Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Ограничение функций, голоморфных в области, на кривые, лежащие в границе области, и дискретные $SL_2(\mathbb{R})$ -спектры, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 3, 67–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/im202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:53:40

УДК 519.46+517.55

Ю. А. Неретин

**Ограничение функций, голоморфных в области,
на кривые, лежащие в границе области,
и дискретные $SL_2(\mathbb{R})$ -спектры**

Рассматривается оператор ограничения функции, голоморфной в шаре или полидиске, на кривые, лежащие в границе Шилова. Оказывается, что при подходящем положении кривой (в случае шара кривая должна быть трансверсальна стандартному контактному распределению на сфере; в случае полидиска кривая должна быть монотонно возрастающей по всем координатам в стандартной координатной сетке на торе) такое ограничение есть у любой функции, имеющей полиномиальный рост при подходе к границе. Далее утверждения такого рода используются для простых описаний дискретных включений в спектры (минимальных инвариантных подпространств) для ряда задач $SL_2(\mathbb{R})$ -гармонического анализа.

Библиография: 34 наименования.

Введение

Известно довольно много теорем об ограничении разрывных функций на подмногообразия. Наиболее известные утверждения такого рода – многочисленные теоремы о существовании граничных пределов у голоморфных функций ([2], [12]; [27, IX.3, IX.8], [29], [30], [33], [34]), а также теорема о следе в пространствах Соболева (в соболевских пространствах корректно определен оператор ограничения функции на подмногообразия достаточно большой размерности, сами функции при этом разрывны, и поэтому значений в отдельно взятых точках не имеют; см. [7], [10, § 2], [27, IX.9]). Упомянем также теорему Стейна–Фефермана [5, § 4] об ограничениях преобразований Фурье функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и теорему Салема–Зигмунда о емкостях множеств расходимости для рядов Фурье функций из соболевских пространств. Ее можно интерпретировать как утверждение об ограничении соболевских функций на замкнутые вполне несвязные подмножества (см. [4], [31], [3, V.12], [22, п. 2.9]).

В настоящей работе обсуждается следующая ситуация. Рассматривается шар B_n в $\mathbb{C}^n$ (фактически рассматривается случай $n = 2$, который ничем не отличается от общего). Рассматривается стандартное (контактное) распределение коразмерности 1 на границе S^{2n-1} шара B_n . Напомним его определение: касательное пространство к сфере S^{2n-1} в точке a состоит из векторов ξ , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\langle a, \xi \rangle = 0$, в нем выбирается подпространство, состоящее из векторов, удовлетворяющих условию $\langle a, \xi \rangle = 0$, т.е. так называемое комплексно-касательное

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 95-01-00814) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант 96-01-96249).

пространство. Рассматривается кривая γ на сфере S^{2n-1} , трансверсальная к этому распределению. Согласно теореме Нагеля–Рудина (см. [20], [30, гл. 11.2]) любая ограниченная голоморфная функция в B_n имеет некасательный предел почти всюду на γ . Мы показываем (§ 2), что любая голоморфная в B_n функция, имеющая полиномиальный рост при подходе к границе, имеет предел на γ в смысле обобщенных функций.

Аналогично (§ 1) рассмотрим полидиск $U^n: |z_1| < 1, |z_2| < 1, \dots, |z_n| < 1$, и кривую $\gamma: z_1 = e^{ih_1(t)}, \dots, z_n = e^{ih_n(t)}$ в остове полидиска U^n . Пусть $h'_j(t) > 0$ для всех j . Тогда для любой функции F , голоморфной в полидиске и имеющей полиномиальный рост при подходе к границе, определен ее предел на γ в смысле обобщенных функций.

В действительности в обоих случаях действует (но не доказывает теорему) следующий эвристический довод Нагеля–Рудина. Представим себе, что наша кривая аналитична. Продолжим отображение $t \mapsto \gamma(t)$ до голоморфного отображения полосы $\Pi: |\operatorname{Im}(t)| < \varepsilon$. Тогда условия теорем в точности означают, что в окрестности любой точки $\gamma(t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, поверхность $\gamma(\Pi)$ пересекается с внутренностью нашей области. Далее к поверхности $\gamma(\Pi)$ мы можем применить одномерную теорему о существовании граничного предела.

С другой стороны, наши утверждения похожи на теорему о существовании предела на остове в трубчатых областях (см. [27, IX.3, IX.8], [33], [34]) и основаны на тех же аналитических эффектах. Кажется правдоподобным, что и то и другое есть частные случаи какого-то более общего утверждения.

В [22] (см. также [21], [23]) показывается, что теоремами об ограничении разрывных функций очень просто объясняется наличие дискретных спектров во многих задачах некоммутативного гармонического анализа. Кроме того, это дает возможность предъявлять в дискретных спектрах весьма “экзотические” унитарные представления для некоторых серий полупростых групп (см. [22], [23]), т.е. дает подход к задачам, которые принято сейчас рассматривать как чисто алгебраические и в которых сейчас используется чрезвычайно сложная алгебраическая техника. В связи с этим возникает целый ряд задач об ограничениях функций, голоморфных в областях Картана, на различные подмногообразия в границе Шилова (см. [22]).

Наша статья является продолжением работ [21]–[23] и имеет своей целью найти дополнительные возможности для предъявления дискретных спектров. Мы рассматриваем простейшую некомпактную группу $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ и показываем, что наши приемы содержательны уже в этом случае.

В § 3 мы “пересказываем” утверждения § 1 на языке анализа на однополостном гиперboloиде. В § 5 обсуждается несколько задач о тензорных произведениях унитарных представлений $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ и показывается, как с помощью теорем об ограничении функции на кривую предъявлять дискретный спектр в этих задачах. Отметим, что приемы, используемые в этом параграфе, имеют довольно большую степень общности и позволяют предъявлять в различных спектрах дискретные серии Хариш–Чандры. Однако даже в случае $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ обсуждаемые конструкции известны не были.

Я благодарю Г. И. Ольшанского, В. Ф. Молчанова, А. Г. Сергеева, В. В. Лебедева и Б. Эрстеда за обсуждение затронутой темы.

§ 1. Случай бидиска

1.1. Функции полиномиального роста. Рассмотрим бидиск U^2 : $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ в $\mathbb{C}$. Мы скажем, что функция

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k \geq 0, l \geq 0} c_{kl} z_1^k z_2^l,$$

голоморфная в бидиске, есть *функция полиномиального роста*, если существует N такое, что функция

$$F(z_1, z_2)(1 - |z_1|)^N(1 - |z_2|)^N$$

ограничена в U^2 . Это равносильно следующему условию на коэффициенты c_{kl} : существуют M и A такие, что

$$|c_{kl}| \leq A(k + l)^M. \quad (1.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Все пространства Харди $H^p(U^2)$ (см. [29, п. 3.4]) состоят из функций полиномиального роста.

1.2. Существование оператора ограничения. Рассмотрим замкнутую C^∞ -гладкую кривую

$$\gamma: z_1 = e^{ih_1(t)}, \quad z_2 = e^{ih_2(t)}, \quad t \in [0, T],$$

в остоле $\mathbb{T}^2$: $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ бидиска U^2 . Пусть для всех t выполнено

$$h'_1(t) > 0, \quad h'_2(t) > 0.$$

Покажем, что при этих условиях имеет смысл ограничение функции $F(z_1, z_2) = \sum c_{kl} z_1^k z_2^l$ полиномиального роста на кривую γ (утверждение а) теоремы 1) и это ограничение совпадает с радиальным пределом (утверждение б)).

