Общероссийский математический портал

Д. Н. Чебан, Ограниченные решения линейных почти периодических систем дифференциальных уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 3, 155–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:35:12

УДК 517.926+517.938

Д. Н. Чебан

Ограниченные решения линейных почти периодических систем дифференциальных уравнений

Изучаются ограниченные на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}$ решения уравнения $\dot{x} = \mathcal{A}(t)x$ с рекуррентными (почти периодическими) коэффициентами. Показано, что нулевое решение этого уравнения равномерно устойчиво (биустойчиво) тогда и только тогда, когда все его решения и решения всех его предельных уравнений ограничены на $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}$). Эти результаты являются обобщением известной теоремы Камерона–Джонсона.

Библиография: 24 наименования.

Введение

В статье изучаются ограниченные на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}$ решения линейных дифференциальных уравнений с рекуррентными (в частности, почти периодическими по Бору) коэффициентами

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t)x. \quad (0.1)$$

Известная теорема Камерона–Джонсона [1], [2] для уравнения (0.1) в конечномерном пространстве утверждает, что это уравнение ляпуновским преобразованием приводится к виду

$$\dot{y} = \mathcal{B}(t)y, \quad (0.2)$$

где $\mathcal{B}(t)$ – кососимметрическая матрица, если все решения уравнения (0.1) и всех его предельных уравнений ограничены на $\mathbb{R}$. Очевидно, имеет место и обратное утверждение. Из теоремы Камерона–Джонсона следует, что ограниченность на $\mathbb{R}$ всех решений уравнения (0.1) и всех его предельных уравнений эквивалентна биустойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения (0.1). Нами показано, что последний факт имеет место и для уравнений (0.1) в произвольном банаховом пространстве. Кроме того, доказано, что ограниченность на $\mathbb{R}_+$ решений уравнения (0.1) и всех его предельных уравнений эквивалентна равномерной устойчивости нулевого решения уравнения (0.1). Установлено, что уравнение (0.1) допускает не более конечного числа линейно независимых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, если его нулевое решение равномерно устойчиво и оператор сдвига вдоль траекторий уравнения (0.1) асимптотически компактен.

§1. Ограниченные движения линейных неавтономных динамических систем

Пусть X и Y – полные метрические пространства, $\mathbb{R}(\mathbb{Z})$ – группа действительных (целых) чисел, $T = \mathbb{R}$ или $T = \mathbb{Z}$, $T_+ = \{t \in T \mid t \geq 0\}$, $T_- = \{t \in T \mid t \leq 0\}$ и $S = T_+$, T_- , T . Через (X, S, π) ((Y, T, σ)) обозначим полугрупповую (групповую)

динамическую систему на X (Y). Тройку $\langle (X, S, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$, где h – гомоморфизм (X, S, π) на (Y, T, σ) , называют [3] *неавтономной динамической системой*.

Множество $A \subseteq X$ называют [4] *положительно инвариантным* (*квазиинвариантным*), если $\pi^t A \subseteq A$ ($\pi^t A \supseteq A$) при всех $t \in T_+$, где $\pi^t x = \pi(x, t) = xt$ при всех $x \in X$. Множество A называют *инвариантным*, если оно положительно инвариантно и квазиинвариантно.

Замкнутое положительно инвариантное множество A динамической системы (X, S, π) называют [4] *минимальным*, если оно не содержит собственного замкнутого положительно инвариантного подмножества. Точку $x \in X$ называют *рекуррентной* в (X, S, π) , если $H(x) = \{xt \mid t \in T\}$ является компактным минимальным множеством динамической системы (X, S, π) .

Неавтономную динамическую систему $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ называют [5]–[8] *дистальной на T_+ в слое $X_y = \{x \in X \mid h(x) = y\}$* , если $\inf\{\rho(x_1 t, x_2 t) \mid t \in T_+\} > 0$ при всех $x_1, x_2 \in X_y$, $x_1 \neq x_2$. Если неавтономная динамическая система является групповой, то аналогичным образом вводятся понятия дистальности на T_- и T в слое X_y . Наконец, неавтономную систему называют *дистальной на T_+ (T_- , T)*, если она дистальна в каждом слое X_y , $y \in Y$.

Пусть (X_i, T_+, π_i) – динамическая система на X_i , $i = \overline{1, k}$, $X = X_1 \times \cdots \times X_k$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k): X \times T_+ \rightarrow X$, действующая по правилу

$$\pi(x, t) = (\pi_1(x_1, t), \dots, \pi_k(x_k, t))$$

при всех $t \in T_+$ и $x = (x_1, \dots, x_k) \in X$. Динамическая система (X, T_+, π) , где $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ и $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$, называется *прямым произведением* динамических систем (X_i, T_+, π_i) , $i = \overline{1, k}$, и обозначается $(X_1, T_+, \pi_1) \times \cdots \times (X_k, T_+, \pi_k)$. Если $X_i = X$, $i = \overline{1, k}$, и $\pi_i = \pi$, $i = \overline{1, k}$, то

$$(X, T_+, \pi) \times (X, T_+, \pi) \times \cdots \times (X, T_+, \pi) = (X^k, T_+, \pi).$$

Аналогичным образом определяется и прямое произведение групповых динамических систем.

