической комплексной группы Ли G в пространстве многочленов на максимальной унитарной подгруппе Z_+ .

Пусть Z_- (соответственно Z_+) – подгруппа $\mathrm{SO}(2n+1)$, состоящая из нижнетреугольных (соответственно верхнетреугольных) матриц с единицами на главной диагонали, H – подгруппа диагональных матриц. Тогда $\mathrm{SO}(2n+1) = \overline{Z_- H Z_+}$ – разложение Гаусса и всякий регулярный элемент $g \in \mathrm{SO}(2n+1)$ однозначно представляется в виде $g = \zeta \delta z$, где $\zeta \in Z_-$, $\delta \in H$, $z \in Z_+$. Напомним, что матрица $g \in \mathrm{SO}(2n+1)$ называется *регулярной*, если все ее главные миноры, т.е. миноры, расположенные на пересечении первых k строк и первых k столбцов, $k = 1, \dots, 2n+1$, отличны от нуля. Независимыми параметрами в подгруппе Z_+ являются матричные элементы, стоящие выше второй диагонали (иначе говоря, это элементы z_{pq} такие, что $0 < p < |q|$, а также элементы z_{p0} , $1 \leq p \leq n$). Согласно [3] всякое конечномерное неприводимое представление $\mathrm{SO}(2n+1)$ может быть реализовано в $\mathbf{C}[z_{pq}]$. Пространство неприводимого представления T_m группы Ли $\mathrm{SO}(2n+1)$ со старшим весом $m \in P_n^B$ является пространством решений системы дифференциальных уравнений (индикаторной системы)

$$\begin{cases} D_1^{r_1+1} f(z) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ D_n^{r_n+1} f(z) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $f(z) \in \mathbf{C}[z_{pq}]$, $r_i = m_i - m_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $r_n = 2m_n$, а $D_1, \dots, D_n$ – так называемые “главные сдвиги”, т.е. инфинитезимальные операторы левых сдвигов на подгруппе Z_+ , соответствующих простым корням $\mathrm{SO}(2n+1)$. Это пространство мы обозначим через V_m , как и соответствующий $\mathfrak{so}(2n+1)$ -модуль. Операторы $D_1, \dots, D_n$ могут быть выписаны явно:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial z_{12}} + z_{23} \frac{\partial}{\partial z_{13}} + \dots + z_{2n} \frac{\partial}{\partial z_{1n}} + z_{20} \frac{\partial}{\partial z_{10}} + z_{2,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-n}} + \dots \\ &\quad \dots + z_{2,-3} \frac{\partial}{\partial z_{1,-3}} - \left(\frac{z_{20}^2}{2} + z_{23} z_{2,-3} + \dots + z_{2n} z_{2,-n} \right) \frac{\partial}{\partial z_{1,-2}}, \\ D_2 &= \frac{\partial}{\partial z_{23}} + z_{34} \frac{\partial}{\partial z_{24}} + \dots + z_{3n} \frac{\partial}{\partial z_{2n}} + z_{30} \frac{\partial}{\partial z_{20}} + z_{3,-n} \frac{\partial}{\partial z_{2,-n}} + \dots \\ &\quad \dots + z_{3,-4} \frac{\partial}{\partial z_{2,-4}} - \left(\frac{z_{30}^2}{2} + z_{34} z_{3,-4} + \dots + z_{3n} z_{3,-n} \right) \frac{\partial}{\partial z_{2,-3}}, \\ &\quad \dots\dots\dots, \\ D_{n-1} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-1,n}} + z_{n0} \frac{\partial}{\partial z_{n-1,0}} - \frac{z_{n0}^2}{2} \frac{\partial}{\partial z_{n-1,-n}}, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial z_{n0}}. \end{aligned}$$

Далее, пусть $\mathfrak{n}_\pm$ – алгебра Ли группы $Z_\pm$ и $\mathfrak{n}_\pm^0 = \mathfrak{n}_\pm \cap \mathfrak{so}(2n-1)$. Обозначим через V^+ подпространство всех многочленов в $\mathbf{C}[z_{pq}]$, аннулируемых подалгеброй $\mathfrak{n}_+^0$. Легко видеть, что

$$V^+ = \mathbf{C}[z_{1n}, \dots, z_{n-1,n}, z_{1,-n}, \dots, z_{n-1,-n}, z_{n0}],$$

и теперь $V_m^+ = V^+ \cap V_m$.

Далее, пусть V^{++} – подпространство всех многочленов в V^+ , аннулируемых операторами X_{in} , $i = 1, \dots, n-1$. В используемой реализации инфинитезимальные операторы X_{in} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X_{1n} &= \frac{\partial}{\partial z_{1n}}, \\ X_{2n} &= \frac{\partial}{\partial z_{2n}} + z_{12} \frac{\partial}{\partial z_{1n}} - z_{1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-2}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ X_{n-2,n} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-2,n}} + z_{n-3,n-2} \frac{\partial}{\partial z_{n-3,n}} + \dots + z_{1,n-2} \frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\ &\quad - z_{n-3,-n} \frac{\partial}{\partial z_{n-3,-(n-2)}} - \dots - z_{1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-(n-2)}}, \\ X_{n-1,n} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-1,n}} + z_{n-2,n-1} \frac{\partial}{\partial z_{n-2,n}} + \dots + z_{1,n-1} \frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\ &\quad - z_{n-2,-n} \frac{\partial}{\partial z_{n-2,-(n-1)}} - \dots - z_{1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-(n-1)}}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $V^{++} = \mathbf{C}[z_{1,-n}, \dots, z_{n-1,-n}, z_{n0}]$ и $V_m^{++} = V^{++} \cap V_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Система квазистарших векторов

$$\{z_{1,-n}^{k_1} \dots z_{n-1,-n}^{k_{n-1}} z_{n0}^{k_n}; 0 \leq k_i \leq r_i, k_i \in \mathbf{Z}, i = 1, \dots, n\}$$

образует ортогональный базис пространства квазистарших векторов V_m^{++} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На подпространстве V^{++} “главные сдвиги” имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} D_1 &= z_{2,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-n}}, & D_2 &= z_{3,-n} \frac{\partial}{\partial z_{2,-n}}, & \dots \\ &\dots, & D_{n-1} &= -\frac{z_{n0}^2}{2} \frac{\partial}{\partial z_{n-1,-n}}, & D_n &= \frac{\partial}{\partial z_{n0}}. \end{aligned}$$

Базис в пространстве решений индикаторной системы (3), принадлежащих V^{++} , т.е. базис в пространстве V_m^{++} , образуют мономы вида $z_{1,-n}^{k_1} z_{2,-n}^{k_2} \dots z_{n-1,-n}^{k_{n-1}} z_{n0}^{k_n}$, где $k_i \in \mathbf{Z}$, $0 \leq k_i \leq r_i$, $i = 1, \dots, n$. Легко видеть, что моном $z_{1,-n}^{k_1} \dots z_{n-1,-n}^{k_{n-1}} z_{n0}^{k_n}$ – весовой вектор V_m . Его вес в базисе $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ таков:

$$\left(m_1 - k_1, m_2 - k_2, \dots, m_{n-1} - k_{n-1}, m_n - \sum_{i=1}^n k_i \right).$$

Но собственные векторы эрмитовых операторов, имеющие различные собственные значения, взаимно ортогональны.

Можно показать, что в пространстве полустарших векторов V_m^+ не существует, вообще говоря, ортогональный базис, состоящий из мономов от независимых

параметров z_{pq} группы Z_+ . Тем не менее, вычисляя размерности весовых подпространств пространства V_m^+ , можно получить правило ветвления для редукции $B_n \downarrow B_{n-1}$. Это правило ветвления впервые было получено Гельфандом и Цетлиным в [2]. Их результат:

$$V_{(m_1, \dots, m_n)}|_{B_{n-1}} = \bigoplus V_{(m'_1, \dots, m'_{n-1})}, \quad (4)$$

где прямая сумма берется по всем наборам векторов $m'' = (m''_1, \dots, m''_{n-1})$, $m' = (m'_1, \dots, m'_n)$, одновременно целочисленных (если вектор $m = (m_1, \dots, m_n)$ целочисленный) или полуцелочисленных (если вектор $m = (m_1, \dots, m_n)$ полуцелочисленный), удовлетворяющим системе неравенств

$$\begin{aligned} m_1 &\geq m'_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq m'_{n-1} \geq m_n \geq |m'_n|, \\ m'_1 &\geq m''_1 \geq m'_2 \geq \dots \geq m'_{n-1} \geq m''_{n-1} \geq |m'_n|. \end{aligned}$$

Правило ветвления (4) может быть переписано в следующем, более компактном виде, использующем условия подчинения весов.

