Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные алгебраические GM-многообразия, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 3, 39–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:54:58

УДК 513.6+517.6

В. А. Краснов

Вещественные алгебраические GM-многообразия

Исследуются вещественные алгебраические GM-многообразия. Доказываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы вещественное алгебраическое многообразие было GM-многообразием. Полученные результаты применяются для доказательства сравнений эйлеровой характеристики.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Пусть X – неособое вещественное проективное алгебраическое многообразие, $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения, $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка, действующая на $X(\mathbb{C})$, $Y = X(\mathbb{C})/G$ – факторпространство, $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ – проекция. Из точной когомологической последовательности Смита для инволюции $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ вытекает неравенство (см. [1])

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)).$$

Многообразие X называется GM-многообразием, если это неравенство будет равенством (см. [1]). В [1] показано, что X является GM-многообразием тогда и только тогда, когда вырождается вторая спектральная последовательность для эквивариантных когомологий:

$$H_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Понятие GM-многообразия и данный критерий применялись в ряде моих работ (см., например, [1]–[3]); к настоящему времени найдено мало примеров GM-многообразий. В работе [1] приведены только тривиальные примеры, в [4] имеются необходимые и достаточные условия для гиперповерхности в проективном пространстве, в [5], [7] имеются достаточные условия для поверхности. Одна из задач данной работы состоит в получении необходимых и достаточных условий для того, чтобы X было GM-многообразием. Несколько таких условий доказано в §3, формулировки которых во введении не приводятся. В §4 рассматриваются “специальные” многообразия, к описанию которых мы сейчас приступим. Пусть $n = \dim X$ и

$$A^{<n/2}(X) = \bigoplus_{q < n/2} A^q(X), \quad H^{<n}(X(\mathbb{C})) = \bigoplus_{q < n} H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

где $A^q(X)$ – группа классов рациональной эквивалентности циклов коразмерности q ; тогда определено отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: A^{<n/2}(X) \rightarrow H^{<n}(X(\mathbb{C})). \quad (0.1)$$

Будем называть многообразие X *специальным*, если отображение цикла (0.1) эписморфно. Для такого многообразия определен канонический гомоморфизм

$$\gamma: H^{<n}(X(\mathbb{C})) \rightarrow H^{<n/2}(X(\mathbb{R})), \quad (0.2)$$

где

$$H^{<n/2}(X(\mathbb{R})) = \bigoplus_{q < n/2} H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Этот гомоморфизм определяется следующим образом. Пусть $z \in H^{2q}(X(\mathbb{C}))$, $Z \in A^q(X)$, $q < n/2$, такие элементы, что $\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = z$; тогда доказывается, что класс когомологий $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) \in H^q(X(\mathbb{R}))$ зависит только от класса когомологий $z \in H^{2q}(X(\mathbb{C}))$, поэтому полагаем $\gamma(z) = \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z)$. Определение отображения цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: A^q(X) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}))$$

изложено в [8]. В данной работе доказана

ТЕОРЕМА 0.1. *Если X – специальное многообразие, то X является ГМ-многообразием тогда и только тогда, когда отображение (0.2) мономорфно.*

Примером специального многообразия является неособое полное пересечение, для него утверждение теоремы 0.1 формулируется следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 0.2. *Если X – неособое полное пересечение, $\xi \in H^1(X(\mathbb{R}))$ – класс когомологий, определенный гиперплоским сечением, то X является ГМ-многообразием тогда и только тогда, когда $\xi^p \neq 0$, где*

$$p = \begin{cases} (n-1)/2, & n \text{ нечетное,} \\ (n-2)/2, & n \text{ четное.} \end{cases}$$

Заметим, что для гиперповерхности это утверждение доказано в [4]. Отметим также, что справедливо аналогичное утверждение для двухлистного накрытия полного пересечения.

Сформулируем теперь две теоремы в случаях, когда X является поверхностью. Заметим сначала, что множество $X(\mathbb{R})$ можно рассматривать вложенным также в Y , поэтому определена группа относительных когомологий $H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$. Композицию гомоморфизмов

$$H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \longrightarrow H^1(Y; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{f^*} H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$$

будем также обозначать через f^* ; тогда из точной когомологической последовательности Смита вытекает включение

$$f^* H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \supset (1 + g^*) H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2). \quad (0.3)$$

В данной работе доказана

ТЕОРЕМА 0.3. *Если X – поверхность и $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то X является ГМ-поверхностью тогда и только тогда, когда включение (0.3) будет равенством.*

Заметим, что если

$$f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) = 0, \quad (0.4)$$

то включение (0.3) становится равенством. Например, если $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$, то выполняется равенство (0.4), поэтому X является ГМ-поверхностью; это утверждение доказано раньше в [5]. Если гомоморфизм ограничения

$$H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

мономорфен, то также выполняется равенство (0.4), поэтому X является ГМ-поверхностью; это утверждение доказано раньше в [6]. В дополнение к теореме 0.3 мы даем геометрическое описание группы $f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$, идея которого возникла из теории вещественных поверхностей Энрикеса в [9].

Если $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ – ненулевой элемент, то он задает двухлистное неразветвленное накрытие $\pi: W_\theta \rightarrow X(\mathbb{C})$. При $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ вещественная структура $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ поднимается до вещественной структуры на W_θ тогда и только тогда, когда $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$. Итак, пусть $g^*(\theta) = \theta$; тогда существуют две вещественные структуры $g^{(i)}: W_\theta \rightarrow W_\theta$, $i = 1, 2$, накрывающие вещественную структуру $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Положим

$$X(\mathbb{R})_\theta^{(i)} = \pi(W_\theta^{g^{(i)}});$$

тогда множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ разбивается на две непересекающиеся части $X(\mathbb{R})_\theta^{(1)}$, $X(\mathbb{R})_\theta^{(2)}$, каждая из которых состоит из целых компонент связности множества $X(\mathbb{R})$, причем одна из частей может быть пустой. Элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ будем называть *неразделяющим* $X(\mathbb{R})$, если одна из частей $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}$ пустая. В данной работе доказана

ТЕОРЕМА 0.4. *Ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ принадлежит подгруппе $f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$ тогда и только тогда, когда он не разделяет $X(\mathbb{R})$ на части и ограничение его на $X(\mathbb{R})$ равно нулю.*

СЛЕДСТВИЕ 0.5. *Если поверхность X такая, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и инволюция*

$$g^*: H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

тривиальна, то X не является ГМ-поверхностью тогда и только тогда, когда существует ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, который не разделяет $X(\mathbb{R})$ на части и ограничение его на $X(\mathbb{R})$ равно нулю.

Чтобы сформулировать еще одну теорему, введем дополнительные обозначения. Пусть $X_1, \dots, X_s$ – компоненты связности множества $X(\mathbb{R})$, их можно считать вложенными в Y , поэтому они определяют классы когомологий $y_1, \dots, y_s \in H^2(Y, \mathbb{F}_2)$, так как Y является дифференцируемым многообразием. Нетрудно увидеть, что элементы $f^*(y_1), \dots, f^*(y_s) \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ равны нулю. Оказывается, что имеет место

ТЕОРЕМА 0.6. *Если поверхность X такая, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то X является ГМ-поверхностью тогда и только тогда, когда ядро гомоморфизма*

$$f^*: H^2(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \quad (0.5)$$

порождается элементами $y_1, \dots, y_s$.

Заметим, что утверждение о том, что для ГМ-поверхности ядро гомоморфизма (0.5) порождается элементами $y_1, \dots, y_s$, доказано раньше в [3], а для поверхности с $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ еще раньше в [10].

Полученные результаты о ГМ-многообразиях мы применяем для доказательства двух теорем, дающих сравнения эйлеровой характеристики двухлистного накрытия. Итак, пусть отображение вещественных алгебраических многообразий $\pi: W \rightarrow V$ является двухлистным накрытием с ветвлением $S \subset V$, где V — $2m$ -мерное неособое полное пересечение, S — пересечение V с гиперповерхностью четной степени $2k$. Если $\tau: W(\mathbb{C}) \rightarrow W(\mathbb{C})$ — инволюция накрытия, то $g_- = g \circ \tau: W(\mathbb{C}) \rightarrow W(\mathbb{C})$ — вторая вещественная структура на $W(\mathbb{C})$; множество вещественных точек для нее обозначим через $W_-(\mathbb{R})$. Пусть $\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) = (-1)^{m+1} \chi(W_-(\mathbb{R}))$, где $\chi(-)$ — эйлерова характеристика, $\tilde{\sigma}(W(\mathbb{C}))$ — сигнатура формы $\tilde{Q}(x, y) = x \cdot \tau^*(y)$ на $H^{2m}(W(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 0.7. *Пусть W является ГМ-многообразием, класс когомологий $[S(\mathbb{R})]$ в $H_{2m-1}(S(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ не равен нулю и число k четное; тогда имеют место утверждения:*

(i) *если W — $(M-1)$ -многообразие, то*

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \equiv \pm 2 \pmod{8}, \quad \tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) \equiv \pm 2 \pmod{16},$$

причем знаки соответствуют друг другу;

(ii) *если W — $(M-2)$ -многообразие и $\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \equiv \pm 2 \pmod{8}$, то*

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) \equiv 0, \pm 4 \pmod{16},$$

причем знаки соответствуют друг другу;

(iii) *если W — $(M-2)$ -многообразие и $\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{8}$, то*

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) \equiv 0 \pmod{16};$$

(iv) *если W — $(M-3)$ -многообразие и $\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{8}$, то*

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) \equiv \pm 2 \pmod{16}.$$

Заметим, что $\tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) = 2\sigma(V(\mathbb{C})) - \sigma(W(\mathbb{C}))$, где $\sigma(-)$ — сигнатура многообразия. Раньше эта теорема была доказана только для поверхностей (см. [2]), причем для поверхностей она справедлива и при нечетном k , но нужно только требовать, чтобы множество $s(\mathbb{R})$ разбивало $W(\mathbb{R})$. Если $m > 1$ и $s(\mathbb{R})$ разбивает $W(\mathbb{R})$, то оказывается, что при k нечетном W не может быть ГМ-многообразием, поэтому случай нечетного k при $m > 1$ приходится не рассматривать.

