Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Шишков, А. Г. Щелков, Динамика носителей энергетических решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 3, 175–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:52:57

УДК 517.9

А. Е. Шишков, А. Г. Щелков

Динамика носителей энергетических решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка

Изучается геометрия носителей решений задачи Коши–Дирихле для широкого класса квазилинейных вырождающихся параболических уравнений произвольного порядка, модельным представителем которых является уравнение нестационарной фильтрации с нелинейным поглощением:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|D_x u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + b_0 |u|^{\lambda-1} u = 0, \quad b_0 > 0, \quad n \geq 1.$$

В случае $0 < \lambda < p \leq q$ и $0 < \lambda < q < p$, соответствующих “быстрой” и “медленной” диффузиям, найдены в определенном смысле точные условия на поведение начальной функции $u_0(x) \in L_{q+1}(\Omega)$ в окрестности границы ее носителя, обеспечивающие появление эффекта конечной и бесконечной инерции носителя произвольного энергетического решения. Установлено условие возникновения обратного движения фронта границы носителя.

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучаются локализационные свойства и распространение носителей обобщенных решений следующей смешанной задачи Коши–Дирихле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) + Au + b(x, t, u) &= 0 \\ \forall (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T_1), \quad T_1 < \infty, \quad q > 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$D_x^\alpha u|_{\Gamma=\partial\Omega \times (0, T_1)} = 0 \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq m-1, \quad m \geq 1, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L_{1+q}(\Omega). \quad (1.3)$$

Здесь Ω – произвольная (возможно, неограниченная) область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$;

$$Au \equiv (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha a_\alpha(x, t, u, D_x u, \dots, D_x^m u),$$

Первому автору этой работы был выдан грант Международного научного фонда № U97000.

причем каратеодориевы функции $a_\alpha(x, t, \xi)$, $b(x, t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, \xi) \xi_\alpha \geq d_0 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^{p+1} \quad \forall (x, t, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad d_0 > 0, \quad (1.4)$$

$$a_\alpha |x, t, \xi| \leq d_1 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^p, \quad d_1 < \infty, \quad p > 0, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} d'_2 |s|^{1+\lambda} &> b(x, t, s) s \geq d_2 |s|^{1+\lambda} \quad \forall (x, t, s) \in Q \times \mathbb{R}^1; \\ d'_2 < \infty, \quad d_2 > 0, \quad \lambda > 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

через $N(m)$ обозначено число различных n -мерных мультииндексов длины, не большей, чем m .

Класс уравнений, определяемый выражением (1.1), достаточно широк и охватывает большое количество уравнений математической физики. Например, в него входит уравнение нестационарной ньютоновской фильтрации с нелинейной абсорбцией

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u|^{q-1} u) - \Delta u + |u|^{\lambda-1} u = 0, \quad u = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T). \quad (1.7)$$

Для этого уравнения в случае $n = 1$ Л.К. Мартинсоном, К.Б. Павловым [1] и А.С. Калашниковым [2], [3] было установлено при $0 < \lambda < q < 1$ свойство локализации решений и конечность скорости изменения носителей решений задачи Коши. Для $n > 1$ эти результаты обобщались в работах [4], [5]. Многие авторы устанавливали оценки скорости изменения носителей. С другой стороны, были обнаружены ситуации, когда носитель решений может изменяться более сложным образом. Так, Р. Кершнером [6], [7] найдены решения, носитель которых строго уменьшается с течением времени. Были также установлены условия, при которых решение задачи Коши со строго положительной начальной функцией $u_0(x)$ с течением времени обращается в нуль в некоторых подобластях (так называемые “мертвые зоны”) и даже обращается в тождественный нуль за конечное время (см. [2], [8]–[13]). Отметим, что во всех перечисленных работах использовалась техника, связанная с построением различных суб- и суперрешений и поэтому, естественно, не пригодная для общих уравнений. В ряде работ локализационные свойства обобщенных решений уравнений второго порядка структуры (1.1) изучались методом так называемых локальных энергетических оценок (например, см. [14]–[18]). Конечность скорости изменения носителей обобщенных решений квазилинейных уравнений структуры (1.1) произвольного порядка и некоторые ее оценки были установлены Ф. Бернисом [19]. При этом существенно использовались доказанные в [19] весовые интерполяционные неравенства типа Ниренберга–Гальярдо. Другой способ, основанный на априорных оценках типа оценок, которые выражают принцип Сен-Венана в теории упругости, был предложен в работах [20], [21]. С помощью этого метода в настоящей работе устанавливаются для произвольных энергетических обобщенных решений задачи (1.1)–(1.3) условия конечной и бесконечной задержки расширения носителя (конечная и бесконечная инерция). Выводятся условия на поведение интегральной нормы начальной функции в окрестности ее носителя, обеспечивающие сжатие носителя для всех $t > 0$, и даны оценки скорости сжатия.

§ 2. Формулировки основных результатов

Введем функциональное пространство

$$W \equiv W_{p+1}^m(\Omega, \partial\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega).$$

Через $W_\beta^m(\Omega, R)$, $R \subset \partial\Omega$, обозначается, как обычно, замыкание в норме $W_\beta^m(\Omega)$ множества функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль в окрестности R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Энергетическим обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) называем функцию*

$$u(x, t) \in C([0, T_1]; L_{q+1}(\Omega)) \cap L_{p+1}(0, T; W) \cap L_{1+\lambda}(\Omega \times (0, T_1)),$$

удовлетворяющую уравнению (1.1) в смысле распределений из $D'(Q)$ и начальному условию (1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следуя [19], из определения выводится формула интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(T)q}{q+1} \int_{\Omega} |u(x, T)|^{q+1} \eta(x) dx \\ & + \int_{\Omega \times (0, T)} \left[\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, u, D_x u, \dots, D_x^m u) \varphi \right. \\ & \times D_x^\alpha(\eta u) + b(x, t, u(x, t)) u(x, t) \eta(x) \varphi(t) \\ & \left. - \frac{q}{q+1} |u(x, t)|^{q+1} \varphi'_t(t) \eta(x) \right] dx dt \\ & = \frac{q}{q+1} \varphi(0) \int_{\Omega} |u_0(x)|^{q+1} \eta(x) dx \quad \forall T: 0 < T \leq T_1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\varphi(t)$ и $\eta(x)$ – произвольные функции соответственно из $C^1[0, T_1]$ и $W_\infty^m(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $q = 1$ разрешимость задачи (1.1)–(1.3) достаточно хорошо изучена (см. [22]). В случае $q \neq 1$ существование энергетического обобщенного решения при $b(x, t, s) = |s|^{\lambda-1}s$ и вариационной структуре оператора A установлено в [19].

Введем теперь следующие обозначения. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u_0(x)$ – область и начальная функция из (1.1)–(1.3), то $\Omega(s) = \Omega \cap \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n: x_n < s\}$,

$$\begin{aligned} Q(s) &= \Omega(s) \times (0, T_1) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \\ f(s) &\equiv \int_{\Omega(s)} |u_0(x)|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

На протяжении всей работы считаем, что при некотором $s_0 > -\infty$

$$\text{supp } u_0(x) \cap \Omega(s_0) = \emptyset \implies f(s) = 0 \quad \forall s \leq s_0. \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 1 (эффект конечной инерции носителя решения при медленной диффузии). Пусть в уравнении (1.1)

$$0 < q < p. \quad (2.3)$$

Пусть $u_0(x)$, кроме условия (2.2), удовлетворяет также следующему условию малости в окрестности $\partial\Omega(s_0)$:

$$f(s) \leq k_1(s - s_0)^{\alpha_1} \quad \forall s > s_0, \quad k_1 < \infty, \quad \alpha_1 = n + \frac{m(p+1)(q+1)}{p-q}. \quad (2.4)$$

Тогда существует $\tau = \tau(k_1) > 0$ такое, что для любого энергетического решения $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3)

$$\text{supp}_x u(x, t) \cap \Omega(s_0) = \emptyset \quad \forall t : 0 < t < \tau. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2 (бесконечная инерция носителя при медленной диффузии). Пусть в уравнении (1.1)

$$0 < \lambda < q < p, \quad (2.6)$$

и $u_0(x)$, кроме условия (2.2), удовлетворяет следующему условию малости:

$$f(s) \leq k_2(s - s_0)^{\alpha_2} \quad \forall s > s_0, \quad k_2 < \infty, \quad \alpha_2 = n + \frac{m(p+1)(q+1)}{p-\lambda}. \quad (2.7)$$

Тогда существует постоянная $k_2^{(0)} > 0$ такая, что для любого энергетического решения $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3)

$$\text{supp}_x u(x, t) \cap \Omega(s_0) = \emptyset \quad \forall t > 0, \quad (2.8)$$

как только постоянная k_2 из условия (2.7) удовлетворяет неравенству $k_2 < k_2^{(0)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Эффект конечной инерции для энергетических решений уравнений второго порядка ($m = 1$) типа медленной диффузии с сильной абсорбцией (условие (2.6)) изучался в работах [16]–[18], причем в последней из этих работ – методом, не допускающим прямого обобщения на уравнения высокого порядка при $0 < \lambda < q < p$ и условии малости на $u_0(x)$, которое после дополнительных преобразований может быть записано в виде

$$\int_0^c s^{-1 - \frac{\alpha_2(p+1)}{p}} f((s + s_0)^{\frac{p+1}{p}}) ds < \infty \quad \forall c > 0. \quad (2.7^*)$$

Заметим, что условие (2.7*) является более жестким, чем условие (2.7). Функция $f_0(s) = k(s - s_0)^{\alpha_2}$, $k < k_2^{(0)}$, удовлетворяет условию (2.7), но не удовлетворяет (2.7*). Отметим еще, что в работе [21] показано появление эффекта бесконечной инерции энергетических решений уравнений произвольного порядка вида (1.1) при $q = 1$ и выполнении для начальной функции условия малости (2.7).