Пусть P_n^D – множество старших весов алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$ (типа D_n). Хорошо известно (см., например, [6]), что в стандартном базисе пространства $\mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$) эти веса задаются следующими целочисленными или полуцелочисленными векторами:

$$\begin{aligned} P_n^D = \left\{ (m_1, \dots, m_n); m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq |m_n|, m_i \in \mathbf{Z} \right. \\ \left. \text{или } m_i \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Отметим попутно, что последняя компонента старшего веса $m \in P_n^D$ может оказаться отрицательной (в отличие от $m \in P_n^B$). Будем говорить, что вес $l \in P_i^D$ подчинен весу $m \in P_i^B$, если их компоненты удовлетворяют системе неравенств $m_1 \geq l_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{i-1} \geq l_{i-1} \geq m_i \geq |l_i|$. Запись $l \rightarrow m$ для весов $l \in P_i^D$, $m \in P_i^B$ будет означать, что l подчинен m . Далее, будем говорить, что вес $t \in P_j^B$ подчинен весу $l \in P_{j+1}^D$, если их компоненты удовлетворяют системе неравенств $l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_j \geq t_j \geq |l_{j+1}|$. И в этом случае запись $t \rightarrow l$ для весов $t \in P_j^B$, $l \in P_{j+1}^D$ будет означать, что t подчинен l .

Теперь правило ветвления (4) для редукции $\mathfrak{so}(2n+1) \downarrow \mathfrak{so}(2n-1)$ может быть записано более компактно. Пусть V_m – конечномерный неприводимый $\mathfrak{so}(2n+1)$ -модуль со старшим весом $m \in P_n^B$. Его сужение на $\mathfrak{so}(2n-1)$ вполне приводимо и имеет следующий спектр:

$$V_m|_{\mathfrak{so}(2n-1)} = \bigoplus_{l \rightarrow m} \left(\bigoplus_{t \rightarrow l} V_t \right), \quad t \in P_{n-1}^B, \quad l \in P_n^D, \quad (5)$$

причем в обеих суммах веса l и t , по которым идет суммирование, одновременно целочисленные, если вектор m целочислен, либо полуцелочисленные, если вектор m имеет полуцелые компоненты.

ЗАМЕЧАНИЕ. Правило ветвления, записанное в виде (5), наводит на мысль, что пространство $\bigoplus_{t \rightarrow l} V_t$ (суммирование по $t \in P_{n-1}^B$; $l \in P_n^D$ фиксирован) может быть наделено структурой не только $\mathfrak{so}(2n-1)$ -модуля, но также структурой модуля над некоторой промежуточной между $\mathfrak{so}(2n-1)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$ алгеброй Ли.

Как было отмечено во введении, в качестве такой промежуточной алгебры Ли естественно взять $\mathfrak{so}(2n)$; тогда $\bigoplus_{t \rightarrow l} V_t$ наделяется структурой $\mathfrak{so}(2n)$ -модуля со старшим весом $l \in P_n^D$. Однако такой подход имеет единственный недостаток (который мы собираемся устранить в § 3, 4), а именно цепочка последовательных сужений $\mathfrak{so}(2n+1) \downarrow \mathfrak{so}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n) \downarrow \mathfrak{so}(2n-1)$, ... приводит к построению базиса в пространстве V_m , не являющегося весовым. Ниже мы получим другое истолкование “промежуточных строчек” $l \in P_n^D$ в правиле ветвления (5) с точки зрения теории представлений неполупростых алгебр Ли (отметим, что наш подход представляется более универсальным, поскольку он применим также в редукциях унимодулярных и симплектических алгебр Ли [4]).

§ 3. Разделение изоморфных компонент

Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ – полупростые комплексные алгебры Ли, причем $\mathfrak{g}_0$ регулярно вложена в $\mathfrak{g}$. Пусть V – неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль такой, что спектр сужения $V|_{\mathfrak{g}_0}$ не прост. Что следует понимать под разделением изоморфных компонент $\mathfrak{g}_0$ -модуля V ? На этот вопрос можно ответить по-разному.

Традиционный метод (метод Гельфанда–Цетлина) предусматривает использование одной или нескольких промежуточных (между $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}$) полупростых подалгебр. Более точно, ищется цепочка регулярно вложенных полупростых подалгебр $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_{k-1}$, $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{k-1} \subset \mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}$ таких, что сужение каждого неприводимого $\mathfrak{g}_i$ -подмодуля модуля V на $\mathfrak{g}_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) имеет простой спектр. Отметим сразу, что этот метод применим не всегда. Может существовать неприводимый $\mathfrak{g}_i$ -модуль W , $W \subseteq V$, такой, что спектр сужения $W|_{\mathfrak{g}_{i-1}}$ не прост, а между $\mathfrak{g}_{i-1}$ и $\mathfrak{g}_i$ нет никакой промежуточной полупростой подалгебры. Как раз такое положение имеет место в редукциях $\mathfrak{g}_n \downarrow \mathfrak{g}_{n-1}$, где $\mathfrak{g}_n$ – унимодулярная ($\mathfrak{sl}(n+1)$) или симплектическая ($\mathfrak{sp}(2n)$) алгебра Ли.

В работах [4], [5] было предложено обобщение традиционного метода, допускающее использование промежуточной (между $\mathfrak{g}_{i-1}$ и $\mathfrak{g}_i$) подалгебры, не обязательно полупростой. Точная формулировка этого метода (см. [4]) заключена в следующих двух определениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для всякой фильтрации

$$f = \{V_0, V_1, \dots, V_s; V_{i-1} \subset V_i, i = 1, 2, \dots, s\}$$

$\mathfrak{g}$ -модулей, $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли, будем называть фактормодули V_i/V_{i-1} *факторами* фильтрации f . Фильтрацию, у которой никакие два фактора не изоморфны, будем называть *фильтрацией без кратностей*. Если $\mathfrak{g}$ -модуль V наделен скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то *прообразом фактора* V_i/V_{i-1} в V будем называть ортогональное дополнение $\mathfrak{g}$ -модуля V_{i-1} в V_i относительно $(\cdot, \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть, как и выше, W – неприводимый $\mathfrak{g}_i$ -модуль такой, что спектр $W|_{\mathfrak{g}_{i-1}}$ не прост. Будем говорить, что $(\mathfrak{g}_{i-1})$ -модуль W допускает разделение изоморфных компонент с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{g}_{i-1/2}$ ($\mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}_{i-1/2} \subset \mathfrak{g}_i$), если существует фильтрация $f = \{W_0, W_1, \dots, W_s; W_{i-1} \subset W_i, i = 1, 2, \dots, s, W_0 = \{0\}, W_s = W\}$ $(\mathfrak{g}_{i-1/2})$ -подмодулей в W такая, что:

- а) f – фильтрация без кратностей;
- б) сужения факторов фильтрации f на $\mathfrak{g}_{i-1}$ имеют простой спектр.