ТЕОРЕМА 1. а) Для любой функции $F(z_1, z_2) = \sum_{k,l} c_{kl} z_1^k z_2^l$ полиномиального роста в U^2 ряд

$$F|_\gamma = \sum_{k,l} c_{kl} \exp(ikh_1(t) + ilh_2(t)) \quad (1.2)$$

сходится в смысле обобщенных функций.

б) Семейство функций $F(\lambda e^{ih_1(t)}, \lambda e^{ih_2(t)})$ при $\lambda \rightarrow 1-0$ сходится в смысле обобщенных функций, и его предел совпадает с (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – бесконечно гладкая пробная функция. Нам нужно доказать абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{k,l} c_{kl} \int_0^T \varphi(t) \exp(ikh_1(t) + ilh_2(t)) dt. \quad (1.3)$$

Оценим обычным способом слагаемое

$$I_{k,l} = \int_0^T \varphi(t) \exp(ikh_1(t) + ilh_2(t)) dt. \quad (1.4)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} -I_{k,l} &= \int \left(\frac{\varphi(t)}{ikh'_1(t) + ilh'_2(t)} \right)' \exp(ikh_1(t) + ilh_2(t)) dt \\ &= \int \frac{\varphi'(t)}{ikh'_1(t) + ilh'_2(t)} \exp(ikh_1(t) + ilh_2(t)) dt \\ &\quad + \int \frac{\varphi(t)(-ikh''_1(t) - ilh''_2(t))}{(ikh'_1(t) + ilh'_2(t))^2} \exp(ikh_1(t) + ilh_2(t)) dt. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пусть

$$\theta = \min_t (h'_1(t), h'_2(t)), \quad C = \max_t (h''_1(t), h''_2(t)).$$

Тогда

$$|I_{k,l}| \leq \frac{1}{k+l} \left(\frac{1}{\theta} \int |\varphi'(t)| dt + \frac{C}{\theta^2} \int |\varphi(t)| dt \right).$$

С другой стороны, оба слагаемых в (1.5) имеют форму (1.4), только с другой функцией φ . Повторяя это вычисление, мы для любого N получаем оценку вида

$$|I_{k,l}| < \frac{1}{(k+l)^N} \left(\sum_{j=0}^N A_j^{(N)} \int |\varphi^{(j)}(t)| dt \right), \quad (1.6)$$

и теперь в силу (1.1) сходимость ряда (1.3) очевидна.

б) Нам нужно обосновать переход к пределу при $\lambda \rightarrow 1 - 0$ в сумме

$$\sum_{k,l} c_{kl} \lambda^k \lambda^l \int_0^T \varphi(t) \exp(ikh_1(t) + ilh_2(t)) dt.$$

Но в силу (1.6) этот ряд мажорируется сходящимся рядом.

1.3. Вид с границы. Пусть для простоты наша кривая γ имеет вид $\varphi_2 = h(\varphi_1)$. Обозначим через Δ_ε множество $h(\varphi_1) - \varepsilon < \varphi_2 < h(\varphi_2) + \varepsilon$ на торе $\mathbb{T}^2$: $z_1 = e^{i\varphi_1}$, $z_2 = e^{i\varphi_2}$. Через χ_ε мы обозначим функцию на торе, равную 1 на Δ_ε и равную 0 вне Δ_ε .

Пусть

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k \geq 0, l \geq 0} c_{kl} z_1^k z_2^l$$

есть элемент пространства Харди $H^2(U^2)$, т.е. граничное значение F на торе $\mathbb{T}^2$ есть элемент пространства $L^2(\mathbb{T}^2)$. Напомним, что это равносильно условию (см. [29, п. 3.4])

$$\sum_{k,l} |c_{kl}|^2 < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любой $F \in H^2(\mathbb{T}^2)$ ограничение F на γ (т.е. выражение (1.2)) совпадает с пределом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \chi_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})$$

в смысле обобщенных функций на торе. Точнее, для любой C^∞ -гладкой функции $g(\varphi_1, \varphi_2)$ на торе $\mathbb{T}^2$ выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\mathbb{T}^2} \chi_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) g(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \\ = \sum_{k,l} c_{kl} \int_0^{2\pi} g(t, h(t)) \exp(ikt + ilh(t)) dt. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $g(\varphi_1, \varphi_2)$ в виде

$$g(\varphi_1, \varphi_2) = g(\varphi_1, h(\varphi_1)) + [g(\varphi_1, \varphi_2) - g(\varphi_1, h(\varphi_1))].$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $r(\varphi_1, \varphi_2)$. Отметим, что функция r равна нулю на кривой $\varphi_2 = h(\varphi_1)$. Слагаемое

$$\frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\mathbb{T}^2} F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) \chi_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) r(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (1.7)$$

оценивается сверху по неравенству Коши–Буняковского величиной

$$\left(\iint_{\mathbb{T}^2} |F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \right)^{1/2} \left(\iint_{\Delta_\varepsilon} \frac{1}{(2\varepsilon)^2} |r(\varphi_1, \varphi_2)|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \right)^{1/2}.$$

Второй множитель стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, и, следовательно, стремится к нулю выражение (1.7). Нам осталось выяснить поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграла

$$\frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\mathbb{T}^2} F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) \chi_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) g(\varphi_1, h(\varphi_1)) d\varphi_1 d\varphi_2.$$

В силу того, что ряд

$$F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) = \sum_{k,l} c_{kl} \exp(ik\varphi_1 + il\varphi_2)$$

сходится в $L^2(\mathbb{T}^2)$, мы можем переписать наш интеграл в виде

$$\sum_{k,l} c_{kl} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\mathbb{T}^2} g(\varphi_1, h(\varphi_1)) \chi_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) \exp(ik\varphi_1 + il\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \right).$$

Замена переменных $t = \varphi_1$, $s = \varphi_2 - h(\varphi_1)$ в интегралах приводит ряд к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} c_{kl} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{2\pi} dt \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(t, h(t)) \exp(ikt + il(s + h(t))) ds \right) \\ = \sum_{k,l} c_{kl} \left(\int_0^{2\pi} g(t, h(t)) \exp(ikt + ilh(t)) dt \right) \left[\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{ils} ds \right]. \quad (1.8) \end{aligned}$$

Далее заметим, что сомножители в квадратных скобках равномерно ограничены и при любом фиксированном l стремятся к 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это дает возможность воспользоваться теоремой о мажорируемой сходимости, что и доказывает искомое утверждение.

Сформулируем аналогичную теорему для произвольной функции F полиномиального роста. Очевидно, для любой такой функции ряд

$$F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) = \sum_{k,l} c_{kl} e^{ik\varphi_1} e^{il\varphi_2}$$

сходится в смысле обобщенных функций на $\mathbb{T}^2$.