ТЕОРЕМА 3 (бесконечная инерция носителя при быстрой диффузии). Пусть в уравнении (1.1)

$$0 < \lambda < p \leq q, \quad \frac{nq - m(q+1)}{n + m(q+1)} \leq p, \quad (2.9)$$

и $u_0(x)$, кроме условия (2.2), удовлетворяет следующему условию малости:

$$f(s) \leq k_3(s - s_0)^{\alpha_2} \quad \forall s > s_0, \quad k_3 < \infty, \quad \alpha_2 = n + \frac{m(p+1)(q+1)}{p - \lambda}. \quad (2.10)$$

Тогда существует постоянная $k_3^{(0)}$: $0 < k_3^{(0)} < k_2^{(0)}$, такая, что для любого энергетического решения $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2) имеет место свойство (2.8) в случае, если $k_3 < k_3^{(0)}$.

ТЕОРЕМА 4 (обратное движение фронта носителя решения при медленной диффузии). В условиях теоремы 2 существует такая постоянная $k_2^{(1)}$: $0 < k_2^{(1)} < k_2^{(0)}$, что при удовлетворении начальной функцией $u_0(x)$ условия малости (2.7) с произвольным $k_2 < k_2^{(1)}$ обязательно существует $\delta = \delta(k_2) > 0$ такое, что

$$\text{supp}_x u(x, t) \cap \Omega(l(t)) = \emptyset \quad \forall t > 0, \quad (2.11)$$

где $u(x, t)$ – произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3),

$$l(t) = s_0 + \delta t^{\frac{p-\lambda}{m(p+1)(q-\lambda)}}. \quad (2.12)$$

Пусть начальная функция удовлетворяет более сильному условию малости, чем (2.7);

$$f(s) \leq f_1(s) < f_0(s) \equiv k_2^{(1)}(s - s_0)^{\alpha_2} \quad \forall s > s_0. \quad (2.7^{**})$$

Тогда существуют постоянные $D < \infty$ и $0 < d < 1$, зависящие только от известных параметров уравнения (1.1), такие, что при выполнении для мажоранты $f_1(s)$ условия правильной монотонности:

$$f_1\left(s_0 + s - D(f_1(s_0 + s))^{\frac{1}{\alpha_2}}\right) \geq d \cdot f_1(s_0 + s) \quad \forall s > 0, \quad (2.13)$$

свойство (2.11) имеет место с

$$l(t) = s_0 + c_1 \left[f_1^{-1} \left(C_1 t^{\frac{n(p-\lambda)+m(p+1)(q+1)}{m(p+1)(q-\lambda)}} \right) - s_0 \right], \quad c_1 > 0, \quad 0 < C_1 < \infty.$$

Здесь f_1^{-1} – функция, обратная к $f_1(s)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняется следующее соотношение на параметры уравнения (1.1):

$$\frac{p - \lambda}{m(p+1)(q - \lambda)} \leq 1 \iff \lambda \leq \frac{p + m(p+1)q}{m(p+1) - 1},$$

то, как следует из (2.12), стартовая скорость движения фронта отлична от нуля.

ТЕОРЕМА 5 (обратное движение фронта носителя при быстрой диффузии). В условиях теоремы 3 существует постоянная $k_3^{(1)}$: $0 < k_3^{(1)} < k_3^{(0)}$, такая, что если $u_0(x)$ удовлетворяет ограничению (2.10) с произвольной $k_3 < k_3^{(1)}$, то соответствующее энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3) обладает свойством (2.11) с

$$l(t) = s_0 + \delta_1 t^{\frac{p-\lambda}{m(p+1)(q-\lambda)}} \quad \forall t > 0, \quad (2.14)$$

где $\delta_1 = \delta_1(k_3) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, если начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет более сильному условию малости, чем (2.10):

$$f(s) \leq f_1(s) < f_0(s) \equiv k_3^{(1)}(s - s_0)^{\alpha_2} \quad \forall s > s_0,$$

то так же, как и в теореме 4, можно установить более быстрое смещение фронта носителя, чем то, что определяется функцией $l(t)$ из (2.14).

§ 3. Конечная и бесконечная инерции решений

Доказательство основных утверждений разобьем на ряд лемм, некоторые из которых являются общими для нескольких теорем. Введем еще семейства подобластей:

$$K(s, \delta) = \Omega(s) \setminus \Omega(s - \delta), \quad G(s, \delta) = Q(s) \setminus Q(s - \delta) \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1.$$

Мы систематически будем использовать интерполяционное неравенство Ниренберга–Гальярдо [24], которое в случае интересующего нас семейства подобластей $K(s, \delta)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \|D_x^j v\|_{\alpha, K(s, \delta)} &\leq d_4 \delta^{-j - \frac{n(\alpha - \gamma)}{\alpha \gamma}} \|v\|_{\gamma, K(s, \delta)} + d_3 \|D_x^m v\|_{\beta, K(s, \delta)}^\theta \|v\|_{\gamma, K(s, \delta)}^{1 - \theta}, \\ d_3 &< \infty, \quad d_4 < \infty, \quad 0 \leq j < m. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $v(x)$ – произвольная функция из соболевского пространства

$$\check{W}_\beta^m(K(s, \delta), \Omega \cap \partial K(s, \delta)) \cap L_\gamma(K(s, \delta)), \quad \|v\|_{\alpha, B}^\alpha \equiv \int_B |v|^\alpha dx;$$

$\gamma > 0$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$; постоянная $\theta \in [\frac{j}{m}, 1]$ такова, что

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{j}{n} = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{m}{n} \right) \theta + (1 - \theta) \frac{1}{\gamma};$$

постоянные d_3, d_4 зависят только от параметров m, n и не зависят от геометрии области Ω , от $\alpha, \beta, \gamma, s, \delta$ и от функции $v(x)$.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x, t)$ – произвольное энергетическое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3). Тогда для произвольных $0 < \delta < s$, $0 < T < T_1$ имеет место следующее энергетическое неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s-\delta)} |u(x, T)|^{q+1} dx + \int_{Q^{(T)}(s-\delta)} \left(T^{-1} |u|^{q+1} + |D_x^m u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1} \right) \varphi_T(t) dx dt \\ & \leq c \left(\delta^{-m(p+1)} \int_{G^{(T)}(s, \delta)} |u|^{p+1} \varphi_T(t) dx dt + f(s) \right) \equiv J_T(s, \delta); \\ & \varphi_T(t) \equiv \exp\left(-\frac{t}{T}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь и в дальнейшем через c обозначаются различные постоянные, зависящие лишь от известных параметров уравнения (1.1), $Q^{(T)}(s) = \Omega(s) \times (0, T)$, $G^{(T)}(s, \delta) = Q^{(T)}(s) \setminus Q^{(T)}(s - \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем срезающую функцию $\eta(h) \in C^m(\mathbb{R}_+^1)$ такую, что $\eta(h) = 0$ при $h > s$, $\eta(h) = 1$ при $h < s - \delta$ и

$$|D^j \eta| \leq d_5 \cdot \delta^{-j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad d_5 < \infty. \quad (3.3)$$

Подставим в интегральное тождество (2.1) $\varphi(t) \equiv \varphi_T(t)$ и в качестве η срезающую функцию $\eta(x_n)$. Используем для оценки сверху слагаемого

$$\int_{G^{(T)}(s, \delta)} a_\alpha(x, t, \dots, D_x^m u) D_x^\beta u D^{\alpha-\beta} \eta \varphi_T(t) dx dt, \quad |\beta| = i, \quad i = 0, \dots, m-1,$$

неравенство Гёльдера, оценку (1.5), интерполяционное неравенство (3.1) при $j = i$, $\alpha = \beta = \gamma = p + 1$, условие (1.6) и, наконец, неравенство Юнга с “ ε ”. Собирая все эти оценки, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{q+1} \eta dx + \int_{Q^{(T)}(s)} (T^{-1} |u|^{q+1} + |D_x^m u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}) \varphi_T(t) \eta dx dt \\ & \leq \varepsilon \int_{G^{(T)}(s, \delta)} |D_x^m u|^{p+1} \varphi_T dx dt + \frac{c_1(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} \\ & \quad \times \int_{G^{(T)}(s, \delta)} |u|^{p+1} \varphi_T dx dt + c_2 f(s) \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем функции

$$\begin{aligned} A(s) & \equiv \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{q+1} dx + \int_{Q^{(T)}(s)} (T^{-1} |u|^{q+1} + |u|^{\lambda+1}) \varphi_T(t) dx dt, \\ B(s) & \equiv \int_{Q^{(T)}(s)} |u|^{p+1} \varphi_T(t) dx dt, \\ H(s) & \equiv \int_{Q^{(T)}(s)} |D_x^m u|^{p+1} \varphi_T(t) dx dt. \end{aligned}$$

Можем переписать соотношение (3.4) в виде

$$A(s - \delta) + H(s - \delta) \leq \varepsilon H(s) + c_1(\varepsilon) \delta^{-m(p+1)} B(s) + c_2 f(s). \quad (3.5)$$

Так как в (3.5) $s > \delta > 0$ могут принимать любые значения, то справедливы и следующие неравенства:

$$\begin{aligned} A\left(s - \frac{\delta}{2^{j-1}}\right) + H\left(s - \frac{\delta}{2^{j-1}}\right) &\leq \varepsilon H\left(s - \frac{\delta}{2^j}\right) \\ &+ \left(\frac{2^j}{\delta}\right)^{m(p+1)} c_1(\varepsilon)B(s) + c_2 f(s) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь мы воспользовались монотонностью функций $B(s)$ и $f(s)$. Стартуем с неравенства (3.6) при $j = 1$, затем член $H\left(s - \frac{\delta}{2}\right)$ в правой части получившегося неравенства оцениваем при помощи (3.6) с $j = 2$, далее продолжаем циклически i раз. Собирая все слагаемые, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} A(s - \delta) + H(s - \delta) &\leq \varepsilon^i H\left(s - \frac{\delta}{2^i}\right) + \left(\frac{2}{\delta}\right)^{m(p+1)} c_1(\varepsilon)B(s) \\ &\times \sum_{k=0}^{i-1} (\varepsilon 2^{m(p+1)})^k + c_2 f(s) \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^k \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon = 2^{-1-m(p+1)}$ и устремляя i к ∞ , получаем

$$A(s - \delta) + H(s - \delta) \leq 2\left(\frac{2}{\delta}\right)^{m(p+1)} c_1(2^{-1-m(p+1)})B(s) + \frac{2^{m(p+1)+1} f(s)}{2^{m(p+1)+1} - 1} c_2,$$

что совпадает с требуемой оценкой (3.2).