Такой подход позволил разделить изоморфные компоненты в редукциях $\mathfrak{g}_n \downarrow \mathfrak{g}_{n-1}$, где $\mathfrak{g}_n$ – алгебра Ли типа A_n или C_n . Естественно было ожидать, что он “сработает” и в случае ортогональных алгебр Ли. При ближайшем рассмотрении оказалось, что определение 3.2 не годится для ортогонального случая. Как видно из правила ветвления (5), в ортогональном случае встречаются зеркально-сопряженные промежуточные веса

$$l = (l_1, \dots, l_{n-1}, l_n) \in P_n^D \text{ и } l^* = (l_1, \dots, l_{n-1}, -l_n) \in P_n^D.$$

Соответствующие этим весам факторы фильтраций f (всюду ниже называемые *зеркально-сопряженными факторами*) изоморфны не только как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модули (что сразу вытекает из правила ветвления (5)), но и как $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модули (что совсем не очевидно). Следующее ниже определение 3.3 разделения изоморфных компонент модифицирует определение 3.2, учитывая, что прообразы зеркально-сопряженных $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -факторов в V_m различаются по их степени нильпотентности относительно оператора X_{n0} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть W – неприводимый $\mathfrak{b}_i$ -модуль такой, что спектр $W|_{\mathfrak{b}_{i-1}}$ не прост. Будем говорить, что $(\mathfrak{b}_{i-1})$ -модуль W допускает разделение изоморфных компонент с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{b}_{i-1/2}$ ($\mathfrak{b}_{i-1} \subset \mathfrak{b}_{i-1/2} \subset \mathfrak{b}_i$), если существует фильтрация

$$f = \{W_0, W_1, \dots, W_s; W_{i-1} \subset W_i, i = 1, \dots, s, W_0 = \{0\}, W_s = W\}$$

$(\mathfrak{b}_{i-1/2})$ -подмодулей в W такая, что:

- а) всякие два фактора f либо не изоморфны, либо, в случае зеркально-сопряженных факторов, их прообразы в W имеют разную степень нильпотентности относительно корневого вектора X_{i0} (отвечающего последнему простому корню α_i алгебры Ли $\mathfrak{b}_i$);
- б) сужения факторов фильтрации f на $\mathfrak{b}_{i-1}$ имеют простой спектр.

Теперь если условия определения 3.3 выполняются, то изоморфные неприводимые компоненты $(\mathfrak{b}_{i-1})$ -модуля W можно различать, относя их либо к неизоморфным факторам фильтрации f , либо (в случае зеркально-сопряженных факторов) по их степени нильпотентности относительно оператора X_{i0} .

Сформулируем основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть V_m – конечномерный неприводимый $\mathfrak{b}_n$ -модуль со старшим весом $t \in P_n^B$. Тогда сужение V_m на $\mathfrak{b}_{n-1}$ допускает разделение изоморфных компонент с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{b}_{n-1/2}$.

Доказательство теоремы 1 заключается в явном построении фильтрации f $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -подмодулей в V_m , удовлетворяющей условиям определения 3.3. В этом

построении существенную роль будут играть определенные в § 2 квазистаршие векторы.

Введем во множестве квазистарших векторов $\mathfrak{b}_n$ -модуля V_m (рассматриваемых с точностью до пропорциональности) отношение линейного порядка:

$$z_{1,-n}^{k_1} z_{2,-n}^{k_2} \cdots z_{n-1,-n}^{k_{n-1}} z_{n0}^{k_n} < z_{1,-n}^{p_1} z_{2,-n}^{p_2} \cdots z_{n-1,-n}^{p_{n-1}} z_{n0}^{p_n},$$

если $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n) < (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$ относительно лексикографического порядка. Перенумеруем квазистаршие векторы в соответствии с этим линейным порядком: $q_1 = 1, q_2 = z_{n0}, \dots, q_N = z_{1,-n}^{r_1} \cdots z_{n-1,-n}^{r_{n-1}} z_{n0}^{r_n}$. Далее, обозначим через $\mathcal{D}_i, i = 1, \dots, N$, $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -подмодуль V_m , порожденный векторами $q_1, \dots, q_i$. Пусть также $\mathcal{D}_0 = 0$. По построению полученные $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модули образуют фильтрацию: $\mathcal{D}_{i-1} \subset \mathcal{D}_i, i = 1, 2, \dots, N$. Покажем, что $\mathcal{D}_N = V_m$. Поскольку всякий ненулевой вектор простого модуля над полупростой алгеброй Ли является циклическим, последнее равенство вытекает из $\mathfrak{b}_{n-1/2} q_N = \mathfrak{b}_n q_N$. Но $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ может быть дополнена до $\mathfrak{b}_n$ подалгеброй

$$\langle X_{1n}, \dots, X_{nn}, X_{-n,1}, \dots, X_{-n,n-1}, X_{0n} \rangle.$$

Сразу заметим, что образующие $X_{1n}, \dots, X_{-n,n}$ аннулируют q_N по определению квазистаршего вектора. Далее, X_{nn} сохраняет одномерное подпространство, порожденное q_N , поскольку $X_{nn} \in \mathfrak{h}_n$, а q_N собственный относительно $\mathfrak{h}_n$. Покажем, что образующий $X_{-n,i}, 1 \leq i \leq n-1$, также аннулирует q_N . Действительно, $X_{-n,i} q_N$ является весовым с компонентами веса в базисе $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$: $(m_2, m_3, \dots, m_i, m_{i+1} - 1, m_{i+2}, \dots, m_n, -m_1 - 1)$. Но длина такого веса превосходит длину старшего веса модуля V_m , следовательно, $X_{-n,i} q_N = 0$. Наконец, $X_{0n} q_N = 0$, поскольку оператор $X_{0n} = [X_{10}, X_{-n,1}]$ является коммутатором двух других операторов, аннулирующих вектор q_N . Тем самым равенство $\mathfrak{b}_{n-1/2} q_N = \mathfrak{b}_n q_N$, а вместе с ним и равенство $\mathcal{D}_N = V_m$ доказаны.

Мы получили фильтрацию

$$f = \{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_N; \mathcal{D}_{i-1} \subset \mathcal{D}_i, i = 1, \dots, N, \mathcal{D}_0 = 0, \mathcal{D}_N = V_m\}$$

$(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -подмодулей V_m . Фильтрация f удовлетворяет условиям а), б) определения 3.3, что непосредственно вытекает из следующей формулы, описывающей спектры сужений факторов f на $\mathfrak{b}_{n-1}$:

$$D_{i+1} \nearrow D_i|_{\mathfrak{b}_{n-1}} = \bigoplus_{m_1 - p_1 \geq t_1 \geq \dots \geq m_{n-1} - p_{n-1} \geq t_{n-1} \geq m_n - [\frac{p_n}{2}]} V_{(t_1, \dots, t_{n-1})}, \quad (6)$$

если $q_{i+1} = z_{1,-n}^{p_1} \cdots z_{n-1,-n}^{p_{n-1}} z_{n0}^{p_n}$.

Для доказательства формулы (6) нам потребуются некоторые приготовления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Будем говорить, что тройка весов $t \in P_{n-1}^B$, $l \in P_n^D$, $m \in P_n^B$ образует *кортеж* $\{t, l, m\}$, если $t \rightarrow l \rightarrow m$.

Каждому кортежу $\{t, l, m\}$ сопоставим полустарший вектор $\omega(t, l, m) \in V_m^+$, определяемый формулой

$$\omega(t, l, m) = z_{1n}^{l_1-m_2} \dots z_{n-1,n}^{l_{n-1}-m_n} z_{1,-n}^{m_1-l_1} z_{2,-n}^{t_1-l_2} \dots z_{n-1,-n}^{t_{n-2}-l_{n-1}} \\ \times z_{n0}^{2t_{n-1}-[2l_n+\frac{1}{2}]} \Omega_1^{m_2-t_1} \Omega_2^{m_3-t_2} \dots \Omega_{n-1}^{m_n-t_{n-1}},$$

где $\Omega_1 = \widehat{z_{1,-n}z_{2n}} - z_{1n}z_{2,-n}$, $\Omega_2 = \widehat{z_{2,-n}z_{3n}} - z_{2n}z_{3,-n}$, $\dots$, $\Omega_{n-2} = \widehat{z_{n-2,-n}z_{n-1,n}} - z_{n-2,n}z_{n-1,-n}$, $\Omega_{n-1} = \widehat{z_{n-1,-n}} + \frac{1}{2}z_{n-1,n}z_{n0}^2$, а символ $\widehat{}$ означает, что данное слагаемое должно быть пропущено, если показатель степени k в выражении Ω_i^k будет отрицательным. Далее, сопоставим каждому кортежу $\{t, l, m\}$ вектор $r(t, l, m)$, определяемый формулой

$$r(t, l, m) = X_{n1}^{l_1-t_1} \dots X_{n,n-1}^{l_{n-1}-t_{n-1}} q_{l,m},$$

$$\text{где } q_{l,m} = z_{1,-n}^{m_1-l_1} z_{2,-n}^{m_2-l_2} \dots z_{n-1,-n}^{m_{n-1}-l_{n-1}} z_{n0}^{2m_n-[2l_n+\frac{1}{2}]}. \quad (3.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что $2m_n - [2l_n + \frac{1}{2}] \geq 0$ даже для отрицательных значений l_n , так как $m_n \geq |l_n|$ ввиду $l \rightarrow m$.