Рассмотрим функцию $\theta(x)$ на $\mathbb{R}$, равную нулю вне малой окрестности нуля и такую, что $j\theta(jx) \rightarrow \delta(x)$ в смысле мер при $j \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любой функции F полиномиального роста в U^2 ограничение F на γ совпадает с пределом*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) \theta(j(\varphi_2 - h(\varphi_1)))$$

в смысле обобщенных функций на торе. Точнее, для любой C^∞ -гладкой на $\mathbb{T}^2$ функции $g(\varphi_1, \varphi_2)$ предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j \iint_{\mathbb{T}^2} F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) g(\varphi_1, \varphi_2) \theta(j(\varphi_2 - h(\varphi_1))) d\varphi_1 d\varphi_2$$

совпадает с

$$\sum_{k,l} c_{kl} \int_0^{2\pi} g(t, h(t)) \exp(ikt + ilh(t)) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $g(\varphi_1, \varphi_2)$ в виде

$$\begin{aligned} g(\varphi_1, \varphi_2) &= g(\varphi_1, h(\varphi_1)) + \sum_{m=1}^{M-1} \sin^m \left(\frac{\varphi_2 - h(\varphi_1)}{2} \right) p_m(\varphi_1) \\ &\quad + \sin^M \left(\frac{\varphi_2 - h(\varphi_1)}{2} \right) r(\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned}$$

где p_m и r — гладкие функции, а M будет выбрано ниже.

Нам надо выяснить поведение при $j \rightarrow \infty$ интегралов

$$\begin{aligned} I_0 &= j \iint_{\mathbb{T}^2} F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) \theta(j(\varphi_2 - h(\varphi_1))) g(\varphi_1, h(\varphi_1)) d\varphi_1 d\varphi_2, \\ I_m &= j \iint_{\mathbb{T}^2} F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) \theta(j(\varphi_2 - h(\varphi_1))) \sin^m \left(\frac{\varphi_2 - h(\varphi_1)}{2} \right) p_m(\varphi_1) d\varphi_1 d\varphi_2, \\ I_M &= j \iint_{\mathbb{T}^2} F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) \theta(j(\varphi_2 - h(\varphi_1))) \sin^M \left(\frac{\varphi_2 - h(\varphi_1)}{2} \right) r(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2. \end{aligned}$$

С интегралом I_0 проводятся те же вычисления, что и в доказательстве предыдущей теоремы, только множитель в квадратных скобках в (1.8) заменяется на

$$j \int \theta(js) e^{ils} ds = \int \theta(s) e^{isl/j} ds.$$

Эти величины не превосходят 1 и стремятся к 1 при $j \rightarrow \infty$.

Аналогичное вычисление, проведенное для интеграла I_m при $1 \leq m \leq M$, дает

$$\sum_{k,l} c_{kl} \left[\int_0^{2\pi} p_m(t) \exp(ikt + ilh(t)) dt \right] \left(j \int_0^{2\pi} \sin^m\left(\frac{s}{2}\right) \theta(js) e^{ils} ds \right).$$

Сомножитель в квадратных скобках не зависит от j и стремится к нулю при $k, l \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $(k + l)^a$. Сомножитель в круглых скобках стремится к нулю при фиксированном l , кроме того, эти величины равномерно ограничены. Поэтому $I_m \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

Рассмотрим интеграл I_M . Представим обобщенную функцию $F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})$ в виде конечной суммы:

$$F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) = \sum \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right)^\beta G_{\alpha,\beta}(\varphi_1, \varphi_2),$$

где $G_{\alpha,\beta}$ – непрерывные на $\mathbb{T}^2$ функции (здесь пары (α, β) пробегают некоторое конечное множество). Тогда интегрирование по частям в I_M дает сумму выражений вида

$$\begin{aligned} & \iint G_{\alpha,\beta}(\varphi_1, \varphi_2) \varkappa_{\alpha,\beta,\sigma,\tau}(\varphi_1, \varphi_2) j^{1+\sigma+\tau} \theta^{(\sigma+\tau)}(j(\varphi_2 - h(\varphi_1))) \\ & \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right)^{\alpha-\tau-\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right)^{\beta-\sigma} \left(\sin^M\left(\frac{\varphi_2 - h(\varphi_1)}{2}\right) r(\varphi_1, \varphi_2) \right) \right] d\varphi_1 d\varphi_2, \end{aligned}$$

где $\varkappa_{\alpha,\beta,\sigma,\tau}$ – некоторые гладкие функции. Величины $G_{\alpha,\beta}$, $\varkappa_{\alpha,\beta,\sigma,\tau}$, $\theta^{(\sigma+\tau)}$ оцениваются сверху какими-то константами, а выражение в квадратных скобках на носителе функции $\theta(j(\varphi_2 - h(\varphi_1)))$ оценивается сверху величиной

$$C \left(\frac{1}{j} \right)^{M-(\alpha-\sigma)-(\beta-\tau)}.$$

При достаточно больших M (а именно при M , больших $\alpha + \beta$ для всех пар (α, β)) это дает стремление интеграла к нулю.

§2. Случай шара

2.1. Функции полиномиального роста. Обозначим через B_2 шар $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1$ в $\mathbb{C}^2$. Его граница есть сфера S^3 , задаваемая уравнением $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$.

Мы скажем, что функция $F(z_1, z_2) = \sum_{k,l} c_{kl} z_1^k z_2^l$, голоморфная в B_2 , есть *функция полиномиального роста*, если существуют N и A такие, что

$$F(z_1, z_2) \leq \frac{A}{(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)^N}.$$

Пространство функций полиномиального роста мы обозначим через $\mathcal{H}(B_2)$. На уровне коэффициентов Тейлора условие $f \in \mathcal{H}(B_2)$ равносильно условию

$$c_{kl} \sqrt{\frac{k!l!}{(k+l)!}} = o(k+l)^p \quad (2.1)$$

для некоторого p . Это может быть также переписано в виде

$$c_{kl} \sqrt{\frac{k!l!}{(k+l)!}} = o((k+1)(l+1))^q \quad (2.2)$$

для некоторого q . Это же условие можно записать в форме

$$c_{kl} \left(\frac{k^{k/2} l^{l/2}}{(k+l)^{(k+l)/2}} \right) = o((k+1)(l+1))^s \quad (2.3)$$

для некоторого s .

ЛЕММА. Условия (2.1)–(2.3) на F равносильны условию $F \in \mathcal{H}(B_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{F}$ пространство всех голоморфных функций в шаре, удовлетворяющих любому из условий (2.1)–(2.3). Очевидно, что $\mathcal{F}$ замкнуто относительно операторов $\frac{\partial}{\partial z_1}$, $\frac{\partial}{\partial z_2}$, а также относительно операторов

$$J_1 f(z_1, z_2) = \int_0^{z_1} f(u, z_2) du, \quad J_2 f(z_1, z_2) = \int_0^{z_2} f(z_1, u) du.$$

Пусть $F \in \mathcal{H}(B_2)$. Тогда при достаточно больших a, b функция $\tilde{F} = J_1^a J_2^b F$ непрерывна в замкнутом шаре. Пусть $\tilde{F} = \sum_{k,l} a_{kl} z_1^k z_2^l$. Очевидно, $\tilde{F}$ лежит в пространстве Харди $H^2(B_2)$ (см. [30]), что равносильно условию (см. [30, п. 1.4.9])

$$\sum_{k,l} |a_{kl}|^2 \frac{k!l!}{(k+l+1)!} < \infty.$$

Отсюда видно, что $\tilde{F} \in \mathcal{F}$, а поэтому $F \in \mathcal{F}$.