ЛЕММА 2. Пусть $u(x, t)$ – произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3). Введем следующие функции, связанные с этим решением:

$$\begin{aligned} I_T(s) &= \int_{Q^{(T)}(s)} |u|^{p+1} \varphi_T(t) dx dt, \\ \Phi_T(s, h) &= \int_0^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} \eta(x_n) dx \right)^h \varphi_T(t) dx dt, \end{aligned}$$

где $0 < h$, $0 < T \leq T_1$; $\varphi_T(t)$ и $\eta(x_n)$ из леммы 1.

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq c J_T(s, \delta)^\theta \left(J_T(s + \delta, \delta)^{\frac{p+1}{q+1}-h} \Phi_T(s, h) \right)^{1-\theta} \\ \forall h : 0 < h &\leq \frac{p+1}{q+1}, \quad \forall \delta < s; \\ \theta &= \frac{n(p-q)}{n(p-q) + m(1+q)(1+p)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интерполяционное неравенство (3.1) при $\delta \rightarrow \infty$, $j = 0$, $\alpha = p + 1$, $\beta = p + 1$, $\gamma = 1 + q$ дает

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} |u(x, t)|^{p+1} dx \\ & \leq d_3^{p+1} \left(\int_{\Omega(s)} |D_x^m u(x, t)|^{p+1} dx \right)^\theta \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{(1-\theta)(p+1)}{(q+1)}} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \end{aligned}$$

где θ из (3.7). Умножая это неравенство на $\varphi_T(t)$ и интегрируя его по t , получим, применяя неравенство Гёльдера,

$$\begin{aligned} I_T(s) & \leq d_3^{p+1} \left(\int_{Q^{(T)}(s)} |D^m u|^{p+1} \varphi_T dx dt \right)^\theta \\ & \quad \times \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} \varphi_T dt \right)^{1-\theta} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом оценки (3.2), выводим

$$I_T(s - \delta) \leq c J_T(s, \delta)^\theta \left(\Psi_T \left(s - \delta, \frac{p+1}{q+1} \right) \right)^{1-\theta} \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1, \quad (3.8)$$

где $\Psi_T(s, h) \equiv \int_0^T \left[\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right]^h \varphi_T(t) dt$.

Оценим отдельно второй сомножитель в (3.8) сверху. Для этого введем функцию

$$\zeta^{(h)}(t) = \int_0^t \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, \theta)|^{q+1} \eta dx \right)^h \varphi_T(\theta) d\theta.$$

Легко проверить справедливость следующего равенства:

$$\int_{Q^{(T)}(s)} |u(x, t)|^{q+1} \eta(x_n) \frac{d}{dt} (\zeta^{(h)}(t)) dx dt = \zeta^{(h+1)}(T) \quad \forall h > 0.$$

Поэтому, подставляя в интегральное тождество (2.1) в качестве $\varphi(t)$ введенную функцию $\zeta^{(h)}(t)$, получим, используя условия (1.5), (1.6), неравенство

$$\begin{aligned} \zeta^{(h+1)}(T) & \equiv \Phi_T(s, h+1) = \zeta^{(h)}(T) \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{q+1} \eta dx \\ & \quad + \int_{Q^{(T)}(s)} \left[\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \dots, D^m u) D^\alpha(u\eta) + b(x, t, u) u \eta \right] \zeta^{(h)}(t) dx dt \\ & \leq c \zeta^{(h)}(T) \left[\int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{q+1} \eta dx + \int_{Q^{(T)}(s)} (|D_x^m u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}) \eta dx dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{G^{(T)}(s, \delta)} |D_x^m u|^p \sum_{i=1}^m \delta^{-i} |D_x^{m-i} u| dx dt \right]. \end{aligned}$$

Применяя для оценки сверху последнего слагаемого в квадратных скобках неравенство Гёльдера, затем интерполяционное неравенство (3.1) при $j = m - i$, $\alpha = \beta = \gamma = p + 1$ и далее используя оценку (3.2) с $s + \delta$ вместо s , получим

$$\Phi_T(s, h + 1) \leq c \Phi_T(s, h) J_T(s + \delta, \delta) \quad \forall h > 0.$$

Отсюда, еще раз применяя неравенство Гёльдера, легко получаем

$$\Phi_T(s, h_2) \leq c \Phi_T(s, h_1) J_T(s + \delta, \delta)^{h_2 - h_1} \quad \forall h_2 > h_1 > 0. \quad (3.9)$$

Очевидно, что

$$\Psi_T(s - \delta, h) \leq \Phi_T(s, h) \quad \forall h > 0.$$

Поэтому из оценки (3.8) с учетом соотношения (3.9) при $h_2 = \frac{p+1}{q+1}$, $h_1 = h$ получаем

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq c J_T(s, \delta)^\theta \left[\Phi_T\left(s, \frac{p+1}{q+1}\right) \right]^{1-\theta} \\ &\leq c J_T(s, \delta)^\theta \left[J_T(s + \delta, \delta)^{\frac{p+1}{q+1} - h} \Phi_T(s, h) \right]^{1-\theta}, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Заметим, что в силу основной энергетической оценки (3.2)

$$\begin{aligned} \Phi_T(s, 1) &\equiv \int_{Q^{(T)}(s)} |u|^{q+1} \varphi_T(t) \eta(x_n) dx dt \\ &\leq \int_{Q^{(T)}(s)} |u|^{q+1} \varphi_T dx dt \leq c T J_T(s + \delta, \delta). \end{aligned}$$

Поэтому из соотношения (3.7) при $h = 1$ вытекает

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq c J_T(s, \delta)^\theta J_T(s + \delta, \delta)^{\frac{(p+1)(1-\theta)}{q+1}} T^{1-\theta} \\ &\leq c_1 T^{1-\theta} J_T(s + \delta, 2\delta)^{1 + \frac{(p-q)(1-\theta)}{q+1}}. \end{aligned}$$

Делая очевидную замену переменных, отсюда получаем

$$I_T(s - \delta) \leq c T^{1-\theta} J_T(s, \delta)^{1 + \frac{(p-q)(1-\theta)}{q+1}} \quad \forall s > \delta.$$

Вспоминая определение функции $J_T(s, \delta)$ и обозначая

$$\kappa = \frac{(p-q)(1-\theta)}{(q+1)} = \frac{m(p+1)(p-q)}{n(p-q) + m(q+1)(p+1)},$$

выводим из последнего соотношения

$$I_T(s - \delta) \leq c_1 T^{1-\theta} \frac{(\Delta I_T(s))^{1+\kappa}}{\delta^{m(1+\kappa)(1+p)}} + c_2 T^{1-\theta} f(s)^{1+\kappa}, \quad (3.10)$$

где $\Delta I_T(s) = I_T(s) - I_T(s - \delta)$. Положим в неравенстве (3.10)

$$\delta = \delta(s, T) \equiv T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(1+\kappa)}} I_T(s)^{\frac{\kappa}{m(1+\kappa)(p+1)}}.$$

В результате после тривиальных преобразований получим

$$I_T(s - \delta(s, T)) \leq \nu I_T(s) + \nu_1 T^{1-\theta} f(s)^{1+\kappa},$$

где $\nu = \frac{c_1}{1+c_1} < 1$, $\nu_1 = \frac{c_2}{1+c_1}$. Умножим обе части последнего неравенства на $T^{\frac{1-\theta}{\kappa}}$, а затем возведем в степень $\frac{\kappa}{m(1+\kappa)(p+1)}$. В результате для функции $R_T(s) \equiv T^{\frac{1-\theta}{m(1+\kappa)(p+1)}} I_T(s_0 + s)^{\frac{\kappa}{m(1+\kappa)(p+1)}}$ получим следующее соотношение:

$$R_T(s - R_T(s)) \leq \nu_2 R_T(s) + \nu_3 F_T(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad (3.11)$$

где

$$\nu_2 = \nu^{\frac{\kappa}{m(1+\kappa)(p+1)}} < 1, \quad \nu_3 = \nu_1^{\frac{\kappa}{m(1+\kappa)(p+1)}}, \quad F_T(s) = T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} f(s_0 + s)^{\frac{\kappa}{m(p+1)}}.$$

Вернемся еще раз к соотношению (3.10). Полагая в нем $\delta = 2^{-1}s$ и устремляя s к ∞ , получим, учитывая ограниченность функций $I_T(s)$, $f(s)$, справедливость следующей оценки:

$$I_T(\infty) \leq c_2 T^{1-\theta} f(\infty)^{1+\kappa}.$$

Поэтому существует (возможно, достаточно большое) число $s' < \infty$ такое, что $I_T(s) \leq 2c_2 T^{1-\theta} f(\infty)^{1+\kappa} \quad \forall s > s', \quad \forall T > 0$, и, следовательно,

$$R_T(s) \leq (2c_2)^{\frac{\kappa}{m(1+\kappa)(p+1)}} F_T(s) \quad \forall s > s' - s_0. \quad (3.12)$$