Точки $x_1, \dots, x_k \in X$ называются *совместно рекуррентными*, если точка $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ рекуррентна в динамической системе (X^k, T_+, π) .

ЛЕММА 1.1 [5]–[8]. *Имеют место следующие утверждения.*

1) Пусть X компактно и (Y, T, σ) минимально; тогда из дистальности на T_+ (T_-) групповой неавтономной динамической системы $\langle (X, T, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ следует ее дистальность на T .

2) Пусть X компактно, (Y, T, σ) минимально и $y \in Y$; тогда следующие условия эквивалентны:

а) групповая неавтономная система $\langle (X, T, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ дистальна на T в слое X_y ;

б) для любого конечного числа $k \geq 2$ точек $x_1, \dots, x_k \in X$ точка $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ рекуррентна в (X^k, T, π) ;

в) для любых двух точек $x_1, x_2 \in X_y$ точка $(x_1, x_2) \in X \times X$ рекуррентна в $(X, T, \pi) \times (X, T, \pi)$.

Целой (полной) траекторией полугрупповой системы (X, T_+, π) , проходящей через точку $x \in X$ при $t = 0$, называют непрерывное отображение $\gamma: T \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям $\gamma(0) = x$ и $\pi^t \gamma(s) = \gamma(s + t)$ при всех $t \in T_+$ и

$s \in T$. Через Φ_x обозначим множество всех целых траекторий системы (X, T_+, π) , проходящих через точку x при $t = 0$.

Обозначим через $C(T, X)$ пространство всех непрерывных отображений $\varphi: T \rightarrow X$, наделенное открыто-компактной топологией, а через $(C(T, X), T, \sigma)$ – динамическую систему сдвигов на $C(T, X)$. Пусть d – метрика на $C(T, X)$, согласованная с ее топологией (например, метрика Бебутова).

ЛЕММА 1.2 [9]. Пусть (X, T_+, π) – полугрупповая динамическая система, для любого $t \in T_+$ отображение $\pi^t: X \rightarrow X$ является гомеоморфизмом и $\hat{\pi}$ – отображение $X \times T$ в X , определенное равенством

$$\hat{\pi}(x, t) = \begin{cases} \pi(x, t), & (x, t) \in X \times T_+, \\ (\pi^{-t})^{-1}(x), & (x, t) \in X \times T_-. \end{cases}$$

Тогда тройка $(X, T, \hat{\pi})$ является групповой динамической системой.

ЛЕММА 1.3 [5]. Пусть $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система, Y компактно, (Y, T, σ) минимальна и $x_0 \in X_y$ с относительно компактной полутраекторией $\{x_0 t \mid t \in T\}$. Тогда существуют рекуррентная точка $x \in \omega_{x_0} = \bigcap_{t \geq 0, \tau \geq t} \overline{U x_0 \tau}$ ($x \in X_y$) и $t_n \rightarrow +\infty$ такие, что $\rho(x_0 t_n, x t_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Динамическую систему (X, S, π) называют [10]–[13] асимптотически компактной, если для любого ограниченного положительно инвариантного множества $B \subseteq X$ существует непустой компакт $K \subseteq X$ такой, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup\{\rho(xt, K) : x \in B\} = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. а) Пусть $x \in X$ такова, что $\{xt \mid t \in T_+\}$ ограничено и (X, T_+, π) асимптотически компактна; тогда $\{xt \mid t \in T_+\}$ относительно компактно.

б) Пусть $M \subset X$ ограничено и инвариантно; тогда M относительно компактно, если динамическая система (X, T_+, π) асимптотически компактна. В частности, если $x \in X$ и $\gamma \in \Phi_x$ таково, что $\gamma(T)$ ограничено, то $\gamma(T)$ относительно компактно.

ЛЕММА 1.5 [10]. Пусть B – ограниченное подмножество X ; тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) каковы бы ни были последовательности $\{x_k\} \subset B$ и $t_k \rightarrow +\infty$, последовательность $\{x_k t_k\}$ относительно компактна;
- 2) $\Omega(B) = \bigcap_{t \geq 0, \tau \geq t} \overline{U \pi^\tau(B)} \neq \emptyset$ компактно, инвариантно и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup\{\rho(xt, \Omega(B)) : x \in B\} = 0;$$

- 3) существует непустой компакт $K \subseteq X$ такой, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup\{\rho(xt, K) : x \in B\} = 0.$$

Если $X = E \times Y$, $\pi = (\varphi, \sigma)$, т.е. $\pi((u, y), t) = (\varphi(t, x, y), \sigma(y, t))$ при всех $(u, y) \in E \times Y$ и $t \in S$, то неавтономную динамическую систему $\langle (X, S, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$, где $h = \text{pr}_2: X \rightarrow Y$, называют [14] косым произведением над (Y, T, σ) со слоем E .

Пусть (X, h, Y) – локально-тривиальное банахово расслоение [15]. Неавтономную динамическую систему $\langle (X, S, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ называют [14], [16] *линейной*, если при каждом $t \in S$ и $y \in Y$ отображение $\pi^t: X_y \rightarrow X_{yt}$ линейно.