Пусть теперь $V = P^n$, $n = 2m$; тогда S задается уравнением $F(v) = 0$, где $F(v) = F(v_0, \dots, v_n)$ – однородный многочлен с вещественными коэффициентами степени $2k$. Через $P^n(\mathbb{R})_+$ обозначим часть $P^n(\mathbb{R})$, заданную неравенством $F(v) \geq 0$. Неравенство $F(v) \leq 0$ определяет множество $P^n(\mathbb{R})_-$. Через $l_q^\pm$ обозначим классы гомологий из $H_q(P^n(\mathbb{R})_\pm, s(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$, заданные относительными циклами $P^q(\mathbb{R}) \cap P^n(\mathbb{R})_\pm$; тогда проверяется, что один из классов l_m^+ , l_m^- равен нулю, а другой нет. Будем считать, что $l_m^- \neq 0$, заменив в противном случае F на $-F$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 0.8. *Пусть S является ГМ-многообразием и класс гомологий $[S(\mathbb{R})]$ равен нулю в $S(\mathbb{C})$. Тогда выполняется сравнение*

$$\chi(P^n(\mathbb{R})_+) \equiv (mk)^2 \pmod{4}.$$

Эта теорема обобщает на произвольную размерность сравнение Арнольда (см. [11]). Заметим также, что при четном k можно не требовать, чтобы S было ГМ-многообразием.

§1. Гомоморфизм сдвига для эквивариантных когомологий

Пусть X – n -мерный конечный клеточный комплекс с клеточной инволюцией $g: X \rightarrow X$. Рассмотрим группу эквивариантных когомологий $H^m(X; G, \mathbb{F}_2)$, где $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка. Имеется последовательность канонических гомоморфизмов

$$T_k^*: H^m(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{m+k}(X; G, \mathbb{F}_2), \quad (1.1)$$

которые мы называем *гомоморфизмами сдвига*. Это название вытекает из следующего конструктивного определения гомоморфизма (1.1). Пусть $C^m = C^m(X, \mathbb{F}_2)$ – группа коцепей с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$; тогда определен бикомплекс (см. [5]):

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* \\ 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 & \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C^n \longrightarrow 0 \\ & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* \\ 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 & \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C^n \longrightarrow 0 \\ & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* & & \uparrow 1+g^* \\ 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 & \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C^n \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (1.2)$$

Группа $H^m(X; G, \mathbb{F}_2)$ равна полным когомологиям этого бикомплекса, т.е.

$$H^m(X; G, \mathbb{F}_2) = \frac{\text{Ker}[d: C^m \oplus \dots \oplus C^0 \rightarrow C^{m+1} \oplus \dots \oplus C^0]}{\text{Im}[d: C^{m-1} \oplus \dots \oplus C^0 \rightarrow C^m \oplus \dots \oplus C^0]}, \quad (1.3)$$

где d – полный дифференциал бикомплекса (1.2). Обозначим через T_k отображение бикомплекса (1.2) в себя, которое просто поднимает этот бикомплекс на k “этажей” вверх; тогда отображение T_k индуцирует гомоморфизм эквивариантных когомологий (1.3).

Можно дать функторное определение гомоморфизмов (1.1). Это делается следующим образом. Если pt – одноточечное G -пространство, то $H^*(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[t]$ – кольцо многочленов, где t – образующая группы $H^1(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2)$. Отображение $X \rightarrow \text{pt}$ индуцирует гомоморфизм колец эквивариантных когомологий $H^*(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(X; G, \mathbb{F}_2)$, следовательно, $H^*(X; G, \mathbb{F}_2)$ является алгеброй над кольцом многочленов $\mathbb{F}_2[t]$. Гомоморфизм (1.1) совпадает с гомоморфизмом умножения на t^k .

Обозначим через $C^{p,q}$ бикомплекс (1.2), т.е. $C^{p,q} = C^p$; тогда из точной последовательности

$$0 \longrightarrow C^{*,*} \xrightarrow{T_1} C^{*,*+1} \xrightarrow{\alpha} C^* \longrightarrow 0,$$

где α – проекции бикомплекса (1.2) на нижнюю строку, получаем точную последовательность когомологий

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^m(X; G, \mathbb{F}_2) &\xrightarrow{\cup t} H^{m+1}(X; G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} H^{m+1}(X, \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{\delta} H^{m+1}(X; G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup t} \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим теперь вторую спектральную последовательность бикомплекса (1.2); тогда

$$\Pi_1^{p,q} = H^q(X, \mathbb{F}_2), \quad \Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathbb{F}_2)).$$

Гомоморфизм сдвига $T_k: C^{*,*} \rightarrow C^{*,*+k}$ индуцирует гомоморфизм спектральной последовательности

$$T_k^*: \Pi_r^{p,q} \rightarrow \Pi_r^{p+k,q}. \quad (1.5)$$

При $r = 1$, $p \geq 0$ гомоморфизм (1.5) совпадает с тождественным отображением $H^q(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X, \mathbb{F}_2)$, а при $r \geq 2$ справедлива очевидная

ЛЕММА 1.1. *Гомоморфизм (1.5) при $p \geq 0$ всегда является эпиморфизмом, причем при $p \geq r - 1$, а также при $p + q > n = \dim X$ он будет изоморфизмом.*

Обозначим через $K_r^{p,q}$ ядро эпиморфизма $T_r^*: \Pi_r^{0,q} \rightarrow \Pi_r^{p,q}$. Тогда справедлива

ЛЕММА 1.2. *Имеют место утверждения:*

- (i) *при $p \geq 1$ выполняется равенство $K_2^{p,q} = (1 + g^*)H^q(X, \mathbb{F}_2)$;*
- (ii) *при $p \geq 1$, $r \geq 2$ выполняется включение $K_r^{p,q} \subset K_{r+1}^{p,q}$, которое будет равенством тогда и только тогда, когда дифференциал*

$$d_r^{p-r,q+r-1}: \Pi_r^{p-r,q+r-1} \rightarrow \Pi_r^{p,q}$$

равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из того, что отображение $T_p^*: \Pi_2^{0,q} \rightarrow \Pi_2^{p,q}$ совпадает с проекцией

$$H^q(X, \mathbb{F}_2)^G \rightarrow H^q(X, \mathbb{F}_2)^G / (1 + g^*)H^q(X, \mathbb{F}_2).$$

Для доказательства второго утверждения рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_r^{p,q} & \longrightarrow & \Pi_r^{0,q} & \xrightarrow{T_p^*} & \Pi_r^{p,q} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow d_r^{0,q} & & \downarrow d_r^{p,q} & & \\ & & & & \Pi_r^{r,q-r+1} & \xrightarrow[\sim]{T_p^*} & \Pi_r^{p+r,q-r+1} & & \end{array}$$

в которой верхняя строка точная, а нижний гомоморфизм является изоморфизмом. Из этой диаграммы получается точная последовательность

$$0 \longrightarrow K_r^{p,q} \longrightarrow \text{Ker } d_r^{0,q} \xrightarrow{T_p^*} \text{Ker } d_r^{p,q} \longrightarrow 0. \quad (1.6)$$

Осталось заметить, что

$$\text{Ker } d_r^{0,q} = \Pi_{r+1}^{0,q}, \quad \text{Ker } d_r^{p,q} / \text{Im } d_r^{p-r,q+r-1} = \Pi_{r+1}^{p,q},$$

а гомоморфизм $T_p^*: \Pi_{r+1}^{0,q} \rightarrow \Pi_{r+1}^{p,q}$ равен композиции гомоморфизма T_p^* в последовательности (1.6) с проекцией

$$\text{Ker } d_r^{p,q} \longrightarrow \text{Ker } d_r^{p,q} / \text{Im } d_r^{p-r,q+r-1}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $F^k H^m(X; G, \mathbb{F}_2)$ образ гомоморфизма

$$T_{m-k}^*: H^k(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^m(X; G, \mathbb{F}_2);$$

тогда получим возрастающую фильтрацию

$$F^0 H^m(X; G, \mathbb{F}_2) \subset F^1 H^m(X; G, \mathbb{F}_2) \subset \dots \subset F^m H^m(X; G, \mathbb{F}_2) = H^m(X; G, \mathbb{F}_2).$$

Эта фильтрация индуцируется второй спектральной последовательностью бикомплекса (1.2).

