Общероссийский математический портал

Т. Е. Панов, Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы $\mathbf{Z}/p$, через инварианты действия, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 3, 87–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/im201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:37:26

УДК 513.83

Т. Е. Панов

Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы $\mathbf{Z}/p$, через инварианты действия

Получены общие формулы, выражающие род Хирцебруха многообразия с действием группы $\mathbf{Z}/p$ через инварианты этого действия – наборы весов в неподвижных точках. В качестве иллюстраций рассмотрены многочисленные частные случаи известных родов, в частности эллиптического рода. Описана связь полученных соотношений с так называемыми уравнениями Коннера–Флойда на наборы весов неподвижных точек.

Библиография: 15 наименований.

Введение

В работе получены формулы, выражающие роды Хирцебруха многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек или неподвижными подмногообразиями с тривиальным нормальным расслоением через инварианты такого действия и описана связь полученных соотношений с уравнениями Коннера–Флойда.

Действия группы $\mathbf{Z}/p$ изучались в работах [12], [13], [11], [8], где в рамках теории кобордизмов были получены так называемые уравнения Коннера–Флойда (см. (31), (32)). Эти уравнения представляют собой соотношения между наборами элементов $\mathbf{Z}/p$, необходимые и достаточные для того, чтобы существовало действие группы $\mathbf{Z}/p$ с такими наборами весов (определение см. в § 3). В работе [5] были предложены два подхода для вычисления родов Хирцебруха комплексных многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$.

Первый подход основан на применении формулы Атьи–Ботта–Лефшеца [1], и поэтому для его реализации необходим эллиптический комплекс расслоений на многообразии, ассоциированных с касательным расслоением. Формула Атьи–Ботта–Лефшеца, полученная в работе [1], обобщает классическую формулу Лефшеца для числа неподвижных точек и позволяет вычислять эквивариантный индекс эллиптического комплекса расслоений на многообразии через функции неподвижных подмногообразий (определения см. ниже). В частности, если на многообразии действует оператор с конечным числом неподвижных точек, то соответствующий эквивариантный индекс выражается через наборы весов неподвижных точек. В работе [5] было показано, как выразить род Тодда, являющийся индексом эллиптического комплекса (а именно комплекса Дольбо) расслоений на многообразии с

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-01404).

действием $\mathbf{Z}/p$ через эквивариантный индекс того же комплекса для действия образующей группы $\mathbf{Z}/p$, входящий в формулу Атьи–Ботта–Лефшеца. Таким образом, были выведены формулы, выражающие род Тодда через веса действия группы $\mathbf{Z}/p$ в неподвижных точках. В формулы, получаемые таким образом, входил теоретико-числовой след некоторого алгебраического расширения полей степени $p - 1$. Аналогичный подход был использован и в нашей работе для получения формул для других родов многообразий с действием $\mathbf{Z}/p$: сигнатуры (L -рода), эйлеровой характеристики, $\hat{A}$ -рода, общей χ_y -характеристики и эллиптического рода, а также для получения некоторых общих соотношений (см. § 5) для произвольных родов Хирцебруха, являющихся индексами эллиптических комплексов расслоений, ассоциированных с касательным расслоением многообразия с действием $\mathbf{Z}/p$.

В нашей работе мы используем обобщенную формулу Лефшеца в несколько иной формулировке, изложенной в работе [3]. Эта формула и особенно получаемый на ее основе “рецепт” для вычисления эквивариантного индекса комплекса через функции неподвижных точек (см. § 5) более удобны в применении, чем формула из [1], используемая в работе [5]. Обобщенная формула Лефшеца из работы [3] была получена на основе доказанной там же теоремы Атьи–Зингера об индексе в когомологической форме. Для сравнения часть результатов нашей работы (см. § 4) были получены на основе “старой” формулы Лефшеца из работы [1], а остальные – с помощью “рецепта” из § 5, основанного на применении формулы из работы [3].

В работе [5] был приведен второй подход для получения соотношений для родов Хирцебруха, основанный на применении теории кобордизмов, как при выводе уравнений Коннера–Флойда в работах [12], [13]. В [5] была приведена формула, выражающая класс кобордизмов $\text{mod } p$ стабильно комплексного многообразия с действием $\mathbf{Z}/p$ через инварианты действия, и было показано, что разность между формулами для рода Тодда, получаемыми первым и вторым методами, есть в точности сумма уравнений Коннера–Флойда для рода Тодда. В нашей работе показывается (см. теорему 7.1), что разность между двумя на первый взгляд различными формулами, полученными двумя методами для произвольного рода, есть взвешенная сумма уравнений Коннера–Флойда для этого рода с целыми коэффициентами.

Особого интереса заслуживает так называемый эллиптический род. В работах Э. Виттена каждому гладкому ориентированному $2n$ -мерному многообразию M^{2n} был сопоставлен инвариант – эквивариантный индекс оператора Дирака для канонического действия окружности S^1 на пространстве петель этого многообразия. С. Опанин в [14] показал, что этот индекс является родом Хирцебруха, соответствующим эллиптическому синусу; отсюда и происходит название “эллиптический род”. В работах [2], [9] и др. была доказана теорема жесткости для эллиптического рода многообразий с действием S^1 , утверждающая, что эквивариантный эллиптический род $\varphi_{S^1}(M)$ такого многообразия, рассматриваемый как характер группы S^1 , является тривиальным характером и равен эллиптическому роду $\varphi(M)$. В то же время эллиптический род принимает значения в кольце $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$ и его значение на любом многообразии M^{2n} является модулярной формой веса n для подгруппы $\Gamma_0(2) \subset \text{SL}_2(\mathbf{Z})$ (см. [7]). В нашей работе мы получаем формулы для эллиптического рода многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек. Сводка результатов этой части работы (без доказательств)

была опубликована в [15]. В качестве приложения мы выводим соотношения на полиномы Лежандра, которые получаются применением этих формул к одному действию $\mathbf{Z}/p$ на $\mathbf{C}P^n$ (см. §8).

Оставшаяся часть работы (см. §9) посвящена обобщению на случай действия $\mathbf{Z}/p$ с неподвижными подмногообразиями с тривиальным нормальным расслоением.

§1. Необходимые сведения о родах Хирцебруха

Пусть M^{2n} –многообразие, в касательном расслоении к которому имеется стабильная комплексная структура, т.е. существует такое k , что в расслоении $TM \oplus 2k$ имеется комплексная структура. Запишем полный класс Чжэня касательного расслоения TM в виде

$$c(TM) = 1 + c_1(M) + c_2(M) + \cdots + c_n(M) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n),$$

т.е. полный класс Чжэня M записывается в виде произведения классов Чжэня “виртуальных” одномерных расслоений, сумма которых дает TM . Таким образом, $c_i(M)$ есть i -я симметрическая функция от $x_1, \dots, x_n$.

Каждому ряду вида $Q(x) = 1 + \cdots$ с коэффициентами в некотором кольце Λ соответствует род Хирцебруха $\varphi_Q(M^{2n}) = (\prod_{i=1}^n Q(x_i)) [M^{2n}]$ (см. [6]). Наряду с $Q(x)$ введем $f(x) = x/Q(x)$ и $g(u) = f^{-1}(u)$. С каждым родом Хирцебруха φ связана формальная группа, логарифмом которой является $g_\varphi(u)$ (см. [5]): $F_\varphi(u, v) = g_\varphi^{-1}(g_\varphi(u) + g_\varphi(v))$. Этой формальной группе соответствует степенная система (см. [5]) $[u]_n^\varphi = g_\varphi^{-1}(ng_\varphi(u))$.

Аналогично можно определить роды Хирцебруха для вещественных ориентируемых многообразий M^{4n} . При этом классы Чжэня c_i заменяются на классы Понтрягина p_i , а x_i на x_i^2 , т.е.

$$p(TM) = 1 + p_1(M) + p_2(M) + \cdots + p_n(M) = (1 + x_1^2)(1 + x_2^2) \cdots (1 + x_n^2).$$

Вместо ряда $Q(x)$ мы теперь будем иметь $Q(x^2)$.

Формулы, полученные в данной работе, относятся в основном к следующим родам Хирцебруха.

1. Универсальный род φ соответствует тождественному гомоморфизму $\text{id}: \Omega_U \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \Omega_U \otimes \mathbf{Q}$. Соответствующая формальная группа “геометрических кобордизмов” $\underline{F}(u, v)$ (см. [12]) является универсальной, т.е. для любой формальной группы $F(x, y)$ над любым кольцом Λ существует единственный кольцевой гомоморфизм $\lambda: \Omega_U \rightarrow \Lambda$ такой, что $F(x, y) = \lambda[\underline{F}(u, v)]$ (см. [5]). Ее логарифм есть

$$\underline{g}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi[\mathbf{C}P^n]}{n+1} u^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{C}P^n}{n+1} u^{n+1}.$$

Таким образом, для любого рода Хирцебруха φ имеем

$$g_\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi[\mathbf{C}P^n]}{n+1} u^{n+1}. \quad (1)$$

2. Род Тодда $\text{td}(M)$ соответствует ряду

$$Q_{\text{td}}(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}}, \quad f_{\text{td}}(w) = 1 - e^{-w}, \quad g_{\text{td}}(u) = -\ln(1 - u).$$

То же самое можно получить, исходя из того, что $\text{td}(\mathbf{CP}^n) = 1$. Действительно, тогда из (1) следует

$$g_{\text{td}}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} = -\ln(1 - u).$$

Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^{\text{td}} = g_{\text{td}}^{-1}(ng_{\text{td}}(u)) = 1 - e^{n \ln(1-u)} = 1 - (1 - u)^n.$$

Итак, для рода Тодда мы имеем

$$f_{\text{td}}(w) = 1 - e^{-w}, \quad g_{\text{td}}(u) = -\ln(1 - u), \quad [u]_n^{\text{td}} = 1 - (1 - u)^n. \quad (2_{\text{td}})$$

3. Эйлерова характеристика $e(M)$ (касательного расслоения). Так как $e(\mathbf{CP}^n) = n + 1$, то (см. [13])

$$g_e(u) = \frac{u}{1 - u}, \quad f_e(w) = g_e^{-1}(w) = \frac{w}{1 + w}.$$

Значит, $Q(x) = 1 + x$ и, как и следовало ожидать,

$$e[M] = \left(\prod_{i=1}^n Q(x_i) \right) [M] = (x_1 x_2 \dots x_n) [M^{2n}] = c_n [M^{2n}].$$

Далее,

$$[u]_n^e = g_e^{-1}(ng_e(u)) = \frac{nu}{1 + (n-1)u}.$$

Итак, для эйлеровой характеристики мы имеем

$$f_e(w) = \frac{w}{1 + w}, \quad g_e(u) = \frac{u}{1 - u}, \quad [u]_n^e = \frac{nu}{1 + (n-1)u}. \quad (2_e)$$

4. Сигнатура, или L -род, соответствует ряду

$$Q_L(x) = \frac{x}{\text{th}(x)} = \frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}, \quad f_L(w) = \text{th}(w),$$

$$g_L(u) = \text{arth}(u) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right).$$

Это согласуется с теоремой Хирцебруха (т.е. L -род равен сигнатуре, см. [6]), в силу которой $L(\mathbf{CP}^{2n}) = 1$, $L(\mathbf{CP}^{2n+1}) = 0$. Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^L = g_L^{-1}(ng_L(u)) = \frac{e^{\frac{n}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}} - e^{-\frac{n}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}}}{e^{\frac{n}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}} + e^{-\frac{n}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}}} = \frac{(1+u)^n - (1-u)^n}{(1+u)^n + (1-u)^n}.$$

Итак, для L -рода мы имеем

$$f_L(w) = \operatorname{th}(w), \quad g_L(u) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right), \quad [u]_n^L = \frac{(1+u)^n - (1-u)^n}{(1+u)^n + (1-u)^n}. \quad (2_L)$$

5. Имеется однопараметрический род, обобщающий три предыдущих примера, а именно χ_y -характеристика; χ_y -характеристика – это род Хирцебруха, соответствующий ряду

$$Q_{\chi_y} = \frac{x(1 + ye^{-x(1+y)})}{1 - e^{-x(1+y)}},$$

$$f_{\chi_y}(w) = \frac{w}{Q_{\chi_y}(w)} = \frac{1 - e^{-w(1+y)}}{1 + ye^{-w(1+y)}}, \quad g_{\chi_y}(u) = \frac{1}{1+y} \ln \frac{1+yu}{1-u}.$$

Пренебрегая условием нормировки $f_{\chi_y}(w) = w + \dots$ и заменяя $w(1+y)$ на w , получим

$$\hat{f}_{\chi_y}(w) = \frac{1 - e^{-w}}{1 + ye^{-w}}, \quad \hat{g}_{\chi_y}(u) = \ln \frac{1+yu}{1-u}.$$

В обоих случаях выражение для степенной системы, связанной с χ_y -родом, одно и то же:

$$[u]_n^{\chi_y} = \frac{(1+yu)^n - (1-u)^n}{(1+yu)^n + y(1-u)^n} = \frac{1 - \left(\frac{1-u}{1+yu} \right)^n}{1 + y \left(\frac{1-u}{1+yu} \right)^n}. \quad (2_{\chi_y})$$

При $y = 0, -1, 1$ мы получаем соответственно род Тодда, эйлерову характеристику и L -род.