Если $\langle (X, S, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ является косым произведением (Y, T, σ) со слоем E (т.е. $X = E \times Y$, $\pi = (\varphi, \sigma)$ и $h = \text{pr}_2$), то она линейна тогда и только тогда, когда E является банаховым пространством и при каждом $y \in Y$ и $t \in S$ отображение $\varphi(t, \cdot, y): E \rightarrow E$ линейно.

Всюду ниже мы предполагаем, что Y компактно, динамическая система (Y, T, σ) минимальна, $X = E \times Y$, E – банахово пространство с нормой $|\cdot|$, неавтономная динамическая система $\langle (X, S, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ является линейной, $\pi = (\varphi, \sigma)$ и $h = \text{pr}_2$.

Пусть $F \subset E \times Y$ – некоторое положительно инвариантное относительно (X, S, π) замкнутое векториальное подмножество тривиального расслоения $(E \times Y, \text{pr}_2, Y)$. Положим

$$\mathbb{B}^+ = \{(x, y) \in F \mid \sup\{|\varphi(t, x, y)| : t \in T_+\} < +\infty\}.$$

Аналогично определяется $\mathbb{B}^-$. Если $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ – полугрупповая неавтономная динамическая система, то через $\mathbb{B}$ обозначим множество всех точек из F , через которые проходит хотя бы одна целая ограниченная на T траектория динамической системы (F, T_+, π) . Положим $\mathbb{B}_y^+ = \mathbb{B}^+ \cap X_y$ и $\mathbb{B}_y = \mathbb{B} \cap X_y$, $y \in Y$.

ТЕОРЕМА 1.6. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует $M > 0$ такое, что*

$$|\varphi(t, x, y)| \leq M|x| \quad (1.1)$$

при всех $(x, y) \in \mathbb{B}^+$ ($\mathbb{B}^-, \mathbb{B}$) и $t \in T_+$ (T_-, T);

2) *$\mathbb{B}^+$ ($\mathbb{B}^-, \mathbb{B}$) замкнуто в F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство приведем для случая $S = T_+$, поскольку для $S = T_-$ или $S = T$ доказательство аналогично. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть $(x, y) \in \mathbb{B}^+$; тогда существует $\{x_n, y_n\} \subseteq \mathbb{B}^+$ такая, что $\{x_n, y_n\} \rightarrow (x, y)$ при $n \rightarrow +\infty$. Согласно условию 1) имеет место неравенство

$$|\varphi(t, x_n, y_n)| \leq M|x_n| \quad (1.2)$$

при всех $n = 1, 2, \dots$ и $t \in T_+$. Переходя к пределу в (1.2), когда $n \rightarrow +\infty$, получим $|\varphi(t, x, y)| \leq M|x|$ при всех $t \in T_+$, т.е. $(x, y) \in \mathbb{B}^+$.

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Пусть $\mathbb{B}^+$ замкнуто и $y \in Y$; положим

$$d(y) = \sup\{|\varphi(t, x, y)| : t \in T_+, (x, y) \in \mathbb{B}^+, |x| \leq 1\}. \quad (1.3)$$

Покажем, что функция $d: Y \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенная равенством (1.3), является непрерывной снизу. Если допустить, что это не так, то найдутся $\epsilon > 0$, $y \in Y$ и $y_n \rightarrow y$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(y_n) = d(y) - \epsilon. \quad (1.4)$$

Из равенства (1.3) следует существование $|x_n| \leq 1$ и $\{t_n\} \subseteq T_+$ ($(x_n, y) \in \mathbb{B}^+$) таких, что

$$d(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi(t_n, x_n, y)|.$$

Поэтому для $\epsilon > 0$ найдется k такое, что имеет место неравенство

$$|\varphi(t_n, x_n, y) - d(y)| < \epsilon/4 \quad (1.5)$$

при всех $n \geq k$. В силу непрерывности отображения $\varphi(t_k, x_k, \cdot): Y \rightarrow X$ найдется $n = n(k)$ такое, что

$$|\varphi(t_k, x_k, y_n) - \varphi(t_k, x_k, y)| < \epsilon/4 \quad (1.6)$$

при всех $n \geq n(k)$. Из неравенств (1.5) и (1.6) следует

$$|d(y) - \varphi(t_k, x_k, y_n)| < \epsilon/4 \quad (1.7)$$

при всех $n \geq n(k)$ и, следовательно,

$$d(y) - d(y_n) \leq \epsilon/2 \quad (1.8)$$

при всех $n \geq n(k)$. С другой стороны, из (1.4) имеем

$$d(y) - d(y_n) \geq 3\epsilon/4 \quad (1.9)$$

при достаточно большом n .

Неравенство (1.9) противоречит (1.8). Полученное противоречие доказывает полунепрерывность снизу функции $d: Y \rightarrow \mathbb{R}_+$, и, следовательно, она имеет множество типа G_δ точек непрерывности $D \subset Y$. Так как Y — полное метрическое пространство, множество D имеет хотя бы одну внутреннюю точку $p \in D$, т.е. существует $\delta_p > 0$ такое, что

$$S[p, \delta_p] = \{y \in Y \mid \rho(y, p) \leq \delta_p\} \subset D.$$

В силу минимальности Y найдутся отрицательные числа $t_1, \dots, t_m$ такие, что $Y = \bigcup_{i=1}^m \sigma(S[p, \delta_p], t_i)$ (см. [6, с. 134]).