Заметим еще, что в силу условия (2.4) имеется следующая оценка для функции $F_T(s)$:

$$F_T(s) \leq T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} k_1^{\frac{\kappa}{m(p+1)}} s^{\frac{[n(p-q)+m(p+1)(q+1)]\kappa}{(p-q)m(p+1)}} = k_1^{\frac{p-q}{N}} T^{\frac{1+q}{N}} s, \quad (3.13)$$

$$N = m(p+1)(q+1) + n(p-q).$$

Теперь к функциям $R_T(s)$, $F_T(s)$, удовлетворяющим соотношению (3.11) и априорным оценкам (3.12), (3.13), применим лемму 4 из дополнения. В силу этой леммы

$$R_T(s) = 0 \quad \forall s > 0, \quad (3.14)$$

если выполнены условия (5.4):

$$\nu_3 k_1^{\frac{p-q}{N}} T^{\frac{1+q}{N}} < (\lambda - \nu_2)(1 - \lambda), \quad (3.15)$$

где $(\lambda - \nu_2) = (2c_2)^{\frac{-\kappa}{m(1+\kappa)(p+1)}} = (2c_2)^{-\frac{p-q}{M}}$, $M = m(p+1)^2 n(p-q)$.

Следовательно, свойство (3.14) будет выполняться до тех пор, пока выполняется условие (3.15), т.е.

$$T < \nu_3^{-\frac{N}{1+q}} k_1^{-\frac{p-q}{1+q}} (2c_2)^{-\frac{(p-q)N}{(1+q)M}} \left(1 - \nu_2 - (2c_2)^{-\frac{(p-q)}{M}} \right)^{\frac{N}{1+q}} \equiv \tau(k_1).$$

Тем самым в силу соотношения (3.14) верно с указанным значением $\tau(k_1) < \infty$ соотношение (2.5). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Запишем интерполяционное неравенство (3.1) при $j = 0$, $\alpha = 1 + q$, $\beta = p + 1$, $\gamma = 1 + \lambda$ и $\delta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(s)} |u|^{1+q} dx &\leq d_3^{q+1} \left(\int_{\Omega(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\frac{\theta_1(1+q)}{(p+1)}} \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{(1-\theta_1)(q+1)}{\lambda+1}} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \\ \theta_1 &= \frac{n(p+1)(q-\lambda)}{(1+q)[n(p-\lambda) + m(p+1)(1+\lambda)]}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда, применяя неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{1+q} dx \right)^\xi &\leq c d_3^{\xi(q+1)} \int_{\Omega(s)} (|D_x^m u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}) dx, \\ \frac{1}{\xi} &= \frac{\theta_1(1+q)}{(p+1)} + \frac{(1-\theta_1)(q+1)}{\lambda+1} = \frac{n(p-\lambda) + m(p+1)(1+q)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(1+\lambda)} > 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Умножим соотношение (3.17) на $\varphi_T(t)$ и проинтегрируем по t , получим с учетом оценки (3.2):

$$\Psi_T(s, \xi) \equiv \int_0^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^\xi \varphi_T(t) dt \leq c J_T(s + \delta, \delta) \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1. \quad (3.18)$$

Теперь снова возвращаемся к доказанному в лемме 2 соотношению (3.7). Положим в нем $h = \xi$. Воспользовавшись неравенством

$$\Phi_T(s, h) \leq \Psi_T(s, h) \quad \forall h > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq c J_T(s, \delta)^\theta \left(J_T(s + \delta, \delta)^{\frac{p+1}{q+1} - \xi} \Psi_T(s, \xi) \right)^{1-\theta} \leq c_1 J_T(s + \delta, 2\delta)^{1+\mu}, \\ \mu &= \left(\frac{p+1}{q+1} - \xi \right) (1-\theta) = \frac{m(p+1)(p-\lambda)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(1+q)}. \end{aligned}$$

Используя возможность произвольного выбора значений s и δ , теперь просто выводим соотношение

$$I_T(s - \delta) \leq c_2 J_T(s, \delta)^{1+\mu} \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1.$$

Вспоминая определение функции $J_T(s, \delta)$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq c_3 \frac{(\Delta I_T(s))^{1+\mu}}{\delta^{m(p+1)(1+\mu)}} + c_3 f(s)^{1+\mu} \\ &\leq c_3 \delta^{m(p+1)(1+\mu)} I_T(s)^\mu \Delta I_T(s) + c_3 f(s)^{1+\mu} \quad \forall T > 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Полагая в неравенстве (3.19) $\delta = \delta(s) \equiv I_T(s)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}}$, получаем после стандартных вычислений

$$I_T\left(s - I_T(s)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}}\right) \leq \nu I_T(s) + \nu f(s)^{1+\mu}, \quad \nu = \frac{c_3}{1 + c_3} < 1. \quad (3.20)$$

Возводя это неравенство в степень $\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}$, получим для функции $R_T(s) \equiv I_T(s_0 + s)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}}$ соотношение

$$R_T(s - R_T(s)) \leq \nu_1 R_T(s) + F(s), \quad \nu_1 = \nu^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}} < 1, \quad (3.21)$$

где $F(s) = \nu_1 f(s_0 + s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}$.

Для анализа соотношения (3.21) снова воспользуемся леммой 4 из дополнения. Аналогично (3.12) устанавливаем априорную оценку

$$R_T(s) \leq (2c_3)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}} \nu_1^{-1} F(s) \quad \forall s > s' - s_0, \quad s' < \infty. \quad (3.22)$$

Для функции $F(s)$ в силу условия (2.7) имеем оценку

$$F(s) \leq \nu_1 k_2^{\frac{\mu}{m(p+1)}} s \quad \forall s > 0. \quad (3.23)$$

Теперь в силу соотношения (3.21) и оценок (3.22), (3.23) следует, что $R_T(s) = 0 \quad \forall s \geq 0$, если выполняется следующий аналог условия (5.4):

$$\nu_1 k_2^{\frac{\mu}{m(p+1)}} < (\lambda - \nu_1)(1 - \lambda), \quad \lambda - \nu_1 = \nu_1 (2c_3)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}}. \quad (3.24)$$

Следовательно, свойство (2.8) будет выполняться, если

$$k_2 < k_2^{(0)} \equiv (2c_3)^{-\frac{1}{1+\mu}} \left(1 - \nu_1 - \nu_1 (2c_3)^{-\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}} \right)^{\frac{m(p+1)}{\mu}}.$$

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 также основано на соотношении (3.7) из леммы 2. Предварительно отметим, что в силу неравенства Гёльдера имеет место оценка

$$\int_{\Omega(s)} |u|^{p+1} dx \leq c \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{q-p}{q-\lambda}} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1. \quad (3.25)$$

Умножив это неравенство на $\varphi_T(t)$ и проинтегрировав по t , получим

$$I_T(s) \leq c_1 \left(\int_{Q^{(T)}(s)} |u|^{q+1} \varphi_T dx dt \right)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}} \left(\int_{Q^{(T)}(s)} |u|^{\lambda+1} \varphi_T dx dt \right)^{\frac{q-p}{q-\lambda}}.$$

Это неравенство ввиду основной энергетической оценки (3.2) порождает соотношение

$$I_T(s - \delta) \leq c_1 J_T(s, \delta)^{\frac{q-p}{q-\lambda}} \Psi_T(s - \delta, 1)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}} \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1. \quad (3.26)$$

С другой стороны, в силу второго из ограничений (2.9) имеется вложение

$$W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega).$$

Поэтому справедливо интерполяционное неравенство (3.16). Следовательно, повторяя рассуждения, аналогичные началу доказательства теоремы 2, устанавливаем справедливость оценки (3.18) и при соотношениях на параметры уравнения (1.1),

задаваемых условием (2.9). Из соотношения (3.9) при $h_2 = 1$, $h_1 = \xi$, где $\xi < 1$ из формулы (3.17), вытекает

$$\Psi_T(s - \delta, 1) \leq \Phi_T(s, 1) \leq c\Phi_T(s, \xi)J_T(s, \delta)^{1-\xi}.$$

Так как $\Phi_T(s, \xi) \leq \Psi_T(s, \xi)$, то, продолжая предыдущую оценку при помощи соотношения (3.18), получим

$$\Psi_T(s - \delta, 1) \leq c_1 J_T(s + \delta, \delta) J_T(s, \delta)^{1-\xi} \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1. \quad (3.27)$$

Подставляя эту оценку в (3.26) и переобозначая аргументы, приходим к следующему:

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq \tilde{c}_2 J_T(s, \delta)^{1+\mu} \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1; \\ \mu &= (1 - \xi) \frac{(p - \lambda)}{(q - \lambda)} = \frac{m(p + 1)(p - \lambda)}{n(p - \lambda) + m(p + 1)(q + 1)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Вспоминая вид функции $J_T(s, \delta)$, выводим из (3.28)

$$I_T(s - \delta) \leq \tilde{c}_3 \delta^{-m(p+1)(1+\mu)} I_T(s)^\mu \Delta I_T(s) + \tilde{c}_3 f(s)^{1+\mu} \quad \forall T > 0. \quad (3.19^*)$$

Продолжая далее анализировать неравенство (3.19*) точно так же, как неравенство (3.19) в теореме 2, получаем справедливость доказываемого утверждения с

$$k_3^{(0)} = \tilde{\nu}_1^{-\frac{m(p+1)}{\mu}} (2\tilde{c}_3)^{-\frac{1}{1+\mu}} \left(1 - \tilde{\nu}_1 - (2\tilde{c}_3)^{-\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)}} \right)^{\frac{m(p+1)}{\mu}},$$

где $\tilde{\nu}_1 = (\tilde{c}_3(1 + \tilde{c}_3)^{-1})^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)}}$.