§ 2. Гомоморфизм ограничения для эквивариантных когомологий

Множество неподвижных точек инволюции $g: X \rightarrow X$ обозначим через Z ; будем предполагать, что Z – подкомплекс X . Тогда имеем равенства

$$H^m(Z; G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q=0}^m H^q(Z, \mathbb{F}_2) = H^{\leq m}(Z, \mathbb{F}_2),$$

а гомоморфизм сдвига

$$T_k^*: H^m(Z; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{m+k}(Z; G, \mathbb{F}_2)$$

является каноническим вложением прямой суммы в прямую сумму. Рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^k(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(Z; G, \mathbb{F}_2) = H^{\leq k}(Z, \mathbb{F}_2) \subset H^*(Z, \mathbb{F}_2);$$

образ его обозначим через $\mathcal{F}^k$. Тогда получим возрастающую фильтрацию

$$\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}^1 \subset \dots \subset \mathcal{F}^{n-1} \subset \mathcal{F}^n = H^*(Z, \mathbb{F}_2). \quad (2.1)$$

Эта фильтрация получается из спектральной последовательности, которую мы сейчас опишем. При $p + q > n$ группа $\Pi_r^{p,q}$ не зависит от p ; обозначим ее через H_r^q . Дифференциал

$$d_r^{p,q}: \Pi_r^{p,q} \rightarrow \Pi_r^{p+r, q-r+1}$$

также не зависит от p при $p + q > n$; обозначим его через d_r^q . Тогда получим спектральную последовательность (H_r^q, d_r^q) , которая сходится к группе $H^N(X; G, \mathbb{F}_2)$, где $N > n$. Гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^N(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^N(Z; G, \mathbb{F}_2) = H^*(Z, \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом при $N > n$ (см. [1]), поэтому можно считать, что спектральная последовательность (H_r^q, d_r^q) сходится к группе $H^*(Z, \mathbb{F}_2)$. Эта спектральная последовательность в работе [7] названа *спектральной последовательностью Калинина*, так как И. О. Калинин заметил в [4], что удобно вместо всей второй спектральной последовательности $\Pi_r^{p,q}$ рассматривать полученную предельную спектральную последовательность H_r^q . Фильтрация (2.1) получается из этой спектральной последовательности.

При $p + q > n$ пространство $K_r^{p,q}$ также не зависит от p ; будем обозначать его через K_r^q . Тогда имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow K_r^q \rightarrow \Pi_r^{0,q} \rightarrow H_r^q \rightarrow 0,$$

а из леммы 1.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Имеют место утверждения:*

- (i) *выполняется равенство $K_2^q = (1 + g^*)H^q(X; \mathbb{F}_2)$;*

(ii) при $r \geq 2$ выполняется включение $K_r^q \subset K_{r+1}^q$, которое будет равенством тогда и только тогда, когда дифференциал

$$d_r^{q+r-1}: H_r^{q+r-1} \rightarrow H_r^q$$

равен нулю.

Наша ближайшая задача – вычислить группу K_∞^q . Для формулировки соответствующего утверждения введем обозначения. Пусть $Y = X/G$, $f: X \rightarrow Y$ – проекция, композицию гомоморфизмов

$$H^q(Y, Z; \mathbb{F}_2) \longrightarrow H^q(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{f^*} H^q(X, \mathbb{F}_2)$$

будем обозначать также через f^* . Тогда имеет место

$$\text{ЛЕММА 2.2. Выполняется равенство } K_\infty^q = f^* H^q(Y, Z; \mathbb{F}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность эквивариантных когомологий пары (X, Z) :

$$\cdots \longrightarrow H^q(X, Z; G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta} H^q(Z; G, \mathbb{F}_2) \longrightarrow \cdots$$

Из первой спектральной последовательности эквивариантных когомологий

$$I_2^{p,q} = H^p(Y, Z; \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X, Z; G, \mathbb{F}_2)$$

вытекает, что краевой гомоморфизм $H^q(Y, Z; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X, Z; G, \mathbb{F}_2)$ является изоморфизмом. Поэтому верхнюю точную последовательность можно переписать следующим образом:

$$\cdots \longrightarrow H^q(Y, Z; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta} H^q(Z; G, \mathbb{F}_2) \longrightarrow \cdots \quad (2.2)$$

Так как $\beta(H^q(X; G, \mathbb{F}_2)) = \mathcal{F}^q$, то из точной последовательности (2.2) получаем короткую точную последовательность

$$H^q(Y, Z; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}^q \longrightarrow 0. \quad (2.3)$$

Заметим, что композиция гомоморфизмов

$$H^q(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} \Pi_\infty^{0,q} \subset H^q(X, \mathbb{F}_2)$$

совпадает с гомоморфизмом f^* , так как композиция краевых гомоморфизмов

$$H^q(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} H^q(X, \mathbb{F}_2)$$

равна гомоморфизму f^* (см. [12]). Тогда из точной последовательности (2.3) и равенств

$$\begin{aligned} \beta(F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{F}_2)) &= \mathcal{F}^{q-1}, \\ H^q(X; G, \mathbb{F}_2)/F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{F}_2) &= \Pi_\infty^{0,q}, \\ \mathcal{F}^q/\mathcal{F}^{q-1} &= H_\infty^q \end{aligned}$$

выводится следующая точная последовательность:

$$H^q(Y, Z; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{f^*} \Pi_\infty^{0,q} \longrightarrow H_\infty^q \longrightarrow 0.$$

Осталось сравнить ее с точной последовательностью

$$0 \longrightarrow K_\infty^q \longrightarrow \Pi_\infty^{0,q} \longrightarrow H_\infty^q \longrightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Отметим наконец, что из следствия 2.1 и леммы 2.2 вытекает

ТЕОРЕМА 2.3. *Справедливы утверждения:*

(i) *при каждом q имеет место включение*

$$(1 + g^*)H^q(X, \mathbb{F}_2) \subset f^*H^q(Y, Z; \mathbb{F}_2); \quad (2.4)$$

(ii) *при фиксированном q включение (2.4) будет равенством тогда и только тогда, когда равны нулю дифференциалы d_r^{q+r-1} при $r \geq 2$.*

§ 3. Различные определения ГМ-пространства

Оказывается, что справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. *Следующие условия на (X, g) эквивалентны:*

1) *выполняется равенство*

$$\dim H^*(Z, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(G, H^*(X, \mathbb{F}_2));$$

2) *спектральная последовательность (H_r^q, d_r^q) вырождается при $r \geq 2$;*

3) *спектральная последовательность $\Pi_r^{p,q}$ вырождается при $r \geq 2$;*

4) *при каждом q имеет место равенство*

$$(1 + g^*)H^q(X, \mathbb{F}_2) = f^*H^q(Y, Z; \mathbb{F}_2);$$

5) *при каждом q имеет место равенство*

$$(1 + g^*)H^q(X, \mathbb{F}_2) = \alpha \left(\text{Ker} [\beta: H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(Z; G, \mathbb{F}_2)] \right);$$

6) *при каждом q, k гомоморфизм*

$$T_k^*: F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q+k}(X; G, \mathbb{F}_2)$$

мономорфен;

7) *при каждом q гомоморфизм*

$$\beta: F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(Z; G, \mathbb{F}_2)$$

мономорфен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий 1), 2) следует из равенств

$$H_2^q = H^1(G, H^q(X, \mathbb{F}_2)),$$

$$\dim H^*(Z, \mathbb{F}_2) = \sum_{q=0}^n \dim H_\infty^q.$$

Так как $d_r^q = d_r^{p,q}$ при $p+q > n$, то из условия 2) следует условие 3), а из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Pi_r^{p,q} & \xrightarrow{T_N^*} & \Pi_r^{p+N,q} \\ \downarrow d_r^{p,q} & & \downarrow d_r^{p+N,q} \\ \Pi_r^{p+r,q-r+1} & \xrightarrow{T_N^*} & \Pi_r^{p+N+r,q-r+1} \end{array}$$

где $N > n$, и леммы 1.1 следует обратное утверждение. Условие 2) эквивалентно условию 4) в силу теоремы 2.3. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^q(Y; Z; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{i^*} & H^q(X; G; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta} & H^q(Z; G; \mathbb{F}_2) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow \alpha & & \\ & & H^q(X; \mathbb{F}_2) & & & & \end{array}$$

в которой верхняя строка точная, получаем равенство $\alpha(\text{Ker } \beta) = f^* H^q(Y; Z; \mathbb{F}_2)$, поэтому условия 4), 5) эквивалентны.

Докажем теперь эквивалентность условий 6), 7). Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F^{q-1} H^q(X; G; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{T_k^*} & H^{q+k}(X; G; \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ H^q(Z; G; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{T_k^*} & H^{q+k}(Z; G; \mathbb{F}_2) \end{array}$$

Нижний гомоморфизм в ней всегда является вложением, а правый гомоморфизм будет мономорфизмом при $q + k > n$, поэтому из условия 6) следует условие 7), а при $q + k > n$ верно и обратное. Так как

$$T_k = \underbrace{T_1 \circ \cdots \circ T_1}_{k \text{ раз}},$$

то из выполнения условия 6) при $k \gg 1$ вытекает выполнение его при любом k . Итак, эквивалентность условий 6), 7) доказана.

Покажем теперь, что из условия 3) следует условие 6). Так как гомоморфизм

$$T_k^* : \Pi_r^{s, q-s} \rightarrow \Pi_r^{s+k, q-s}$$

при $s > 0$, $r = 2$ всегда является изоморфизмом, то при выполнении условия 3) он будет изоморфизмом при $s > 0$, $r > 2$. Следовательно, гомоморфизм

$$T_k^* : \Pi_\infty^{s, q-s} \rightarrow \Pi_\infty^{s+k, q-s}$$

является изоморфизмом при $s > 0$, поэтому гомоморфизм

$$T_k^* : F^{q-1} H^q(X; G; \mathbb{F}_2) \rightarrow F^{q-1} H^{q+k}(X; G; \mathbb{F}_2)$$

будет изоморфизмом, т.е. выполняется условие 6).

Чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно показать, что из условия 6) следует условие 3). Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^q(X; G; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\alpha} & H^q(X; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\delta} & H^q(X; G; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{T_1^*} H^{q+1}(X; G; \mathbb{F}_2) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 1+g^* & & \downarrow \alpha & & \\ & & H^q(X; \mathbb{F}_2) & & & & \end{array} \quad (3.1)$$

в которой верхняя строка – это точная последовательность (1.4), а равенство $\alpha \circ \delta = 1 + g^*$ вытекает из определения гомоморфизма α , δ в ней. Так как

$$\text{Ker}[\alpha: H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X, \mathbb{F}_2)] = F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{F}_2),$$

то из диаграммы (3.1) и условия 6) следует, что

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}[\delta: H^q(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X; G, \mathbb{F}_2)] &= \dim(1 + g^*)H^q(X, \mathbb{F}_2) \\ &= \dim H^q(X, \mathbb{F}_2) - \dim H^q(X, \mathbb{F}_2)^G. \end{aligned}$$

Следовательно, гомоморфизм

$$\alpha: H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X, \mathbb{F}_2)^G$$

является эпиморфизмом. А это означает, что дифференциалы $d_r^{0,q}$ равны нулю при $r \geq 2$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Pi_r^{0,q} & \xrightarrow{T_p^*} & \Pi_r^{p,q} \\ \downarrow d_r^{0,q} & & \downarrow d_r^{p,q} \\ \Pi_r^{r,q-r+1} & \xrightarrow[\sim]{T_p^*} & \Pi_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

тогда получаем, что все дифференциалы $d_r^{p,q}$ равны нулю при $r \geq 2$, следовательно, выполняется условие 3). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Некоторые утверждения теоремы 3.1 доказаны раньше, в работах [1], [2]. Пространство (X, g) , удовлетворяющее условию 1), называется *ГМ-пространством*; таким образом теорема 3.1 дает семь определений ГМ-пространства.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть комплекс X является связным комплексом Пуанкаре; тогда (X, g) является ГМ-пространством, если и только если $Z \neq \emptyset$ и условие 4) в теореме 3.1 выполняется при $0 < q < n/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что выполнение условия 4) при $0 < q < n/2$ влечет выполнение условия 2). Из связности X и требования $Z \neq \emptyset$ следует, что условие 4) выполняется и при $q = 0$. Заметим теперь, что спаривание

$$H^q(X, \mathbb{F}_2) \times H^{n-q}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbb{F}_2$$

индуцирует невырожденное спаривание

$$H_r^q \times H_r^{n-q} \rightarrow \mathbb{F}_2 \quad (3.2)$$

при каждом $r \geq 2$ (см. [4]). Согласно теореме 2.3 выполнение условия 4) при $q < n/2$ влечет равенство $H_\infty^q = H_2^q$ при $q < n/2$. Из невырожденности спаривания (3.2) получаем равенство $H_\infty^{n-q} = H_2^{n-q}$ при $q < n/2$. Если теперь n нечетное, то при всех q имеем равенство $H_\infty^q = H_2^q$, т.е. спектральная последовательность (H_r^q, d_r^q) вырождается. Если n четное, то из равенств $H_\infty^q = H_2^q$ при $q \neq n/2$ следует равенство $H_\infty^{n/2} = H_2^{n/2}$. Теорема доказана.

§ 4. Специальные многообразия

В этом параграфе мы будем рассматривать неособое вещественное алгебраическое многообразие X , для которого отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: A^{<n/2}(X) \rightarrow H^{<n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

эпиморфно, где $n = \dim X$. Такое многообразие будем называть *специальным*.

ЛЕММА 4.1. Пусть X – специальное многообразие, $2q < n$; тогда выполняется равенство

$$H^{2q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \text{cl}(A^q(X)) + T_2^*(\text{cl}(A^{q-1}(X))) + \dots + T_{2q}^*(\text{cl}(A^0(X))), \quad (4.1)$$

где

$$\text{cl}: A^k(X) \rightarrow H^{2k}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

– эквивариантное отображение цикла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение cl определено в [8]. Мы будем проверять равенство (4.1) индукцией по q . При $q = 0$ оно очевидно. Пусть равенство (4.1) выполняется при $q = k$; покажем, что тогда оно выполняется при $q = k + 1$, при условии, что $k + 1 < n/2$. Из равенства (4.1) при $q = k$ следует равенство

$$F^{2k} H^{2k+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = T_2^*(\text{cl}(A^k(X))) + \dots + T_{2k+2}^*(\text{cl}(A^0(X))). \quad (4.2)$$

Так как для специального многообразия

$$F^{2k} H^{2k+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = F^{2k+1} H^{2k+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

то из равенства (4.2) следует, что достаточно проверить равенство образов гомоморфизмов:

$$\begin{aligned} \alpha: H^{2k+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^{2k+2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \\ \text{cl}_{\mathbb{C}}: A^{k+1}(X) &\rightarrow H^{2k+2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

Но из определения специального отображения следует, что второй гомоморфизм эпиморфен, а тогда и первый гомоморфизм эпиморфен, так как имеем равенство $\alpha \circ \text{cl} = \text{cl}_{\mathbb{C}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть X – специальное многообразие, $2q < n$, $Z \in A^q(X)$, $\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = 0$; тогда $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = 0$.

Доказательство этой леммы мы опускаем, так как оно следует из [13, теорема 4.4].

Из леммы 4.2 следует, что для специального многообразия при $2q < n$ корректно определен гомоморфизм

$$\gamma: H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \quad (4.3)$$

следующим правилом: если $z = \text{cl}_{\mathbb{C}}(Z)$, то $\gamma(z) = \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z)$, где $Z \in A^q(X)$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть X – специальное многообразие; тогда X является ГМ-многообразием, если и только если гомоморфизм (4.3) мономорфен при $2q < \dim X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что в [13] доказано равенство

$$\beta \circ \text{cl} = \text{Sq} \circ \text{cl}_{\mathbb{R}}, \quad (4.4)$$

где Sq – полный квадрат Стиррода. Так как

$$\mathcal{F}^{2q} = \beta(H^{2q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)),$$

то из леммы 4.1 и равенства (4.4) получаем, что при $2q < n$

$$\mathcal{F}^{2q} = \text{Sq}\left(\text{Im}[\gamma: H^{\leq 2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{\leq q}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)]\right).$$

Из этого равенства следует равенство для размерностей

$$\dim \mathcal{F}^{2q} = \sum_{k=0}^q \dim \text{Im}[\gamma: H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)]. \quad (4.5)$$

Пусть теперь X – ГМ-многообразие; тогда по условию 7) теоремы 3.1 гомоморфизм

$$\beta: F^{2q}H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathcal{F}^{2q}$$

является мономорфизмом, поэтому выполняются равенства

$$\dim \mathcal{F}^{2q} = \dim F^{2q}H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \sum_{k=0}^q \dim H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2). \quad (4.6)$$

Второе из них имеет место в силу того, что X – специальное ГМ-многообразие. Тогда из равенств (4.5), (4.6) следует, что гомоморфизм (4.3) мономорфен при $2q < n$. Наоборот, если гомоморфизм (4.3) мономорфен при $2q < n$, то из равенства (4.5) следуют равенства (4.6). Следовательно, выполняются равенства $H_{\infty}^k = H_2^k$ при $k < n$. Так как спаривание

$$H_r^k \times H_r^{2n-k} \rightarrow \mathbb{F}_2$$

невыврожденное, то получаем еще равенства $H_{\infty}^k = H_2^k$ при $k > n$. Осталось заметить, что из равенств $H_{\infty}^k = H_2^k$ при $k \neq n$ следует равенство $H_{\infty}^n = H_2^n$, т.е. спектральная последовательность (H_r^k, d_r^k) вырождается, а поэтому X является ГМ-многообразием. Теорема доказана.

Примером специального многообразия служит многообразие с клеточным разложением. Напомним, что неособое проективное вещественное алгебраическое многообразие X обладает клеточным разложением, если существует фильтрация $X = X_m \supset X_{m-1} \supset \dots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$ замкнутыми подсхемами такими, что каждая разность $X_i \setminus X_{i-1}$ представляет собой объединение схем U_{ij} , изоморфных

аффинным пространствам $\mathbb{A}^{n_{ij}}$. Если V_{ij} – замыкание U_{ij} , то классы $[V_{ij}]$ дают базис $A^*(X)$, причем гомоморфизм

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом, откуда следует, что X – специальное многообразие. Например, многообразие Грассмана обладает клеточным разложением. Отметим еще, что пересечение специального многообразия общей гиперповерхностью также является специальным многообразием. В частности, неособое полное пересечение будет специальным многообразием, для него теорема 4.3 формулируется следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Если X – n -мерное неособое полное пересечение, $\xi \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – класс когомологий, определенный гиперплоским сечением, то X является ГМ-многообразием тогда и только тогда, когда $\xi^p \neq 0$, где*

$$p = \begin{cases} (n-1)/2, & n \text{ нечетное,} \\ (n-2)/2, & n \text{ четное.} \end{cases}$$

Аналогичное утверждение справедливо для двухлистного разветвленного накрытия полного пересечения $\pi: W \rightarrow X$, где роль ξ играет класс когомологий $\pi^*(\xi) \in H^1(W(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$.