Обратно, пусть $F(z_1, z_2) = \sum_{k,l} c_{kl} z_1^k z_2^l \in \mathcal{F}$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} |F(z_1, z_2)|^2 &\leq \left(\sum_j \left| \sum_{k+l=j} c_{kl} z_1^k z_2^l \right| \right)^2 \\ &\leq \sum_j \left(\sum_{k+l=j} |c_{kl}|^2 \frac{k!l!}{(k+l)!} \right) \left(\sum_{k+l=j} \frac{(k+l)!}{k!l!} |z_1|^{2k} |z_2|^{2l} \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_{k+l=j} |c_{kl}|^2 \frac{k!l!}{(k+l)!} \right) (|z_1|^2 + |z_2|^2)^j \\ &\leq \sum_j \left(\sum_{k+l=j} (k+l+1)^p \right) (|z_1|^2 + |z_2|^2)^j \\ &= \sum_j (j+1)^{p+1} (|z_1|^2 + |z_2|^2)^j \\ &\leq \sum_j (j+p+1)(j+p) \dots (j+1) (|z_1|^2 + |z_2|^2)^j \\ &= (1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)^{-(p+1)}. \end{aligned}$$

2.2. Контактное распределение на сфере. Рассмотрим границу ∂B_2 шара B_2 , т.е. трехмерную сферу S^3 : $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Пусть $(a, b) \in S^3$. Тогда *вещественное касательное пространство* $T_{(a,b)}$ к S^3 в точке (a, b) задается уравнением

$$\operatorname{Re}(a\bar{\xi} + b\bar{\eta}) = 0, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2.$$

Возьмем в $T_{(a,b)}$ подпространство $L_{(a,b)}$ коразмерности 1, состоящее из векторов (ξ, η) , удовлетворяющих уравнению

$$a\bar{\xi} + b\bar{\eta} = 0.$$

Таким образом, мы получаем двумерное распределение на трехмерной сфере (см. [30, п. 5.4.2]). Напомним, что это распределение не интегрируемо. Очевидно, что оно инвариантно относительно группы $U(2)$ унитарных преобразований $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим действие группы $U(2)$ на множестве касательных векторов (ξ, η) к S^3 (во всевозможных точках $(a, b) \in S^3$). Легко видеть, что $U(2)$ -орбиты разделяются двумя инвариантами:

- а) длина вектора $l = (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{1/2}$;
- б) скалярное произведение (ξ, η) с единичной нормалью к $L_{(a,b)}$:

$$q = \operatorname{Im}(a\bar{\xi} + b\bar{\eta}),$$

при этом $|q| \leq l$.

Ниже нам понадобится следующее техническое высказывание.

ЛЕММА. *Преобразованиями из группы $U(2)$ любой вектор $(\xi, \eta) \in T_{(a,b)}$ такой, что $(\xi, \eta) \notin L_{(a,b)}$, может быть переведен в вектор $(\xi', \eta') \in T_{(a',b')}$, удовлетворяющий условию: числа $\operatorname{Im}(\xi'/a')$, $\operatorname{Im}(\eta'/b')$ конечны, отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что на векторах, удовлетворяющих искомому условию, могут достигаться все возможные значения инвариантов q, l .

Фиксируем вещественные a, b . Возьмем $\xi = iat_1$, $\eta = ibt_2$, где $t_1, t_2 > 0$. Тогда

$$l = \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_2^2}, \quad q = a^2 t_1 + b^2 t_2.$$

При положительных t_1, t_2 величина q/l может меняться от a до b , и теперь утверждение становится очевидным.

2.3. Граничные значения.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть γ : $z_1 = \alpha(t)e^{ih_1(t)}$, $z_2 = \beta(t)e^{ih_2(t)}$ – замкнутая C^∞ -гладкая кривая в $\partial B_2 = S^3$, трансверсальная распределению $L_{(a,b)}$ в каждой своей точке. Тогда для любой функции*

$$F = \sum_{k,l} c_{kl} z_1^k z_2^l \in \mathcal{H}(B_2)$$

полиномиального роста выполнено:

а) существует ограничение F на γ , т.е. ряд

$$\sum_{k,l} c_{kl} (\alpha(t)e^{ih_1(t)})^k (\beta(t)e^{ih_2(t)})^l \quad (2.4)$$

сходится в смысле обобщенных функций;

б) существует (радиальный) предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} F(\lambda \alpha(t)e^{ih_1(t)}, \lambda \beta(t)e^{ih_2(t)})$$

в смысле обобщенных функций, причем этот предел совпадает с суммой ряда (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(t)$ – гладкая функция. Мы должны доказать, что абсолютно сходится ряд

$$\sum_{k,l} c_{kl} I_{k,l},$$

где

$$I_{k,l} = \int_0^1 \varphi(t) (\alpha(t)e^{ih_1(t)})^k (\beta(t)e^{ih_2(t)})^l dt.$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $\varphi(t)$ имеет маленький носитель. В этом случае лемма из п. 2.2 позволяет считать, что $h'_1 > 0$, $h'_2 > 0$. Проведем в $I_{k,l}$ интегрирование по частям:

$$I_{k,l} = - \int_0^1 \left(\frac{\varphi(t)}{ikh'_1(t) + ilh'_2(t) + k \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} + l \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}} \right)' \times e^{ikh_1(t)} e^{ilh_2(t)} \alpha^k(t) \beta^l(t) dt.$$

Неравенство Коши–Буняковского дает оценку вида

$$|I_{k,l}| < C(k+l)^{-1} \left(\int_0^1 |\alpha^{2k}(t) \beta^{2l}(t)| dt \right)^{1/2}.$$

Повторяя интегрирование по частям, мы получаем для $I_{k,l}$ оценки вида

$$|I_{k,l}| < C_p(k+l)^{-p} \left(\int_0^1 |\alpha^{2k}(t) \beta^{2l}(t)| dt \right)^{1/2}$$

для любого p . Для оценки ряда (2.4) применяем неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k,l} c_{kl} I_{k,l} \right|^2 &\leq C_p^2 \sum_j \left(\sum_{k+l=j} |c_{kl}|^2 \frac{k!l!}{(k+l)!} (k+l)^{-2p} \right) \\ &\times \left(\sum_{k+l=j} \frac{(k+l)!}{k!l!} \int_0^1 |\alpha(t)|^{2k} |\beta(t)|^{2l} dt \right). \end{aligned}$$

Второй сомножитель равен 1, а поэтому наше выражение равно

$$C_p^2 \sum_{k,l} |c_{kl}|^2 \frac{k!l!}{(k+l)!} (k+l)^{-2p}.$$

Этот ряд сходится при больших p , что доказывает а).

Утверждение б) доказывается теми же доводами, которые приведены в теореме 1.

§ 3. Пространство L^2 на однополостном гиперboloиде

Здесь мы описываем разложение Молчанова для L^2 на однополостном гиперboloиде и обсуждаем его теоретико-функциональные свойства.

3.1. Гиперboloид. Рассмотрим группу $\mathrm{SO}_0(2, 1)$, состоящую из вещественных матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих условию

$$g^t \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}; \quad \det g = +1, \quad a_{33} > 0.$$

Напомним, что группа $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ изоморфна группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Нас интересует однополостный гиперboloид X в $\mathbb{R}^3$, заданный уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1.$$

Очевидно, что поверхность X является $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ -инвариантной (и, более того, $X = \mathrm{SO}_0(2, 1)/\mathrm{SO}_0(1, 1)$).