Положим $L = \max\{|t_i|: i = \overline{1, m}\}$. В силу непрерывности d на $S[p, \delta_p]$ и компактности Y найдется $M_p > 0$ такое, что $d(y) \leq M_p$ при всех $y \in S[p, \delta_p]$.

Заметим, что семейство операторов $\{\pi^t \mid t \in [0, L]\}$ равномерно непрерывно, т.е. для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что $|x| \leq \delta$ влечет $|xt| \leq \epsilon$ при всех $t \in [0, L]$. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся $\epsilon_0 > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, $|x_n| < \delta_n$, $y_n \in Y$ и $t_n \in [0, L]$ такие, что

$$|\varphi(t_n, x_n, y_n)| \geq \epsilon_0. \quad (1.10)$$

В силу компактности Y и $[0, L]$ последовательности $\{y_n\}$ и $\{t_n\}$ можно считать сходящимися. Положим $y_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ и $t_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$; тогда, переходя в (1.10) к пределу, когда $n \rightarrow +\infty$, мы получим $0 \geq \epsilon_0$. Последнее противоречит выбору ϵ_0 . Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Если $\alpha > 0$ таково, что $|\varphi(t, x, y)| \leq 1$ при всех $t \in [0, L]$, $|x| \leq \alpha$ и $y \in Y$, то

$$|\varphi(t, x, y)| \leq \alpha^{-1}|x| \quad (1.11)$$

при всех $t \in [0, L]$, $x \in E$ и $y \in Y$. Пусть теперь $q \in Y$, $y \in S[p, \delta_p]$ и t_i таковы, что $q = yt_i$; тогда

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x, q)| &= |\varphi(t, x, yt_i)| = |\varphi(t + t_i, \varphi(-t_i, x, yt_i), y)| \\ &= |\varphi(-t_i, x, yt_i)| \left| \varphi\left(t + t_i, \frac{\varphi(-t_i, x, yt_i)}{|\varphi(-t_i, x, yt_i)|}, y\right) \right|. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В силу положительной инвариантности $\mathbb{B}^+$ наряду с точкой (x, q) множеству $\mathbb{B}^+$ принадлежит и точка $\pi^{-t_i}(x, q)$, где $\pi^{-t_i}(x, q) = (\varphi(-t_i, x, q), \sigma(q, -t_i))$ и, следовательно, $\pi^{-t_i}(x, q) = (\varphi(-t_i, x, y t_i), y) \in \mathbb{B}_y^+$ и

$$\left| \varphi\left(t + t_i, \frac{\varphi(-t_i, x, y t_i)}{|\varphi(-t_i, x, y t_i)|}, y\right) \right| \leq M_p \quad (1.13)$$

при всех $t \geq L$. С другой стороны, из неравенства (1.11) имеем

$$|\varphi(-t_i, x, y t_i)| \leq \alpha^{-1}|x| \quad (1.14)$$

при всех $x \in E$. Из (1.12)–(1.14) следует, что $|\varphi(t, x, q)| \leq M|x|$ при всех $t \in T_+$ и $x \in E$, где $M = \alpha^{-1} \max\{1, M_p\}$. Теорема доказана.

ЛЕММА 1.7. Пусть $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ – линейная неавтономная динамическая система, (X, T_+, π) асимптотически компактна и существует число $M > 0$ такое, что

$$|\gamma(t)| \leq M|x| \quad (1.15)$$

при всех $\gamma \in \Phi_{(x,y)}$, $(x, y) \in \mathbb{B}$ и $t \in T$. Тогда множество $\Phi_0 = \cup\{\Phi_{(x,y)} \mid (x, y) \in \mathbb{B}, |x| \leq 1\}$ относительно компактно в $C(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $K = \{\gamma(t) \mid t \in T, \gamma \in \Phi_0\} \subseteq \mathbb{B}$. Очевидно, K инвариантно и согласно (1.15) ограничено. В силу асимптотической компактности (X, T_+, π) множество K относительно компактно (см. замечание 1.4, б)). Покажем теперь, что семейство функций $\Phi_0 \subset C(T, X)$ равномерно непрерывно. Если допустить, что это не так, то найдутся $\epsilon_0 > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, $\{t_n^i\} (i = 1, 2)$ и $\{\gamma_n\} \subset \Phi_0$ такие, что $|t_n^1 - t_n^2| < \delta_n$ и

$$|\gamma_n(t_n^1) - \gamma_n(t_n^2)| \geq \epsilon_0. \quad (1.16)$$

Не умаляя общности рассуждений, мы можем считать, что $t_n^2 > t_n^1$; тогда из неравенства (1.16) следует

$$|\pi^{\tau_n} x_n - x_n| \geq \epsilon_0 \quad (1.17)$$

при всех $n = 1, 2, \dots$, где $\tau_n = t_n^2 - t_n^1$ и $x_n = \gamma_n(t_n^1)$. Так как $\{x_n\} \subseteq K$, то последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Пусть $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$; тогда, переходя к пределу в неравенстве (1.17), когда $n \rightarrow +\infty$, мы получим $0 \geq \epsilon_0$. Последнее противоречит выбору ϵ_0 . Теперь для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на теорему Асколи–Арцеля.