6. $\hat{A}$ -род соответствует ряду

$$Q_A(x) = \frac{x/2}{\operatorname{sh}(x/2)} = \frac{x}{e^{x/2} - e^{-x/2}},$$

$$f_A(w) = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{w}{2} \right), \quad g_A(u) = 2 \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) = \ln \left(\frac{u}{2} + \sqrt{1 + \frac{u^2}{4}} \right).$$

Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^A = g_A^{-1}(ng_A(u)) = 2 \operatorname{sh}(n \operatorname{arsh}(u/2))$$

$$= \left(\frac{u}{2} + \sqrt{1 + \frac{u^2}{4}} \right)^n - \left(\frac{u}{2} + \sqrt{1 + \frac{u^2}{4}} \right)^{-n}.$$

Итак, для $\hat{A}$ -рода мы имеем

$$f_A(w) = 2 \operatorname{sh}(w/2), \quad g_A(u) = 2 \operatorname{arsh}(u/2), \quad [u]_n^A = 2 \operatorname{sh}(n \operatorname{arsh}(u/2)). \quad (2_A)$$

**§ 2. Вычисление родов Хирцебруха
на основе теоремы Атьи–Зингера об индексе**

Мы будем рассматривать следующие эллиптические комплексы: комплекс де Рама

$$\Lambda^*: \Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^n)$$

и комплекс Дольбо

$$\Lambda^{p,*}: \Gamma(\Lambda^{p,0}) \xrightarrow{d''} \Gamma(\Lambda^{p,1}) \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \Gamma(\Lambda^{p,n}),$$

где $\Lambda^i = \Lambda^i(T^*M)$ – расслоение дифференциальных i -форм на M , а

$$\Lambda^{p,i} = \Lambda^p(T^*M) \wedge \Lambda^i(\overline{T}^*M) \simeq \Lambda^p(T^*M) \wedge \Lambda^i(TM)$$

– расслоение дифференциальных форм типа (p, i) ($\overline{T}^*M \simeq TM$, если на многообразии M введена эрмитова метрика).

Имеет место следующая теорема Атьи–Зингера об индексе в когомологической форме (см. [3]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть M – компактное, ориентируемое, дифференцируемое многообразие размерности $2n$ и $E = \{d_i: \Gamma E_i \rightarrow \Gamma E_{i+1}\}$ – эллиптический комплекс ($i = 0, \dots, m-1$), ассоциированный с касательным расслоением (т.е. все расслоения E_i ассоциированы с TM). Тогда индекс этого комплекса определяется следующей формулой:*

$$\text{ind}(E) = (-1)^n \left(\left(\frac{1}{e(TM)} \sum_{i=0}^m (-1)^i \text{ch}(E_i) \right) \text{td}(TM \otimes \mathbf{C}) \right) [M].$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Записав $\text{td}(TM \otimes \mathbf{C}) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{-x_j}{1-e^{x_j}} \right)$, $e(TM) = x_1 \dots x_n$ и формально сократив на $x_1 \dots x_n$, получим следующую формулу:

$$\text{ind}(E) = \left(\left(\sum_{i=0}^m (-1)^i \text{ch}(E_i) \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{1}{1-e^{x_j}} \right) \right) [M]. \quad (3)$$

Рассмотрим эллиптический комплекс $\{X_i^y = \bigoplus_{p=0}^n y^p \Lambda^{p,i}\}$ (заметим, что этот объект является эллиптическим комплексом только при конкретных целых y , однако его индекс, очевидно, определяется при любых y как многочлен от y ; в дальнейшем мы будем называть аналогичные объекты *эллиптическими комплексами*). При помощи теоремы Атьи–Зингера легко доказать следующий факт, впервые доказанный Хирцебрухом (см. [6]).

ТЕОРЕМА 2.2. *Индекс эллиптического комплекса $\{X_i^y\}$ равен χ_y -характеристике многообразия M , определенной выше, т.е.*

$$\text{ind}(X^y) = \chi_y[M] = \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j(1 + ye^{-x_j})}{1 - e^{-x_j}} \right) [M].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (3):

$$\begin{aligned}
 \text{ind}(X^y) &= \left(\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \text{ch}(X_i^y) \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}} \right) \right) [M] \\
 &= \left(\text{ch} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^i T^* M \right) \text{ch} \left(\sum_{p=0}^n y^p \Lambda^p T^* M \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}} \right) \right) [M] \\
 &= \left(\prod_{j=1}^n (1 - e^{x_j}) \prod_{j=1}^n (1 + y e^{-x_j}) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}} \right) \right) [M] \\
 &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j (1 + y e^{-x_j})}{1 - e^{-x_j}} \right) [M] = \chi_y[M].
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следующим фактом (см., например, [7]).

ЛЕММА 2.3. Пусть E – комплексное n -мерное расслоение над дифференцируемым многообразием X , $c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E) = (1 + x_1) \dots (1 + x_n)$ – формальное разложение полного класса Чженя. Пусть

$$\Lambda_t E := \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda^k E) t^k, \quad S_t E := \sum_{k=0}^{\infty} (S^k E) t^k.$$

Тогда

$$\text{ch}(\Lambda_t E^*) = \prod_{i=1}^n (1 + t e^{x_i}), \quad \text{ch}(S_t E^*) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - t e^{x_i}}. \quad (4)$$

В частности, если мы рассмотрим комплексы $\{\Lambda^{0,i}\}$, $\{\mathcal{E}_i = \sum_{p=0}^n (-1)^p \Lambda^{p,i}\}$, $\{L_i = \sum_{p=0}^n \Lambda^{p,i}\}$, то их индексы будут равны соответственно $\text{td}[M] = \text{ind}(\Lambda^{0,*})$, $e[M] = \text{ind}(\mathcal{E})$, $L[M] = \text{ind}(L)$.

Далее мы построим эллиптический комплекс, индекс которого будет равен $\hat{A}$ -роду многообразия M при некоторых дополнительных условиях. Пусть $c_1(M) \equiv 0 \pmod{2}$ (это эквивалентно условию $w_2(M) = 0$, т.е. существованию на M спинорной структуры). Тогда существует $\mathcal{L}$, линейное расслоение над M , такое, что $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} = \Lambda^n T^* M$, т.е. если $c(M) = (1 + x_1) \dots (1 + x_n)$, то $c(\mathcal{L}) = 1 - \frac{x_1 + \dots + x_n}{2}$ и $\text{ch}(\mathcal{L}) = \exp \left(-\frac{x_1 + \dots + x_n}{2} \right)$. Введем комплекс $\{A_i = \Lambda^{0,i} \otimes \mathcal{L}\}$.

ТЕОРЕМА 2.4. Индекс эллиптического комплекса A , определенного выше, равен $\hat{A}$ -роду многообразия M , т.е.

$$\text{ind}(A) = \hat{A}[M] = \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j}{2 \text{sh}(x_j/2)} \right) [M].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы снова воспользуемся формулами (3) и (4):

$$\begin{aligned}
\text{ind}(A) &= \left(\text{ch}(\mathcal{L}) \text{ch} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^{0,i} \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}} \right) \right) [M] \\
&= \left(\exp \left(-\frac{x_1 + \dots + x_n}{2} \right) \text{ch} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^i T M \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}} \right) \right) [M] \\
&= \left(\prod_{j=1}^n e^{-x_j/2} \prod_{j=1}^n (1 - e^{x_j}) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}} \right) \right) [M] \\
&= \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j e^{-x_j/2}}{1 - e^{-x_j}} \right) [M] = \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j}{2 \text{sh}(x_j/2)} \right) [M] = \hat{A}(M).
\end{aligned}$$

Таким образом мы построили эллиптические комплексы, ассоциированные с касательным расслоением к M , вычисляющие все основные рода Хирцебруха из § 1.

§ 3. Задача о вычислении родов Хирцебруха многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$ в терминах инвариантов действия

Пусть на многообразии M^{2n} действует преобразование g – трансверсальный (т.е. имеющий лишь изолированные неподвижные точки) эндоморфизм такой, что $g^p = 1$, p простое (т.е. задано действие группы $\mathbf{Z}/p$). Пусть $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_q$ – неподвижные точки и матрица Якоби $\mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)$ отображения g в точке $\mathcal{P}_j$ имеет собственные числа

$$\lambda_k^{(j)} = \exp \left(\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p} \right), \quad x_k^{(j)} \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, q.$$

Пусть имеется эллиптический комплекс E на многообразии M . Введем, следуя Атье и Ботту (см. [1]), следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Поднятием g на компоненты комплекса E называется набор линейных дифференциальных операторов $\varphi_i: \Gamma(g^*E_i) \rightarrow \Gamma(E_i)$. Здесь g^*E_i – прообраз расслоения E_i при отображении g .*

При помощи φ_i можно определить эндоморфизмы $T_i(g, \varphi): \Gamma(E_i) \rightarrow \Gamma(E_i)$ как композицию φ и Γ_g , $T_i(g, \varphi) = \varphi_i \circ \Gamma_g$, где $\Gamma_g: \Gamma(E_i) \rightarrow \Gamma(g^*E_i)$ – естественное отображение сечений расслоения E_i в сечения индуцированного расслоения g^*E_i . Тогда имеет место следующая общая теорема Атьи–Ботта–Лефшеца (см. [1]).

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $g: M \rightarrow M$ – трансверсальный эндоморфизм компактного многообразия M . Пусть E – эллиптический комплекс на M и $\varphi_i: \Gamma(g^*E_i) \rightarrow \Gamma(E_i)$ – поднятия g на компоненты комплекса E такие, что индуцированные эндоморфизмы $T_i(g, \varphi): \Gamma(E_i) \rightarrow \Gamma(E_i)$ определяют эндоморфизм $T(g, \varphi)$ комплекса E (т.е. T_i коммутируют с дифференциалами d_i). Тогда “эquivariantный индекс” $\text{ind}(g, E) := \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{tr } T_i^*$, где*

$T_i^*: H^i(E) \rightarrow H^i(E)$, вычисляется по формуле

$$\text{ind}(g, E) = \sum_{j=1}^q \sigma(\mathcal{P}_j), \quad (5)$$

где $\sigma(\mathcal{P}_j) \in \mathbb{C}$ зависит только от локальных свойств T и φ_i в точке $\mathcal{P}_j$.

В частности, если в каждой неподвижной точке $\mathcal{P}_j$ оператор φ_i индуцирует эндоморфизм $\varphi_i(\mathcal{P}_j): E_{i, \mathcal{P}_j} \rightarrow E_{i, \mathcal{P}_j}$, то $\sigma(\mathcal{P}_j)$ равно

$$\sigma(\mathcal{P}_j) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\text{tr } \varphi_i(\mathcal{P}_j)}{|\det(1 - \mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g))|}. \quad (6)$$

ПРИМЕР 3.1. Если $E_i = \Lambda^i(M)$ – комплекс де Рама, то $\varphi_i(\mathcal{P}_j) = \Lambda^i \mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)$.

ПРИМЕР 3.2. Если $E_i = \Lambda^{p,i}(M)$ – комплекс Дольбо, то

$$\varphi_i(\mathcal{P}_j) = \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g) \wedge \Lambda^i \bar{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g),$$

где $\mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)$ – голоморфная часть отображения $\mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)$.

Найдем $\sigma(\mathcal{P}_j)$ для комплекса Дольбо $\Lambda^{p,*}$. Так как $|\det(1 - \mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g))| = \det(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)) \det(1 - \bar{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g))$, то из (6) имеем

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{P}_j) &= \frac{\text{tr} \left(\Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g) \wedge \sum_i (-1)^i \Lambda^i \bar{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g) \right)}{\det(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)) \det(1 - \bar{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g))} \\ &= \frac{\text{tr}(\Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)) \det(1 - \bar{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g))}{\det(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)) \det(1 - \bar{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g))} = \frac{\text{tr } \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)}{\det(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g))}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным равенством из линейной алгебры

$$\det(1 - A) = \sum_i (-1)^i \text{tr } \Lambda^i A \quad (7)$$

для любого линейного оператора A . Итак,

$$\sigma_p(\mathcal{P}_j) = \frac{\text{tr } \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)}{\det(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g))}. \quad (8)$$

Теорема 3.2 и формула (8) позволяют находить функции неподвижных точек $\sigma(\mathcal{P}_j)$ для комплексов $\Lambda^{0,*}$, $\mathcal{E}$, L , X^y , вычисляющих соответственно род Тодда, эйлерову характеристику, L -род и χ_y -характеристику многообразия M .