§ 5. Вещественные алгебраические поверхности

В этом параграфе X – неособая проективная вещественная алгебраическая поверхность, причем $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Прежде всего отметим, что теорема 3.3 для поверхности X формулируется следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Поверхность X является ГМ-поверхностью тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(1 + g^*)H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2),$$

где $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения, $Y = X(\mathbb{C})/G$, $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ – проекция.

Мы хотим геометрически описать группу $f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$. Заметим, что она содержится в группе $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$. Группа $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ классифицирует расслоения на $X(\mathbb{C})$ со слоем $\mathbb{F}_2$, т.е. неразветвленные двухлистные накрытия $X(\mathbb{C})$. Если $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, то через $\pi: W_\theta \rightarrow X(\mathbb{C})$ будем обозначать соответствующее двухлистное накрытие. Мы предполагаем, что элемент θ ненулевой, тогда соответствующее накрытие нетривиально. Возникает вопрос: когда вещественная структура $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ поднимается до вещественной структуры на W_θ ?

ЛЕММА 5.2. *Вещественная структура $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ поднимается до вещественной структуры на W_θ тогда и только тогда, когда $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вещественные двухлистные накрытия $W \rightarrow X$ классифицируются группой $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, поэтому утверждение леммы следует из точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \longrightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \longrightarrow 0, \quad (5.1)$$

состоящей из краевых гомоморфизмов второй спектральной последовательности эквивариантных когомологий. Лемма доказана.

Пусть $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$; тогда на W_θ существуют две вещественные структуры:

$$g^{(1)}, g^{(2)}: W_\theta \rightarrow W_\theta,$$

накрывающие вещественную структуру $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Если $\tau: W_\theta \rightarrow W_\theta$ – инволюция накрытия, то $g^{(2)} = \tau \circ g^{(1)}$. Положим

$$X(\mathbb{R})_\theta^{(i)} = \pi(W_\theta^{g^{(i)}});$$

тогда множества $X(\mathbb{R})_\theta^{(1)}, X(\mathbb{R})_\theta^{(2)}$ состоят из целых компонент связности множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$ и $X(\mathbb{R})_\theta^{(1)} \cap X(\mathbb{R})_\theta^{(2)} = \emptyset$, $X(\mathbb{R})_\theta^{(1)} \cup X(\mathbb{R})_\theta^{(2)} = X(\mathbb{R})$. Нам потребуется еще одно определение этого разбиения множества $X(\mathbb{R})$ на части $X(\mathbb{R})_\theta^{(1)}, X(\mathbb{R})_\theta^{(2)}$. Для этого рассмотрим следующую точную последовательность, получающуюся из первой спектральной последовательности эквивариантных когомологий (см. [12], [3]):

$$0 \longrightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_1} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{j^*} H^2(Y, \mathbb{F}_2), \quad (5.2)$$

гомоморфизмы i^* , β_1 – это краевые гомоморфизмы спектральной последовательности, причем β_1 равен композиции гомоморфизма ограничения

$$\beta: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

и проекции

$$H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Гомоморфизм j^* является гомоморфизмом Гизина.

Пусть $\theta^{(i)} \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ – классы когомологий, соответствующие накрытиям $(W_\theta, g^{(i)})$, $i = 1, 2$. Тогда справедлива

ЛЕММА 5.3. *Выполняются равенства*

$$\beta_1(\theta^{(1)}) = (X(\mathbb{R})_\theta^{(2)}), \quad \beta_1(\theta^{(2)}) = (X(\mathbb{R})_\theta^{(1)}),$$

где $(X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}) \in H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – классы когомологий, соответствующие частям $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}$ множества $X(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что из точной последовательности (5.1) следует, что $\theta^{(1)} + \theta^{(2)} \in H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, так как $\alpha(\theta^{(i)}) = \theta$. Поэтому выполняется равенство

$$\beta_1(\theta^{(1)} + \theta^{(2)}) = (X_1) + \dots + (X_s), \quad (5.3)$$

где $X_1, \dots, X_s$ – компоненты $X(\mathbb{R})$, это следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2). \end{array}$$

Обозначим через $G^{(i)}$ группу второго порядка $\{1, g^{(i)}\}$, действующую на W_θ ; тогда определен гомоморфизм

$$\pi^*: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(W_\theta; G^{(i)}, \mathbb{F}_2),$$

ядро которого порождается элементом $\theta^{(i)}$. Это следует из эквивариантной точной последовательности Гизина накрытия

$$0 \longrightarrow H^0(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup \theta^{(i)}} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(W_\theta; G^{(i)}, \mathbb{F}_2) \longrightarrow \dots,$$

которая устанавливается так же, как обычная точная последовательность Гизина.

Итак, $\pi^*(\theta^{(i)}) = 0$, поэтому

$$\beta_1(\pi^*(\theta^{(i)})) = \pi^*(\beta_1(\theta^{(i)})) = 0.$$

Равенство $\pi^*(\beta_1(\theta^{(1)})) = 0$ означает, что если $\beta_1(\theta^{(1)}) = (X_{i_1}) + \dots + (X_{i_k})$, то компоненты $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ содержатся в $X(\mathbb{R})_\theta^{(2)}$. Аналогично, равенство $\pi^*(\beta_1(\theta^{(2)})) = 0$ означает, что если $\beta_1(\theta^{(2)}) = (X_{j_1}) + \dots + (X_{j_l})$, то компоненты $X_{j_1}, \dots, X_{j_l}$ содержатся в $X(\mathbb{R})_\theta^{(1)}$. Применим теперь равенство (5.3); тогда получим равенства

$$X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_k} = X(\mathbb{R})_\theta^{(2)}, \quad X_{j_1} \cup \dots \cup X_{j_l} = X(\mathbb{R})_\theta^{(1)}.$$

Лемма доказана.

Ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ будем называть *неразделяющим* $X(\mathbb{R})$ на части, если одно из множеств $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}$, $i = 1, 2$, пустое. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 5.4. *Ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ принадлежит подгруппе $f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$ тогда и только тогда, когда он не разделяет $X(\mathbb{R})$ на части и ограничение его на $X(\mathbb{R})$ равно нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что $\theta \in f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$ тогда и только тогда, когда $\theta \in f^*H^1(Y, \mathbb{F}_2)$ и $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$. Следовательно, достаточно доказать, что $\theta \in f^*H^1(Y, \mathbb{F}_2)$ тогда и только тогда, когда θ не разделяет $X(\mathbb{R})$ на части. Для доказательства этого утверждения заметим, что гомоморфизм

$$f^*: H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

разлагается в композицию гомоморфизмов

$$H^1(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Применим еще точную последовательность (5.2); тогда получим, что $\theta \in f^*H^1(Y, \mathbb{F}_2)$ тогда и только тогда, когда $\theta \in \alpha(\text{Ker } \beta_1)$, т.е. когда один из элементов $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ принадлежит $\text{Ker } \beta_1$. Осталось применить лемму 5.3. Теорема доказана.

Отметим еще, что из леммы 5.3 и точной последовательности (5.2) следует, что классы гомологий $[X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}]$, $i = 1, 2$, равны нулю в $H_2(Y, \mathbb{F}_2)$, так как j^* – гомоморфизм Гизина. Для приложений полезно следующее

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Если поверхность X такая, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, и инволюция*

$$g^*: H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

тривиальна, то X не является GM-поверхностью тогда и только тогда, когда существует ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, который не разделяет $X(\mathbb{R})$ на части, и ограничение его на $X(\mathbb{R})$ равно нулю.

Для поверхности с $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ это утверждение доказано раньше в [7]. Чтобы сформулировать следующие утверждения, обозначим через $y_1, \dots, y_s \in H^2(Y, \mathbb{F}_2)$ классы когомологий, которые определяют компоненты $X_1, \dots, X_s$, рассматриваемые вложенными в Y .

ЛЕММА 5.6. *Ядро гомоморфизма*

$$f^*: H^2(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \tag{5.4}$$

порождается элементами $y_1, \dots, y_s$ тогда и только тогда, когда гомоморфизм ограничения

$$\beta: F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

является мономорфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точная последовательность (5.2) продолжается до следующей точной последовательности (см. [6]):

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2) &\xrightarrow{i^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_1} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{j^*} H^2(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_2} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где β_2 – композиция гомоморфизма ограничения

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

и проекции

$$H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q=0}^2 H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \bigoplus_{q=0}^1 H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Из точной последовательности (5.5) следует, что ядро краевого гомоморфизма

$$i^*: H^2(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

порождается элементами $y_1, \dots, y_s$. Так как гомоморфизм (5.4) разлагается в композицию краевых гомоморфизмов

$$H^2(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

то его ядро порождается элементами $y_1, \dots, y_s$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$i^*(H^2(Y, \mathbb{F}_2)) \cap \text{Ker } \alpha = 0. \quad (5.6)$$

Так как $\text{Ker } \alpha = F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, то соотношение (5.6) можно переписать следующим образом:

$$i^*(H^2(Y, \mathbb{F}_2)) \cap F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = 0.$$

Осталось заметить, что гомоморфизмы β, β_2 на группе $F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ совпадают, и применить точную последовательность (5.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.7. *X является ГМ-поверхностью тогда и только тогда, когда гомоморфизм ограничения*

$$\beta: F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

является мономорфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X – GM-поверхность, то β будет мономорфизмом по теореме 3.1, поэтому нужно доказывать только обратное утверждение. Для этого рассмотрим отображение

$$\beta: F^k H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathcal{F}^k \quad (5.7)$$

при $k = 0, 1$. Так как дифференциалы $d_r^{p, r-1}$ равны нулю при $r \geq 2$ (см. [1]), то отображение (5.7) при $k = 0$ всегда является изоморфизмом. При $k = 1$ отображение (5.7) всегда является эпиморфизмом, поэтому благодаря условию леммы оно также будет изоморфизмом. Итак, отображение (5.7) при $k = 0, 1$ – изоморфизм, следовательно, отображение $\beta: \Pi_\infty^{1,1} \rightarrow H_\infty^1$ – изоморфизм. Так как $\Pi_\infty^{1,1} = \Pi_2^{1,1}$, то из этого утверждения следует равенство $H_\infty^1 = H_2^1$.