Отношение линейного порядка, определенное выше на множестве квазистарших векторов $\{q_{l,m}, l \in P_n^D\}$, мы перенесем на индексы этих векторов, принадлежащие P_n^D . А именно будем говорить, что $l \succ p$ ($l, p \in P_n^D$), если $q_{l,m} < q_{p,m}$. (Проверим, что отношение $\succ$ введено корректно. Условие $l \succ p$ равносильно тому, что $(l_1, \dots, l_{n-1}, [2l_n + \frac{1}{2}]) > (p_1, \dots, p_{n-1}, [2p_n + \frac{1}{2}])$ лексикографически, поэтому не зависит от выбора $\mathfrak{b}_n$ -модуля V_m .)

ЛЕММА 3.1. а) Пусть $\{t, l, m\}$ и $\{q, p, m\}$ – кортежи. Тогда если $t \neq q$, то

$$\langle r(t, l, m), \omega(q, p, m) \rangle = 0.$$

б) Пусть $\{t, l, m\}$ и $\{t, p, m\}$ – кортежи. Тогда если $l \succ p$, то

$$\langle r(t, l, m), \omega(t, p, m) \rangle = 0.$$

в) Для любого кортежа $\{t, l, m\}$

$$\langle r(t, l, m), \omega(t, l, m) \rangle \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $t \neq q$, то векторы $r(t, l, m)$ и $\omega(q, p, m)$ имеют разные веса относительно $\mathfrak{h}_n$ и потому ортогональны.

б) Имеем, пользуясь контравариантностью скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\langle r(t, l, m), \omega(t, p, m) \rangle = \langle q_{l,m}, X_{1n}^{l_1-t_1} \dots X_{n-1,n}^{l_{n-1}-t_{n-1}} \omega(t, p, m) \rangle.$$

Явный вид операторов $X_{1n}, \dots, X_{n-1,n}$ был указан в § 2. Максимальная степень по z_{1n} среди слагаемых, входящих в разложение $\omega(t, p, m)$, равна $p_1 - t_1$, а

минимальная степень дифференцирования по этой переменной равна $l_1 - t_1$. Мы видим, что такое дифференцирование, примененное к отдельному моному, будет отлично от нуля тогда и только тогда, когда $l_1 = p_1$, множитель вида $z_{1,-n}z_{2n}$ не входит в моном, а из операторов $X_{2n}, \dots, X_{n-1,n}$ не берутся дифференцирования по z_{1n} . Пусть для некоторого монома M все эти условия выполняются. Далее, максимальная степень M по z_{2n} равна $p_2 - t_2$. Вместе с тем минимальная степень дифференцирования по z_{2n} , входящего в оператор $X_{1n}^{l_1-t_1} \dots X_{n-1,n}^{l_{n-1}-t_{n-1}}$, равна $l_2 - t_2$. Таким образом, результат дифференцирования отличен от нуля тогда и только тогда, когда $l_2 = p_2$, множитель вида $z_{2,-n}z_{3n}$ не входит в моном M , а из операторов $X_{3n}, \dots, X_{n-1,n}$ не берутся дифференцирования по $z_{2n}, \dots$ и т.д.

Пусть $l_1 = p_1, l_2 = p_2, \dots, l_{n-1} = p_{n-1}$. Тогда $l \succ p$ означает, что $\left\lfloor 2l_n + \frac{1}{2} \right\rfloor > \left\lfloor 2p_n + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Тогда вес $q_{l,m}$ в базисе $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ таков:

$$\left(l_1, \dots, l_{n-1}, -\sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^{n-1} l_i + \left\lfloor 2l_n + \frac{1}{2} \right\rfloor \right),$$

в то время как вес $X_{1n}^{l_1-t_1} \dots X_{n-1,n}^{l_{n-1}-t_{n-1}} \omega(t, p, m)$ в этом же базисе:

$$\left(l_1, \dots, l_{n-1}, -\sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^{n-1} l_i + \left\lfloor 2p_n + \frac{1}{2} \right\rfloor \right),$$

и теперь ортогональность указанных векторов вытекает из того, что их веса относительно эрмитова оператора X_{nn} различны.

в) Нам надо доказать, что

$$\langle q_{l,m}, X_{1n}^{l_1-t_1} \dots X_{n-1,n}^{l_{n-1}-t_{n-1}} \omega(t, l, m) \rangle \neq 0.$$

Из доказательства б) видно, что единственное операторное слагаемое, входящее в разложение $X_{1n}^{l_1-t_1} \dots X_{n-1,n}^{l_{n-1}-t_{n-1}}$ и дающее ненулевой результат после дифференцирования, есть $\left(\frac{\partial}{\partial z_{1n}} \right)^{l_1-t_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1,n}} \right)^{l_{n-1}-t_{n-1}}$, а единственный моном, входящий в разложение $\omega(t, l, m)$, на котором это операторное слагаемое отлично от нуля, есть (с точностью до знака)

$$z_{1n}^{l_1-t_1} \dots z_{n-1,n}^{l_{n-1}-t_{n-1}} z_{1,-n}^{m_1-l_1} \dots z_{n-1,-n}^{m_{n-1}-l_{n-1}} z_{n0}^{2m_n - \left\lfloor 2l_n + \frac{1}{2} \right\rfloor}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} X_{1n}^{l_1-t_1} \dots X_{n-1,n}^{l_{n-1}-t_{n-1}} \omega(t, l, m) &= (l_1 - t_1)! \dots (l_{n-1} - t_{n-1})! \\ &\times z_{1,-n}^{m_1-l_1} \dots z_{n-1,-n}^{m_{n-1}-l_{n-1}} z_{n0}^{2m_n - \left\lfloor 2l_n + \frac{1}{2} \right\rfloor} = \prod_{i=1}^{n-1} (l_i - t_i)! q_{l,m}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\langle r(t, l, m), \omega(t, l, m) \rangle = \prod_{i=1}^{n-1} (l_i - t_i)! |q_{l,m}|^2 \neq 0.$$

Лемма полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Система векторов $\{\omega(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж}\}$ образует базис пространства V_m^+ , состоящий из полустарших векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что вектор $\omega(t, l, m)$ – весовой вектор V_m , его вес в базисе $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ таков:

$$\left(t_1, \dots, t_{n-1}, -\sum_{i=1}^n m_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} l_i - \sum_{i=1}^{n-1} t_i + \left\lfloor 2l_n + \frac{1}{2} \right\rfloor \right).$$

Поскольку различные весовые подпространства V_m линейно независимы, нам достаточно доказать линейную независимость векторов $\omega(t, l, m)$, имеющих один и тот же фиксированный вес. Пусть

$$\alpha_1 \omega(t, p_1, m) + \alpha_2 \omega(t, p_2, m) + \dots + \alpha_s \omega(t, p_s, m) = 0,$$

где веса $p_1, p_2, \dots, p_s$ упорядочены так, что $p_1 \succ p_2 \succ \dots \succ p_s$. Последовательно умножая это равенство скалярно на $r(t, p_1, m)$, $r(t, p_2, m)$, $\dots$, $r(t, p_s, m)$, и применяя лемму 3.1, получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$.

ЛЕММА 3.2. а) $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуль $\mathcal{D}_i$, $i = 0, 1, \dots, N$, порождается системой векторов $\{r(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{l,m} \leq q_i\}$.