§ 4. Вычисления для рода Тодда, эйлеровой характеристики и L -рода

4.1. Вычисления для эйлеровой характеристики. Рассмотрим комплекс $\mathcal{E}_i = \sum_{p=0}^n (-1)^p \Lambda^{p,i}$, $\text{ind}(\mathcal{E}) = e(M)$. В этом случае

$$\varphi_i(\mathcal{P}_j) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g) \wedge \Lambda^i \bar{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g),$$

а функции неподвижных точек есть (см. формулу (8))

$$\sigma_e(\mathcal{P}_j) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \sigma_p(\mathcal{P}_j) = \frac{\sum_{p=0}^n (-1)^p \text{tr} \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)}{\det(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g))} = 1. \quad (9)$$

Здесь мы снова воспользовались формулой (7). Отсюда по теореме 3.2 имеем

$$\text{ind}(g, \mathcal{E}) = \sum_{j=1}^q \sigma_e(\mathcal{P}_j) = q.$$

Так как $\frac{1}{p} \sum_{l \in \mathbf{Z}/p} \text{ind}(g^l, \mathcal{E}) = s$ есть альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса $\mathcal{E}$ и $\text{ind}(1, \mathcal{E}) = \text{ind}(\mathcal{E}) = e(M)$, то мы имеем

$$\text{ind}(1, \mathcal{E}) = e(M) = - \sum_{l=1}^{p-1} \text{ind}(g^l, \mathcal{E}) + ps = ps - q(p-1) = q + p(s-q).$$

Таким образом мы получили следующую формулу для эйлеровой характеристики:

$$e(M) \equiv q \pmod{p}. \quad (10)$$

4.2. Вычисления для рода Тодда. Вычисления рода Тодда комплексного многообразия в терминах действия группы $\mathbf{Z}/p$ на нем были проведены В. М. Бухштабером и С. П. Новиковым в работе [5]. Для полноты изложения мы здесь приведем их результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Функция Атьи–Ботта* $AB_{\text{td}}(x_1, \dots, x_n)$ *неподвижной точки* – это функция, сопоставляющая набору весов $x_1, \dots, x_n$, $x_i \in \mathbf{Z}/p$, число

$$AB_{\text{td}}(x_1, \dots, x_n) = - \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}} \right), \quad (11)$$

где $\text{Tr}: \mathbf{Q}(\zeta) \rightarrow \mathbf{Q}$ – теоретико-числовой след, $\zeta := e^{2\pi i/p}$.

В [5] было показано, что

$$\sum_{j=1}^q AB_{\text{td}}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \equiv \text{td}(M) \pmod{p}, \quad (12)$$

и был вычислен след в определении функций Атьи–Ботта для рода Тодда:

$$\begin{aligned} AB_{\text{td}}(x_1, \dots, x_n) &\equiv - \left\langle \frac{p[u]_p^{\text{td}}}{[u]_p^{\text{td}}} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\text{td}}} \right\rangle_n \pmod{p}, \\ AB_{\text{td}}(x_1, \dots, x_n) &\equiv \sum_{m=0}^n \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\text{td}}} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\text{td}}} \right\rangle_m \pmod{p}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $[u]_q^{\text{td}}$ – q -я степень в формальной группе, связанной с родом Тодда (см. формулу (2T)), а $\langle h(u) \rangle_k$ – коэффициент при u^k в степенном ряду $h(u)$.

4.3. Вычисления для L -рода. Теперь рассмотрим комплекс $L = \sum_{p=0}^n \Lambda^{p,*}$. Его индекс есть L -род: $\text{ind}(L) = L(M)$. В этом случае поднятиями g на компоненты комплекса L будут

$$\varphi_i(\mathcal{P}_j) = \sum_{p=0}^n \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g) \wedge \Lambda^i \bar{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g),$$

а функции неподвижных точек есть (см. формулу (8))

$$\begin{aligned} \sigma_L(\mathcal{P}_j) &= \sum_{p=0}^n \sigma_p(\mathcal{P}_j) = \frac{\sum_{p=0}^n \text{tr } \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)}{\det(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g))} \\ &= \frac{\det(1 + \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g))}{\det(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g))} = \prod_{k=1}^n \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь мы снова воспользовались формулой (7). Значит, как следует из теоремы 3.2, эквивариантный индекс есть

$$\text{ind}(g, L) = \sum_{j=1}^q \sigma_L(\mathcal{P}_j) = \sum_{j=1}^q \prod_{k=1}^n \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}.$$

Как и раньше, $\frac{1}{p} \sum_{l \in \mathbf{Z}/p} \text{ind}(g^l, L) = s$ – альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса L и $\text{ind}(1, L) = \text{ind}(L) = L(M)$, т.е.

$$L(M) = \text{ind}(1, L) = - \sum_{l=1}^{p-1} \text{ind}(g^l, L) + ps = - \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^n \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)l/p}}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)l/p}} + ps.$$

Снова рассматриваем след $\text{Tr}: \mathbf{Q}(\zeta) \rightarrow \mathbf{Q}$ и вводим функции Атьи–Ботта $AB_L(x_1, \dots, x_n)$ как

$$AB_L(x_1, \dots, x_n) = -\text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1 + e^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}} \right). \quad (15)$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^q AB_L(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \equiv L(M) \pmod{p}. \quad (16)$$

Соотношения (15) и (16) аналогичны соотношениям (11) и (12) для рода Тодда. Остается вычислить след в определении функций Атьи–Ботта $AB_L(x_1, \dots, x_n)$.

Обозначим $\theta = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$; тогда $\zeta = e^{2\pi i/p} = \frac{1-\theta}{1+\theta}$. Нам надо вычислить $\text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1+\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} \right)$. Вычисления будем проводить в p -адическом пополнении $\mathbf{Q}_p(\zeta)$ поля $\mathbf{Q}(\zeta)$. Символом $\simeq$ будем обозначать равенство по модулю группы $p\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}_p$. Вначале докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 4.2. $\text{Tr}(\theta^k) \simeq 0$ для любого $k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $2 = \zeta^p + 1 = (\zeta + 1)(\zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \dots - \zeta + 1)$, то

$$\theta = \frac{(1-\zeta)(\zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \dots - \zeta + 1)}{2} = \zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \dots - \zeta.$$

Поэтому

$$\text{Tr} \theta^k = \sum_{m=1}^{p-1} ((\zeta^m)^{p-1} - (\zeta^m)^{p-2} + (\zeta^m)^{p-3} - \dots - \zeta^m)^k \simeq 0,$$

так как

$$\sum_{m=1}^{p-1} ((\zeta^m)^{p-1} - (\zeta^m)^{p-2} + \dots - \zeta^m)^k = \sum_{m=0}^{p-1} ((\zeta^m)^{p-1} - (\zeta^m)^{p-2} + \dots - \zeta^m)^k,$$

и для любого r верно $\sum_{m=0}^{p-1} (\zeta^m)^r \simeq 0$. Лемма доказана.

Далее имеем

$$\prod_{k=1}^n \frac{1 + \zeta^{x_k}}{1 - \zeta^{x_k}} = \prod_{k=1}^n \frac{1 + \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}}{1 - \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{k=1}^n \frac{\theta \left(1 + \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)}{1 - \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}} =: \frac{1}{\theta^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \theta^k,$$

где $A_k \in \mathbf{Z}_p$ – целые p -адические числа (так как $1/x_k \in \mathbf{Z}_p$). Поэтому можно написать

$$\text{Tr} \left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \theta^k \right) \simeq \text{Tr} \left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{k=0}^n A_k \theta^k \right) = \sum_{k=0}^n (A_k \text{Tr}(\theta^{k-n})).$$

Положим $\text{Tr } \theta^{-s} = B_s$ и введем два формальных ряда $A(u) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k u^k$, $B(u) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k u^k$. Заметим, что, как следует из (2_L) , $A(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L}$. Таким образом, нам надо вычислить коэффициент при u^n в ряде $A(u)B(u)$. Имеем

$$\begin{aligned} B(u) &= \text{Tr} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \theta^{-s} u^s \right) = \text{Tr} \left(\frac{1}{1 - \theta^{-1} u} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\frac{\theta}{\theta - u} \right) = \text{Tr} \left(1 + \frac{u}{\theta - u} \right) = (p-1) + u \text{Tr} \left(\frac{1}{\theta - u} \right). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что если $\varphi_{\alpha}(u)$ – минимальный многочлен элемента α относительно расширения $\mathbf{Q}_p(\zeta) \mid \mathbf{Q}_p$, то $\text{Tr} \frac{1}{\alpha - u} = -\frac{\varphi'_{\alpha}(u)}{\varphi_{\alpha}(u)}$. Так как

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\zeta^p - 1}{\zeta - 1} = \frac{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta} \right)^p - 1}{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta} \right) - 1} \\ &= \frac{((1-\theta)^p - (1+\theta)^p)(1+\theta)}{(1+\theta)^p(-2\theta)} = \frac{1}{(1+\theta)^{p-1}} \frac{(1+\theta)^p - (1-\theta)^p}{2\theta}, \end{aligned}$$

то $\varphi_{\theta}(u) = \frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{2u}$ – минимальный многочлен элемента $\theta = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$. Тогда имеем

$$-\text{Tr} \frac{1}{\theta - u} = \frac{\varphi'_{\theta}(u)}{\varphi_{\theta}(u)} = p \frac{(1+u)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} - \frac{1}{u}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} B(u) &= (p-1) + u \text{Tr} \left(\frac{1}{\theta - u} \right) = \frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p}, \\ \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1 + \zeta^{x_k}}{1 - \zeta^{x_k}} \right) &\simeq \langle A(u)B(u) \rangle_n = \left\langle p \frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L} \right\rangle_n, \end{aligned}$$

т.е.

$$AB_L(x_1, \dots, x_n) \equiv - \left\langle p \frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L} \right\rangle_n \pmod{p}.$$

Эта формула аналогична первой из формул (13). Далее,

$$\begin{aligned} p \frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} &= p \frac{(1-u)(1+u)^p - (1+u)(1-u)^p}{(1-u)(1+u)((1+u)^p - (1-u)^p)} \\ &= p \frac{(1+u)^p - (1-u)^p - u((1+u)^p + (1-u)^p)}{(1-u^2)((1+u)^p - (1-u)^p)} \\ &= \frac{p}{1-u^2} - \frac{pu}{(1-u^2) \frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{(1+u)^p + (1-u)^p}} = \frac{p}{1-u^2} - \frac{pu}{(1-u^2)[u]_p^L} \\ &\simeq -\frac{pu}{[u]_p^L} (1 + u^2 + u^4 + \dots). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} AB_L(x_1, \dots, x_n) &\equiv - \left\langle p \frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L} \right\rangle_n \\ &\equiv \left\langle \frac{pu}{[u]_p^L} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L} (1 + u^2 + u^4 + \dots) \right\rangle_n \pmod{p}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$AB_L(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{i=0}^{[n/2]} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^L} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L} \right\rangle_{n-2i}.$$

Но так как $[u]_k^L = \frac{(1+u)^k - (1-u)^k}{(1+u)^k + (1-u)^k} = \text{th}(k \operatorname{arth} u)$, а ряд $\operatorname{arth} u$ (как и $\text{th } u$) содержит только нечетные степени u , то ряд $\frac{pu}{[u]_p^L} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L}$ содержит только четные степени u , и мы можем теперь записать формулы для функций Атьи–Ботта для L -рода, аналогичные формулам (13) для рода Тодда:

$$\begin{aligned} AB_L(x_1, \dots, x_n) &\equiv - \left\langle p \frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L} \right\rangle_n \pmod{p}, \\ AB_L(x_1, \dots, x_n) &\equiv \sum_{m=0}^n \left\langle \frac{pu}{[u]_p^L} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L} \right\rangle_m \pmod{p}. \end{aligned} \tag{17}$$

Тогда по формуле (16)

$$L(M) \equiv \sum_{j=1}^q \sum_{m=0}^n \left\langle \frac{pu}{[u]_p^L} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^L} \right\rangle_m \pmod{p}. \tag{18}$$

Здесь $[u]_p^L = \frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{(1+u)^p + (1-u)^p}$.