Покажем теперь, что выполняется равенство $H_\infty^k = H_2^k$ при $k = 0, 1, 2, 3, 4$. При $k = 0$ это равенство всегда выполняется, если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, так как дифференциалы $d_r^{p, r-1}$ равны нулю. При $k = 1$ это равенство было доказано выше. Благодаря двойственности Пуанкаре оно верно при $k = 3, 4$. Осталось заметить, что из равенства $H_\infty^k = H_2^k$ при $k \neq 2$ следует равенство $H_\infty^2 = H_2^2$. Лемма доказана.

Из двух последних лемм вытекает

ТЕОРЕМА 5.8. *Поверхность X является GM-поверхностью тогда и только тогда, когда ядро гомоморфизма*

$$f^*: H^2(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

порождается элементами $y_1, \dots, y_s$.

§ 6. Отображения эквивариантного цикла

В этом параграфе X – n -мерное компактное дифференцируемое многообразие с инволюцией $g: X \rightarrow X$. Будем предполагать, что инволюция g дифференцируемая и что каждая компонента связности множества неподвижных точек Z является дифференцируемым подмногообразием размерности m . В окрестности каждой точки $x \in Z$ существуют координаты $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_l$ ($m + l = n$) такие, что уравнения $v_1 = 0, \dots, v_l = 0$ задают Z и

$$g(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_l) = (u_1, \dots, u_m, -v_1, \dots, -v_l).$$

Будем предполагать, что задана триангуляция X , инвариантная относительно инволюции g . Пусть C – эквивариантная цепь коразмерности k , т.е. C представляет собой сумму $(n - k)$ -мерных симплексов такую, что $g(C) = C$. Тогда C определяет эквивариантную коцепь C^* для двойственного клеточного разбиения, причем она будет коциклом, если C – цикл. Этот коцикл определяет классы когомологий

$$[C]^* \in H^k(X, \mathbb{F}_2), \quad [C, g]^* \in H^k(X; G, \mathbb{F}_2)$$

такие, что $\alpha([C, g]^*) = [C]^*$. Первый класс очевиден, а для определения второго класса нужно использовать формулу (1.3) из § 1. Главная задача этого параграфа – вычислить образ класса $[C, g]^*$ при гомоморфизме ограничения

$$\beta: H^k(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(Z; G, \mathbb{F}_2).$$

Мы будем решать эту задачу в случае, когда C является дифференцируемым подмногообразием, расположенным в X специальным образом. Но сначала определим эквивариантный фундаментальный класс векторного расслоения с инволюцией.

Итак, пусть $E \rightarrow C$ — k -мерное вещественное векторное расслоение, где C — конечный связный симплициальный комплекс с инволюцией $g: C \rightarrow C$, которая действует также на E , причем действия g на C , E согласованы. Обозначим через E^* множество ненулевых векторов из E , а через $U \in H^k(E, E^*; \mathbb{F}_2)$ обозначим фундаментальный класс этого расслоения, т.е. U — такой класс когомологий, что при ограничении на каждый слой E_x он переходит в образующую группы $H^k(E_x, E_x^*; \mathbb{F}_2)$. Так как $H^q(E, E^*; \mathbb{F}_2) = 0$ при $q < k$, $H^k(E, E^*; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \cdot U$, то из спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(E, E^*; \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(E, E^*; G, \mathbb{F}_2)$$

следует, что гомоморфизм

$$\alpha: H^k(E, E^*; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(E, E^*; \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом. Положим

$$\mathbb{U} = \alpha^{-1}(U) \in H^k(E, E^*; G, \mathbb{F}_2)$$

и назовем этот класс *эквивариантным фундаментальным классом расслоения E* . Обозначим через $E_{\pm}$ множества векторов из E , на которых $g = \pm \text{id}$; они будут расслоениями над C^g , где через C^g обозначено множество неподвижных точек инволюции $g: C \rightarrow C$. Будем предполагать, что размерности слоев расслоений $E_{\pm}$ не зависят от компонент связности C^g ; пусть они равны $k_{\pm}$. Через $\mathbb{U}_{\pm}$ обозначим эквивариантные фундаментальные классы расслоений $E_{\pm}$, а через $U_{\pm}$ — обычные фундаментальные классы.

ЛЕММА 6.1. *При гомоморфизме ограничения*

$$\beta: H^k(E, E^*; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(E_+, E_+^*; G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q=0}^k H^q(E, E^*; \mathbb{F}_2) \quad (6.1)$$

класс $\mathbb{U}$ переходит в произведение $U_+ \cdot w(E_-)$, где $w(E_-)$ — полный класс Штифеля–Уитни, который рассматривается как элемент группы $H^*(E_+; \mathbb{F}_2) = H^*(C^g; \mathbb{F}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм (6.1) разлагается в композицию следующих гомоморфизмов ограничения:

$$H^k(E, E^*; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(E_+ \oplus E_-, (E_+ \oplus E_-)^*; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(E_+, E_+^*; G, \mathbb{F}_2).$$

При первом гомоморфизме ограничения класс $\mathbb{U}$ переходит в произведение $\mathbb{U}_+ \cdot \mathbb{U}_-$, которое понимается как произведение $(q_+^* \mathbb{U}_+) \cdot (q_-^* \mathbb{U}_-)$, где $q_{\pm}: E_+ \oplus E_- \rightarrow E_{\pm}$ — проекции. Эта мультипликативность эквивариантных фундаментальных классов следует из мультипликативности обычных фундаментальных классов.

Осталось показать, что при втором ограничении произведение $(q_+^* \mathbb{U}_+) \cdot (q_-^* \mathbb{U}_-)$ переходит в произведение $U_+ \cdot (p^* w(E_-))$, где $p: E_+ \rightarrow C^g$ – проекция, которая совпадает с ограничением проекции $q_-: E_+ \oplus E_- \rightarrow E_-$ на E_+ . Покажем сначала, что ограничение $q_+^* \mathbb{U}_+$ на E_+ равно U_+ . Действительно, так как $g|_{E_+} = \text{id}$, то

$$H^k(E_+, E_+^*; G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q=0}^{k_+} H^q(E_+, E_+^*; \mathbb{F}_2) = H^{k_+}(E_+, E_+^*; \mathbb{F}_2),$$

следовательно, $\mathbb{U}_+ = U_+$, поэтому ограничение $q_+^* \mathbb{U}_+$ на E_+ равно U_+ .

Покажем теперь, что ограничение $q_-^* \mathbb{U}_-$ на E_+ равно $p^* w(E_-)$. В работе [13] проверено, что ограничение $\mathbb{U}_-$ на C^g равно $w(E_-)$ (заметим, что в [14] классы Штифеля–Уитни определяются с помощью этого равенства), поэтому ограничение $q_-^* \mathbb{U}_-$ на E_+ равно $p^* w(E_-)$. Лемма доказана.

Далее C – дифференцируемое подмногообразие коразмерности k , расположенное в X таким образом, что в окрестности каждой точки $x \in C^g$ существуют координаты $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_l$ на X такие, что выполняются предыдущие требования на координаты и C задается уравнениями $u_1 = 0, \dots, u_r = 0, v_1 = 0, \dots, v_s = 0$ ($r + s = k$). Тогда множество C^g является подмногообразием C и подмногообразием Z . Пусть E_ε – трубчатая ε -окрестность C в X в некоторой g -инвариантной римановой метрике на X ; тогда определен фундаментальный класс $\mathbb{U} \in H^k(E_\varepsilon, E_\varepsilon^*; G, \mathbb{F}_2)$ расслоения $E_\varepsilon \rightarrow C$, здесь мы рассматриваем E_ε так же, как окрестность C в нормальном расслоении. Так как

$$H^k(E_\varepsilon, E_\varepsilon^*; G, \mathbb{F}_2) = H^k(X, X \setminus C; G, \mathbb{F}_2),$$

то $\mathbb{U}$ задает класс когомологий $[C, g]_0^* \in H^k(X, X \setminus C; G, \mathbb{F}_2)$, образ его в $H^k(X; G, \mathbb{F}_2)$ дает определенный ранее класс когомологий $[C, g]^*$. Это следует из того, что гомоморфизм

$$\alpha: H^k(X, X \setminus C; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(X, X \setminus C; \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом, если C – связное подмногообразие, поэтому обе конструкции приводят к одному и тому же классу когомологий $[C, g]_0^*$, так как должно выполняться равенство $\alpha([C, g]_0^*) = [C]_0^*$, где $[C]_0^*$ – образующая группы $H^k(X, X \setminus C; \mathbb{F}_2)$.