б) $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуль $\mathcal{D}_i^\perp$, $i = 0, 1, \dots, N$, порождается системой векторов $\{\omega(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{l,m} > q_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукцией по i . При $i = 0$ утверждение леммы вытекает из следствия 3.1 и предложения 2.2. Пусть для $i = 0, 1, \dots, k-1$ утверждение леммы доказано. Докажем его для $i = k$. Обозначим через R $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -подмодуль модуля $\mathcal{D}_k$, порожденный векторами $\{r(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{l,m} \leq q_k\}$. По предположению индукции $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуль $\mathcal{D}_{k-1}$ порождается векторами $\{r(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{l,m} \leq q_{k-1}\}$. Поэтому $\mathcal{D}_{k-1} \subset R$. Тогда $R^\perp \subset \mathcal{D}_{k-1}^\perp$.

С другой стороны, по предположению индукции $\mathcal{D}_{k-1}^\perp$ порождается системой векторов $S = \{\omega(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{l,m} > q_{k-1}\}$. Пусть r – произвольный полустарший вектор $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуля $R^\perp$. Он представим в виде линейной комбинации векторов S :

$$r = \sum_{\substack{\{t,l,m\} \\ q_{l,m}=q_k}} \alpha_{(t,l,m)} \omega(t, l, m) + \sum_{\substack{\{t,l,m\} \\ q_{l,m}=q_{k+1}}} \beta_{(t,l,m)} \omega(t, l, m) + \dots$$

Умножая это равенство скалярно на $r(t, l, m)$, где $\{t, l, m\}$ – кортеж, удовлетворяющий $q_{l,m} = q_k$, и пользуясь леммой 3.1, получаем $\alpha_{(t,l,m)} = 0$ для всех $\{t, l, m\}$ таких, что $q_{l,m} = q_k$. Таким образом, $R^\perp$, как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуль, порождается системой векторов $S' = \{\omega(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{l,m} > q_k\}$.

Нам осталось доказать, что $R = \mathcal{D}_k$. Пусть v – произвольный ненулевой вектор $\mathcal{D}_k$. Покажем, что v ортогонален системе векторов S' . Если $v \in \mathcal{D}_{k-1}$, то v ортогонален S' по предположению индукции. В общем случае $v = Xq_k + v_{k-1}$,

где $X \in U(\mathfrak{b}_{n-1/2})$, $v_{k-1} \in \mathcal{D}_{k-1}$. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта X представим в виде

$$X = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0 \\ \gamma \geq 0}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \gamma} X_{n1}^{\alpha_1} \dots X_{n, n-1}^{\alpha_{n-1}} X_{1, -n}^{\beta_1} \dots X_{n-1, -n}^{\beta_{n-1}} X_{n0}^{\gamma},$$

где $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \gamma} \in U(\mathfrak{n}_-^0)$.

Теперь если $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \gamma}$ не содержит свободного члена, то для любого $\omega(t, l, m) \in S'$

$$\langle c_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \gamma} X_{n1}^{\alpha_1} \dots X_{n, n-1}^{\alpha_{n-1}} X_{1, -n}^{\beta_1} \dots X_{n-1, -n}^{\beta_{n-1}} X_{n0}^{\gamma} q_k, \omega(t, l, m) \rangle = 0$$

ввиду контравариантности скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть теперь

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \gamma} = c \in \mathbf{C}, \quad q_k = q_{p, m}$$

и $(p_1, \dots, p_{n-1}, \lceil 2p_n + \frac{1}{2} \rceil) > (l_1, \dots, l_{n-1}, \lceil 2l_n + \frac{1}{2} \rceil)$ относительно лексикографического порядка. Покажем, что

$$\langle X_{n1}^{\alpha_1} \dots X_{n, n-1}^{\alpha_{n-1}} X_{1, -n}^{\beta_1} \dots X_{n-1, -n}^{\beta_{n-1}} X_{n0}^{\gamma} q_{p, m}, \omega(t, l, m) \rangle = 0. \quad (7)$$

Если эти векторы имеют различные веса относительно $\mathfrak{h}_n$, то они, очевидно, ортогональны. Предположим, что их веса совпадают. Они равны соответственно для левой и правой частей скалярного произведения (7):

$$\left(p_1 + \beta_1 - \alpha_1, \dots, p_{n-1} + \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}, \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^{n-1} p_i + \left\lceil 2p_n + \frac{1}{2} \right\rceil + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i + \gamma \right)$$

и

$$\left(t_1, \dots, t_{n-1}, - \sum_{i=1}^n m_i - \sum_{i=1}^{n-1} t_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} l_i + \left\lceil 2l_n + \frac{1}{2} \right\rceil \right).$$

Если $p_1 > l_1$, то ввиду совпадения весов $\alpha_1 = p_1 - t_1 + \beta_1 > l_1 - t_1$. Пользуясь контравариантностью $\langle \cdot, \cdot \rangle$, перепишем скалярное произведение (7):

$$\langle X_{n2}^{\alpha_2} \dots X_{n, n-1}^{\alpha_{n-1}} X_{1, -n}^{\beta_1} \dots X_{n-1, -n}^{\beta_{n-1}} X_{n0}^{\gamma} q_{p, m}, X_{1n}^{\alpha_1} \omega(t, l, m) \rangle.$$

Но $X_{1n} = \frac{\partial}{\partial z_{1n}}$. Вместе с тем в произвольном слагаемом, входящем в разложение $\omega(t, l, m)$, степень по z_{1n} не превышает $l_1 - t_1$. Следовательно, $X_{1n}^{\alpha_1} \omega(t, l, m) = 0$. Рассуждая индуктивно, предположим, что $p_1 = l_1, \dots, p_{i-1} = l_{i-1}$, но $p_i > l_i$. Перепишем скалярное произведение (7) в виде

$$\langle X_{n, i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots X_{n, n-1}^{\alpha_{n-1}} X_{1, -n}^{\beta_1} \dots X_{n-1, -n}^{\beta_{n-1}} X_{n0}^{\gamma} q_{p, m}, X_{in}^{\alpha_i} \dots X_{1n}^{\alpha_1} \omega(t, l, m) \rangle.$$

Ввиду совпадения весов, $\alpha_1 \geq l_1 - t_1, \dots, \alpha_{i-1} \geq l_{i-1} - t_{i-1}, \alpha_i > l_i - t_i$. Повторяя рассуждение, проведенное при доказательстве леммы 3.1, б), получаем, что многочлен $X_{i-1,n}^{\alpha_{i-1}} \dots X_{1n}^{\alpha_1} \omega(t, l, m)$ отличен от нуля лишь при $\alpha_1 = l_1 - t_1, \dots, \alpha_{i-1} = l_{i-1} - t_{i-1}$. При этом всякий его ненулевой моном уже не содержит переменных $z_{1n}, \dots, z_{i-1,n}$. Поэтому в операторе X_{in} можно не рассматривать дифференцирования по $z_{1n}, \dots, z_{i-1,n}$. Тогда $X_{in} \equiv \frac{\partial}{\partial z_{in}}$ и $X_{in}^{\alpha_i} \dots X_{1n}^{\alpha_1} \omega(t, l, m) = 0$, что доказывает равенство (7).

Поскольку $\mathcal{D}_k$ ортогонален всем векторам системы S' , то $S' \in \mathcal{D}_k^\perp$. Но S' порождает $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуль $R^\perp$, откуда $R^\perp \subseteq \mathcal{D}_k^\perp$. Учитывая, что по построению $R \subseteq \mathcal{D}_k$, получаем $R = \mathcal{D}_k$. Лемма 3.2 доказана.