Заметим, что соотношения типа (12), (16) можно получить и для эйлеровой характеристики. Функциями Атьи–Ботта будут

$$AB_e(x_1, \dots, x_n) = -\operatorname{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1-\zeta}{1-\zeta} \right) = -\operatorname{Tr}(1) = -(p-1) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Тогда

$$q = \sum_{j=1}^q AB_e(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \equiv e(M) \pmod{p}. \tag{19}$$

Это соотношение аналогично соотношениям (12) и (16) для рода Тодда и L -рода.

§ 5. Общие результаты о вычислении родов Хирцебруха через инварианты действия $\mathbf{Z}/p$

Далее мы рассмотрим другой подход к вычислению эквивариантного индекса $\text{ind}(g, E) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \text{tr}(g, H^i)$ эллиптического комплекса E , изложенный в [3]; см. также [7].

Вначале мы несколько ослабим условия на действие оператора g , $g^p = 1$, на комплексном многообразии M^{2n} . Именно, мы уберем условие трансверсальности. Пусть теперь $M^g = \{x \in M \mid gx = x\}$ – множество неподвижных точек. Представим его в виде объединения связных компонент: $M^g = \cup M_\nu^g$. Тогда эквивариантный индекс представляется в виде суммы функций неподвижных подмногообразий $\sigma(M_\nu^g)$, которые вычисляются следующим образом.

Пусть $Y = M_\nu^g$ – одна из компонент связности множества неподвижных точек. Для любой точки $p \in Y$ оператор g линейно действует на касательном пространстве $T_p M$, которое разлагается в прямую сумму собственных подпространств $N_{p,\lambda}$ с собственным значением λ , $|\lambda| = 1$. Таким образом, мы получаем расслоение N_λ над Y , соответствующее собственному значению λ . N_1 – это в точности касательное расслоение TY к Y . Пусть $d_\lambda = \text{rk } N_\lambda$. Тогда мы имеем

$$TM|_Y = \bigoplus_{\lambda} N_{\lambda}, \quad c(N_{\lambda}) = \prod_{i=1}^{d_{\lambda}} (1 + x_i^{\lambda}), \quad (20)$$

т.е.

$$c(TM_Y) = \prod_{\lambda} \prod_{i=1}^{d_{\lambda}} (1 + x_i^{\lambda}) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Функция $\sigma(Y)$ находится следующим образом. Рассмотрим формулу (3) для индекса из теоремы 2.1:

$$\text{ind}(E) = \left(\left(\sum_{i=0}^m (-1)^i \text{ch}(E_i) \right) c_n(X) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}} \right) \right) [M], \quad (21)$$

и заменим в ней M на Y и e^{x_i} на $\lambda^{-1} e^{x_i}$. То же самое сделаем и с $\text{ch}(E_i)$. Это всегда можно сделать, если все расслоения E_i ассоциированы с касательным расслоением к M . Этот “рецепт” взят из [7].

В случае конечного числа неподвижных точек имеем $Y = \mathbf{pt}$, $c_n(Y) = 1$, т.е. мы должны заменить $x_1 x_2 \dots x_n$ на 1, e^{x_j} на λ_j^{-1} , т.е. если, как и выше, ввести “веса” x_i по формуле $\lambda_j = \exp\left(\frac{2\pi i x_j}{p}\right)$, то мы должны заменить x_j^{λ} на $-\frac{2\pi i}{p} x_j$ (здесь в первом случае x_j означает первый класс Чжэня “виртуального” одномерного подрасслоения в TM , соответствующего собственному значению λ_j , а во втором – “вес” неподвижной точки, определенный лишь по модулю p).

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим χ_y -характеристику многообразия M . Применив к формуле из теоремы 2.2 наш “рецепт”, мы получим следующую формулу для функции неподвижной точки $\mathcal{P}$:

$$\sigma(\mathcal{P}) = \prod_{k=1}^n \frac{1 + y e^{2\pi i x_k / p}}{1 - e^{2\pi i x_k / p}}. \quad (22)$$

Подставив сюда значения $y = -1, 0, 1$, мы получим формулы для функций неподвижных точек для эйлеровой характеристики, рода Тодда и L -рода:

$$\sigma_e(\mathcal{P}) = 1, \quad \sigma_{\text{td}}(\mathcal{P}) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}, \quad \sigma_L(\mathcal{P}) = \prod_{k=1}^n \frac{1 + e^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}},$$

которые совпадают с формулами (9), (14) и формулой из работы [5], полученными из теоремы 3.2 Атьи–Ботта.

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим теперь общий случай произвольного рода Хирцебруха φ :

$$\varphi(M) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{f_\varphi(x_i)} \right) [M],$$

где $g_\varphi(u) = f_\varphi^{-1}(u)$ – логарифм соответствующей формальной группы. Пусть существует E_φ – эллиптический комплекс расслоений, ассоциированных с TM , индекс которого равен $\varphi(M)$. Применив наш “рецепт”, мы получим, что функции неподвижных точек действия g на M будут вычисляться по формуле

$$\sigma(\mathcal{P}) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{f_\varphi(-2\pi i x_k/p)}, \quad (23)$$

где x_k – “веса” неподвижной точки $\mathcal{P}$, определяемые из условия $\lambda_k = \exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)$, $x_k \not\equiv 0 \pmod{p}$, λ_k – собственные числа матрицы Якоби $\mathcal{J}_{\mathcal{P}}(g)$ отображения g в точке $\mathcal{P}$. Эквивариантный индекс комплекса E_φ определяется тогда по формуле

$$\text{ind}(g, E_\varphi) = \sum_{j=1}^q \prod_{k=1}^n \frac{1}{f_\varphi(-2\pi i x_k^{(j)}/p)}.$$

Далее, $\frac{1}{p} \sum_{l \in \mathbf{Z}/p} \text{ind}(g^l, E_\varphi) = s$ – альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса E_φ и $\text{ind}(1, E_\varphi) = \text{ind}(E_\varphi) = \varphi(M)$. Поэтому имеем

$$\varphi(M) = \text{ind}(1, E_\varphi) = - \sum_{l=1}^{p-1} \text{ind}(g^l, E_\varphi) + ps = - \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^n \frac{1}{f_\varphi(-2\pi i x_k^{(j)l}/p)} + ps.$$

Рассмотрим $\text{Tr}: \mathbf{Q}_p(\zeta) \rightarrow \mathbf{Q}_p$ – теоретико-числовой след $\left(\zeta := \exp \frac{2\pi i}{p}\right)$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^n \frac{1}{f_\varphi(-2\pi i x_k^{(j)l}/p)} = \text{Tr} \prod_{k=1}^n \frac{1}{f_\varphi(-2\pi i x_k^{(j)}/p)}.$$

Итак, мы получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть имеется эллиптический комплекс расслоений, ассоциированных с TM , индекс которого равен некоторому роду Хирцебруха $\varphi(M)$ многообразия M . Тогда если на M действует голоморфный трансверсальный эндоморфизм g такой, что $g^p = 1$, то имеется следующая формула для $\varphi(M)$:

$$\varphi(M) \equiv - \sum_{j=1}^q \text{Tr} \prod_{k=1}^n \frac{1}{f_{\varphi}(-2\pi i x_k^{(j)}/p)} \pmod{p}.$$

Здесь уместно ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Функция Атьи–Ботта $AB_{\varphi}(x_1, \dots, x_n)$ неподвижной точки, соответствующая роду φ , – это функция, сопоставляющая набору весов $x_1, \dots, x_n$, $x_i \in \mathbf{Z}/p$, число

$$AB_{\varphi}(x_1, \dots, x_n) = - \text{Tr} \prod_{k=1}^n \frac{1}{f_{\varphi}(-2\pi i x_k^{(j)}/p)}.$$

Тогда получаем

$$\sum_{j=1}^q AB_{\varphi}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \equiv \varphi(M) \pmod{p}. \quad (24)$$

Обозначим теперь $\theta = f_{\varphi}(-2\pi i/p)$. Тогда $-2\pi i/p = g_{\varphi}(\theta)$ и $f_{\varphi}(-2\pi i/p x_k) = f_{\varphi}(x_k g_{\varphi}(\theta)) = [\theta]_{x_k}^{\varphi}$. Поэтому имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Функцию Атьи–Ботта $AB_{\varphi}(x_1, \dots, x_n)$ неподвижной точки, соответствующую роду φ , можно представить в виде

$$AB_{\varphi}(x_1, \dots, x_n) = - \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\varphi}} \right), \quad \theta = f_{\varphi} \left(\frac{-2\pi i}{p} \right).$$

ЛЕММА 5.4. Для любого $k > 0$ $\text{Tr} \theta^k \simeq 0$ (т.е. $\text{Tr} \theta^k \in p\mathbf{Z}_p$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta = f_{\varphi} \left(-\frac{2\pi i}{p} \right) = C_0 + C_1\zeta + \dots + C_{p-1}\zeta^{p-1} \in \mathbf{Q}_p(\zeta)$, $C_i \in \mathbf{Z}_p$. Тогда $C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \dots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m} = f_{\varphi} \left(-\frac{2\pi i}{p} m \right)$, в частности, $C_0 + C_1 + \dots + C_{p-1} = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \theta^k &= \sum_{m=1}^{p-1} f_{\varphi} \left(-\frac{2\pi i}{p} m \right) = \sum_{m=1}^{p-1} (C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \dots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m}) \\ &= \sum_{m=0}^{p-1} (C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \dots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m}) \simeq 0, \end{aligned}$$

так как для любого r верно $\sum_{m=0}^{p-1} \zeta^{rm} \simeq 0$. Лемма доказана.

ПРИМЕР 5.3. Для рода Тодда $\theta = f_{\text{td}} \left(-\frac{2\pi i}{p} \right) = 1 - e^{2\pi i/p} = 1 - \zeta$ (см. формулу (2_{td})), т.е. $C_0 = 1$, $C_1 = -1$, $C_i = 0$ при $i > 1$.

ПРИМЕР 5.4. Для L -рода $\theta = \hat{f}_L \left(-\frac{2\pi i}{p} \right) = \frac{1 - e^{2\pi i/p}}{1 + e^{2\pi i/p}} = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} = \zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \dots - \zeta$ (см. лемму 4.2), т.е. $C_0 = 0$, $C_{2i+1} = -1$, $C_{2i} = 1$ при $i > 1$.

§ 6. Вычисления для $\hat{A}$ -рода и χ_y -характеристики

6.1. Вычисления для $\hat{A}$ -рода. Рассмотрим $\hat{A}$ -род

$$\hat{A}(M) = \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j e^{-x_j/2}}{1 - e^{-x_j}} \right) [M]$$

для стабильно комплексных многообразий M , у которых $c_1(M) \equiv 0 \pmod{2}$. Эллиптический комплекс, индекс которого равен $\hat{A}(M)$, дается теоремой 2.4. Функции Атьи–Ботта для $\hat{A}$ -рода имеют следующий вид (см. определение 5.2):

$$AB_{\hat{A}}(x_1, \dots, x_n) = -\operatorname{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\exp\left(\frac{2\pi i x_k}{2p}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)} \right) = -\operatorname{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\zeta^{x_k/2}}{1 - \zeta^{x_k}} \right), \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^q AB_{\hat{A}}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \equiv \hat{A}(M) \pmod{p}. \quad (26)$$

Теперь надо вычислить след в определении функций Атьи–Ботта $AB_{\hat{A}}(x_1, \dots, x_n)$. Имеем в силу предложения 5.3 $\frac{\zeta^{x_k/2}}{1 - \zeta^{x_k}} = \frac{1}{[\theta]_{x_k}^A}$, где $[u]_m^A = 2 \operatorname{sh} \left(m \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)$ – степенная система, связанная с $\hat{A}$ -родом (см. формулу (2_A)), а $\theta = 2 \operatorname{sh} \left(-\frac{2\pi i}{2p} \right) = -2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i}{p} \right) = e^{-\pi i/p} - e^{\pi i/p} = \zeta^{-1/2} - \zeta^{1/2} = \zeta^{(p+1)/2} - \zeta^{(p-1)/2}$.

Найдем минимальный многочлен элемента $\theta = -2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i}{p} \right)$. Очевидно, это будет

$$\varphi_{\theta}(u) = \frac{2 \operatorname{sh} \left(p \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{u},$$

так как

$$\varphi_{\theta}(\theta) = \frac{2 \operatorname{sh} \left(p \operatorname{arsh} \left(\left(-2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i}{p} \right) \right) / 2 \right) \right)}{\theta} = \frac{-2 \operatorname{sh} \left(p \cdot \frac{\pi i}{p} \right)}{\theta} = 0$$

и $\varphi_{\theta}(u)$ – многочлен степени $p-1$ со старшим членом u^{p-1} ; например, при $p=3$ $\varphi_{\theta}(u) = u^2 + 3$, при $p=5$ $\varphi_{\theta}(u) = u^4 + 5u^2 + 5$ и т.д.