На X есть единственная с точностью до множителя $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ -инвариантная мера. Рассмотрим представление группы $\mathrm{SO}_0(2, 1) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ в пространстве L^2 по этой мере. Разложение L^2 на неприводимые представления известно (по существу это сделано в [25]), оно разлагается в двукратный прямой интеграл по четной основной серии унитарных представлений $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ плюс однократная прямая сумма всех представлений $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ дискретной серии (о сериях представлений $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ см., например, [17], [25], [26], [28], см. также ниже § 5).

Рассмотрим разложение

$$L^2(X) = \mathcal{L}_c \oplus \mathcal{L}_d, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{L}_c$ – интеграл по основным сериям, а $\mathcal{L}_d$ – прямая сумма представлений дискретной серии. Описание этого разложения обсуждалось В.Ф. Молчановым в [17]–[19] (см. также [8], [9]). Ниже мы дадим удобное явное описание этого разложения. Мы также покажем, что теоремы 1, 2 влекут забавные и довольно странные следствия о теоретико-функциональных свойствах функций из $\mathcal{L}_c$ и $\mathcal{L}_d$.

3.2. Тор. На однополостном гиперboloиде есть два семейства прямолинейных образующих. Каждое из этих семейств нумеруется точками окружности. Поэтому мы получаем вложение гиперboloида в тор (а именно каждой точке гиперboloида соответствует пара проходящих через нее прямолинейных образующих и тем самым точка тора $\mathbb{T}^2$).

Введем на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ координаты z_1, z_2 или φ_1, φ_2 :

$$z_1 = e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = e^{i\varphi_2}; \quad \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]; \quad |z_1| = |z_2| = 1.$$

Через σ мы обозначим меру Лебега $d\varphi_1 d\varphi_2$ на $\mathbb{T}^2$. В новых координатах группа $\mathrm{SO}_0(2, 1) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ переходит в группу преобразований тора вида

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{az_1 + b}{\bar{b}z_1 + \bar{a}}, \frac{az_2 + b}{\bar{b}z_2 + \bar{a}} \right),$$

где $z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}$ – обычные преобразования Мёбиуса круга $|z| = 1$ (напомним, что $|a|^2 - |b|^2 = 1$). Линия Δ : $\varphi_1 = \varphi_2$ (диагональ) является $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -инвариантной. Образ гиперboloида X при отображении его в тор есть дополнение до диагонали Δ . Инвариантная мера на гиперboloиде переходит в меру μ на $\mathbb{T}^2$, заданную формулой

$$\sin^{-2}\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Естественная изометрия

$$J: L^2(\mathbb{T}, \mu) \simeq L^2(X) \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \sigma)$$

задается формулой

$$Jf(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^{-1} f(z_1, z_2).$$

Изометричность J следует из того, что

$$|z_1 - z_2| = 2 \left| \sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \right|.$$

Изометрия J переводит действие $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ в $L^2(X)$ в действие в $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$, заданное формулой

$$f(z_1, z_2) \mapsto f\left(\frac{az_1 + b}{bz_1 + a}, \frac{az_2 + b}{bz_2 + a}\right) (\bar{b}z_1 + \bar{a})^{-1} (\bar{b}z_2 + \bar{a})^{-1}. \quad (3.2)$$

3.3. Разложение $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$. Легко видеть, что операторы (3.2) сохраняют следующие четыре подпространства: Λ_{++} , Λ_{+-} , Λ_{-+} , Λ_{--} , состоящих соответственно из функций вида

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0, l \geq 0} c_{kl} z_1^k z_2^l, & \quad \sum_{k \geq 0, l < 0} c_{kl} z_1^k z_2^l, \\ \sum_{k < 0, l \geq 0} c_{kl} z_1^k z_2^l, & \quad \sum_{k < 0, l < 0} c_{kl} z_1^k z_2^l. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$L^2(\mathbb{T}, \sigma) = \Lambda_{++} \oplus \Lambda_{+-} \oplus \Lambda_{-+} \oplus \Lambda_{--}.$$

Пространство Λ_{++} совпадает с пространством Харди $H^2(U^2)$, остальные три пространства отличаются от $H^2(U^2)$ несущественным образом.

В обозначениях (3.1) мы имеем

$$\mathcal{L}_c \simeq \Lambda_{+-} \oplus \Lambda_{-+}, \quad \mathcal{L}_d = \Lambda_{++} \oplus \Lambda_{--}, \quad (3.3)$$

причем Λ_{++} есть прямая сумма представлений $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ со старшим весом, а Λ_{--} – прямая сумма представлений $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ с младшим весом.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разложение в прямую сумму $\Lambda_{++} \oplus \Lambda_{+-} \oplus \Lambda_{-+} \oplus \Lambda_{--}$ имеет смысл не только для L^2 , но и для пространства всех обобщенных функций на торе.

3.4. Ограничение на кривые. Рассмотрим гладкую кривую γ : $\varphi_1 = h_1(t)$, $\varphi_2 = h_2(t)$ на торе такую, что $h'_1(t)$ и $h'_2(t)$ не обращаются в 0, т.е. γ не касается параллелей и меридианов тора; на языке гиперboloида это значит, что γ не касается прямолинейных образующих. Мы скажем, что γ *положительно монотонна*, если $h'_1(t)$ и $h'_2(t)$ имеют одинаковый знак, и *отрицательно монотонна* в противном случае. Если $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)) \subset \mathbb{R}^3$ – соответствующая кривая на гиперboloиде, а

$$\|\gamma'(s)\|^2 := \gamma'_1(s)^2 + \gamma'_2(s)^2 - \gamma'_3(s)^2,$$

то положительная монотонность означает, что $\|\gamma'(s)\|^2 < 0$, а отрицательная монотонность означает, что $\|\gamma'(s)\|^2 > 0$.

Теперь теорема 2 и разложение (3.3) влекут следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для функции $f \in \mathcal{L}_c$ определены ограничения (в смысле теоремы 2) на любые отрицательно монотонные кривые, а для любой функции $f \in \mathcal{L}_d$ – на положительно монотонные кривые.

Аналогичное высказывание верно и для пространства обобщенных функций на гиперboloиде.

ЗАМЕЧАНИЕ. Диагональ Δ положительно монотонна и $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -инвариантна. Поэтому ограничение $f \in \mathcal{L}_d$ на Δ является $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -сплетающим оператором. Кроме того определены ограничения производных от f любого порядка на Δ (производные от функций полиномиального роста суть функции полиномиального роста). Пусть S^α – подпространство функций $f \in \mathcal{L}_d = \Lambda_{++} \oplus \Lambda_{--}$, у которых ограничение всех частных производных порядка $\leq \alpha$ на Δ равны нулю. Тогда мы получаем в $\mathcal{L}_d$ фильтрацию

$$\mathcal{L}_d \supset S^0 \supset S^1 \supset \dots,$$

инвариантную относительно $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. В факторах этой фильтрации S^j/S^{j-1} естественным образом действует $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ и соответствующее представление есть сумма представления со старшим весом и комплексно-сопряженного представления с младшим весом.

Последнее замечание и предложение 5 являются очевидными следствиями утверждений из § 1. В связи с этим, однако, встают два вопроса об аналогах этих утверждений в более замысловатых случаях. Во-первых, не объясняются ли дискретные спектры в [23] и [14] аналогами утверждений типа теоремы 2? Во-вторых, нет ли аналогов предложения 5 для более общих гиперboloидов, псевдоримановых симметрических пространств и индефинитных многообразий Штифеля (см. [19], [6], [32], [13])?