Обратимся теперь к доказательству равенств (6). $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модули $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_i^\perp/\mathcal{D}_{i+1}^\perp$, очевидно, изоморфны. Но последний модуль согласно лемме 3.2 порождается полустаршими векторами $\{\omega(t, l, m) + \mathcal{D}_{i+1}^\perp; \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{l,m} = q_{i+1}\}\}$. Вес вектора $\omega(t, l, m) + \mathcal{D}_{i+1}^\perp$ в базисе $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$ пространства $\mathfrak{h}_{n-1}^*$ равен t , поэтому $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -подмодуль модуля $D_i^\perp/D_{i+1}^\perp$, порождаемый этим вектором, изоморфен $V_{(t_1, \dots, t_{n-1})}$. Условие $t \rightarrow l$, где $q_{l,m} = q_{i+1} = z_{1,-n}^{p_1} \dots z_{n-1,-n}^{p_{n-1}} z_{n0}^{p_n}$, сводится к системе неравенств

$$m_1 - p_1 \geq t_1 \geq m_2 - p_2 \geq \dots \geq m_{n-1} - p_{n-1} \geq t_{n-1} \geq m_n - \left\lfloor \frac{p_n}{2} \right\rfloor,$$

что доказывает равенства (6). Из этих равенств сразу следует, что построенная нами фильтрация f удовлетворяет условию б) определения 3.3.

Нам осталось доказать, что всякие два фактора f либо не изоморфны, либо их прообразы в V_m имеют разную степень нильпотентности относительно оператора X_{n0} , который в используемой модели имеет вид

$$X_{n0} = \frac{\partial}{\partial z_{n0}} + z_{1n} \frac{\partial}{\partial z_{10}} + \dots + z_{n-1,n} \frac{\partial}{\partial z_{n-1,0}} - z_{10} \frac{\partial}{\partial z_{1,-n}} - \dots - z_{n-1,0} \frac{\partial}{\partial z_{n-1,-n}}.$$

Пусть факторы $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j$ ($i \neq j$) порождаются соответственно образцами квазистарших векторов

$$z_{1,-n}^{p_1} \dots z_{n-1,-n}^{p_{n-1}} z_{n0}^{p_n} \quad \text{и} \quad z_{1,-n}^{l_1} \dots z_{n-1,-n}^{l_{n-1}} z_{n0}^{l_n}.$$

Если $p_i = l_i$, $i = 1, \dots, n-1$, а $\left\lfloor \frac{p_n}{2} \right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{l_n}{2} \right\rfloor$, то эти факторы не изоморфны, поскольку (ввиду (6)) они не изоморфны как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модули. Если же $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j$ как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модули изоморфны, то $\left\lfloor \frac{p_n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{l_n}{2} \right\rfloor$ и векторы $(p_1, \dots, p_n)$ и $(l_1, \dots, l_n)$ должны отличаться на вектор $(0, \dots, 0, 1)$. Такие факторы мы выше называли зеркально-сопряженными. Прообраз того фактора из пары зеркально-сопряженных факторов, у которого соответствующий квазистарший вектор имеет большую степень по переменной z_{n0} , имеет и большую (на 1) степень нильпотентности относительно оператора X_{n0} . Таким образом, фильтрация f удовлетворяет всем условиям определения 3.3, и теорема 3.1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Базис из полустарших векторов в пространстве V_m^+ (см. следствие из леммы 3.1) легко может быть достроен до базиса во всем пространстве V_m . Для этого достаточно взять $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -подмодули модуля V_m , порожденные базисными векторами $\omega(t, l, m)$, $\{t, l, m\}$ – кортеж. По предложению 2.2 эти подмодули неприводимы и V_m является их прямой суммой. Далее в каждом из этих $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -подмодулей надо выбрать базис из полустарших (относительно $\mathfrak{b}_{n-2}$) векторов, и т.д. Построенный таким образом базис в пространстве V_m является весовым (так как все векторы $\omega(t, l, m)$ весовые относительно $\mathfrak{h}_n$), хотя, вообще говоря, не является ортогональным.

§ 4. Категория $\mathcal{L}$ конечномерных $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей

В § 3 мы получили большой класс конечномерных (не вполне приводимых, вообще говоря) $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей, которые возникают как факторы фильтраций f , разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модулей V_m с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{b}_{n-1/2}$. Ниже мы получим более полное описание этого класса в терминах модулей Верма и их конечномерных фактормодулей.

Пусть, по-прежнему, P_n^B – множество старших весов $\mathfrak{b}_n$. Обозначим через M категорию модулей Верма $M(\lambda)$ над $\mathfrak{b}_n$ со старшим весом $\lambda \in P_n^B$ (внимание: нередко модуль Верма $M(\lambda)$ обозначается $M(\lambda + \delta)$, где δ – полусумма положительных корней $\mathfrak{b}_n$ (см., например, [10]); аналогичное замечание относится и к фактормодулю $L(\lambda)$):

$$M = \{M(\lambda); \lambda \in P_n^B\}.$$

Напомним, что модуль Верма $M(\lambda)$ над $\mathfrak{b}_n$ определяется следующим образом:

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{b}_n) \bigotimes_{U(\mathfrak{b}^+)} \mathbf{C}_\lambda,$$

где алгебра Ли $\mathfrak{b}^+$ действует на $\mathbf{C}_\lambda$ с помощью одномерного представления τ_λ : $\tau_\lambda(h + n) = \lambda(h)$ для любых $h \in \mathfrak{h}_n$ и $n \in \mathfrak{n}_+$. Пусть $v_\lambda = 1 \otimes 1$ – старший вектор $M(\lambda)$. Тогда $X_{ii}v_\lambda = \lambda_i v_\lambda$, $i = 1, \dots, n$.

Обозначим через $\mathcal{M}(\lambda)$ циклический $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -подмодуль модуля $M(\lambda)$, порожденный v_λ . Тогда наряду с категорией M мы получаем категорию $\mathcal{M}$ модулей Верма над $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ со старшим весом λ :

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}(\lambda); \lambda \in P_n^B\}.$$

Следующее предложение показывает, что модуль Верма $\mathcal{M}(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, фактически не зависит от последней компоненты λ_n старшего веса λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_n^* \cap P_n^B$ таковы, что их ограничения на $\mathfrak{h}_{n-1}$ совпадают. Тогда $\mathcal{M}(\lambda) \simeq \mathcal{M}(\mu)$.

Доказательство в точности повторяет доказательство предложения 4.1 в [4] и потому опущено.

Пусть $\{t, l, m\}$ – кортеж (в смысле определения 3.4), $t \in P_{n-1}^B$, $l \in P_n^D$, $m \in P_n^B$. Легко видеть, что полустарший вектор $\omega(t, l, m)$ является квазистаршим, если

$$t_1 = l_1, \quad t_2 = l_2, \quad \dots, \quad t_{n-1} = l_{n-1}. \quad (8)$$

А именно

$$\omega(l, l, m) = (-1)^{n-1} z_{1,-n}^{m_1-l_1} \dots z_{n-1,-n}^{m_{n-1}-l_{n-1}} z_{n0}^{2m_n - \lfloor 2l_n + \frac{1}{2} \rfloor}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Каждому кортежу $\{l, l, m\}$ (т.е. кортежу, удовлетворяющему (8)), сопоставим квазистарший вектор $q_{l,m}$, определяемый равенством

$$q_{l,m} = z_{1,-n}^{m_1-l_1} z_{2,-n}^{m_2-l_2} \dots z_{n-1,-n}^{m_{n-1}-l_{n-1}} z_{n0}^{2m_n - \lfloor 2l_n + \frac{1}{2} \rfloor}.$$

Следующее предложение суммирует доказанные в § 2, 3 утверждения о связи квазистарших векторов $q_{l,m}$ с факторами фильтраций f , разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модулей $V_m|_{\mathfrak{b}_{n-1}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. а) Система векторов $\{q_{l,m}; \{l, l, m\} - \text{кортеж}\}$ образует ортогональный базис пространства квазистарших векторов V_m^{++} .

б) Факторы фильтраций f , разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модулей V_m , являются циклическими $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулями, порожденными образами квазистарших векторов $q_{l,m}$.

в) Пусть $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ – фактор фильтрации f , порожденный образом квазистаршего вектора $q_{l,m}$. Тогда его спектр как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуля таков:

$$\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i|_{\mathfrak{b}_{n-1}} = \bigoplus_{l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-1} \geq t_{n-1} \geq |l_n|} V_{(t_1, \dots, t_{n-1})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть а) является переформулировкой предложения 2.3. Часть б) вытекает из построения фильтраций f . Часть в) является следствием формулы (6).