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ – линейная неавтономная динамическая система, (X, T_+, π) асимптотически компактна и существует число $M > 0$ такое, что выполнено неравенство (1.15) при всех $\gamma \in \Phi_{(x,y)}$, $(x, y) \in \mathbb{B}$ и $t \in T$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) любые две целые траектории $\gamma_1 \in \Phi_{(x_1,y)}$ и $\gamma_2 \in \Phi_{(x_2,y)}$ $((x_1, y), (x_2, y) \in \mathbb{B})$ совместно рекуррентны;
- 2) $\Phi_{(x,y)}$ состоит ровно из одной целой рекуррентной траектории, каково бы ни было $(x, y) \in \mathbb{B}$;
- 3) множество $\mathbb{B}$ замкнуто в F ;
- 4) динамическая система (X, T_+, π) индуцирует на $\mathbb{B}$ групповую динамическую систему $(\mathbb{B}, T, \pi)$;
- 5) $\mathbb{B}_y$ конечномерно, каково бы ни было $y \in Y$, причем $\dim \mathbb{B}_y$ не зависит от точки $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x, y) \in \mathbb{B}$ и $\gamma \in \Phi_{(x, y)}$ ограничена на T . Согласно лемме 1.7 множество $H(\gamma) = \{\gamma_\tau \mid \tau \in T\}$ компактно в $C(T, X)$, так как $\gamma_\tau \in \Phi_{\gamma(\tau)}$, где γ_τ – сдвиг функции γ на τ и чертой обозначено замыкание в $C(T, X)$. Рассмотрим групповую неавтономную динамическую систему $\langle (H(\gamma), T, \lambda), (Y, T, \sigma), h \rangle$, где $(H(\gamma), T, \lambda)$ – динамическая система сдвигов на $H(\gamma)$, индуцированная системой Бебутова $(C(T, X), T, \sigma)$, и $\mu: H(\gamma) \rightarrow Y$ – отображение, определенное равенством $\mu(\psi) = h(\psi(0))$. В условиях теоремы 1.8 (см. также неравенство (1.15)) неавтономная динамическая система $\langle (H(\gamma), T, \lambda), (Y, T, \sigma), \mu \rangle$ отрицательно дистальна, т.е. $\inf\{d(\lambda(\gamma_1, t), \lambda(\gamma_2, t)) : t \in T_-\} > 0$, каковы бы ни были $\gamma_1, \gamma_2 \in H(\gamma)$ такие, что $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и $\mu(\gamma_1) = \mu(\gamma_2)$. Согласно лемме 1 из [6, с. 104] $\langle (H(\gamma), T, \lambda), (Y, T, \sigma), h \rangle$ дистальна на T и, следовательно, γ_1 и γ_2 совместно рекуррентны. В частности, γ рекуррентна и, кроме того, согласно лемме 1.1 любые две целые траектории $\gamma_1 \in \Phi_{(x, y)}$ и $\gamma_2 \in \Phi_{(x, y)}$ совместно рекуррентны.

Покажем теперь, что множество $\Phi_{(x, y)}$ состоит ровно из одной целой рекуррентной траектории, каково бы ни было $(x, y) \in \mathbb{B}$. Действительно, если бы это было не так, то существовали бы $\gamma_1, \gamma_2 \in \Phi_{(x, y)}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Полагая $\gamma(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$, мы имели бы рекуррентную функцию $\gamma \neq 0$ такую, что $\gamma(t) = 0$ при всех $t \in T_+$, что невозможно.

Пусть теперь $(x, y) \in \overline{\mathbb{B}}$; тогда существует $\{x_n, y_n\} \subset \mathbb{B}$ такая, что $\{x_n, y_n\} \rightarrow \{x, y\}$. Обозначим через γ_n единственную целую ограниченную на T траекторию системы (F, T_+, π) , удовлетворяющую условию $\gamma_n(0) = (x_n, y_n)$. Согласно лемме 1.7 последовательность $\{\gamma_n\}$ можно считать сходящейся в $C(T, X)$. Из неравенства (1.15) следует, что $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$ является ограниченной на T целой траекторией системы (F, T_+, π) , причем $\gamma(0) = (x, y)$. Таким образом, $\gamma \in \Phi_{(x, y)}$, а значит, $(x, y) \in \mathbb{B}$.

В силу замкнутости и инвариантности $\mathbb{B}$ динамическая система (X, T_+, π) индуцирует на $\mathbb{B}$ динамическую систему $(\mathbb{B}, T_+, \pi)$, причем $\pi^t \mathbb{B} = \mathbb{B}$ при всех $t \in T_+$. Согласно п. 2) теоремы $\pi^t: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ ($t \in T_+$) взаимно однозначно, причем $(\pi^t)^{-1}(b) = \gamma_b(-t)$ при всех $t \in T_+$ и $b \in \mathbb{B}$, где $\{\gamma_b\} = \Phi_b$. Из леммы 1.7 следует, что $\pi^t: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ есть гомеоморфизм, и для доказательства 4) достаточно сослаться на лемму 1.2.