§ 4. Ограничение на кривую в тензорном произведении пространств Соболева

4.1. Пространства Соболева на окружности. Любая обобщенная функция f на окружности S^1 представима в виде суммы ряда:

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi}, \quad (4.1)$$

где $c_n = o(n^p)$ для некоторого достаточно большого p .

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Пространство Соболева $W^\lambda = W^\lambda(S^1)$ – это пространство обобщенных функций на окружности, у которых коэффициенты Фурье c_k (см. (4.1)) удовлетворяют условию

$$\|f\|_\lambda^2 = \sum_n (n^2 + 1)^\lambda |c_k|^2 < \infty.$$

4.2. Ограничение на кривую. Рассмотрим тензорное произведение $W^\alpha \otimes W^\beta$. Это пространство естественно рассматривать как пространство обобщенных функций

$$F = \sum_{k,l} c_{kl} e^{ik\varphi_1} e^{il\varphi_2} \quad (4.2)$$

на торе $\mathbb{T}^2$: $z_1 = e^{i\varphi_1}$, $z_2 = e^{i\varphi_2}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$, удовлетворяющих условию

$$\|F\|^2 = \sum_{k,l} |c_{kl}|^2 (k^2 + 1)^\alpha (l^2 + 1)^\beta < \infty. \quad (4.3)$$

Эта же формула задает и норму в $W^\alpha \otimes W^\beta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\alpha + \beta > 1/2$. Пусть γ – любая кривая на торе, трансверсальная параллелям и меридианам. Тогда оператор ограничения функции $F \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ на кривую γ продолжается до ограниченного оператора из $W^\alpha \otimes W^\beta$ в пространство обобщенных функций на γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что наше утверждение локально. Кроме того, пространство $W^\alpha \otimes W^\beta$ инвариантно относительно замен переменных

$$\tilde{\varphi}_1 = q_1(\varphi_1), \quad \tilde{\varphi}_2 = q_2(\varphi_2),$$

где q_1, q_2 – гладкие диффеоморфизмы окружности. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что γ задается уравнением $\varphi_1 = \varphi_2$. Теперь для оператора ограничения на γ пишется явное выражение в терминах коэффициентов Фурье, а именно функции (4.2) ставится в соответствие ряд

$$\sum_n \left(\sum_{k+l=n} c_{kl} \right) e^{in\theta}. \quad (4.4)$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k+l=n} c_{kl} \right|^2 &\leq \left(\sum_{k+l=n} |c_{kl}|^2 (k^2 + 1)^\alpha (l^2 + 1)^\beta \right) \\ &\quad \times \left[\sum_k \frac{1}{(k^2 + 1)^\alpha ((n-k)^2 + 1)^\beta} \right]. \end{aligned}$$

Ряд в круглых скобках сходится в силу (4.3), а ряд в квадратных скобках сходится при $\alpha + \beta > 1/2$. Нам нужно доказать, что сумма ряда (4.4) является обобщенной функцией; для этого достаточно проверить, что множитель в квадратных скобках имеет полиномиальный рост по n . Рассмотрим выражение

$$r_k = \frac{1}{(k^2 + 1)^\alpha ((n-k)^2 + 1)^\beta}.$$

Ясно, что максимум r_k при $-n \leq k \leq 2n$ оценивается сверху некоторой степенью числа n . Если k лежит вне указанного промежутка, то

$$r_k < \frac{1}{|n - k|^{2(\alpha+\beta)}} \quad \text{при } k > 2n,$$

$$r_k < \frac{1}{|k|^{2(\alpha+\beta)}} \quad \text{при } k < -n.$$

Теперь утверждение очевидно.

§ 5. Дискретные спектры в тензорных произведениях унитарных представлений $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$

Цель этого параграфа – построить явно с помощью теорем об ограничении на кривые неприводимые подпредставления (по возможности все) в некоторых тензорных произведениях унитарных представлений $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$.

5.1. Представления со старшим весом. Реализуем группу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ как группу матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Эта группа действует на круге $|z| < 1$ преобразованиями Мёбиуса

$$z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

Через $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$ мы обозначим универсальную накрывающую группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (см. [26]). Для любого $s > 0$ мы определим представление T_s группы $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$ в пространстве голоморфных функций на круге по формуле

$$T_s(g)f(z) = f\left(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right)(\bar{b}z + \bar{a})^{-s}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Параметр s в этой формуле вещественный. Поэтому выражение $(\bar{b}z + \bar{a})^{-s}$ является многозначной функцией, и поэтому при не целых s мы получаем представление не самой группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, а ее универсальной накрывающей $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$.

Представления T_s называются *представлениями со старшим весом* (см. [26]). Эти представления унитарны в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_s$ голоморфных функций, заданном воспроизводящим ядром (см., например, [22, § 1])

$$K_s(z, u) = (1 - z\bar{u})^{-s}.$$

Норму в $\mathcal{H}_s$ можно записать также в виде

$$\left\| \sum c_k z^k \right\|^2 = \sum \frac{k!}{s(s+1)\dots(s+k-1)} |c_k|^2. \quad (5.1)$$

В случае $s > 1$ для скалярного произведения в $\mathcal{H}_s$ есть удобное интегральное представление

$$\langle f, g \rangle = \int_{|z| < 1} f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^{s-2} dz d\bar{z}.$$

Пространство $\mathcal{H}_1$ совпадает с пространством Харди H^2 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы (5.1) видно, что граничные значения функции $f \in \mathcal{H}_s$ лежат в пространстве Соболева $W^{-(s-1)/2}$.

Представление $\bar{T}_s$ группы $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$ с младшим весом $(-s)$ реализуется в том же пространстве $\mathcal{H}_s$ операторами

$$\bar{T}_s(g)f(z) = f\left(\frac{\bar{a}z + \bar{b}}{bz + a}\right)(bz + a)^{-s}.$$

5.2. Представление $T_s \otimes T_\sigma$. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$. Его естественно рассматривать как гильбертово пространство голоморфных функций в бидиске U^2 , определяемое воспроизводящим ядром

$$K_{s,\sigma}(z_1, z_2; u_1, u_2) = K_s(z_1, \bar{u}_1)K_\sigma(z_2, \bar{u}_2) = (1 - z_1\bar{u}_1)^{-s}(1 - z_2\bar{u}_2)^{-\sigma}.$$

Условие $F = \sum c_{kl}z_1^k z_2^l \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ равносильно

$$\sum_{k,l} |c_{kl}|^2 (k+1)^{-(s-1)} (l+1)^{-(\sigma-1)} < \infty. \quad (5.2)$$

Отсюда, в частности, видно, что пространство функций полиномиального роста в бидиске совпадает с

$$\bigcup_{s>0, \sigma>0} \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma.$$

Представление $T_s \otimes T_\sigma$ реализуется в пространстве $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ операторами вида

$$f(z_1, z_2) \mapsto f\left(\frac{az_1 + b}{bz_1 + \bar{a}}, \frac{az_2 + b}{bz_2 + \bar{a}}\right)(\bar{b}z_1 + \bar{a})^{-s}(\bar{b}z_2 + \bar{a})^{-\sigma}.$$