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta^{x_k/2}}{1 - \zeta^{x_k}} &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{f_{\hat{A}}(x_k g_{\hat{A}}(\theta))} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\hat{A}}} \\ &= \frac{1}{\theta^n} \prod_{k=1}^n \frac{\theta}{[\theta]_{x_k}^{\hat{A}}} =: \frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i = \frac{1}{\theta^n} A(\theta), \end{aligned}$$

где $A(u) := \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^A} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i u^i$, $A_i \in \mathbf{Z}_p$ – целые p -адические числа. Из леммы 5.4 следует, что для любого $k > 0$ $\text{Tr}(\theta^k) \simeq 0$ ($\theta = \zeta^{(p+1)/2} - \zeta^{(p-1)/2}$). Поэтому интересующий нас след есть

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\zeta^{x_k/2}}{1 - \zeta^{x_k}} \right) &= \text{Tr} \left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i \right) \simeq \text{Tr} \left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^n A_i \theta^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (A_i \text{Tr}(\theta^{i-n})) = \langle A(u) B(u) \rangle_n, \end{aligned}$$

где $B_s := \text{Tr} \theta^{-s}$, $B(u) := \sum_{i=0}^{\infty} B_i u^i$. Как и раньше, имеем $B(u) = (p-1) + u \text{Tr} \left(\frac{1}{\theta-u} \right)$, $\text{Tr} \left(\frac{1}{\theta-u} \right) = -\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)}$. Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(u) &= \frac{2 \text{sh} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{u}, \quad \varphi'_\theta(u) = \frac{p \text{ch} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{u \sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}} - \frac{2 \text{sh} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{u^2}, \\ \frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} &= \frac{p}{2 \sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}} \frac{\text{ch} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\text{sh} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} - \frac{1}{u}, \\ B(u) &= p-1 - u \frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} = p - \frac{p \frac{u}{2}}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}} \frac{\text{ch} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\text{sh} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} \\ &= \frac{p \text{sh} \left((p-1) \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\text{ch} \left(\text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \text{sh} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} = \frac{p \text{sh} \left((p-1) \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}} \text{sh} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами $\text{ch}(\text{arsh}(u/2)) = \sqrt{1 + u^2/4}$ и $\text{sh}(x-y) = \text{sh} x \text{ch} y - \text{sh} y \text{ch} x$. Далее имеем

$$\begin{aligned} B(u) &= \frac{p \text{sh} \left((p-1) \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\text{ch} \left(\text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \text{sh} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} \\ &= \frac{2p \text{sh} \left((p-1) \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\text{sh} \left((p-1) \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) + \text{sh} \left((p+1) \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} \\ &= p \frac{2[u]_{p-1}^A}{[u]_{p-1}^A + [u]_{p+1}^A} \simeq p \frac{[u]_{p-1}^A - [u]_{p+1}^A}{[u]_{p-1}^A + [u]_{p+1}^A}. \end{aligned}$$

Здесь $[u]_m^A = 2 \text{sh}(m \text{arsh}(u/2))$, и мы воспользовались формулой $2 \text{ch} x \text{sh} y = \text{sh}(y+x) + \text{sh}(y-x)$. Итак, для функций Атьи–Ботта $AB_{\hat{A}}(x_1, \dots, x_n) = -\text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\zeta^{x_k/2}}{1 - \zeta^{x_k}} \right)$ для $\hat{A}$ -рода мы имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} AB_{\hat{A}}(x_1, \dots, x_n) &= - \left\langle p \frac{\text{sh} \left((p-1) \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}} \text{sh} \left(p \text{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\hat{A}}} \right\rangle_n, \\ AB_{\hat{A}}(x_1, \dots, x_n) &= - \left\langle p \frac{2[u]_{p-1}^A}{[u]_{p-1}^A + [u]_{p+1}^A} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\hat{A}}} \right\rangle_n, \\ AB_{\hat{A}}(x_1, \dots, x_n) &\simeq \left\langle p \frac{[u]_{p+1}^A - [u]_{p-1}^A}{[u]_{p-1}^A + [u]_{p+1}^A} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\hat{A}}} \right\rangle_n. \end{aligned} \tag{27}$$

Тогда для $\hat{A}$ -рода имеем $\hat{A}(M) \equiv \sum_{j=1}^q AB_{\hat{A}}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$.

6.2. Вычисления для χ_y -характеристики. Рассмотрим χ_y -характеристику

$$\chi_y(M) = \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j(1 + ye^{-x_j})}{1 - e^{-x_j}} \right) [M]$$

для многообразия M . Эллиптический комплекс, индекс которого равен $\chi_y(M)$, дается теоремой 2.2. Функции Атьи–Ботта для $\chi_y(M)$ -характеристики имеют следующий вид (см. определение 5.2):

$$\begin{aligned} AB_{\chi_y}(x_1, \dots, x_n) &= -\operatorname{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1 + y \exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)} \right) \\ &= -\operatorname{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1 + y \zeta^{x_k}}{1 - \zeta^{x_k}} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^q AB_{\chi_y}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \equiv \chi_y(M) \pmod{p}. \quad (29)$$

Те же формулы можно получить и из теоремы 3.2 Атьи–Ботта, как это делалось в п. 4.3 для L -рода.

Теперь вычислим след в определении функций Атьи–Ботта $AB_{\chi_y}(x_1, \dots, x_n)$. Имеем в силу предложения 5.3 $\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} = \frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}}$, где $[u]_m^{\chi_y} = \frac{(1+yu)^m - (1-u)^m}{(1+yu)^m + y(1-u)^m}$ (при $y \neq -1$) – степенная система, связанная с χ_y -характеристикой (см. формулу (2_{χ_y})), а

$$\theta = \hat{f}_{\chi_y} \left(-\frac{2\pi i}{p} \right) = \frac{1 - e^{2\pi i/p}}{1 + ye^{2\pi i/p}} = \frac{1 - \zeta}{1 + y\zeta}.$$

Тогда $\zeta = \frac{1-\theta}{1+y\theta}$. Далее мы будем предполагать $y \in \mathbf{Z}_p$, $y \neq -1 \pmod{p}$. Случай $y = -1 \pmod{p}$ сводится к эйлеровой характеристике, рассмотренной выше. Заметим, что при $y = 0, 1$ получается $\theta = 1 - \zeta$ и $\theta = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, что соответствует полученным выше значениям для рода Тодда и L -рода.

Найдем минимальный многочлен элемента $\theta = \frac{1-\zeta}{1+y\zeta}$. Очевидно, это будет

$$\varphi_{\theta}(u) = \frac{(1+yu)^p - (1-u)^p}{(1+y)u},$$

так как

$$0 = \frac{\zeta^p - 1}{\zeta - 1} = \frac{\left(\frac{1-\theta}{1+y\theta}\right)^p - 1}{\frac{1-\theta}{1+y\theta} - 1} = \frac{1}{(1+y\theta)^{p-1}} \varphi_{\theta}(\theta),$$

т.е. $\varphi_{\theta}(\theta) = 0$ и $\varphi_{\theta}(u)$ – многочлен степени $p-1$ со старшим членом u^{p-1} .

Далее имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\hat{f}_{\chi_y}(x_k \hat{g}_{\chi_y}(\theta))} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}} \\ &= \frac{1}{\theta^n} \prod_{k=1}^n \frac{\theta}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}} =: \frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i = \frac{1}{\theta^n} A(\theta), \end{aligned}$$

где $A(u) := \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\chi_y}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i u^i$, $A_i \in \mathbf{Z}_p$ — целые p -адические числа. Из леммы 5.4 следует, что для любого $k > 0$ $\text{Tr}(\theta^k) \simeq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Представление θ в виде $\theta = C_0 + C_1\zeta + \dots + C_{p-1}\zeta^{p-1}$, $C_i \in \mathbf{Z}_p$, используемое при доказательстве леммы 5.4, получается следующим образом. Так как

$$1+y^p = 1+(y\zeta)^p = (1+y\zeta)((y\zeta)^{p-1} - (y\zeta)^{p-2} + (y\zeta)^{p-3} - \dots - y\zeta + 1),$$

то

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1-\zeta}{1+y\zeta} = \frac{(1-\zeta)((y\zeta)^{p-1} - (y\zeta)^{p-2} + (y\zeta)^{p-3} - \dots - y\zeta + 1)}{1+y^p} = \frac{1}{1+y^p} \\ &\quad \times \left((y^{p-1} + y^{p-2})\zeta^{p-1} - (y^{p-2} + y^{p-3})\zeta^{p-2} + \dots - (y+1)\zeta + 1 - y^{p-1} \right). \end{aligned}$$

По малой теореме Ферма $y^p + 1 \equiv y + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, поэтому $C_i = (-1)^i \frac{y^i + y^{i-1}}{1+y^p} \in \mathbf{Z}_p$, ($i > 0$), $C_0 = \frac{1-y^{p-1}}{1+y^p} \in \mathbf{Z}_p$.

Интересующий нас след есть

$$\text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} \right) \simeq \text{Tr} \left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_i \text{Tr}(\theta^{i-n})) = \langle A(u)B(u) \rangle_n,$$

где $B_s := \text{Tr} \theta^{-s}$, $B(u) := \sum_{i=0}^{\infty} B_i u^i$. Как и раньше, имеем $B(u) = (p-1) + u \text{Tr} \left(\frac{1}{\theta-u} \right)$, $\text{Tr} \left(\frac{1}{\theta-u} \right) = -\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)}$. Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(u) &= \frac{(1+yu)^p - (1-u)^p}{(1+y)u}, \\ \varphi'_\theta(u) &= \frac{py(1+yu)^{p-1} + p(1-u)^{p-1}}{(1+y)u} - \frac{(1+yu)^p - (1-u)^p}{(1+y)u^2}, \\ \frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} &= p \frac{y(1+yu)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p} - \frac{1}{u}, \\ B(u) &= (p-1) - u \frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} \\ &= p - up \frac{y(1+yu)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p} = p \frac{(1+yu)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} AB_{\chi_y}(x_1, \dots, x_n) &= -\operatorname{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1 + y\zeta^{x_k}}{1 - \zeta^{x_k}} \right) \\ &= - \left\langle p \frac{(1 + yu)^{p-1} - (1 - u)^{p-1}}{(1 + yu)^p - (1 - u)^p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\chi_y}} \right\rangle_n. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} B(u) &= p \frac{(1 + yu)^{p-1} - (1 - u)^{p-1}}{(1 + yu)^p - (1 - u)^p} = p \frac{(1 - u)(1 + yu)^p - (1 + yu)(1 - u)^p}{(1 - u)(1 + yu)((1 + yu)^p - (1 - u)^p)} \\ &= \frac{p}{(1 - u)(1 + yu)} - \frac{pu}{(1 - u)(1 + yu) \frac{(1 + yu)^p - (1 - u)^p}{(1 + yu)^p + y(1 - u)^p}} \\ &\simeq - \frac{pu}{[u]_p^{\chi_y}} \frac{1}{(1 - u)(1 + yu)}, \\ \frac{1}{(1 - u)(1 + yu)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^m y^{m+1}}{1 + y} u^m, \\ AB_{\chi_y}(x_1, \dots, x_n) &\simeq \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\chi_y}} \frac{1}{(1 - u)(1 + yu)} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\chi_y}} \right\rangle_n \\ &= \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\chi_y}} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\chi_y}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^m y^{m+1}}{1 + y} u^m \right\rangle_n. \end{aligned}$$

Окончательно имеем следующие формулы для функций Атьи–Ботта для χ_y -характеристики $AB_{\chi_y}(x_1, \dots, x_n) = -\operatorname{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1 + y\zeta^{x_k}}{1 - \zeta^{x_k}} \right)$ (при $y \neq -1 \pmod p$):

$$\begin{aligned} AB_{\chi_y}(x_1, \dots, x_n) &= - \left\langle p \frac{(1 + yu)^{p-1} - (1 - u)^{p-1}}{(1 + yu)^p - (1 - u)^p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\chi_y}} \right\rangle_n, \\ AB_{\chi_y}(x_1, \dots, x_n) &\simeq \sum_{m=0}^n \frac{1 + (-1)^m y^{m+1}}{1 + y} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\chi_y}} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^{\chi_y}} \right\rangle_{n-m}. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $[u]_m^{\chi_y} = \frac{(1 + yu)^m - (1 - u)^m}{(1 + yu)^m + y(1 - u)^m}$ – степенная система, связанная с χ_y -характеристикой. Тогда для χ_y -характеристики имеем

$$\begin{aligned} \chi_y(M) &\equiv \sum_{j=1}^q AB_{\chi_y}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \\ &\equiv \sum_{j=1}^q \sum_{m=0}^n \frac{1 + (-1)^m y^{m+1}}{1 + y} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\chi_y}} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}^{\chi_y}} \right\rangle_{n-m} \pmod p. \end{aligned}$$

Эти формулы обобщают формулы (13), (17) для рода Тодда и L -рода, которые получаются подстановкой $y = 0$ и $y = 1$ соответственно.