§ 4. Обратное движение фронта

Введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} Q_{t_1}^{(t_2)}(s) &= \Omega(s) \times (t_1, t_2) \quad \forall 0 \leq t_1 < t_2 < T; \\ G_{t_1}^{(t_2)}(s, \delta) &= Q_{t_1}^{(t_2)}(s) \setminus Q_{t_1}^{(t_2)}(s - \delta) \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Зафиксируем некоторые числа $0 < \tau < T$, $0 < \omega < \tau$; и пусть $\psi(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ – срезающая функция такая, что $\psi(t) = 0$ при $t \leq T - \tau$, $\psi(t) = 1$ при $t > T - \tau + \omega$,

$$|D\psi(t)| \leq d_5 \omega^{-1}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Подставим в интегральное тождество (2.1) для изучаемого решения $u(x, t)$ в качестве η срезающую функцию $\eta(x)$ из леммы 1, а в качестве φ – срезающую функцию $\psi(t)$ из (4.1), получим исходное равенство

$$\begin{aligned} &\frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{q+1} \eta dx \\ &+ \int_{Q_{T-\tau+\omega}^{(T)}(s)} \left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \dots, D_x^m u) D^\alpha u + bu \right) \eta \psi dx dt \\ &= \frac{q}{q+1} \int_{Q_{T-\tau}^{(T-\tau+\omega)}(s)} |u|^{q+1} \psi'_t(t) \eta dx dt \\ &- \int_{G_{T-\tau}^{(T)}(s, \delta)} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \dots, D_x^m u) \sum_{|\beta| \leq m-1} D^\beta u D^{\alpha-\beta} \eta \psi dx dt. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Проводя в этом равенстве преобразования и оценки, аналогичные тем, что проводились в лемме 1 при получении соотношения (3.2), получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s-\delta)} |u(x, T)|^{q+1} dx + \int_{Q_{T-\tau+\omega}^{(T)}(s-\delta)} \left(|D_x^m u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1} \right) dx dt \\ & \leq c_1 \left(\delta^{-m(p+1)} \int_{G_{T-\tau}^{(T)}(s, \delta)} |u|^{p+1} dx dt \right. \\ & \quad \left. + \omega^{-1} \int_{Q_{T-\tau}^{(T-\tau+\omega)}(s)} |u|^{q+1} dx dt \right) \equiv c_1 Z_T(s, \delta, \tau, \omega). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Записывая интерполяционное неравенство (3.1) для функции $u(x, t)$ в области $\Omega(s - \delta)$ при $\alpha = p + 1$, $\beta = p + 1$, $\gamma = q + 1$, $j = 0$, возводя его в степень $p + 1$ и интегрируя по t в пределах $(T - (\tau - \omega), T)$, получим с учетом оценки (4.3)

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta, \tau - \omega) &= \int_{T-(\tau-\omega)}^T \int_{\Omega(s-\delta)} |u(x, t)|^{p+1} dx dt \\ &\leq c Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^\theta \left(\Psi_{T-(\tau-\omega)}^{(T)} \left(s - \delta, \frac{p+1}{q+1} \right) \right)^{1-\theta}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $0 < \theta < 1$ из соотношения (3.7),

$$\Psi_w^{(v)}(s, h) \equiv \int_w^v \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^h dt.$$

Оцениваем теперь отдельно второй сомножитель в правой части неравенства (4.4). Во-первых, интегрируя неравенство (3.17) в пределах $(T - (\tau - \omega), T)$ и используя оценку (4.3), получаем

$$\Psi_{T-(\tau-\omega)}^{(T)}(s - \delta, \xi) \leq c Z_T(s, \delta, \tau, \omega). \quad (4.5)$$

Теперь по аналогии с леммой 2 установим соотношение между функциями $\Psi_{T-(\tau-\omega)}^{(T)}(s, h)$ при различных $h > 0$. Введем вспомогательную функцию

$$\chi^{(h)}(t) = \int_0^t \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, \theta)|^{q+1} \eta(x_n) \psi(\theta) dx \right)^h d\theta,$$

где $\eta(x_n)$, $\psi(t)$ — срезающие функции из тождества (4.2). В силу теоремы Фубини очевидно следующее равенство:

$$\begin{aligned} \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, h+1) &\equiv \chi^{(h+1)}(T) \\ &= \int_{Q^{(T)}(s)} |u(x, t)|^{q+1} \eta(x_n) \psi(t) \frac{d}{dt} (\chi^{(h)}(t)) dx dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поэтому, подставляя в интегральное тождество (2.1) в качестве η срезающую функцию $\eta(x_n)$ из леммы 1, а в качестве $\varphi(t)$ функцию $\psi(t)\chi^{(h)}(t)$, получим с учетом (4.6)

$$\begin{aligned} \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, h+1) &= \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, h) \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{q+1} \eta \, dx \\ &+ \frac{q}{q+1} \int_{Q_{T-\tau}^{(T)}(s)} \left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(u, \dots, D^m u) D^\alpha(u\eta) + b(x, t, u)u\eta \right) \psi(t)\chi^{(h)}(t) \, dx \, dt \\ &- \int_{Q_{T-\tau}^{(T-\tau+\omega)}(s)} |u|^{q+1} \eta \psi'_t \chi^{(h)}(t) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Отсюда, используя то, что $\psi'_t \geq 0$, условия (1.5), (1.6), оценку (3.3), интерполяционное неравенство (3.1) при $\alpha = \beta = \gamma = p+1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, а также установленную выше оценку (4.3) с $s + \delta$ вместо s , $\tau + \omega$ вместо τ , получаем соотношение

$$\Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, h+1) \leq c \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, h) Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega) \quad \forall h > 0.$$

Отсюда с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, h_2) \leq c \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, h_1) Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{h_2 - h_1} \quad \forall h_2 > h_1 > 0. \quad (4.7)$$

В частности, при $h_2 = \frac{p+1}{q+1}$, $h_1 = \xi$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{T-\tau+\omega}^{(T)}\left(s - \delta, \frac{p+1}{q+1}\right) &\leq \Phi_{T-\tau}^{(T)}\left(s, \frac{p+1}{q+1}\right) \\ &\leq c \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, \xi) Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{\frac{p+1}{q+1} - \xi}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Наконец, первый сомножитель справа оценим, используя неравенство (4.5) с соответствующим образом замененными аргументами:

$$\Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, \xi) \leq \Psi_{T-\tau}^{(T)}(s, \xi) \leq c Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega).$$

Подставляя эту оценку в (4.8), получаем

$$\Psi_{T-\tau+\omega}^{(T)}\left(s - \delta, \frac{p+1}{q+1}\right) \leq c Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{1 + \frac{p+1}{q+1} - \xi}.$$

Используя это соотношение в неравенстве (4.4), приходим к

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta, \tau - \omega) &= c Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^\theta Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{1-\theta} \\ &\quad \times Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^\mu, \\ \mu &= \left(\frac{p+1}{q+1} - \xi \right) (1 - \theta) = \frac{m(p+1)(p-\lambda)}{m(p+1)(q+1) + n(p-\lambda)}. \end{aligned}$$

Делая в последнем неравенстве стандартную замену аргументов: $s + \delta \rightarrow s_1$, $2\delta \rightarrow \delta_1$, $\tau + \omega \rightarrow \tau_1$, $2\omega \rightarrow \omega_1$, и затем опуская индекс, получаем основное соотношение

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\mu} \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1, \quad 0 < \omega < \tau \leq T. \quad (4.9)$$

Введем еще одно обозначение

$$J_T(s, \tau) \equiv \int_{T-\tau}^T \int_{\Omega(s)} |u(x, t)|^{q+1} dx dt = \Psi_{T-\tau}^{(T)}(s, 1).$$

Для функции $J_T(s, \tau)$ установим некоторое соотношение, аналогичное неравенству (4.9) для $I_T(s, \tau)$. Полагая в соотношении (4.7) $h_2 = 1$, $h_1 = \xi$ и используя также оценку (4.5), получаем

$$\begin{aligned} J_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, 1) \leq c \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, \xi) Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{1-\xi} \\ &\leq c Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{2-\xi}. \end{aligned}$$

Это неравенство после стандартной замены аргументов дает

$$\begin{aligned} J_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq c Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\nu}, \\ \nu = 1 - \xi &= \frac{m(p+1)(q-\lambda)}{m(p+1)(q+1) + n(p-\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Определим также два разностных оператора:

$$\begin{aligned} \Delta_s I_T(s, \tau) &= I_T(s, \tau) - I_T(s - \delta, \tau), \\ \Delta_\tau J_T(s, \tau) &= J_T(s, \tau) - J_T(s, \tau - \omega). \end{aligned}$$

Тогда функция $Z_T(s, \delta, \tau, \omega)$ может быть записана в виде

$$Z_T(s, \delta, \tau, \omega) = \delta^{-m(p+1)} \Delta_s I_T(s, \tau) + \omega^{-1} \Delta_\tau J_T(s, \tau). \quad (4.11)$$

Возведем теперь неравенства (4.9) и (4.10) соответственно в степень $1 + \nu$ и $1 + \mu$ и сложим. В результате имеем для функции

$$H_T(s, \tau) \equiv I_T(s, \tau)^{1+\nu} + J_T(s, \tau)^{1+\mu} \equiv A_T(s, \tau) + B_T(s, \tau)$$