Из предложения 4.2 вытекает, в частности, что $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -факторы фильтраций f как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модули однозначно определяются первым индексом $l \in P_n^D$ соответствующего квазистаршего вектора $q_{l,m}$. При этом факторы, отвечающие зеркально-сопряженным весам $l = (l_1, \dots, l_{n-1}, l_n) \in P_n^D$ и $l^* = (l_1, \dots, l_{n-1}, -l_n) \in P_n^D$, как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модули изоморфны. Более того, ниже будет показано (теорема 4.2), что эти факторы и как $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модули однозначно определяются индексом l вектора $q_{l,m}$, т.е. их структура как $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей не зависит от того, из какого исходного $\mathfrak{b}_n$ -модуля V_m они были получены; а зеркально-сопряженные факторы, порожденные квазистаршими векторами $q_{l,m}$ и $q_{l^*,m}^*$, изоморфны и как $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модули. Этот факт будет существенно использоваться ниже при определении категории $\mathcal{L}$ конечномерных $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей.

Хорошо известно, что модуль Верма $M(\lambda)$ обладает единственным наибольшим $\mathfrak{b}_n$ -подмодулем K , отличным от $M(\lambda)$. При этом фактормодуль $M(\lambda)/K = L(\lambda)$ является (при $\lambda \in P_n^B$) конечномерным неприводимым $\mathfrak{b}_n$ -модулем со старшим весом λ , т.е. $L(\lambda) \simeq V_\lambda$. Отображение $i: P_n^B \rightarrow \mathfrak{b}_n^\wedge$, сопоставляющие весу $\lambda \in P_n^B$ класс эквивалентности $[L(\lambda)]$ конечномерных неприводимых $\mathfrak{b}_n$ -модулей, взаимно однозначно [10, теорема 7.2.6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{M}(\lambda) \cap K$. Фактормодуль $\mathcal{M}(\lambda)/\mathcal{K}$ является, очевидно, конечномерным $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулем со старшим весом λ , который мы будем обозначать через $\mathcal{L}(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть v_λ (соответственно v'_λ) – канонический образующий модуля $\mathcal{M}(\lambda)$ (соответственно $\mathcal{L}(\lambda)$). Пусть I (соответственно I') – аннулятор элемента v_λ (соответственно v'_λ) в $U(\mathfrak{b}_{n-1/2})$. Тогда:

$$\begin{aligned} \text{а) } I &= U(\mathfrak{b}_{n-1/2})\mathfrak{m}_+ + \sum_{h \in \mathfrak{b}_{n-1}} U(\mathfrak{b}_{n-1/2})(h - \lambda(h)); \\ \text{б) } I' &= I + U(\mathfrak{b}_{n-1/2})X_{0,n-1}^{2\lambda_{n-1}+1} + \sum_{j=1}^{n-1} U(\mathfrak{b}_{n-1/2})X_{j+1,j}^{\lambda_j - \lambda_{j+1}+1}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 4.1 имеет вычислительный характер и потому опущено. Отметим лишь, что утверждение а) теоремы легко следует из соответствующей теоремы для $\mathfrak{b}_n$ -модуля $M(\lambda)$ [10, предложение 7.2.7] и предложения 4.1. Доказательство утверждения б) аналогично доказательству теоремы для симплектической серии, приведенному в заметке [11].

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть f – фильтрация, разделяющая компоненты $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуля V_m (см. § 3). Пусть $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j$ – факторы фильтрации f , порожденные образами квазистарших векторов $q_{\lambda,m}$ и $q_{\lambda^*,m}$, $\lambda, \lambda^* \in P_n^D$ – зеркально-сопряженные веса, $\{\lambda, \lambda^*, m\}$ – кортеж. Тогда

$$\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i \simeq \mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j \simeq \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При построении фильтрации f линейный порядок во множестве квазистарших векторов был выбран таким образом, чтобы $\mathfrak{m}_+(q_{\lambda,m}) \subset \mathcal{D}_i$ и $\mathfrak{m}_+(q_{\lambda^*,m}) \subset \mathcal{D}_j$. Таким образом, любой элемент идеала I аннулирует образ $q_{\lambda,m}$ в $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$, а также образ $q_{\lambda^*,m}$ в $\mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j$. Тогда ввиду свойства универсальности индуцированных представлений существует единственный сюръективный $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -гомоморфизм $\varphi: \mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|) \rightarrow \mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ такой, что $\varphi(1 \otimes 1) = q_{\lambda,m} + \mathcal{D}_i$. Аналогично, существует единственный сюръективный $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -гомоморфизм $\psi: \mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|) \rightarrow \mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j$ такой, что $\psi(1 \otimes 1) = q_{\lambda^*,m} + \mathcal{D}_j$. Далее, из спектрального разложения $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуля (предложение 4.2, в)) следует, что $X_{0,n-1}^{2\lambda_{n-1}+1} q_{\lambda,m} \in \mathcal{D}_i$, $X_{k+1,k}^{\lambda_k - \lambda_{k+1}+1} q_{\lambda,m} \in \mathcal{D}_i$ ($k = 1, 2, \dots, n-2$) и $X_{n,n-1}^{\lambda_{n-1} - |\lambda_n|+1} q_{\lambda,m} \in \mathcal{D}_i$. Аналогично, поскольку спектральные характеристики $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модулей $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j$ совпадают, имеем $X_{0,n-1}^{2\lambda_{n-1}+1} q_{\lambda^*,m} \in \mathcal{D}_j$, $X_{k+1,k}^{\lambda_k - \lambda_{k+1}+1} q_{\lambda^*,m} \in \mathcal{D}_j$ ($k = 1, 2, \dots, n-2$) и $X_{n,n-1}^{\lambda_{n-1} - |\lambda_n|+1} q_{\lambda^*,m} \in \mathcal{D}_j$. Учитывая, что подмодуль $\mathcal{K}$ в $\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|)$ порождается согласно теореме 4.1 векторами $X_{0,n-1}^{2\lambda_{n-1}+1}(1 \otimes 1)$, $X_{k+1,k}^{\lambda_k - \lambda_{k+1}+1}(1 \otimes 1)$, $k = 1, \dots, n-2$, и $X_{n,n-1}^{\lambda_{n-1} - |\lambda_n|+1}(1 \otimes 1)$, получаем $\mathcal{K} \subseteq \ker \varphi$ и $\mathcal{K} \subseteq \ker \psi$. Тогда факторотображения $\tilde{\varphi}: \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|) \rightarrow \mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ и $\tilde{\psi}: \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|) \rightarrow \mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j$ являются изоморфизмами $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей, поскольку как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модули они изоморфны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно способу построения фильтраций f , разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модулей V_m , факторы фильтраций $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_{j+1}/\mathcal{D}_j$, порожденные образами квазистарших векторов $q_{\lambda,m}$ и $q_{\lambda^*,m}$, обязаны иметь соседние номера, если $\lambda \neq \lambda^*$, т.е. i и j на самом деле удовлетворяют соотношению $|i - j| = 1$. Однако при доказательстве теоремы 4.2 этот факт нами не использовался.

Обозначим через $\mathcal{L}$ категорию $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -факторов фильтраций, разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модулей V_m (морфизмами $\mathcal{L}$ являются гомоморфизмы $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей). Из теоремы 4.2 вытекает следующее простое следствие.

СЛЕДСТВИЕ. $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(\lambda); \lambda \in P_n^B\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i: \mathcal{L} \in P_n^B$ – отображение, сопоставляющее фактору, порожденному образом квазистаршего вектора $q_{\lambda,m}$ ($\{\lambda, \lambda, m\}$ – кортеж, $\lambda \in P_n^D$, $m \in P_n^B$), его “старший” вес $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|)$. Но если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in P_n^D$, то $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|) \in P_n^B$. Следовательно, отображение i сюръективно (при этом i сопоставляет зеркально-сопряженным факторам, порожденным $q_{\lambda,m}$ и $q_{\lambda^*,m}$, $\lambda \neq \lambda^*$, один и тот же вес $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|) \in P_n^B$). Далее, факторы $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\mu)$, соответствующие различным “старшим” весам $\lambda, \mu \in P_n^B$, $\lambda \neq \mu$, не изоморфны как $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модули ввиду того, что как $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модули они не изоморфны (предложение 4.2, в)).