Рассмотрим оператор ограничения голоморфной функции $f \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ на диагональ Δ : $\varphi_1 = \varphi_2$ тора $\mathbb{T}^2$. Рассмотрим в $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ подпространство Q_0 , состоящее из функций, у которых ограничение на Δ есть нуль. Далее заметим, что производные от функции полиномиального роста суть функции полиномиального роста, и к ним также можно применить теорему 1. Для любого целого неотрицательного α рассмотрим в $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ подпространство Q_α , состоящее из функций, у которых все производные порядка $\leq \alpha$ зануляются на Δ . Таким образом, мы получаем $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$ -инвариантную фильтрацию

$$\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma = Q_{-1} \supset Q_0 \supset Q_1 \supset \dots$$

в $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$. Легко проверяется, что представление $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$ в Q_{j-1}/Q_j неприводимо и эквивалентно $T_{s+\sigma+2j}$. Обозначим через R_j ортогональное дополнение до Q_j в Q_{j-1} . Тогда мы получаем разложение $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ в прямую сумму минимальных инвариантных подпространств:

$$\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma = \bigoplus_{j=0}^{\infty} R_j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Фраза “ограничение на Δ равно нулю” в нашем случае несколько противоестественно. Проще сказать, что голоморфная функция f равна нулю на диагонали $z_1 = z_2$ бидиска (это довод из [11]); см., однако, примеры ниже.

5.3. Представление $T_s \otimes \bar{T}_\sigma$. Это представление реализуется в пространстве $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ унитарными операторами

$$f(z_1, z_2) \mapsto f\left(\frac{az_1 + b}{\bar{b}z_1 + \bar{a}}, \frac{\bar{a}z_2 + \bar{b}}{bz_2 + a}\right)(\bar{b}z_1 + \bar{a})^{-s}(bz_2 + a)^{-\sigma}.$$

На этот раз естественно рассмотреть оператор ограничения на кривую $\tilde{\Delta}$: $z_1 = e^{it}$, $z_2 = e^{-it}$. Однако эта кривая не удовлетворяет условиям теоремы 1, и это в корне меняет всю картину.

Согласно замечанию из п. 5.1 граничные значения функций $f \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ лежат в пространстве Соболева $W^{(1-s)/2}(S^1) \otimes W^{(1-\sigma)/2}(S^1)$.

В силу предложения 6 при $s + \sigma < 1$ в $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$ корректно определен оператор ограничения на $\tilde{\Delta}$. Это нам дает некоторое пространство функций на $\tilde{\Delta}$ (а именно функции, которые могут быть получены ограничениями функций из $f \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\sigma$) и действие $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$ в этом функциональном пространстве. Несложная проверка показывает, что в функциях на $\tilde{\Delta}$ реализуется одно из представлений дополнительной серии (см. [26]) группы $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$.

Ничего большего с помощью кривой $\tilde{\Delta}$ получить нельзя. Известно, однако, что при $|s - \sigma| > 1$ в $T_s \otimes \bar{T}_\sigma$ также есть дискретный спектр, и наша следующая цель – его предъявить.

5.4. Двойственная модель представления $\bar{T}_s$. Рассмотрим пространстве Соболева $W^{(s-1)/2}$ (см. §4). Через $\mathcal{L}$ мы обозначим его подпространство, состоящее из функций, голоморфно продолжимых внутрь круга $|z| < 1$. Через $\mathring{\mathcal{H}}_s$ мы обозначим факторпространство $W^{(s-1)/2}/\mathcal{L}$. Группа $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$ действует в $W^{(s-1)/2}$ операторами

$$\mathring{T}_s(g)\Phi(z) = \Phi\left(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right)(\bar{b}z + \bar{a})^{s-1}$$

(здесь $|z| = 1$). Легко видеть, что подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно операторов $\mathring{T}_s$, и тем самым мы получаем представление $\mathrm{SL}_2^\sim(\mathbb{R})$ в факторпространстве $\mathring{\mathcal{H}}_s$, за этим представлением мы сохраняем обозначение $\mathring{T}_s$.

Скалярное произведение в $\mathring{\mathcal{H}}_s$ задается формулой

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z|=1} \int_{|u|=1} \frac{\Phi_1(z) \overline{\Phi_2(u)} dz d\bar{u}}{(1 - (1 - \varepsilon)z\bar{u})^s}$$

(разумеется, если Φ_1 или Φ_2 голоморфна в круге, то $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$). Норму, задаваемую этим скалярным произведением, удобно записывать также в форме

$$\left\| \sum_{k>0} a_k z^{-k} + \sum_{k \geq 0} c_k z^k \right\|^2 = \sum_{k>0} \frac{(s+1)(s+2) \dots (s+k)}{k!} |a_k|^2.$$

Рассмотрим билинейную форму $\mathcal{H}_s \times \mathring{\mathcal{H}}_s \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемую формулой

$$\{f, \Phi\} = \int_{|z|=1} f(z) \Phi(z) dz.$$

Легко видеть, что

$$\{T_s(g)f, \mathring{T}_s(g)\Phi\} = \{f, \Phi\},$$

поэтому представления T_s и $\mathring{T}_s$ двойственны друг другу, т.е. $\mathring{T}_s \simeq \overline{T}_s$.

5.5. Оставшийся дискретный спектр в $T_s \otimes \overline{T}_\sigma$. Пусть $\sigma > s + 1$. Рассмотрим представление $T_s \otimes \overline{T}_\sigma$ в пространстве $\mathcal{H}_s \otimes \mathring{\mathcal{H}}_\sigma$. Пространство $\mathcal{H}_s \otimes \mathring{\mathcal{H}}_\sigma$ есть факторпространство пространства $\mathcal{H}_s \otimes W^{(\sigma-1)/2}$, а $\mathcal{H}_s \otimes W^{(\sigma-1)/2} \subset W^{-(s-1)/2} \otimes W^{(\sigma-1)/2}$. Теперь мы можем рассмотреть оператор ограничения на диагональ Δ (см. предложение 6).

Возьмем натуральное k такое, что $s + k < \sigma \leq s + k + 1$. Обозначим через Q_α пространство всех функций $f \in \mathcal{H}_s \otimes \mathring{\mathcal{H}}_\sigma$, у которых ограничение всех частных производных порядка $\leq \alpha$ на Δ равно нулю. Напомним, что дифференцирование переводит W^λ в $W^{\lambda-1}$, поэтому предложение 6 позволяет рассматривать пространства Q_α при $\alpha \leq k$. Мы получаем конечную $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -инвариантную фильтрацию в $\mathcal{H}_s \otimes \mathring{\mathcal{H}}_\sigma$:

$$\mathcal{H}_s \otimes \mathring{\mathcal{H}}_\sigma = Q_{-1} \supset Q_0 \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_k.$$

Легко проверяется, что в факторпространстве Q_{j-1}/Q_j реализуется неприводимое представление $\overline{T}_{\sigma-s-2j}$.

5.6. Неудачный способ предъявлять дискретный спектр в $\overline{T}_s \otimes \overline{T}_\sigma$. Рассмотрим представление $\mathring{T}_s \otimes \mathring{T}_\sigma$ в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}_s \otimes \mathring{\mathcal{H}}_\sigma$ (понятно, что оно почти не отличается от $T_s \otimes T_\sigma$). Тогда в $\mathring{\mathcal{H}}_s \otimes \mathring{\mathcal{H}}_\sigma$ можно рассмотреть оператор ограничения на диагональ, предложение 6 позволяет это сделать, но это дает лишь конечное число неприводимых подпредставлений, хотя на самом деле (см. п. 5.2) их счетное число.