соотношение

$$H_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c \left(\frac{\Delta_s I_T(s, \tau)}{\delta^{m(p+1)}} + \frac{\Delta_\tau J_T(s, \tau)}{\omega} \right)^{(1+\nu)(1+\mu)}. \quad (4.12)$$

Используя просто проверяемые неравенства

$$\begin{aligned} (\Delta_s I_T(s, \tau))^{1+\alpha} &\leq I_T(s, \tau)^{1+\alpha} - I_T(s - \delta, \tau)^{1+\alpha} \quad \forall \alpha \geq 0, \\ (\Delta_\tau J_T(s, \tau))^{1+\beta} &\leq J_T(s, \tau)^{1+\beta} - J_T(s, \tau - \omega)^{1+\beta} \quad \forall \beta \geq 0, \end{aligned}$$

выводим из соотношения (4.12)

$$\begin{aligned} H_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq c_1 \frac{(\Delta_s A_T(s, \tau))^{1+\mu}}{\delta^{m(p+1)(1+\nu)(1+\mu)}} + c_1 \frac{(\Delta_\tau B_T(s, \tau))^{1+\nu}}{\omega^{(1+\nu)(1+\mu)}} \\ &\leq c_1 \frac{A_T(s, \tau)^\mu \Delta_s A_T(s, \tau)}{\delta^{m(p+1)(1+\nu)(1+\mu)}} + c_1 \frac{B_T(s, \tau)^\nu \Delta_\tau B_T(s, \tau)}{\omega^{(1+\nu)(1+\mu)}}. \end{aligned}$$

Определим теперь величины приращений δ, ω :

$$\delta = \delta(s, \tau) \equiv A_T(s, \tau)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\nu)(1+\mu)}}; \quad \omega = \omega(s, \tau) \equiv B_T(s, \tau)^{\frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}}.$$

Теперь, учитывая монотонность функций $A_T(s, \tau)$, $B_T(s, \tau)$ по обоим аргументам, легко выводим из последнего неравенства

$$H_T(s - \delta(s, \tau), \tau - \omega(s, \tau)) \leq \theta H_T(s, \tau); \quad \theta = \frac{c_1}{1 + c_1} < 1.$$

Наконец, используя монотонность функции $H_T(s, \tau)$ по обоим аргументам, получаем окончательное соотношение

$$H_T\left(s - H_T(s, \tau)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\nu)(1+\mu)}}, \tau - H_T(s, \tau)^{\frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}}\right) \leq \theta H_T(s, \tau). \quad (4.13)$$

В силу леммы 3 из дополнения из неравенства (4.13) вытекает, что для любого $s' < \infty$

$$\begin{aligned} H_T(s, \tau) &\equiv 0 \\ \forall(s, \tau) &\in \left\{ s < s' - \left(1 - \theta^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)(\nu+1)}}\right)^{-1} H_T(s', \tau)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)(\nu+1)}}, \right. \\ &\quad \left. \tau < T - \left(1 - \theta^{\frac{\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}}\right)^{-1} H_T(s', T)^{\frac{\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Вспоминая теперь определение функции $H_T(s, \tau)$, выводим из соотношения (4.14) после простых арифметических выкладок:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\equiv 0 \\ \forall(x, t) &\in \left\{ x_n < s' - \tilde{c}_1 \left(1 - \theta^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)(\nu+1)}}\right)^{-1} \right. \\ &\quad \times \left(I_T^{(0)}(s')^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}} + J_T^{(0)}(s')^{\frac{\mu}{m(p+1)(\nu+1)}} \right), \\ &\quad \left. t > \tilde{c}_2 \left(1 - \theta^{\frac{\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}}\right)^{-1} \left(I_T^{(0)}(s')^{\frac{\nu}{(\mu+1)}} + J_T^{(0)}(s')^{\frac{\nu}{(\nu+1)}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$I_T^{(0)}(s) = \int_{Q^{(T)}(s)} |u(x, t)|^{p+1} dx dt, \quad J_T^{(0)}(s) = \int_{Q^{(T)}(s)} |u(x, t)|^{q+1} dx dt.$$

Теперь наша задача – получить оценку сверху энергетических функций $I_T^{(0)}(s)$, $J_T^{(0)}(s)$ через функцию $f(s)$, характеризующую начальное значение $u_0(x)$. Заметим, что из соотношения (3.19), установленного в теореме 2, следует неравенство

$$I_T^{(0)}(s - \delta) \leq e I_T(s - \delta) \leq ec_3 \frac{(\Delta I_T^{(0)}(s))^{1+\mu}}{\delta^{m(p+1)(\mu+1)}} + ec_3 f(s)^{1+\mu}. \quad (4.16)$$

Следуя вычислениям, проведенным в (3.19)–(3.21), выведем из соотношения (4.16) неравенство

$$R_T(s - R_T(s)) \leq \theta_1 R_T(s) + F(s) \quad \forall s < \infty, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} R_T(s) &= I_T^{(0)}(s_0 + s)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}}, \\ F(s) &= \theta_1 f(s_0 + s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}, \\ \theta_1 &= \left(\frac{ec_3}{1 + ec_3} \right)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}} < 1. \end{aligned}$$

Анализ соотношения (4.17) проведем на основе леммы 5 из дополнения. В силу условия (2.7) имеем

$$F(s) \leq \theta_1 k_2^{\frac{\mu}{m(p+1)}} s \equiv F_0(s), \quad f_0(s) = k_2(s - s_0)^{\alpha_2}. \quad (4.18)$$

Аналогично (3.12) устанавливаем априорную оценку

$$\begin{aligned} R_T(s) &\leq K_1^{(0)} F(s) \leq K_1^{(0)} F_0(s) \quad \forall s > (s' - s_0), \\ s' &< \infty, \quad K_1^{(0)} = \theta_1^{-1} (2ec_3)^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Зафиксируем теперь постоянную $K_1 < \infty$:

$$K_1 > \max(K_1^{(0)}, (1 - \theta_1)^{-1}), \quad (4.20)$$

где $0 < \theta_1 < 1$ из (4.17).

Пусть также выполняется аналог условия (5.4):

$$\theta_1 k_2^{\frac{\mu}{m(p+1)}} < K_1^{-1} (1 - \theta_1 - K_1^{-1}). \quad (4.21)$$

При этом, как несложно проверить (см. замечание 5 к лемме 5), функция $F_0(s)$ из (4.18) удовлетворяет условию квалифицированной монотонности (5.8), т.е.

$$F_0(s - K_1 F_0(s)) \geq (\theta_1 + K_1^{-1}) F_0(s) \quad \forall s > 0. \quad (4.22)$$

Поэтому в силу леммы 5 справедлива оценка

$$R_T(s) \leq K_1 F_0(s) \quad \forall s > 0$$

или

$$I_T^{(0)}(s) \leq (\theta_1 K_1)^{1+\mu} f_0(s)^{1+\mu} \quad \forall s \geq s_0. \quad (4.23)$$

Теперь оценим функцию $J_T^{(0)}(s)$. Установленное в теореме 2 соотношение (3.27) дает

$$J_T^{(0)}(s - \delta) \leq e \Psi_T(s - \delta, 1) \leq ec_1 (J_T(s + \delta, 2\delta))^{2-\xi}.$$

Это неравенство в силу того, что $1 - \xi = \nu$, после стандартных вычислений приводит к неравенству

$$J_T^{(0)}(s - \delta) \leq ec_1 \left(\frac{\Delta I_T^{(0)}(s)}{\delta^{m(p+1)}} + f(s) \right)^{1+\nu} \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1. \quad (4.24)$$

Положим в этом соотношении

$$\delta = K_1 F_0(s - s_0),$$

а для оценки сверху $\Delta I_T^{(0)}(s)$ воспользуемся полученной оценкой (4.23). В результате простых вычислений, использующих свойство (4.22), получим

$$\begin{aligned}
J_T^{(0)}(s - K_1 F_0(s - s_0)) &\leq e c_1 \left(\frac{(\theta_1 K_1)^{1+\mu} f_0(s)^{1+\mu}}{K_1^{m(p+1)} F_0(s - s_0)^{m(p+1)}} + f_0(s) \right)^{1+\nu} \\
&= e c_1 f_0(s)^{1+\nu} \left(1 + (\theta_1 K_1)^{1+\mu-m(p+1)} \right)^{1+\nu} \\
&= F_0(s - s_0)^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}} \frac{e c_1}{\theta_1^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}}} \left(1 + (\theta_1 K_1)^{1+\mu-m(p+1)} \right)^{1+\nu} \\
&\leq \frac{e c_1 (1 + (\theta_1 K_1)^{1+\mu-m(p+1)})^{1+\nu} F_0(s - s_0 - K_1 F_0(s - s_0))^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}}}{\theta_1^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}} (\theta_1 + K_1^{-1})^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}}}.
\end{aligned}$$

Вспоминая определение функции $F_0(s)$, получаем оценку

$$\begin{aligned}
J_T^{(0)}(s - K_1 F_0(s - s_0)) &\leq K_2 f_0(s - K_1 F_0(s - s_0))^{1+\nu}, \\
K_2 &= \frac{e c_1 (1 + (\theta_1 K_1)^{1+\mu-m(p+1)})^{1+\nu}}{(\theta_1 + K_1^{-1})^{\frac{m(p+1)(1+\nu)}{\mu}}}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Так как $s - K_1 F_0(s - s_0) = s \left(1 - K_1 \theta_1 k_2^{\frac{\mu}{m(p+1)}} \right)$, причем в силу (4.21)

$$1 - K_1 \theta_1 k_2^{\frac{\mu}{m(p+1)}} > \theta_1 + K_1^{-1} > 0,$$

то из оценки (4.25) окончательно выводим

$$J_T^{(0)}(s) \leq K_2 f_0(s)^{1+\nu} \quad \forall s \geq s_0. \tag{4.26}$$

Объединяя оценки (4.23) и (4.26), получаем

$$I_T^{(0)}(s)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)}} + J_T^{(0)}(s)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\nu)}} \leq K_3 f_0(s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}, \tag{4.27}$$