§ 7. Роль уравнений Коннера–Флойда в задаче о вычислении родов Хирцебруха в терминах инвариантов действия

Здесь мы рассматриваем связь результатов § 5 с так называемыми уравнениями Коннера–Флойда, введенными С. П. Новиковым в работах [12], [13] (аналогичные соотношения были также получены в работах [8], [11]). А именно, в этих работах было доказано, что наборы весов $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, x_k^{(j)} \in \mathbf{Z}/p$, являются наборами весов действия группы $\mathbf{Z}/p$ на многообразии M^{2n} тогда и только тогда, когда они связаны уравнениями Коннера–Флойда

$$\sum_{j=1}^q \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m \simeq 0, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (31)$$

Здесь $[u]_m$ – степенная система, соответствующая формальной группе геометрических кобордизмов (см. [4], [12]). Рассмотрев род Хирцебруха $\varphi: \Omega_U \rightarrow \Lambda$, мы получаем уравнения Коннера–Флойда, соответствующие роду φ :

$$\sum_{j=1}^q \left\langle \frac{pu}{[u]_p^\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}^\varphi} \right\rangle_m \simeq 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (32)$$

где $[u]_m^\varphi$ – степенная система, соответствующая роду φ .

Кроме того, в работе [5] из теории кобордизмов была выведена следующая формула для рода Тодда:

$$\mathrm{td}(M) \simeq \sum_{j=1}^q \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\mathrm{td}}} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}^{\mathrm{td}}} \right\rangle_n, \quad (33)$$

и показано, что разность между формулой

$$\mathrm{td}(M) \simeq - \sum_{j=1}^q \mathrm{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \zeta^{x_k^{(j)}}} \right) \simeq \sum_{j=1}^q \sum_{m=0}^n \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\mathrm{td}}} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}^{\mathrm{td}}} \right\rangle_m,$$

выведенной из теоремы Атьи–Ботта (см. п. 4.2), и суммой уравнений Коннера–Флойда (32) для рода Тодда есть в точности формула (33) (здесь $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $[u]_m^{\mathrm{td}} = 1 - (1 - u)^m$).

Далее мы обобщим этот результат на случай произвольного рода φ , удовлетворяющего условиям теоремы 5.1.

ТЕОРЕМА 7.1. *Разность между формулой из теоремы 5.1*

$$\varphi(M) \simeq - \sum_{j=1}^q \mathrm{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k^{(j)}}^\varphi} \right), \quad \theta = f_\varphi \left(-\frac{2\pi i}{p} \right),$$

и суммой уравнений Коннера–Флойда (32) для рода φ с некоторыми целыми p -адическими коэффициентами дает следующую формулу для рода φ :

$$\varphi(M) \simeq \sum_{j=1}^q \left\langle \frac{pu}{[u]_p^\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}^\varphi} \right\rangle_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k}^\varphi} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{k=1}^n \frac{\theta}{[\theta]_{x_k}^\varphi} =: \frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i = \frac{1}{\theta^n} A(\theta),$$

где $A(u) := \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^\varphi} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i u^i$, $A_i \in \mathbf{Z}_p$ – целые p -адические числа. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k}^\varphi} \right) &= \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i \right) \simeq \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^n A_i \theta^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n A_i \mathrm{Tr} \theta^{i-n} = \left\langle \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^\varphi} B(u) \right\rangle_n, \end{aligned}$$

где $B_s := \mathrm{Tr} \theta^{-s}$, $B(u) := \sum_{i=0}^{\infty} B_i u^i$.

Введем теперь ряд $h(u)$:

$$h(u) = p \frac{[u]_p^\varphi - u}{B(u)[u]_p^\varphi}. \quad (34)$$

Тогда $h(u)$ – ряд с целыми p -адическими коэффициентами и свободным членом 1. Действительно,

$$h(0) = p \frac{[u]_p^\varphi - u}{B(u)[u]_p^\varphi} \Big|_{u=0} = p \frac{1 - \frac{u}{[u]_p^\varphi}}{B(u)} \Big|_{u=0} = \frac{p \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p-1} = 1,$$

так как $B(0) = B_0 = \mathrm{Tr} \theta^0 = p-1$, $[u]_p^\varphi = pu + \dots$. Из формулы (34) следует, что

$$B(u) = \frac{p}{h(u)} - \frac{pu}{[u]_p^\varphi} \frac{1}{h(u)},$$

т.е.

$$B(u) \simeq -\frac{pu}{[u]_p^\varphi} \frac{1}{h(u)} = -\frac{pu}{[u]_p^\varphi} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} H_i u^i\right),$$

где H_i – коэффициенты ряда $\frac{1}{h(u)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k}^\varphi} \right) &\simeq - \left\langle \frac{pu}{[u]_p^\varphi} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} H_i u^i\right) \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^\varphi} \right\rangle_n \\ &= - \left\langle \frac{pu}{[u]_p^\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^\varphi} \right\rangle_n - \sum_{m=0}^{n-1} H_{n-m} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k}^\varphi} \right\rangle_m, \\ \varphi(M) &\simeq - \sum_{j=1}^q \mathrm{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k^{(j)}}^\varphi} \right) \\ &\simeq \sum_{j=1}^q \left\langle \frac{pu}{[u]_p^\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}^\varphi} \right\rangle_n + \sum_{m=0}^{n-1} H_{n-m} \left(\sum_{j=1}^q \left\langle \frac{pu}{[u]_p^\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}^\varphi} \right\rangle_m \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 7.1. Рассмотрим род Тодда $\text{td}(M)$. Тогда $[u]_p^{\text{td}} = 1 - (1 - u)^p$, $B(u) = p \frac{1 - (1 - u)^{p-1}}{1 - (1 - u)^p}$ (см. п. 4.2). Таким образом,

$$h(u) = \frac{1 - (1 - u)^p - u}{1 - (1 - u)^{p-1}} = 1 - u$$

(см. формулу (34)).

ПРИМЕР 7.2. Рассмотрим L -род $L(M)$. Тогда

$$[u]_p^L = \frac{(1 + u)^p - (1 - u)^p}{(1 + u)^p + (1 - u)^p}, \quad B(u) = p \frac{(1 + u)^{p-1} - (1 - u)^{p-1}}{(1 + u)^p - (1 - u)^p}$$

(см. п. 4.3). Поэтому

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{\frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{(1+u)^p + (1-u)^p} - u}{\frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p + (1-u)^p}} \\ &= \frac{(1+u)^p - (1-u)^p - u(1+u)^p - u(1-u)^p}{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}} = (1+u)(1-u). \end{aligned}$$

Это вполне согласуется с вычислениями из пп. 4.2, 4.3.

ПРИМЕР 7.3. Рассмотрим $\hat{A}$ -род $\hat{A}(M)$. Тогда

$$[u]_p^{\hat{A}} = 2 \operatorname{sh} \left(p \operatorname{arsh} \frac{u}{2} \right), \quad B(u) = p \frac{\operatorname{sh} \left((p-1) \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\operatorname{ch} \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \operatorname{sh} \left(p \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}$$

(см. п. 6.1). Таким образом,

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{(2 \operatorname{sh} \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) - u) \operatorname{ch} \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{2 \operatorname{sh} \left((p-1) \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} \\ &= \frac{(\operatorname{sh} \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) - \operatorname{sh} \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)) \operatorname{ch} \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \left((p-1) \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} \\ &= \frac{2 \operatorname{sh} \left(\frac{p-1}{2} \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \operatorname{ch} \left(\frac{p+1}{2} \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \operatorname{ch} \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{2 \operatorname{sh} \left(\frac{p-1}{2} \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \operatorname{ch} \left(\frac{p-1}{2} \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)} \\ &= \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{p+1}{2} \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \operatorname{ch} \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{p-1}{2} \operatorname{arsh} \left(\frac{u}{2} \right) \right)}. \end{aligned}$$

§ 8. Эллиптический род для многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$

Пусть M^{2n} – $2n$ -мерное вещественное гладкое многообразие с комплексной структурой в стабильном касательном расслоении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1 (см. [7]). *Эллиптическим родом* называется род Хирцебруха $\varphi(M^{2n}) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x_i)} [M^{2n}] \right)$, для которого функция f удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

- 1) $f'^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, $f(0) = 0$;
- 2) $f(u+v) = \frac{f(u)f'(v) + f'(u)f(v)}{1 - \varepsilon f(u)^2 f(v)^2}$.

Пусть $L = 2\pi i(e\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z})$ – решетка в $\mathbf{C}$, $\text{Im } \tau > 0$, $L' = L \setminus \{0\}$, $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L'} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$ – $\wp$ -функция Вейерштрасса, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

где $e_1 = \wp(\pi i)$, $e_2 = \wp(\pi i\tau)$, $e_3 = \wp(\pi i(\tau + 1))$ – нули производной $\wp$ -функции. Функция $f(z) = 1/\sqrt{\wp(z) - e_1}$ (т.е. $f(z) = \text{sn}(z)$ – эллиптический синус) удовлетворяет условиям из определения 8.1 для $\delta = -\frac{3}{2}e_1$, $\varepsilon = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$ (см. [7]); поэтому соответствующий род будет эллиптическим. Однако так как все числа e_1, e_2, e_3 различны, то $\varepsilon = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \neq 0$ и $\delta^2 - \varepsilon = \frac{1}{4}(e_2 - e_3)^2 \neq 0$. Вырожденные случаи соответствуют $\hat{A}$ -роду ($e_1 = e_2$ или $e_1 = e_3$, тогда $\varepsilon = 0$, и если взять $\delta = -1/8$, получим $f'^2 = 1 + \frac{1}{4}f^2$, т.е. $f(x) = 2 \text{sh}(x/2)$) и L -роду ($e_2 = e_3$, т.е. $\delta^2 - \varepsilon = 0$, и если взять $\delta = \varepsilon = 1$, получим $f'^2 = (1 - f^2)^2$, т.е. $f(x) = \text{th } x$).

Из рассмотрения дифференциального уравнения, которому удовлетворяет $f(x)$ для эллиптического рода, ясно, что коэффициент при x^{2k} степенного ряда $f(x)$ является взвешенным однородным полиномом степени $2k$ от δ и ε с коэффициентами из кольца $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$, если считать, что $\deg \varepsilon = 4$, $\deg \delta = 2$. Таким образом, эллиптический род $\varphi(M^{2n}) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x_i)} \right) [M^{2n}]$ является однородным полиномом степени $2n$ от δ и ε , т.е. φ можно рассматривать как гомоморфизм кольца комплексных кобордизмов Ω_U в кольцо $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$ или в кольцо $\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]$, $p > 2$.