Докажем теперь последнее утверждение теоремы. Из асимптотической компактности (X, T_+, π) следует, что множество $K = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{B}, |x| \leq 1, y \in Y\}$ компактно и, следовательно, каждое линейное подпространство $\mathbb{B}_y$ пространства $X_y = E \times \{y\}$ конечномерно. Пусть $y \in Y$ и $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{B}_y$ – некоторый базис в $\mathbb{B}_y$; тогда согласно лемме 1.1 точки $x_1, \dots, x_k$ совместно рекуррентны. Если q – произвольная точка из Y , то в силу минимальности Y существует последовательность $\{t_n\} \subset T$ такая, что $yt_n \rightarrow q$ и $\pi(x_i, t_n) \rightarrow \xi_i$ ($i = \overline{1, k}$) при $n \rightarrow +\infty$, причем $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{B}_q$ и точки $\xi_1, \dots, \xi_k$ совместно рекуррентны.

Заметим, что $\xi_1, \dots, \xi_k$ линейно независимы. Если допустить, что это не так, то найдутся константы $c_1, \dots, c_k$ такие, что $c_1\xi_1 + \dots + c_k\xi_k = 0$, причем $\sum_{i=1}^k |c_i| \neq 0$. Поскольку $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in H(x_1, \dots, x_k)$ и $(x_1, \dots, x_k)$ рекуррентна, то найдется $\{\tau_n\} \subset T$ такая, что $q\tau_n \rightarrow y$ и $\pi(\xi_i, \tau_n) \rightarrow x_i$ ($i = \overline{1, k}$) при $n \rightarrow +\infty$ и, следовательно,

$$c_1x_1 + \dots + c_kx_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(c_1\xi_1 + \dots + c_k\xi_k, \tau_n) = 0.$$

Последнее противоречит выбору $x_1, \dots, x_k$. Таким образом, $\dim \mathbb{B}_q \geq \dim \mathbb{B}_y$ при всех $q \in Y$. В силу минимальности Y имеет место и обратное неравенство, поэтому $\dim \mathbb{B}_q = \dim \mathbb{B}_y$ при всех $q \in Y$. Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ – линейная неавтономная динамическая система и (X, T_+, π) асимптотически компактна; тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) существует число $M > 0$ такое, что выполнено (1.15) при всех $\gamma \in \Phi_{(x,y)}$, $(x, y) \in \mathbb{B}$ и $t \in T$;
- 2) множество $\mathbb{B}$ замкнуто в F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы согласно теореме 1.8 достаточно показать, что из 2) следует 1). Согласно теореме 1.6 существует число $M > 0$ такое, что выполнено (1.1) при всех $(x, y) \in \mathbb{B}$ и $t \in T_+$. Так как множество $\mathbb{B}$ инвариантно, то для любого $(x, y) \in \mathbb{B}$ и $\gamma \in \Phi_{(x,y)}$ имеем

$$|\gamma(t)| \geq M^{-1}|x| \quad (1.18)$$

при всех $t \in T_-$. Рассуждая так же, как и в лемме 1.7, можно показать, что множество $H(\gamma) = \{\gamma_\tau \mid \tau \in T\}$ компактно в $C(T, X)$. Рассмотрим групповую динамическую систему $\langle (H(\gamma), T, \lambda), (Y, T, \sigma), \mu \rangle$ (см. доказательство теоремы 1.8). Из неравенства (1.18) следует дистальность на T_- неавтономной системы $\langle (H(\gamma), T, \lambda), (Y, T, \sigma), \mu \rangle$, и согласно лемме 1.1 функция γ рекуррентна. Поэтому

$$\sup\{|\gamma(t)| : t \in T\} = \sup\{|\gamma(t)| : t \in T_+\} \leq M|x|$$

при всех $\gamma \in \Phi_{(x,y)}$ и $(x, y) \in \mathbb{B}$ и, следовательно, выполнено условие 1). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ – линейная неавтономная динамическая система, (X, T_+, π) асимптотически компактна и $\mathbb{B}^+$ замкнуто; тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) $\mathbb{B}$ замкнуто;
- 2) для любой точки $(x, y) \in \mathbb{B}^+$ существует рекуррентная точка $(x, y) \in \mathbb{B}$ такая, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, x_0, y) - \varphi(t, x, y)| = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{B}^+$ замкнуто; тогда согласно теореме 1.6 существует число $M > 0$ такое, что выполнено (1.1) при всех $(x, y) \in \mathbb{B}^+$ и $t \in T_+$. Пусть теперь $(x, y) \in \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}^+$; тогда из неравенства (1.1) следует (1.18) при всех $t \in T_-$ и $\gamma \in \Phi_{(x,y)}$. Далее, рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 1.9, получим (1.15) при всех $\gamma \in \Phi_{(x,y)}$, $(x, y) \in \mathbb{B}$ и $t \in T$. Теперь для завершения доказательства первого утверждения теоремы достаточно сослаться на теорему 1.8.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть $(x_0, y) \in \mathbb{B}^+$; тогда в силу асимптотической компактности (X, T_+, π) полутраектория $\{\pi^t(x_0, y) \mid t \in T_+\}$ точки (x_0, y) относительно компактна и, следовательно, $\omega_{(x_0,y)} \neq \emptyset$ компактно и инвариантно, и согласно лемме 1.3 существуют рекуррентная точка $(x, y) \in \omega_{(x_0,y)}$ и последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi(t_n, x_0, y) - \varphi(t_n, x, y)| = 0. \quad (1.19)$$