где

$$K_3 = (\theta_1 K_1)^{\frac{\mu}{m(p+1)}} + K_2^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\nu)}}.$$

Аналогично получаем

$$I_T^{(0)}(s)^{\frac{\nu}{\mu+1}} + J_T^{(0)}(s)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \leq K_4 f_0(s)^\nu, \quad K_4 = (\theta_1 K_1)^\nu + K_2^{\frac{\nu}{\nu+1}}. \tag{4.28}$$

Подставляя оценки (4.27), (4.28) в (4.15), получаем

$$\begin{aligned}
u(x, t) \equiv 0 \quad \forall (x, t) \in &\left\{ x_n < s' - \frac{c_1 K_3 f_0(s')^{\frac{\mu}{m(p+1)}}}{1 - \theta^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)(1+\nu)}}} = s_0 + (s' - s_0) \right. \\
&\times \left(1 - \frac{c_1 K_3 k_2^{\frac{\mu}{m(p+1)}}}{1 - \theta^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)(1+\nu)}}} \right), \quad t > \frac{c_2 K_4 k_2^\nu (s' - s_0)^{\frac{m(p+1)(q-\lambda)}{p-\lambda}}}{1 - \theta^{\frac{\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}}} \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Определим теперь $k_2^{(1)} > 0$ формулой

$$k_2^{(1)} = \left(\min \left\{ \theta_1^{-1} K_1^{-1} (1 - \theta_1 K_1^{-1}), \quad c_1^{-1} K_3^{-1} \left(1 - \theta^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)(1+\nu)}} \right) \right\} \right)^{\frac{m(p+1)}{\mu}}.$$

Очевидно, что для любого $k_2 < k_2^{(1)}$ выполняется условие (4.2), а также

$$\omega(k_2) \equiv 1 - \frac{c_1 K_3 k_2^{\frac{\mu}{m(p+1)}}}{1 - \theta^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)(1+\nu)}}} > 0 \quad \forall k_2: 0 < k_2 < k_2^{(1)}.$$

Поэтому при выполнении условия (2.7) с $k_2 < k_2^{(1)}$ из соотношения (4.29) следует, что в качестве искомой функции $l(t)$, описывающей движение носителя решения $u(x, t)$, может быть взята

$$l(t) \equiv s_0 + \omega(k_2) K_5^{-\frac{p-\lambda}{m(p+1)(q-\lambda)}} t^{\frac{p-\lambda}{m(p+1)(q-\lambda)}}, \quad K_5 \equiv \frac{c_2 K_4 k_2^{\frac{\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}}}{1 - \theta^{\frac{\mu}{(1+\mu)(1+\nu)}}}. \quad (4.30)$$

Первое утверждение теоремы 4 доказано. Для проверки второго утверждения следует уточнить оценки функций $I_T^{(0)}(s)$, $J_T^{(0)}(s)$, удовлетворяющих соответственно соотношениям (4.16) и (4.24). Вытекающее из (4.16) соотношение (4.17) дает

$$R_T(s - R_T(s)) \leq \theta_1 R_T(s) + F_1(s) \quad \forall s < \infty, \quad F_1(s) = \theta_1 f_1(s_0 + s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}.$$

Отсюда в силу леммы 5 из дополнения следует

$$R_T(s) \leq K_1 F_1(s) \quad \forall s > 0, \quad (4.31)$$

если $F_1(s)$ удовлетворяет условию квалифицированной монотонности:

$$F_1(s - K_1 F_1(s)) \geq (\theta_1 + K_1^{-1}) F_1(s),$$

которое эквивалентно

$$f_1 \left(s_0 - s - K_1 \theta_1 f_1(s_0 + s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}} \right) \geq (\theta_1 + K_1^{-1})^{\frac{m(p+1)}{\mu}} f_1(s_0 + s). \quad (4.32)$$

Полагая в условии (2.13) $D = K_1 \theta_1$, $d = \theta_1 + K_1^{-1}$, получаем выполнение условия (4.32). Следовательно, справедлива оценка (4.31), а значит, и эквивалентная ей оценка

$$I_T^{(0)}(s) \leq (K_1 \theta_1)^{1+\mu} f_1(s)^{1+\mu} \quad \forall s > s_0. \quad (4.33)$$

Подставляя эту оценку в соотношение (4.24) и действуя так же, как при выводе оценки (4.26), получаем

$$J_T^{(0)}(s) \leq K_2 f_1(s)^{1+\nu} \quad \forall s > s_0. \quad (4.34)$$

Используя оценки (4.33), (4.34) в формуле (4.15), получаем

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \forall (x, t) \in \left\{ x_n \leq s_0 + \omega(k_2)(s' - s_0), \quad t \geq \frac{K_5}{k_2^{\frac{\nu}{2}}} f_1(s')^{\nu} \right\}.$$

Отсюда вытекает оценка для $l(t)$:

$$l(t) \geq s_0 + \omega(k_2) \left[f_1^{-1} \left(k_2 K_5^{-\frac{1}{\nu}} t^{\frac{1}{\nu}} \right) - s_0 \right].$$

Теорема 4 доказана полностью.

Доказательство теоремы 5 проводится комбинацией рассуждений, проводившихся при выводе теорем 3 и 4. Интегрируя неравенство (3.25) в пределах $(T - (\tau - \omega), T)$ и используя установленное соотношение (4.3), получаем

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{\frac{q-p}{q-\lambda}} \Psi_{T-(\tau-\omega)}^{(T)}(s - \delta, 1)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}}, \quad (4.35)$$

где, как и ранее,

$$I_T(s, v) \equiv \int_{T-v}^T dt \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, t)|^{p+1} dx \right);$$

$Z_T(s, \delta, \tau, \omega), \Psi_{T-v}^T(s, h)$ – из (4.3), (4.4).

Так как в силу условий (2.9) справедливо интерполяционное неравенство (3.16), то, интегрируя вытекающее из него соотношение (3.17) в пределах $(T - (\tau - \omega), T)$, получим после дополнительного применения основного соотношения (4.3)

$$\Psi_{T-\tau}^{(T)}(s, \xi) \leq c Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega), \quad (4.36)$$

где $\xi < 1$ из соотношения (3.17). Теперь стандартным образом устанавливаем справедливость при соотношениях (2.9) на параметры λ, p, q неравенства (4.7), характеризующего соотношение между функциями

$$\Phi_v^{(T)}(s, h) \equiv \int_{T-v}^T dt \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, t)|^{q+1} \eta(x_n) \psi(t) dx \right)^h$$

при различных значениях $h > 0$. Из этого соотношения вытекает

$$\begin{aligned} \Psi_{T-(\tau-\omega)}^T(s - \delta, 1) &\leq \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, 1) \\ &\leq c \Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, \xi) Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{1-\xi} \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Так как $\Phi_{T-\tau}^{(T)}(s, \xi) \leq \Psi_{T-\tau}^{(T)}(s, \xi)$, то, объединяя оценки (4.37), (4.36), получаем

$$\Psi_{T-(\tau-\omega)}^T(s - \delta, 1) \leq Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{2-\xi}. \quad (4.38)$$

Подставляя эту оценку в соотношение (4.35), получаем после стандартной замены аргументов

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq c Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\mu}, \\ \mu = (1 - \xi) \frac{(p - \lambda)}{(q - \lambda)} &= \frac{m(p + 1)(p - \lambda)}{n(p - \lambda) + m(p + 1)(q + 1)}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Само неравенство (4.38) после замены аргументов дает

$$J_T(s - \delta, \tau - \omega) \equiv \Psi_{T-(\tau-\omega)}^T(s - \delta, 1) \leq c_1 Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\nu}, \quad (4.40)$$

где

$$\nu = 1 - \xi = \frac{m(p + 1)(q - \lambda)}{n(p - \lambda) + m(p + 1)(q + 1)}.$$

Дальнейшее доказательство практически полностью повторяет соответствующую часть теоремы 4. Из соотношений (4.39), (4.40) для функции $H_T(s, \tau) = I_T(s, \tau)^{1+\nu} + J_T(s, \tau)^{1+\mu}$ устанавливаем основное неравенство (4.13) с некоторым

новым $\theta : 0 < \theta < 1$. Следовательно, имеет место и оценка (4.15) носителя решения $u(x, t)$. После этого остается оценить функции $I_T^{(0)}(s)$, $J_T^{(0)}(s)$. Для $I_T^{(0)}(s)$ в силу соотношения (3.28) из теоремы 3 имеем соотношение

$$I_T^{(0)}(s - \delta) \leq e\tilde{c}_2 \left(\frac{\Delta I_T^{(0)}(s)}{\delta^{m(p+1)}} \right)^{1+\mu} + e\tilde{c}_2 f(s)^{1+\mu}. \quad (4.41)$$

Из этого соотношения так же, как и в теореме 4, получаем, используя лемму 4 из дополнения, явную оценку

$$I_T^{(0)}(s) \leq (\tilde{K}_1 \tilde{\theta}_1)^{1+\mu} f_0(s)^{1+\mu} \quad \forall s > s_0, \quad f_0(s) = k_3(s - s_0)^{\alpha_2}. \quad (4.42)$$

Для оценки $J_T^{(0)}(s)$ используем вытекающее из доказанного в теореме 3 соотношения (3.27) неравенство

$$J_T^{(0)}(s - \delta) \leq c_1 e \left(\frac{\Delta I_T^{(0)}(s)}{\delta^{m(p+1)}} + f_0(s) \right)^{1+\nu}.$$

Из этого соотношения и оценки (4.42), действуя точно так же, как при выводе оценки (4.26), получаем

$$J_T^{(0)}(s) \leq \tilde{K}_2 f_0(s)^{1+\nu} \quad \forall s > s_0, \quad \tilde{K}_2 < \infty. \quad (4.43)$$

Теперь из соотношения (4.15) и оценок (4.42), (4.43) следует свойство (2.11) с необходимой функцией $l(t) > 0$ из (2.14). Теорема 5 доказана.