Функция $f(\tau, x)$ является эллиптической по отношению к подрешетке $\tilde{L}$ решетки L с дивизором $(0) + (\pi i 2\tau) - (\pi i) - (\pi i(1 + 2\tau))$. Имеется следующее разложение $f(\tau, x)$ в бесконечное произведение (см. [7]):

$$f(\tau, x) = 2 \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^k e^x)(1 - q^k e^{-x})(1 + q^k)^2}{(1 + q^k e^x)(1 + q^k e^{-x})(1 - q^k)^2}, \quad q = e^{2\pi i \tau}. \quad (35)$$

Рассмотрим теперь

$$\left\{ L_i^{(q)} = \sum_{p=0}^n \Lambda^{p,i} \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbf{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbf{C}} M \right) \right\},$$

где $T_{\mathbf{C}}M$ – комплексификация касательного расслоения к M , $\Lambda_t E := \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda^k E) t^k$, $S_t E := \sum_{k=0}^{\infty} (S^k E) t^k$. $L^{(q)}$ – это степенной ряд от q , коэффициентами которого являются эллиптические комплексы расслоений над M , ассоциированных с TM . Его индекс $\text{ind}(L^{(q)}) = \text{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbf{C}}M\right)$ – “скрученная” сигнатура (см. [7]), – как следует из теоремы Атьи–Зингера 2.1 и леммы 2.3, есть

$$\text{ind}(L^{(q)}) = \left(\prod_{j=1}^n \left(x_j \frac{1 + e^{-x_j}}{1 - e^{-x_j}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + q^k e^{x_j})(1 + q^k e^{-x_j})}{(1 - q^k e^{x_j})(1 - q^k e^{-x_j})} \right) \right) [M^{2n}]. \quad (36)$$

Это степенной ряд от q с целочисленными коэффициентами и свободным членом (коэффициентом при q^0) $L(M) = \text{sign } M$ (см. [7]). Сравнивая это выражение с (35) и учитывая, что

$$\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^k)^2}{(1 + q^k)^2} = \varepsilon^{1/4} \quad (37)$$

(см. [7]), получаем

$$\varphi(M) = \text{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbf{C}}M\right) \varepsilon^{n/4}. \quad (38)$$

Пусть теперь, как и раньше, на многообразии M^{2n} действует оператор g , $g^p = 1$, с конечным числом неподвижных точек $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$. В соответствии с изложенным в §5 эквивариантный индекс комплекса $L^{(q)}$, $\text{ind}(g, L^{(q)})$, равен сумме функций неподвижных точек $\sigma_{L^{(q)}}(\mathcal{P}_j)$, которые получаются из формулы (36) заменой M^{2n} на $\mathcal{P}_j$, $x_1 x_2 \dots x_n$ на 1 и x_k на $-\frac{2\pi i}{p} x_k^{(j)}$:

$$\sigma_{L^{(q)}}(\mathcal{P}_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \zeta^{x_k^{(j)}}}{1 - \zeta^{x_k^{(j)}}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 + q^i \zeta^{x_k^{(j)}})}{(1 - q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 - q^i \zeta^{x_k^{(j)}})} \right), \quad \zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Далее, $\frac{1}{p} \sum_{l \in \mathbf{Z}/p} \text{ind}(g^l, L^{(q)}) = s(q)$ – степенной ряд от q , коэффициентом которого при q^k является альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g в когомологиях комплекса, который является коэффициентом при q^k в разложении $L^{(q)}$:

$$L^{(q)} = L + 2L \otimes T_{\mathbf{C}}M q + L \otimes (2T_{\mathbf{C}}M + T_{\mathbf{C}}M \otimes T_{\mathbf{C}}M + S^2 T_{\mathbf{C}}M + \Lambda^2 T_{\mathbf{C}}M) q^2 + \dots,$$

где $L = \sum_{p=0}^n \Lambda^{p,i}$. Таким образом, $s(q)$ – ряд с целыми коэффициентами. Кроме того, $\text{ind}(1, L^{(q)}) = \text{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbf{C}}M\right)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \text{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbf{C}}M\right) \\ &= \text{ind}(1, L^{(q)}) = - \sum_{l=1}^{p-1} \text{ind}(g^l, L^{(q)}) + ps(q) \\ &= - \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \zeta^{lx_k^{(j)}}}{1 - \zeta^{lx_k^{(j)}}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + q^i \zeta^{-lx_k^{(j)}})(1 + q^i \zeta^{lx_k^{(j)}})}{(1 - q^i \zeta^{-lx_k^{(j)}})(1 - q^i \zeta^{lx_k^{(j)}})} \right) + ps(q). \end{aligned}$$

Левая часть этого соотношения лежит в кольце $\mathbf{Z}[[q]]$ степенных рядов с целыми коэффициентами, а правая в его расширении – кольце $\mathbf{Z}[[q]](\zeta)$, $\zeta^p = 1$. Погрузим обе части в p -адические пополнения соответствующих полей и рассмотрим теоретико-числовой след $\text{Tr}: \mathbf{Q}_p\{q\}(\zeta) \rightarrow \mathbf{Q}_p\{q\}$, где $\mathbf{Q}_p\{q\}$ – поле лорановских рядов от q с рациональными p -адическими коэффициентами, а $\mathbf{Q}_p\{q\}(\zeta)$ – его алгебраическое расширение элементом ζ , $\zeta^p = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \zeta^{lx_k^{(j)}}}{1 - \zeta^{lx_k^{(j)}}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + q^i \zeta^{-lx_k^{(j)}})(1 + q^i \zeta^{lx_k^{(j)}})}{(1 - q^i \zeta^{-lx_k^{(j)}})(1 - q^i \zeta^{lx_k^{(j)}})} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \zeta^{x_k^{(j)}}}{1 - \zeta^{x_k^{(j)}}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 + q^i \zeta^{x_k^{(j)}})}{(1 - q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 - q^i \zeta^{x_k^{(j)}})} \right) \right), \end{aligned}$$

и мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Имеет место следующая формула для “скрученной” сигнатуры – индекса комплекса $\left\{ L_i^{(q)} = \sum_{p=0}^n \Lambda^{p,i} \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbf{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbf{C}} M \right) \right\}$:*

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbf{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbf{C}} M \right) \\ & \equiv - \sum_{j=1}^r \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \zeta^{x_k^{(j)}}}{1 - \zeta^{x_k^{(j)}}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 + q^i \zeta^{x_k^{(j)}})}{(1 - q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 - q^i \zeta^{x_k^{(j)}})} \right) \right) \mod p\mathbf{Z}[[q]]. \end{aligned} \quad (39)$$

С учетом соотношений (37) и (38) получаем отсюда соотношение для эллиптического рода $\varphi(M)$:

$$\begin{aligned} \varphi(M) & \equiv - \sum_{j=1}^r \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \zeta^{x_k^{(j)}}}{1 - \zeta^{x_k^{(j)}}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 + q^i \zeta^{x_k^{(j)}})(1 - q^i)^2}{(1 - q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 - q^i \zeta^{x_k^{(j)}})(1 + q^i)^2} \right) \right) \mod p\mathbf{Z}_p[[q]]. \end{aligned}$$

С учетом разложения (35) функции $f(\tau, x) = \text{sn } x$ в бесконечное произведение мы можем переписать последнее соотношение в виде

$$\varphi(M) \equiv - \sum_{j=1}^r \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{f\left(\tau, -\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p}\right)} \right) \mod p\mathbf{Z}_p[[q]], \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

Однако $\varphi(M)$ – взвешенный однородный многочлен от δ, ε с коэффициентами из кольца $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathbf{Z}_p$, и поэтому нам бы хотелось получить соотношение для $\varphi(M)$ в кольце $\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]$, а не в кольце $\mathbf{Z}_p[[q]]$ ($\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]$ является подкольцом $\mathbf{Z}_p[[q]]$). Введем, как и раньше, $\theta = f\left(\tau, -\frac{2\pi i}{p}\right)$. Тогда $f\left(\tau, -\frac{2\pi i x_k}{p}\right) = [\theta]_{x_k}$, где $[\theta]_m = f(mf^{-1}(\theta))$ – степенная система, связанная с эллиптическим родом. Заметим, что θ – алгебраический элемент над полем $\mathbf{Q}(\delta, \varepsilon)$. Действительно,

$$[\theta]_p = f\left(\tau, -\frac{2\pi i p}{p}\right) = f(\tau, -2\pi i) = 0,$$

а $[u]_p$ при нечетных p является рациональной функцией от u с коэффициентами δ, ε (например, $[u]_3 = u \frac{3-8\delta u^2+6\varepsilon u^4-\varepsilon^2 u^8}{1-6\varepsilon u^4+8\delta\varepsilon u^6-3\varepsilon^2 u^8}$; это следует из рассмотрения дифференциального уравнения и теоремы сложения для $f(\tau, x) = \operatorname{sn} x$). Числитель $[u]_p$ будет многочленом от u с коэффициентами δ, ε , корнем которого является θ (очевидно, это будет многочлен степени p^2 от u , корнями которого являются значения f в точках кратности p решетки $2\pi i(\mathbf{Z}2\tau + \mathbf{Z})$, т.е. $f\left(\tau, 2\pi i \frac{2k\tau+l}{p}\right)$, $k, l \in \mathbf{Z}$, в частности $\theta, [\theta]_2, \dots, [\theta]_{p-1}, [\theta]_p = 0$).

Окончательно имеем

$$\varphi(M) \equiv - \sum_{j=1}^r \operatorname{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k}} \right) \pmod{p\mathbf{Z}_p[[q]]}, \quad \theta = f\left(\tau, -\frac{2\pi i}{p}\right), \quad (40)$$

причем левая и правая части являются многочленами от δ, ε .

ЛЕММА 8.3. Пусть $P(\delta, \varepsilon)$ – некоторый многочлен от δ, ε такой, что $P(\delta, \varepsilon) \equiv 0 \pmod{p\mathbf{Z}_p[[q]]}$. Тогда $P(\delta, \varepsilon) \equiv 0 \pmod{p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]}$, т.е. все коэффициенты $P(\delta, \varepsilon)$ лежат в $p\mathbf{Z}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции δ, ε являются модулярными формами веса 2 и 4 соответственно для подгруппы $\Gamma_0(2) \subset \operatorname{SL}_2(\mathbf{Z})$, $\Gamma_0(2) := \left\{ A \in \operatorname{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid A \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$, и имеют следующие разложения Фурье вблизи бесконечности (т.е. при малых $q = e^{2\pi i \tau}$):

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{3}{2}e_1 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1 \pmod{2}}} dq^n \\ &= \frac{1}{4} + 6(q + q^2 + 4q^3 + q^4 + 6q^5 + 4q^6 + \dots), \\ \varepsilon &= (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \\ &= \frac{1}{16} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} (-1)^d d^3 q^n = \frac{1}{16} - q + 7q^2 - 28q^3 + 71q^4 - \dots \end{aligned}$$

Кроме того, $\delta(0) = -\frac{1}{8}$, $\varepsilon(0) = 0$, $\delta\left(\frac{1+i}{2}\right) = 0$, $\varepsilon\left(\frac{1+i}{2}\right) \neq 0$ (см., например, [7]).

Доказательство леммы будем проводить по индукции по степени $\deg P = 2n$ многочлена P . Если $\deg P(\delta, \varepsilon) = 2$, то $P(\delta, \varepsilon) = b\delta$, поэтому $b \in p\mathbf{Z}_p$, так как $\delta \notin p\mathbf{Z}_p$. Пусть теперь мы доказали лемму для всех многочленов степени $< 2k$ и $\deg P(\delta, \varepsilon) = 2k$. Представим $P(\delta, \varepsilon)$ в виде $P(\delta, \varepsilon) = a\varepsilon^{k/2} + Q(\delta, \varepsilon)\varepsilon\delta + b\delta^k$. Тогда $\deg Q(\delta, \varepsilon) < 2k$, значит, $Q(\delta, \varepsilon) \equiv 0 \pmod{p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]}$. Подставим $\tau = \frac{1+i}{2}$ в $P(\delta, \varepsilon)$ и получим, что $a\varepsilon \left(\frac{1+i}{2}\right)^{k/2}$ делится на p , т.е. a делится на p . Подставим теперь $\tau = 0$ и получим, что $\left(-\frac{1}{8}\right)^k b$ делится на p , т.е. b делится на p , и все коэффициенты $P(\delta, \varepsilon)$ лежат в $p\mathbf{Z}_p$. Лемма доказана.

Из этой леммы и соотношения (40) получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8.4. *Если на M^{2n} действует трансверсальный эндоморфизм g такой, что $g^p = 1$, то имеется следующая формула для эллиптического рода $\varphi(M^{2n})$:*

$$\varphi(M) \equiv - \sum_{j=1}^r \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{f\left(\tau, -\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p}\right)} \right) \pmod{p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]}, \quad (41)$$

где в правой части стоит теоретико-числовой след $\mathbf{Q}_p(\delta, \varepsilon)(\zeta) \rightarrow \mathbf{Q}_p(\delta, \varepsilon)$.

Все дальнейшие построения § 5 и § 7, в частности лемма 5.4 и теорема 7.1, без труда переносятся на случай эллиптического рода (надо лишь заменить в формулировках кольцо $\mathbf{Z}_p$ на $\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]$). Таким образом, разность между формулой (41) и суммой с коэффициентами уравнений Коннера–Флойда для эллиптического рода:

$$\sum_{j=1}^r \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m \equiv 0 \pmod{p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]}, \quad m = 0, \dots, n-1,$$

дает следующую формулу для эллиптического рода:

$$\varphi(M^{2n}) \equiv \sum_{j=1}^r \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_n \pmod{p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]}. \quad (42)$$

В последних двух формулах $[u]_m$ означает степенную систему, соответствующую эллиптическому роду.

В качестве примера применения формул для эллиптического рода рассмотрим действие группы $\mathbf{Z}/p$ на $\mathbf{C}P^n$, при котором образующая g действует так (в однородных координатах): $(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \rightarrow (\lambda_0 z_0 : \lambda_1 z_1 : \dots : \lambda_n z_n)$, $\lambda_i = e^{\frac{2\pi i}{p} y_i}$. Если $y_0, \dots, y_n$ – все различные вычеты $\pmod{p}$ (в частности, отсюда следует, что $n < p$), то на $\mathbf{C}P^n$ будет конечное число неподвижных точек относительно такого действия, а именно неподвижными будут точки $\mathcal{P}_j = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)$, $j = \overline{0, n}$.