Далее через $N_{C^g} X$, $N_{C^g} Z$, $N_{C^g} C$ обозначим нормальные расслоения к C^g в X , Z , C соответственно, а через ν_{C^g} – факторрасслоение

$$N_{C^g} X / N_{C^g} Z \oplus N_{C^g} C.$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 6.2. *Выполняется равенство*

$$\beta([C, g]^*) = (i_*(w_*(\nu_{C^g})))^*, \quad (6.2)$$

где $w_*(\nu_{C^g}) \in H_*(C^g, \mathbb{F}_2)$ – полный характеристический класс гомологий Штифеля–Уитни расслоения ν_{C^g} , $i: C^g \rightarrow Z$ – отображение вложения, а $(i_*(w_*(\nu_{C^g})))^*$ – двойственный класс когомологий к классу гомологий $i_*(w_*(\nu_{C^g}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – нормальное расслоение к C в X ; тогда $E_+ = N_{C^g}Z$, $E_- = \nu_{C^g}$, поэтому из леммы 6.1 следуют равенства

$$\beta([C, g]_0^*) = \beta(U) = U_+ \cdot w(E_-) = [C^g]_0^* \cdot w(\nu_{C^g}),$$

где класс $[C^g]_0^* \in H^r(Z, Z \setminus C^g; \mathbb{F}_2)$ получается из U_+ с помощью равенства

$$H^r(E_+, E_+^*; \mathbb{F}_2) = H^r(Z, Z \setminus C^g; \mathbb{F}_2).$$

Итак,

$$\beta([C, g]_0^*) = [C^g]_0^* \cdot w(\nu_{C^g}), \quad (6.3)$$

где произведение классов когомологий определяется с помощью продолжения $w(\nu_{C^g})$ на C^g в Z . Осталось заметить, что из равенства (6.3) следует равенство (6.2). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Имеет место разложение*

$$\beta([C, g]^*) = [C^g]^* + a^{r+1} + \dots + a^k,$$

где $[C^g]^* \in H^r(Z, \mathbb{F}_2)$ – класс когомологий, двойственный классу гомологий $[C^g]$, $a^q \in H^q(Z, \mathbb{F}_2)$, $q = r+1, \dots, k$.

ПРИМЕР 6.4. Пусть X – неособое вещественное проективное алгебраическое многообразие, $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения, $C \subset X$ – неособое подмногообразие коразмерности k . Тогда определены классы когомологий:

$$\begin{aligned} \text{cl}_{\mathbb{C}}(C) &= [C(\mathbb{C})]^* \in H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \\ \text{cl}_{\mathbb{R}}(C) &= [C(\mathbb{R})]^* \in H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \\ \text{cl}(C) &= [C(\mathbb{C}), g]^* \in H^{2k}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

Заметим, что если E – нормальное расслоение к $C(\mathbb{C})$ в $X(\mathbb{C})$, то расслоения E_+ , E_- изоморфны расслоению $N_{C(\mathbb{R})}X(\mathbb{R})$, поэтому

$$\beta([C(\mathbb{C}), g]_0^*) = [C(\mathbb{R})]_0^* \cdot w(N_{C(\mathbb{R})}X(\mathbb{R})),$$

но по теореме Тома выполняется равенство

$$[C(\mathbb{R})]_0^* \cdot w(N_{C(\mathbb{R})}X(\mathbb{R})) = \text{Sq}([C(\mathbb{R})]_0^*).$$

Следовательно, имеет место формула

$$\beta([C(\mathbb{C}), g]^*) = \text{Sq}([C(\mathbb{R})]^*). \quad (6.4)$$

В работе [13] приведено другое доказательство формулы (6.4), причем там проверена ее справедливость и для особых подмногообразий $C \subset X$. В этой работе также доказана

ТЕОРЕМА 6.5. *Пусть X – $2t$ -мерное специальное вещественное алгебраическое многообразие, $C \subset X$ – подмногообразие размерности t такое, что существует разложение $[C(\mathbb{C})]^* = d + g^*(d)$, где $d \in H^{2m}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Тогда $[C(\mathbb{R})]^* = 0$.*

§ 7. Сравнения эйлеровой характеристики двухлистного накрытия

В этом параграфе рассматривается двухлистное накрытие $\pi: W \rightarrow V$ с ветвлением $S \subset V$, где V – $2m$ -мерное неособое вещественное полное пересечение, S – пересечение V вещественной гиперповерхностью четной степени $2k$. Если $\tau: W(\mathbb{C}) \rightarrow W(\mathbb{C})$ – инволюция накрытия, то $g_- = g \circ \tau: W(\mathbb{C}) \rightarrow W(\mathbb{C})$ – вторая вещественная структура на $W(\mathbb{C})$. Множество вещественных точек для нее обозначим через $W_-(\mathbb{R})$, а через $V(\mathbb{R})_-$ обозначим образ множества $W_-(\mathbb{R})$ при отображении $\pi: W_-(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R})$. Из рассмотрения точной гомологической последовательности Смита накрытия $\pi: W(\mathbb{C}) \rightarrow V(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{n+1}(V(\mathbb{C}), S(\mathbb{C})) &\xrightarrow{\delta_*} H_n(V(\mathbb{C}), S(\mathbb{C})) \oplus H_n(S(\mathbb{C})) \\ &\xrightarrow{i_*} H_n(W(\mathbb{C})) \longrightarrow \cdots, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где группы гомологий с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$, вытекает

ЛЕММА 7.1. *Класс гомологий $[W_-(\mathbb{R})] \in H_n(W(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ равен нулю тогда и только тогда, когда равен нулю класс гомологий $[V(\mathbb{R})_-] \in H_n(V(\mathbb{C}), S(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$, $n = \dim V$.*

Покажем теперь, что справедлива

ЛЕММА 7.2. *Пусть W является ГМ-многообразием и $S(\mathbb{R})$ разбивает $W(\mathbb{R})$. Тогда существует разложение $[W_-(\mathbb{R})]^* = b + g^*(b)$, где $b \in H^n(W(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a = [W_-(\mathbb{R}), g]^* \in H^n(W(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, где $G = \{1, g\}$. Тогда по теореме 3.1 нам достаточно установить равенство нулю эквивариантного класса когомологий $\beta(a) \in H^n(W(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$. По формуле (6.3) класс когомологий $\beta(a)$ равен образу класса когомологий

$$[S(\mathbb{R})]_0^* \cdot w(N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{C})/N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{R}) \oplus N_{S(\mathbb{R})}W_-(\mathbb{R})) \quad (7.2)$$

при гомоморфизме

$$\bigoplus_{q=0}^n H^q(W(\mathbb{R}), W(\mathbb{R}) \setminus S(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow \bigoplus_{q=0}^n H^q(W(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad (7.3)$$

где $[S(\mathbb{R})]_0^* \in H^1(W(\mathbb{R}), W(\mathbb{R}) \setminus S(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$ – двойственный класс когомологий. Расслоение $N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{R})$ тривиально по условию леммы. Расслоение $N_{S(\mathbb{R})}W_-(\mathbb{R})$ получается из $N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{R})$ умножением на i , поэтому оно также тривиально. Следовательно,

$$w(N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{C})/N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{R}) \oplus N_{S(\mathbb{R})}W_-(\mathbb{R})) = w(N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{C})).$$

Так как

$$N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{C}) = (N_{W(\mathbb{R})}W(\mathbb{C}))|_{S(\mathbb{R})} \oplus N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{R}),$$

то

$$w(N_{S(\mathbb{R})}W(\mathbb{C})) = w(N_{W(\mathbb{R})}W(\mathbb{C}))|_{S(\mathbb{R})},$$

поэтому произведение (7.2) при гомоморфизме (7.3) переходит в произведение $[S(\mathbb{R})]^* \cdot w(N_{W(\mathbb{R})}W(\mathbb{C}))$, которое равно нулю в силу того, что $[S(\mathbb{R})]^* = 0$ по условию леммы. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Обозначим через $\xi_W \in H^1(W(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ класс когомологий, определенный прообразом гиперплоского сечения $V(\mathbb{R})$. Тогда W является ГМ-многообразием, если и только если $\xi_W^{m-1} \neq 0$. При нечетном k класс когомологий ξ_W совпадает с классом когомологий $[S(\mathbb{R})]^* \in H^1(W(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, поэтому условия леммы могут реализоваться только для поверхности. При четном k утверждение леммы очевидно из геометрических соображений, так как тогда $S(\mathbb{R})$ разбивает $W(\mathbb{R})$, $W_-(\mathbb{R})$ на части $W(\mathbb{R})^{(i)}$, $W_-(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, 2$, и выполняется равенство

$$[W_-(\mathbb{R})] = [W_-(\mathbb{R})^{(1)} + W(\mathbb{R})^{(1)}] + g_*[W_-(\mathbb{R})^{(1)} + W(\mathbb{R})^{(1)}].$$

Пусть $\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) = (-1)^{m+1}\chi(\mathbb{R})$, где $\chi(-)$ – эйлерова характеристика, $\tilde{\sigma}(W(\mathbb{C}))$ – сигнатура формы $\tilde{Q}(x, y) = x \cdot \tau^*(y)$ на $H^n(W(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть W является ГМ-многообразием, $S(\mathbb{R})$ разбивает $W(\mathbb{R})$, но класс гомологий $[S(\mathbb{R})]$ не равен нулю в $H_{n-1}(S(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Тогда имеют место утверждения:

(i) если W – $(M-1)$ -многообразие, то

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \equiv \pm 2 \pmod{8}, \quad \tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) \equiv \pm 2 \pmod{16},$$

причем знаки соответствуют друг другу;

(ii) если W – $(M-2)$ -многообразие и $\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \equiv \pm 2 \pmod{8}$, то

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) \equiv 0, \pm 4 \pmod{16},$$

причем знаки соответствуют друг другу;

(iii) если W – $(M-2)$ -многообразие и $\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{8}$, то

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) \equiv 0 \pmod{16};$$

(iv) если W – $(M-3)$ -многообразие и $\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{8}$, то