§ 5. Дополнение

ЛЕММА 3 [21]. Пусть некоторая неотрицательная непрерывная функция $f(t_1, \dots, t_m)$, $m \geq 1$, не убывает по каждому из своих аргументов и удовлетворяет следующему соотношению:

$$f(t_1 - c_1 f(t_1, \dots, t_m)^{\nu_1}, t_2 - c_2 f(t_1, \dots, t_m)^{\nu_2}, \dots, t_m - c_m f(t_1, \dots, t_m)^{\nu_m}) \leq \varepsilon f(t_1, \dots, t_m) \quad \forall t_i < t_i^{(0)}; \quad c_i > 0, \quad \nu_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Тогда

$$f(t_1, \dots, t_m) \equiv 0 \quad \forall (t_1, \dots, t_m) \in \left\{ t_i \leq t_i^{(0)} - \frac{c_i}{1 - \varepsilon^{\nu_i}} f(t_1^{(0)}, \dots, t_m^{(0)})^{\nu_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

ЛЕММА 4. Пусть некоторая непрерывная неотрицательная неубывающая функция $f(s)$ удовлетворяет следующему функциональному соотношению:

$$f(s - f(s)) \leq \varepsilon f(s) + g(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (5.1)$$

где известная неотрицательная непрерывная неубывающая функция $g(s)$ удовлетворяет оценке

$$g(s) \leq as \quad \forall s > 0, \quad 0 < a < \infty. \quad (5.2)$$

Пусть также для некоторого $s'_0 < \infty$ выполняется следующее соотношение:

$$f(s) \leq kg(s) \quad \forall s > s'_0 > 0, \quad k > (1 - \varepsilon)^{-1}. \quad (5.3)$$

Тогда если для параметра a из соотношения (5.2) выполняется ограничение

$$a < k^{-1}(1 - \varepsilon - k^{-1}), \quad (5.4)$$

то $f(s) \equiv 0 \quad \forall s \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $f(0) > 0$. Тогда, конечно, существует $s' > 0$ такое, что

$$f(s) > (\lambda - \varepsilon)^{-1}g(s) \equiv kg(s), \quad \varepsilon < \lambda < 1, \quad \forall s: 0 < s < s'. \quad (5.5)$$

В силу (5.3) можно считать, что

$$f(s') = (\lambda - \varepsilon)^{-1}g(s'), \quad s' \leq s'_0. \quad (5.6)$$

Из соотношения (5.1) в силу предположения (5.5) вытекает

$$f(s - f(s)) \leq \varepsilon f(s) + (\lambda - \varepsilon)f(s) = \lambda f(s) \quad \forall s: 0 < s < s'. \quad (5.7)$$

В силу (5.6), (5.4), (5.2) имеем следующее соотношение:

$$\frac{f(s')}{1 - \lambda} = \frac{g(s')}{(1 - \lambda)(\lambda - \varepsilon)} < \frac{g(s')}{a} \leq s'.$$

Поэтому из соотношения (5.7) в силу леммы 3 следует, что

$$f(s) = 0 \quad \forall s \leq s' - \frac{f(s')}{1 - \lambda},$$

и, значит, $f(0) = 0$, что противоречит сделанному допущению (5.5). Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть в условиях и обозначениях леммы 4 функция $g(s)$ удовлетворяет дополнительно условию правильной монотонности:

$$g(s - kg(s)) \geq (\varepsilon + k^{-1})g(s) \quad \forall s < \infty. \quad (5.8)$$

Тогда, в дополнение к утверждению леммы 4, справедлива следующая априорная оценка для $f(s)$:

$$f(s) \leq kg(s) \quad \forall s \geq 0. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $s_0 > s'_0$ и определим последовательность $\{s_j\}$:

$$s_{j+1} = s_j - f(s_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

В силу условия (5.3)

$$f(s_0) \leq kg(s_0).$$

Предположим, что для некоторого $i \in \mathbb{N}$ мы уже установили, что

$$f(s_i) \leq kg(s_i). \quad (5.10)$$

Тогда в силу соотношения (5.1), индуктивного предположения (5.10) и условия (5.8) имеем

$$\begin{aligned} f(s_{i+1}) &= f(s_i - f(s_i)) \leq \varepsilon f(s_i) + g(s_i) = \varepsilon f(s_i) + (\lambda - \varepsilon)f(s_i) \\ &= \lambda f(s_i) \leq \frac{\lambda}{\lambda - \varepsilon}g(s_i) \leq \frac{1}{\lambda - \varepsilon}g\left(s_i - \frac{g(s_i)}{\lambda - \varepsilon}\right) \\ &\leq (\lambda - \varepsilon)^{-1}g(s_i - f(s_i)) = kg(s_{i+1}), \quad \lambda = \varepsilon + k^{-1} < 1. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что

$$f(s_j) \leq kg(s_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Из определения последовательности $\{s_i\}$ следует

$$s_{j+1} \geq s_j - kg(s_j) \geq s_j - \frac{as_j}{\lambda - \varepsilon} \geq \lambda s_j > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $s_j \rightarrow \tilde{s} \geq 0$ при $j \rightarrow \infty$. В силу непрерывности функций $f(s)$, $g(s)$ имеем

$$f(\tilde{s}) = g(\tilde{s}) = 0. \quad (5.12)$$

Из (5.11), (5.12) в силу произвольности выбора стартовой точки $s_0 > s'_0$ и непрерывности функций $f(s)$, $g(s)$ следует доказываемое соотношение (5.9). Лемма 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Легко проверить, что функция $g(s) = as$, где для параметра a выполняется ограничение (5.4), удовлетворяет условию (5.8).

Список литературы

1. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12. С. 261–268.
2. Калашиников А. С. Распространение возмущений в нелинейных средах при наличии поглощения // ЖВМиМФ. 1974. Т. 14. С. 70–85.
3. Калашиников А. С. О дифференциальных свойствах обобщенных решений уравнений типа нестационарной фильтрации // Вестн. МГУ. 1974. Т. 29. С. 48–53.
4. Diaz J. I., Herrero M. A. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1981. V. 89A. P. 249–258.
5. Bertsch M., Nambu T., Peletier L. A. Decay of solutions of a degenerate nonlinear diffusion equations // Nonlinear. Anal. 1982. V. 6. P. 539–554.
6. Кершнер Р. О поведении температурных фронтов в средах с нелинейной теплопроводностью при наличии поглощения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 1978. № 5. С. 44–51.
7. Kersner R. Nonlinear heat conduction with absorption: space localization and extinction in finite time // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. P. 1274–1285.
8. Knops R. J., Straughan B. Decay and nonexistence for sublinearly forced systems in Continuum Mechanics // Nonlinear partial differ. equat. and their appl. College de France Seminar. V. II; // Research Notes in Mathematics 60 / Eds. H. Brezis and J. L. Lions. London: Pitman, 1982. P. 251–264.
9. Bandle C., Stakgold I. The formation of the dead core in parabolic reaction-diffusion problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 286. P. 275–293.
10. Kamin S., Peletier L. A. Large time behaviour of solutions of the porous media equations with absorption. Report 14. Mathematical Institute. University of Leiden, 1985.
11. Diaz J. I., Hernandez J. Qualitative properties of free boundaries for some nonlinear degenerate parabolic equations // Nonlinear parabolic equations. Horlow: Longman, 1987. P. 85–93.
12. Friedman A., Herrero M. A. Extinction properties of semilinear heat equations with strong absorption // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 124. P. 530–546.
13. Chen Xu-Yan, Matano H., Mimura M. Finite point extinction and continuity of interfaces in nonlinear diffusion equation with strong absorption // J. Reine and Angew. Math. 1995. V. 459. № 1. P. 1–36.
14. Антонцев С. Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // ДАН СССР. 1981. Т. 260. № 6. С. 1289–1293.
15. Diaz J. I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 290. № 2. P. 787–814.

16. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* New results of the character of localization of solutions of elliptic and parabolic equations // International series of numerical mathematics. V. 106. Basel: Birkhauser, 1992. P. 59–66.
17. *Антонцев С. Н., Шмарев С. И.* Локальный энергетический метод и обращение в нуль слабых решений нелинейных параболических уравнений // ДАН СССР. 1991. Т. 318. № 4. С. 777–781.
18. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* The support shrinking properties for local solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption term // Ann. Fac. Sciences de Toulouse. 1995. V. 4. № 1. P. 3–19.
19. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. of Royal Soc. Edinburgh. 1986. V. 104A. P. 1–19.
20. *Шишков А. Е.* Об оценках скорости распространения возмущений в квазилинейных дивергентных вырождающихся параболических уравнениях произвольного порядка // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. № 10. С. 1451–1456.
21. *Шишков А. Е.* Динамика геометрии носителя обобщенного решения квазилинейного дивергентного параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравн. 1993. Т. 29. № 3. С. 537–547.
22. *Lions J. L.* Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. Paris: Dunod, 1969.
23. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. 1988. V. 279. P. 373–394.
24. *Nirenberg L.* An extended interpolation inequality // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1966. V. 20. P. 733–737.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, г. Донецк

Поступило в редакцию
15.III.1996