В локальных координатах $\left(\frac{z_0}{z_j}, \frac{z_1}{z_j}, \dots, \widehat{\frac{z_j}{z_j}}, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right)$ вблизи $\mathcal{P}_j$ действие g будет линейным: $\frac{z_i}{z_j} \rightarrow \frac{\lambda_i z_i}{\lambda_j z_j} = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}(y_i - y_j)\right) \frac{z_i}{z_j}$. Поэтому собственными числами матрицы Якоби отображения g в точке $\mathcal{P}_j$ будут $\exp\left(\frac{2\pi i}{p}(y_i - y_j)\right)$, $i \neq j$, а соответствующими весами будут $x_i^{(j)} = y_i - y_j$.

Рассмотрим эллиптический род φ . Как известно,

$$\varphi(\mathbf{CP}^n) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_n. \quad (43)$$

Действительно, из формулы (1) следует, что $\varphi(\mathbf{CP}^n) = \langle g'_\varphi(u) \rangle_n$, где $g_\varphi(u) = f_\varphi^{-1}(u)$ — логарифм соответствующей формальной группы. Но так как $(f')^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, то $g'_\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}$. С другой стороны, из формулы (42) следует, что

$$\varphi(\mathbf{CP}^n) \equiv \sum_{j=0}^n \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i \neq j} \frac{u}{[u]_{y_i - y_j}} \right\rangle_n \mod p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon].$$

Таким образом, для любого набора различных вычетов $y_0, y_1, \dots, y_n \mod p$, где $n < p$, имеем

$$\sum_{j=0}^n \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i \neq j} \frac{u}{[u]_{y_i - y_j}} \right\rangle_n \equiv \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_n \mod p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon].$$

Функция $(1 - 2\delta u + u^2)^{-1/2}$ является производящей для полиномов Лежандра $P_n(\delta)$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u + u^2}} = 1 + \sum_{n>0} P_n(\delta)u^n$; поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} = 1 + \sum_{n>0} P_n\left(\frac{\delta}{k}\right) (ku^2)^n,$$

где $k^2 = \varepsilon$. Отсюда

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_{2m} &= k^m P_m\left(\frac{\delta}{k}\right), \\ \sum_{j=0}^{2m} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i \neq j} \frac{u}{[u]_{y_i - y_j}} \right\rangle_{2m} &\equiv k^m P_m\left(\frac{\delta}{k}\right) \mod p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]. \end{aligned} \quad (44)$$

В простейшем случае $2m = n = p-1$ набор $y_0 - y_j, y_1 - y_j, \dots, \widehat{y_{j-1} - y_j}, \dots, y_{p-1} - y_j$ представляет собой полный набор ненулевых вычетов $1, 2, \dots, p-1$ (так как все y_i различны); поэтому все слагаемые в левой части последней формулы равны и мы имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p^2 u^p}{u[u]_2[u]_3 \cdots [u]_{p-1}[u]_p} \right\rangle_{p-1} &\equiv \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_{p-1} \\ &= k^{\frac{p-1}{2}} P_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\delta}{k}\right) \mod p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]. \end{aligned} \quad (45)$$

Это соотношение можно вывести также из известного сравнения

$$[u]_p \equiv P_{(p-1)/2}(\delta)u^p + \dots \pmod{p\mathbf{Z}_p[\delta]}$$

(см. [10]), где мы положили для простоты $k = 1$, а многоточие обозначает члены более высокого порядка. Действительно, запишем последнее сравнение в виде

$$[u]_p = pu(1 + b_1u + \dots + b_{p-1}u^{p-1}) + P_{(p-1)/2}(\delta)u^p + \dots,$$

где $b_1, \dots, b_{p-1} \in \mathbf{Z}[\delta]$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{p^2 u^p}{u[u]_2 \cdots [u]_{p-1}[u]_p} \right\rangle_{p-1} \\ &= \left\langle \frac{p^2}{u(2u + \dots) \dots ((p-1)u + \dots)} \right. \\ & \quad \times \left. \frac{u^p}{(pu(1 + b_1u + \dots + b_{p-1}u^{p-1}) + P_{(p-1)/2}(\delta)u^p + \dots)} \right\rangle_{p-1} \\ &= \left\langle \frac{1}{(p-1)!} \frac{p^2}{p(1 + c_1u + \dots + c_{p-1}u^{p-1}) + P_{(p-1)/2}(\delta)u^{p-1} + \dots} \right\rangle_{p-1} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \left\langle \frac{p}{1 + c_1u + \dots + c_{p-2}u^{p-2} + (c_{p-1} + P_{(p-1)/2}(\delta)/p)u^{p-1}} \right\rangle_{p-1}, \end{aligned}$$

где $c_1, \dots, c_{p-1}$ снова лежат в $\mathbf{Z}[\delta]$. При вычислении последнего выражения $\pmod{p}$ получим

$$\left\langle \frac{p^2 u^p}{u[u]_2[u]_3 \cdots [u]_{p-1}[u]_p} \right\rangle_{p-1} \equiv -\frac{1}{(p-1)!} P_{(p-1)/2}(\delta) \equiv P_{(p-1)/2}(\delta) \pmod{p\mathbf{Z}_p[\delta]},$$

так как $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, что и требовалось доказать.

§ 9. Обобщение на случай действия группы $\mathbf{Z}/p$ с неподвижными подмногообразиями, имеющими тривиальное нормальное расслоение

Пусть оператор $g, g^p = 1$, действует на квазикомплексном многообразии M^{2n} с множеством неподвижных точек M^g , представленным в виде объединения связных неподвижных подмногообразий: $M^g = \bigcup_{\nu} M_{\nu}^g$, причем все подмногообразия M_{ν}^g имеют тривиальные нормальные расслоения в M .

Рассмотрим некоторый род Хирцебруха φ , вычисляемый как индекс эллиптического комплекса E_{φ} расслоений, ассоциированных с касательным расслоением TM . Во избежание дальнейшей путаницы обозначим первые классы Чженя “виртуальных” одномерных подрасслоений TM через z_i ; тогда $c(TM) = (1 + z_1) \dots (1 + z_n)$.

Пусть $Y = M_k^g$ – одно из неподвижных подмногообразий действия g . Согласно формулам (20) из § 5 имеем

$$TM|_Y = \bigoplus_j N_{\lambda_j}, \quad c(N_{\lambda_j}) = \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} (1 + z_i^{(\lambda_j)}),$$

$$c(TM_Y) = \prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} (1 + z_i^{(\lambda_j)}) = \prod_{i=1}^n (1 + z_i),$$

где N_{λ_j} – подрасслоение $TM|_Y$, соответствующее собственному значению λ_j дифференциала g ; $\lambda_j^p = 1$, т.е. $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p}$, $N_1 = TY$ – касательное расслоение к Y , $d_{\lambda_j} = \dim N_{\lambda_j}$. В соответствии с результатами Атьи–Зингера [3], изложенными в § 5, эквивариантный индекс $\text{ind}(g, E_\varphi)$ комплекса E_φ вычисляется по формуле $\text{ind}(g, E_\varphi) = \sum_\nu \sigma(M_\nu^g)$, и имеется следующий “рецепт” для вычисления функций неподвижных многообразий $\sigma(M_\nu^g)$, входящих в сумму: для вычисления функции $\sigma(Y)$ надо в формуле (21) для индекса E_φ заменить M на Y и $e^{z_i^{(\lambda_j)}}$ на $\lambda_j^{-1} e^{z_i^{(\lambda_j)}}$, или, с учетом $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p}$, мы должны заменить $z_i^{(\lambda_j)}$ на $z_i^{(\lambda_j)} - 2\pi i x_j/p$.

Так как $\text{ind}(E_\varphi) = \varphi(M)$, то мы имеем

$$\text{ind}(E_\varphi) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{z_i}{f(z_i)} \right) [M] = \left(\prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \frac{z_i^{(\lambda_j)}}{f(z_i^{(\lambda_j)})} \right) [M].$$

Поэтому наш “рецепт” дает в этом случае

$$\sigma(Y) = \left(\prod_{\lambda_j \neq 1} \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \frac{1}{f(z_i^{(\lambda_j)} - 2\pi i x_j/p)} \prod_{i=1}^{d_1} \frac{z_i^{(1)}}{f(z_i^{(1)})} \right) [Y],$$

так как от $c_n(X) = \prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} z_i^{(\lambda_j)}$ останется только $c_n(Y) = \prod_{i=1}^{d_1} z_i^{(1)}$, и все веса x_k , соответствующие собственному значению $\lambda = 1$, равны нулю. Далее, так как Y имеет тривиальное нормальное расслоение в M , то $z_i^{(\lambda_j)} = 0$ при $\lambda_j \neq 1$, и мы имеем $\sigma(Y) = \prod_j \frac{1}{f(-2\pi i x_j/p)} \varphi(Y)$, где x_j – веса, соответствующие всем неединичным собственным значениям $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p} \neq 1$; x_j – ненулевые вычеты mod p . Окончательно для эквивариантного индекса имеем соотношение

$$\text{ind}(g, E_\varphi) = \sum_\nu \left(\prod_j \frac{1}{f(-2\pi i x_j^{(\nu)}/p)} \varphi(M_\nu^g) \right).$$

Теорема 5.1 и предложение 5.3 естественным образом обобщаются на случай действий с неподвижными подмногообразиями с тривиальным нормальным расслоением, и мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть имеется эллиптический комплекс расслоений, ассоциированных с TM , индекс которого равен некоторому роду Хирцебруха $\varphi(M)$ многообразия M . Тогда имеется следующая формула для $\varphi(M)$:

$$\begin{aligned}\varphi(M) &\equiv - \sum_{\nu} \text{Tr} \left(\prod_j \frac{1}{f(-2\pi i x_j^{(\nu)}/p)} \right) \varphi(M_{\nu}^g) \\ &= - \sum_{\nu} \text{Tr} \left(\prod_j \frac{1}{[\theta]_{x_j^{\nu}}^{\varphi}} \right) \varphi(M_{\nu}^g) \pmod{p},\end{aligned}$$

где $M^g = \bigcup_{\nu} M_{\nu}^g$ – множество неподвижных точек, $\theta = f_{\varphi}(-2\pi i/p)$, $[\theta]_k$ – степенная система, $\text{Tr}: \mathbf{Q}(e^{2\pi i/p}) \rightarrow \mathbf{Q}$ – теоретико-числовой след (если род φ принимает значения не в кольце $\mathbf{Z}$, а в другом кольце Λ , то $\mathbf{Q}$ заменяется на соответствующее поле частных).

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.физ.-матем. наук В.М. Бухштаберу и акад. С.П. Новикову за постановку задачи и В.М. Бухштаберу за полезные рекомендации и стимулирующие обсуждения.

Список литературы

1. Атья М., Ботт Р. Заметки о теореме Лефшеца о неподвижной точке // Математика. 1966. Т. 10. №4. С. 101–139.
2. Bott R., Taubes C. On the rigidity theorems of Witten // J. of Amer. Math. Soc. 1989. V. 2. P. 137–186.
3. Атья М., Зингер И. Индекс эллиптических операторов. III // УМН. 1969. Т. 24. Вып. 1(145). С. 127–182.
4. Бухштабер В. М. Характер Чженя–Дольда в теории кобордизмов. I // Матем. сб. 1970. Т. 83. №4. С. 575–595.
5. Бухштабер В. М., Новиков С. П. Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса // Матем. сб. 1971. Т. 84. №1. С. 81–118.
6. Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.
7. Hirzebruch F., Berger T., Jung R. Manifolds and Modular Forms. Second Edition. Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1994.
8. Каспаров Г. Г. Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. №4. С. 735–747.
9. Кричевер И. М. Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера // Матем. заметки. 1990. Т. 47. №2. С. 34–45.
10. Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology. Ed. P. S. Landweber // Lecture Notes in Mathematics; 1326. Berlin–Heidelberg: Springer, 1988.
11. Мищенко А. С. Многообразия с действием группы $\mathbf{Z}_p$ и неподвижные точки // Матем. заметки. 1968. Т. 4. №4. С. 381–386.
12. Новиков С. П. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. №4. С. 855–951.
13. Новиков С. П. Операторы Адамса и неподвижные точки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. №6. С. 1245–1263.
14. Ochanine S. Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques // Topology. 1987. V. 26. P. 143–151.
15. Панов Т. Е. Эллиптический род для многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$ // УМН. 1997. Т. 52. №2.

Поступило в редакцию
7.V.1997