Из неравенства (1.15) следует, что

$$|\varphi(t, x_0, y) - \varphi(t, x, y)| \leq M|\varphi(t_n, x_0, y) - \varphi(t_n, x, y)| \quad (1.20)$$

при всех $t \geq t_n$. Из (1.19) и (1.20) следует требуемое утверждение. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Второе утверждение теоремы 1.9 имеет место и без требования замкнутости $\mathbb{B}^+$.

В конце этого параграфа приведем один признак асимптотической компактности линейной неавтономной системы.

Пусть $P: X \rightarrow X$ – проектор векторного расслоения, т.е. $P_y = P|_{X_y}$ при каждом $y \in Y$ является проектором в X_y . Проектор $P: X \rightarrow X$ назовем *вполне непрерывным*, если $P(\mathbb{M})$ относительно компактно, каково бы ни было ограниченное множество $\mathbb{M} \subset X$.

ЛЕММА 1.12. Пусть $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ – линейная неавтономная динамическая система и отображения $\pi^t = \pi(\cdot, t): X \rightarrow X$ представимы в виде суммы $\pi(x, t) = \pi_1(x, t) + \pi_2(x, t)$ при всех $t \in T_+$ и $x \in X$ и выполнены следующие условия:

- 1) $|\pi_1(x, t)| \leq m(t, r)$ при всех $t \in T_+$ и $x \in X$, где $m: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ и при каждом $r \geq 0$ функция $m(t, r)$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$;
- 2) отображения $\pi_2(\cdot, t): X \rightarrow X$ ($t > 0$) условно вполне непрерывны, т.е. $\pi_2(A, t)$ относительно компактно, каковы бы ни были $t > 0$ и ограниченное положительно инвариантное множество $A \subseteq X$.

Тогда динамическая система (X, T_+, π) асимптотически компактна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \subseteq X$ – ограниченное положительно инвариантное множество; тогда $A = \Sigma^+(A) = \{\pi^t A \mid t \in T_+\}$. В силу компактности Y и локальной тривиальности (X, h, Y) существует $r > 0$ такое, что $A \subseteq \{x \in X: |x| \leq r\}$. Покажем, что каковы бы ни были $\{x_k\} \subset A$ и $t_n \rightarrow +\infty$, последовательность $\{x_k t_k\}$ относительно компактна. Убедимся, что множество $\mathbb{M} = \{x_k t_k\}_{k=1}^\infty$ можно покрыть конечной ϵ -сетью, каково бы ни было $\epsilon > 0$. Пусть $\epsilon > 0$ и $l > 0$ таковы, что $m(l, r) < \epsilon/2$, и представим $\mathbb{M}$ в виде объединения $\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2$, где $\mathbb{M}_1 = \{x_k t_k\}_{k=1}^{k_1}$, $\mathbb{M}_2 = \{x_k t_k\}_{k=k_1+1}^\infty$ и $k_1 = \max\{k \mid t_k \leq l\}$. Множество $\mathbb{M}_2$ является подмножеством $\pi^l(\Sigma^+(A))$, элементы которого можно представить в виде $\pi_1(x, t) + \pi_2(x, t)$ ($x \in \Sigma^+(A)$). Так как множество $\pi_2(\Sigma^+(A), l)$ относительно компактно, то его можно покрыть конечной $(\epsilon/2)$ -сетью. Заметим, что для любого $y \in \pi_1(\Sigma^+(A), l)$ существует $x \in \Sigma^+(A)$ такое, что $y = \pi_1(x, l)$ и $|y| = |\pi_1(x, l)| \leq m(l, r) < \epsilon/2$. Поэтому нулевое сечение Θ векторного расслоения (X, h, Y) является $(\epsilon/2)$ -сетью множества $\pi_1(\Sigma^+(A), l)$. В силу компактности Y и локальной тривиальности (X, h, Y) нулевое сечение Θ компактно. Таким образом, $\mathbb{M}_2$, а значит, и $\mathbb{M}$ покрываются ϵ -сетью $\Theta \cup \mathbb{M}_1$. В силу компактности Θ и полноты пространства Y множество $\mathbb{M} = \{x_k t_k\}_{k=1}^\infty$ относительно компактно. Теперь для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на лемму 1.5.

СЛЕДСТВИЕ 1.13. Пусть $\langle (X, T_+, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$ – линейная неавтономная динамическая система, $P: X \rightarrow X$ – вполне непрерывный проектор и выполнено следующее условие: существуют положительные числа N и ν такие, что $|\pi^t Q(x)| \leq N e^{-\nu t} |x|$ при всех $x \in X$ и $t \in T_+$, где $Q: X \rightarrow X$ и $Q_y = Q|_{X_y} = I_y - P_y$ при всех $y \in Y$ ($I_y = \text{id}_{X_y}$).