5.7. Тензорное произведение $\overline{T}_s$ на представление основной серии. Фиксируем $\tau \in \mathbb{R}$. Рассмотрим представление P_τ группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ в L^2 на окружности $|z| = 1$, задаваемое формулой

$$P_\tau(g)f(z) = f\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right) |\bar{b}z+\bar{a}|^{\frac{1}{2}+i\tau}$$

(эти представления называются *представлениями четной основной серии*).

Рассмотрим тензорное произведение $\mathring{T}_s \otimes P_\tau$. Оно естественным образом реализуется в пространстве $\mathring{\mathcal{H}}_s \otimes L^2$, которое, в свою очередь, есть факторпространство пространства $W^{(s-1)/2} \otimes L^2$. К последнему пространству применимо предложение 6, и мы снова можем рассмотреть оператор ограничения на Δ .

Эта конструкция дает конечное число неприводимых подпредставлений в $\overline{T}_s \otimes P_\tau$, хотя на самом деле дискретный спектр тут счетен.

5.8. Литературные замечания. Задача о вычислении спектра тензорного произведения двух унитарных представлений $SL_2(\mathbb{R})$ была в принципе решена в классической работе Пуканского [26] (впоследствии задача обсуждалась в [16], [28]). В случае $SL_2^{\sim}(\mathbb{R})$ возникают некоторые дополнительные явления, связанные с представлениями, не содержащимися слабо в регулярном представлении, наличие дискретного слагаемого в ситуации, описанной в п. 5.3 (тензорное произведение представления с маленьким старшим весом на представление с маленьким младшим весом) анонсировано в [21].

5.9. Обобщения. Различные обобщения ситуации, описанной в п. 5.3, обсуждались в [22, § 2–4, 7]. Среди подобных задач, не упомянутых в [22], стоит отметить задачу (см. [1], [15]) об ограничении гармонического представления (представления Фридрихса–И. Сигала–Березина–Шейла–Вейля) группы $Sp(2k(p+q), \mathbb{R})$ на подгруппу $Sp(2k, \mathbb{R}) \times O(p, q)$; было бы интересно понять, не виден ли спектр из упомянутых работ при ограничении на орбиту в границе области Картана III типа. Было бы также любопытно понять, не связаны ли “малые” непрерывные спектры (см. [24]) с оператором ограничения на некомпактную орбиту.

Что касается конструкции пп. 5.5, 5.7, то она работает в следующей ситуации. Пусть G – полупростая группа Ли. Пусть P, T – два ее унитарных представления, которые реализованы в гильбертовых пространствах обобщенных функций на флаговом многообразии M . Все, что нужно для применения нашего приема, – это чтобы одно из этих представлений действовало в гильбертовом пространстве “достаточно гладких функций” на M . Вопрос о степени гладкости функций в пространствах унитарных представлений не изучался. Однако наш прием заведомо работает, если одно из представлений имеет “достаточно большой” старший вес. Можно показать, что в этом случае наша конструкция дает дискретный спектр, состоящий из дискретных серий Хариш–Чандры.

Список литературы

1. Adams J. D. Discrete spectrum of reductive dual pair $(O(p, q), Sp(2m))$ // Inv. Math. 1983. V. 74. P. 449–475.
2. Александров А. Б. Теория функций в шаре // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1985. С. 115–190.
3. Барн Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
4. Beurling A. Ensembles exceptionnels // Acta Math. 1940. V. 72. P. 1–13.
5. Fefferman C. Inequalities for strongly singular convolution operators // Acta Math. 1970. V. 124. № 1–2. P. 9–36.
6. Flensted-Jensen M. Analysis on non-Riemannian symmetric spaces. Conference Board. № 61. Amer. Math. Soc., 1986.
7. Gagliardo E. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rend. Sem. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 284–305.
8. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г. Комплексные многообразия, остовы которых – полупростые вещественные группы Ли, и аналитические дискретные серии представлений // Функцион. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. № 4. С. 19–27.
9. Gindikin S. G. Conformal analysis on hyperboloids // J. Geom. Phys. 1993. V. 10. P. 175–184.
10. Егоров Ю. В., Шубин М. И. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30. М.: ВИНТИ, 1987.
11. Jackobsen H. P., Vergne M. Restrictions and expansions of holomorphic representations // J. Funct. Anal. 1979. V. 34. P. 29–53.

12. Хенкин Г. М., Чирка Е. М. Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Современные проблемы математики. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1975. С. 13–142.
13. Kobayashi T. Singular unitary representations and discrete series for indefinite Stiefel manifolds $U(p, q; \mathbb{F})/U(p - m, q; \mathbb{F})$ // Mem. AMS. 1992. V. 464.
14. Kobayashi T. Discrete decomposability of the restrictions of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications // Inv. Math. 1994. V. 117. P. 181–205.
15. Li J. S. Singular unitary representations of classical groups // Inv. Math. 1989. V. 97. P. 237–255.
16. Молчанов В. Ф. Тензорные произведения унитарных представлений трехмерной группы Лоренца // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 4. С. 860–861.
17. Молчанов В. Ф. Квантование на мнимой плоскости Лобачевского // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 2. С. 73–74.
18. Molchanov V. F. On quantization on para-hermitian symmetric spaces // Contemporary Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Translations. V. 175. F. A. Berezin memorial volume. P. 81–95.
19. Molchanov V. F. Projections on the discrete spectrum for hyperboloids. Preprint of Mittag-Leffler Institute. Report № 27, 1995/96.
20. Nagel A., Rudin W. Local boundary behavior of bounded holomorphic functions // Can. J. Math. 1978. V. 30. P. 583–592.
21. Неретин Ю. А. О дискретных вхождениях представлений дополнительной серии в тензорные произведения унитарных представлений // Функцион. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 1. С. 79–80.
22. Неретин Ю. А., Ольшанский Г. И. Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп $O(p, q)$ и их пределы при $q \rightarrow \infty$ // Зап. научн. семин. ПОМИ РАН. 1995. Т. 223. С. 9–91.
23. Ольшанский Г. И. Неприводимые унитарные представления групп $U(p, q)$, выдерживающие предельный переход при $q \rightarrow \infty$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 172. С. 114–120.
24. Ørsted B., Zhang G. Tensor products of analytic continuations of holomorphic discrete series. Preprint № 18. Institut for Matematik og Datalogi, Odense University, 1994.
25. Pukanszky L. On the Kronecker products of irreducible representations of 2×2 real unimodular group. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 100. № 1. P. 116–152.
26. Pukanszky L. Plancherel formula for universal covering group of the group $SL_2(\mathbb{R})$ // Math. Ann. 1964. V. 156. P. 96–143.
27. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
28. Repka J. Tensor products of unitary representations of $SL_2(\mathbb{R})$ // Amer. J. Math. 1978. V. 100. P. 747–774.
29. Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
30. Рудин У. Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1978.
31. Salem R., Zygmund A. Capacities of sets and Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V. 59. P. 23–41.
32. Schlichtkrull H. A series of unitary irreducible representations induced from a symmetric subgroup // Inv. Math. 1982. V. 68. P. 497–516.
33. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
34. Владимиров В. С., Сергеев А. Г. Комплексный анализ в трубе будущего // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1985. С. 191–266.

Поступило в редакцию
14.X.1996