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) \equiv \pm 2 \pmod{16}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L = H^n(W(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, $L^\pm = \{x \in L \mid g^*(x) = \pm x\}$ и проверим сначала, что выполняется равенство

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) + \tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) = 2 \operatorname{sign}(\tilde{Q}|_{L-}). \quad (7.4)$$

Действительно, из равенства

$$\tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) = -\operatorname{sign} Q', \quad (7.5)$$

где $Q'(x, y) = Q(x, g_-^*(y)) = x \cdot g_-^*(y)$ (см. [15]), получаем равенства

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) &= -\operatorname{sign} Q' = -\operatorname{sign} Q(x, (\tau^* \circ g^*)(x)) \\ &= -\operatorname{sign}(\tilde{Q}|_{L+}) + \operatorname{sign}(\tilde{Q}|_{L-}) = -\tilde{\sigma}(W(\mathbb{C})) + 2 \operatorname{sign}(\tilde{Q}|_{L-}). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали инвариантность $L^\pm$ относительно τ^* , что следует из соотношения $\tau \circ g = g \circ \tau$. Из леммы 7.1 вытекает, что $[W_-(\mathbb{R})] \neq 0$. Из леммы 7.2 следует существование разложения

$$[W_-(\mathbb{R})]^* = b - g^*(b) \pmod{2},$$

где $b \in L$. Положим $h = b - g^*(b)$; тогда справедливо сравнение

$$\tilde{Q}(h, h) \equiv \tilde{\chi}(W_-(\mathbb{R})) \pmod{8}. \quad (7.6)$$

Для его проверки заметим, что имеет место цепочка равенств

$$\tilde{Q}(h, h) = Q(h, \tau^*(h)) = Q(h, g_-^*(g^*(h))) = -Q(h, g_-^*(h)) = -Q'(h, h).$$

С другой стороны,

$$Q'(h, h) \equiv \text{sign } Q' \pmod{8},$$

так как h – характеристический элемент формы Q' . Осталось применить равенство (7.4). Если W является $(M - d)$ -многообразием, то

$$\dim_{\mathbb{F}_2} L/L^+ \oplus L^- = d, \quad (7.7)$$

так как по условию W – ГМ-многообразие (см., например, [2]). Сравнения теоремы теперь следует из соотношений (7.4), (7.6), (7.7) и арифметической леммы о $\text{sign}(\tilde{Q}|_{L^-})$, примененной к четверке $(L, \tilde{Q}, g^*, h)$ (см., например, [2]). Теорема доказана.

Пусть теперь $V = P^n$; тогда S задается уравнением $F(v) = 0$, где $F(v) = F(v_0, \dots, v_n)$ – однородный многочлен с вещественными коэффициентами. Многообразие W задается уравнением $w^2 = F(v)$. Множество $V(\mathbb{R})_-$ задается неравенством $F(v) \leq 0$. Неравенство $F(v) \geq 0$ определяет множество $V(\mathbb{R})_+$, которое равно образу отображения $\pi: W(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R})$. Множество $W(\mathbb{R})$ также будем обозначать через $W_+(\mathbb{R})$. Через $l_\pm$ обозначим классы гомологий из $H_{n-1}(V(\mathbb{R})_\pm, S(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$, которые определяются гиперплоскостью в $P^n(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R})$; тогда один из классов гомологий l_+^m, l_-^m равен нулю, а другой нет. Этот факт вытекает из точной последовательности триады $(V(\mathbb{R})_+, V(\mathbb{R})_-, S(\mathbb{R}))$. Будем считать, что $l_-^m \neq 0$, заменив в противном случае F на $-F$; тогда справедлива

ТЕОРЕМА 7.5. *Пусть S является ГМ-многообразием и класс гомологий $[S(\mathbb{R})]$ равен нулю в $H_{n-1}(S(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Тогда имеют место утверждения:*

(i) *если хотя бы одно из чисел k, m четное, то*

$$\chi(P^n(\mathbb{R})_+) \equiv 0 \pmod{4};$$

(ii) *если оба числа k, m нечетные, то*

$$\chi(P^n(\mathbb{R})_+) \equiv 1 \pmod{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Классы когомологий $[W_{\pm}(\mathbb{R})]^* \in H^n(W(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ обозначим через $w_{\pm}$, а через $H \in H^2(W(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ обозначим класс когомологий, который получается из прообраза гиперплоскости в $P^n(\mathbb{C})$. Тогда всегда выполняется соотношение

$$w_+ + w_- = H^m. \quad (7.8)$$

Это соотношение следует из равенства

$$w_+ + w_- = \pi^*[P^n(\mathbb{R})]^*,$$

так как класс когомологий $[P^n(\mathbb{R})]^* \in H^n(P^n(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ является образующей. Рассмотрим теперь точную последовательность Смита (7.1); тогда из равенства (7.8) и равенства нулю класса гомотопий $[S(\mathbb{R})] \in H_{n-1}(S(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ следует, что один из классов w_+ , w_- равен нулю, а другой нет. Так как

$$2\chi(P^n(\mathbb{R})_{\pm}) = \chi(W_{\pm}(\mathbb{R})) = \text{sign } Q'_{\pm},$$

где $Q'_{\pm}(x, y) = x \cdot g_{\pm}^*(y)$, а класс $w_{\pm}$ является характеристическим элементом формы $Q'_{\pm}$, то достаточно установить, что в условиях первого утверждения $w_+ = 0$, а в условиях второго утверждения $w_- = 0$. Отметим еще, что в условиях первого утверждения класс By многообразия $W(\mathbb{C})$ равен H^m , а в условиях второго утверждения он равен нулю. Покажем сначала, что при k четном $w_+ = 0$.

Предположим противное, т.е. $w_- = 0$; тогда $H^m \cdot a = 0$ при каждом $a \in H^n(W(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^{g_-^*}$, так как на этом пространстве квадратичные формы $Q(x, x) = x^2$, $Q'_-(x, x) = x \cdot g_-^*(x)$ совпадают, а элементы H^m , w_- являются их характеристическими элементами. Из равенства $H^m \cdot a = 0$ при $a \in H^n(W(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^{g_-^*}$ следует существование разложения $H^m = b + g_-^*(b)$, где $b \in H^n(W(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Применим теорему 6.5, получим равенство $l_{W_-} = 0$, где $l_{W_-} \in H_{n-1}(W_-(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – класс гомотопий, определенный прообразом гиперплоскости в $P^n(\mathbb{R})$.

Рассмотрим теперь точную последовательность Смита для накрытия $\pi: W_-(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R})_-$:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{m+1}(V(\mathbb{R})_-, S(\mathbb{R})) &\xrightarrow{\delta_*} H_m(V(\mathbb{R})_-, S(\mathbb{R})) \oplus H_m(S(\mathbb{R})) \\ &\xrightarrow{i^*} H_m(W_-(\mathbb{R})) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (7.9)$$

Тогда из равенства $l_{W_-}^m = 0$ получим при четном k равенство $l_-^m = 0$, которое противоречит предположению.

Мы доказали первое утверждение при k четном, его доказательство при k нечетном имеет единственное отличие, в переходе от равенства $l_{W_-}^m = 0$ к равенству $l_-^m = 0$; тогда согласно точной последовательности (7.9) достаточно еще потребовать, чтобы выполнялось неравенство $l_S^{m-1} \neq 0$, где $l_S \in H_{n-2}(S(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – класс гомотопий, определенный гиперплоским сечением. Так как S – ГМ-многообразие, то неравенство $l_S^{m-1} \neq 0$ выполняется. Итак, первое утверждение теоремы доказано, причем при четном k мы не требовали, чтобы S было ГМ-многообразием.

Переходим к доказательству второго утверждения. Нужно показать, что $w_- = 0$. Предположим противное, т.е. $w_- = H^m$. Так как класс Bu равен нулю, то существует разложение $w_- = b + g_-^*(b)$. Следовательно, $H^m = b + g_-^*(b)$; тогда $l_{W_-}^m = 0$, поэтому $l_-^m = 0$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.6. Оба сравнения теоремы можно объединить в одно:

$$\chi(P^n(\mathbb{R})_+) \equiv (mk)^2 \pmod{4}.$$

Заметим еще, что при четном k можно не требовать в условии теоремы, чтобы S было ГМ-многообразием, но при k нечетном убрать данное требование нельзя — это показывает пример квадррики $v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - v_4^2 = 0$.

Список литературы

1. Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
2. Краснов В. А. Алгебраические циклы на вещественном алгебраическом ГМ-многообразии // Изв. АН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 153–173.
3. Краснов В. А. О классах когомологий, определенных вещественными точками вещественной алгебраической ГМ-поверхности // Изв. АН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 210–221.
4. Калинин И. О. Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 2. С. 91–110.
5. Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic Geometry and its Applications. Yaroslavl', 1992. P. 113–136.
6. Краснов В. А. Эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения // Изв. АН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 101–126.
7. Degtyarev A., Kharlamov V. Distribution of the components of real Enriques surface // Topology (to appear).
8. Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
9. Nikulin V. V., Sujatha R. On Brauer groups of real Enriques surfaces // J. reine angew. Math. 1993. V. 444. S. 115–154.
10. Харламов В. М. Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{R}P^3$ // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 4. С. 55–68.
11. Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функцион. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 3. С. 1–9.
12. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
13. Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. АН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
14. Бредон Г. Теория пучков. М.: Наука, 1988.
15. Розлин В. А. Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 58–64.

Поступило в редакцию
7.VI.1996