Следующее предложение суммирует спектральные характеристики модулей $\mathcal{L}(\lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для любого $\mathfrak{b}_n$ -модуля V_m , $m \in P_n^B$,

$$V_m|_{\mathfrak{b}_{n-1/2}} = \bigoplus_{l \rightarrow m} \mathcal{L}(l),$$

где $\bigoplus$ – полупрямая сумма (зацепление) $(\mathfrak{b}_{n-1/2})$ -модулей, берется по всем весам $l \in P_n^D$ таким, что $l \rightarrow m$;

$$\mathcal{L}(l)|_{\mathfrak{b}_{n-1}} = \bigoplus_{t \rightarrow l} V_t.$$

Предложение 4.3 дает основание считать, что именно модули категории $\mathcal{L}$ отвечают за “промежуточные строчки” в таблицах Гельфанда–Цетлина, нумерующих базисные векторы $\mathfrak{b}_n$ -модулей V_m (ср. (5)). В то же время категория $\mathcal{L}$ является не только категорией модулей над промежуточной между $\mathfrak{b}_n$ и $\mathfrak{b}_{n-1}$ алгеброй Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$, но и модули этой категории (рассматриваемые с точностью до изоморфизма) находятся во взаимно однозначном соответствии со множеством старших весов P_n^B (следствие из теоремы 4.2), что объясняет на первый взгляд неожиданное отнесение данной промежуточной алгебры Ли именно к серии $\mathfrak{b}$.

Итак, теперь мы можем различать изоморфные неприводимые компоненты $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -модуля V_m , относя их к различным (см. определение 3.3) модулям категории $\mathcal{L}$.

ПРИМЕР. Рассмотрим сужение $\mathfrak{b}_3$ -модуля $V = V_{(2,1,1)}$ на $\mathfrak{b}_2$. Согласно правилу ветвления (5) в спектре получаемого $\mathfrak{b}_2$ -модуля неприводимая компонента $V_{(1,1)}$ (изоморфная присоединенному представлению $\mathfrak{b}_2$) содержится шестикратно. Пользуясь конструкцией Желобенко [3], мы реализуем $\mathfrak{b}_3$ -модуль V в пространстве многочленов на максимальной унитарной подгруппе Z_+ ; $f(z) = f(z_{12}, z_{13}, z_{10}, z_{1,-3}, z_{1,-2}, z_{23}, z_{20}, z_{2,-3}, z_{30}) \in V$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z_{12}} + z_{23} \frac{\partial}{\partial z_{13}} + z_{20} \frac{\partial}{\partial z_{10}} + z_{2,-1} \frac{\partial}{\partial z_{1,-3}} - \left(\frac{z_{20}^2}{2} + z_{23} z_{2,-3} \right) \frac{\partial}{\partial z_{1,-2}} \right)^2 f(z) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_{23}} + z_{30} \frac{\partial}{\partial z_{20}} - \frac{z_{30}^2}{2} \frac{\partial}{\partial z_{2,-3}} \right) f(z) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_{30}} \right)^3 f(z) &= 0. \end{aligned}$$

Система векторов $\{z_{1,-3}^k z_{30}^s, 0 \leq k \leq 1, 0 \leq s \leq 2, k, s \in \mathbf{Z}\}$ образует ортогональный базис пространства $V_{(2,1,1)}^{++}$. Изоморфные друг другу неприводимые $\mathfrak{b}_2$ -подмодули порождаются следующими шестью векторами:

- 1) $X_{31}v = z_{13}$,
- 2) $X_{31}X_{03}v = z_{13}z_{30}$,
- 3) $X_{31}X_{03}^2v = z_{13}z_{30}^2$,
- 4) $X_{-3,1}v = z_{1,-3}$,
- 5) $X_{-3,1}X_{03}v = z_{1,-3}z_{30}$,
- 6) $X_{-3,1}X_{03}^2v = z_{1,-3}z_{30}^2$,

где v – старший вектор $\mathfrak{b}_3$ -модуля $V_{(2,1,1)}$.

Фильтрация f ($\mathfrak{b}_{3-1/2}$)-подмодулей V , разделяющая изоморфные компоненты, состоит из шести ненулевых подмодулей: $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6$, порожденных соответственно векторами $v = 1, X_{03}v = z_{30}, X_{03}^2v = z_{30}^2, X_{-3,1}v = z_{1,-3}, X_{-3,1}X_{03}v = z_{1,-3}z_{30}, X_{-3,1}X_{03}^2v = z_{1,-3}z_{30}^2$. Легко видеть, что $X_{31}v$ имеет ненулевой образ в $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_0 \simeq \mathcal{L}(2, 1, 1)$, $X_{31}X_{03}v$ имеет ненулевой образ в $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 \simeq \mathcal{L}(2, 1, -1)$, $X_{31}X_{03}^2v$ имеет ненулевой образ в $\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_2 \simeq \mathcal{L}(2, 1, 0)$, $X_{-3,1}v$ – в $\mathcal{D}_4/\mathcal{D}_3 \simeq \mathcal{L}(1, 1, 1)$, $X_{-3,1}X_{03}v$ – в $\mathcal{D}_5/\mathcal{D}_4 \simeq \mathcal{L}(1, 1, -1)$, наконец $X_{-3,1}X_{03}^2v$ – в $\mathcal{D}_6/\mathcal{D}_5 \simeq \mathcal{L}(1, 1, 0)$. Зеркально-сопряженные факторы $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_0 \simeq \mathcal{L}(2, 1, 1)$ и $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 \simeq \mathcal{L}(2, 1, -1)$ хотя и изоморфны как $(\mathfrak{b}_{3-1/2})$ -модули, но их прообразы в V различаются по степени нильпотентности оператора X_{30} . На $\mathcal{D}_1$ оператор X_{30} тождественно равен нулю, а на прообразе $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$ оператор X_{30} имеет степень нильпотентности 2: $X_{30} \neq 0$, но $X_{30}^2 = 0$.

Аналогичное замечание справедливо и для зеркально-сопряженных факторов $\mathcal{D}_4/\mathcal{D}_3 \simeq \mathcal{L}(1, 1, 1)$ и $\mathcal{D}_5/\mathcal{D}_4 \simeq \mathcal{L}(1, 1, -1)$. На прообразе фактора $\mathcal{D}_4/\mathcal{D}_3$ оператор X_{30} имеет степень нильпотентности 3, а на прообразе $\mathcal{D}_5/\mathcal{D}_4$ – степень нильпотентности 4. Таким образом, $\mathfrak{b}_2$ -модуль $V_{(2,1,1)}$ допускает разделение изоморфных компонент с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{b}_{3-1/2}$.

Автор глубоко признателен Д.П. Желобенко за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
2. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Конечномерные представления группы ортогональных матриц // ДАН СССР. 1950. Т. 71. № 6. С. 1017–1020.
3. Желобенко Д. П. Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений // УМН. 1962. Т. 17. № 1. С. 27–119.
4. Штепин В. В. Промежуточные алгебры Ли и их конечномерные представления // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 176–198.
5. Штепин В. В. Разделение кратных точек спектра в редукции $\mathfrak{sp}(2n) \downarrow \mathfrak{sp}(2n-2)$ // Функцион. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 4. С. 93–95.
6. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли их представления. М.: Наука, 1970.
7. Jantzen J. G. Moduln mit einem höchsten Gewicht // Lect. Notes Math. 1979. В. 750. S. 1–182.
8. Желобенко Д. П. Аналог базиса Гельфанда–Цетлина для симплектических алгебр Ли // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 193–194.
9. Серр Ж. П. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1969.
10. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.
11. Штепин В. В. Об одном классе конечномерных $\mathfrak{sp}(2n-1)$ -модулей // УМН. 1986. Т. 41. № 3. С. 207–208.

Поступило в редакцию
19.VIII.1996