Тогда (X, T_+, π) асимптотически компактна.

Сформулированное утверждение вытекает из леммы 1.12, если заметить, что $\pi(x, t) = \pi_1(x, t) + \pi_2(x, t)$ при всех $x \in X$ и $t \in T_+$, где $\pi_1(x, t) = \pi^t Q(x)$ и $\pi_2(x, t) = \pi^t P(x)$. В условиях следствия 1.13 при каждом $t > 0$ отображение

$\pi_2(\cdot, t) = \pi^t P$ вполне непрерывно и $|\pi_1(x, t)| \leq N e^{-\nu t} |x|$, и, следовательно, мы находимся в условиях применимости леммы 1.12.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.14. Так как при доказательстве леммы 1.12 и следствия 1.13 мы использовали только компактность Y , то они имеют место и в том случае, когда динамическая система (Y, T, σ) не является минимальной.

§ 2. Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с почти периодическими коэффициентами

Обозначим через $[E]$ банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве E , наделенное операторной нормой. Пусть Λ – некоторое полное метрическое пространство линейных замкнутых операторов, действующих в E (например, $\Lambda = [E]$ или $\Lambda = \{A_0 + B \mid B \in [E]\}$, где A_0 – некоторый замкнутый оператор, действующий в E). Через $C(\mathbb{R}, \Lambda)$ обозначим пространство всех непрерывных оператор-функций $\mathcal{A}: \mathbb{R} \rightarrow \Lambda$, наделенное открыто-компактной топологией, и через $(C(\mathbb{R}, \Lambda), \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическую систему сдвигов на $C(\mathbb{R}, \Lambda)$.

2.1. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения. Пусть $\Lambda = [E]$; рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = \mathcal{A}(t)u, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, [E])$. Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим и его H -класс, т.е. семейство уравнений

$$\dot{v} = \mathcal{B}(t)v, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A}) = \overline{\{\mathcal{A}_\tau \mid \tau \in \mathbb{R}\}}$, $\mathcal{A}_\tau(t) = \mathcal{A}(t + \tau)$, $t \in \mathbb{R}$, и чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R}, [E])$. Обозначим через $\varphi(t, v, \mathcal{B})$ решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условию $\varphi(0, v, \mathcal{B}) = v$.

Положим $Y = H(\mathcal{A})$ и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на $H(\mathcal{A})$. Положим $X = E \times Y$ и определим на X динамическую систему по следующему правилу:

$$\pi((v, \mathcal{B}), t) = (\varphi(t, v, \mathcal{B}), \mathcal{B}_t)$$

при всех $(v, \mathcal{B}) \in E \times Y$ и $t \in \mathbb{R}$; тогда тройка $\langle (X, \mathbb{R}, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ является линейной групповой неавтономной динамической системой, где $h = \text{pr}_2: X \rightarrow Y$. Применяя к построенной линейной неавтономной системе результаты § 1, получим следующие утверждения.

ЛЕММА 2.1 [17], [18]. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) отображение $(t, u, \mathcal{A}) \mapsto \varphi(t, u, \mathcal{A})$ из $\mathbb{R} \times E \times C(\mathbb{R}, [E])$ в E непрерывно;
- 2) отображение $\mathcal{A} \mapsto U(\cdot, \mathcal{A})$ из $C(\mathbb{R}, [E])$ в $C(\mathbb{R}, [E])$ непрерывно, где $U(t, \mathcal{A})$ – оператор Коши [19] уравнения (2.1).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, [E])$ рекуррентна (т.е. $H(\mathcal{A})$ является компактным минимальным множеством $(C(\mathbb{R}, [E]), \mathbb{R}, \sigma)$); тогда следующие условия эквивалентны:

а) множество

$$\mathbb{B}^+ \quad (\mathbb{B}^-, \mathbb{B}) = \left\{ (v, \mathbb{B}) \in E \times H(\mathcal{A}) \mid \sup_{t \in \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-, \mathbb{R})} |\varphi(t, v, \mathbb{B})| < +\infty \right\} \quad (2.3)$$

замкнуто в $E \times H(\mathcal{A})$;

б) существует положительное число M такое, что

$$|\varphi(t, v, \mathbb{B})| \leq M|v| \quad (2.4)$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ и $(v, \mathbb{B}) \in \mathbb{B}^+ (\mathbb{B}^-, \mathbb{B})$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, [E])$ рекуррентна; тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) все решения всех уравнений вида (2.2) ограничены на $\mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$;
- 2) существует $M > 0$ такое, что выполнено (2.4) при всех $v \in E$, $\mathbb{B} \in H(\mathcal{A})$ и $t \in \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, [E])$ рекуррентна, линейная неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (2.1), асимптотически компактна и все решения всех уравнений (2.2) ограничены на $\mathbb{R}_+$; тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) существует $M > 0$ такое, что выполнено (2.4) при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $v \in E$ и $\mathbb{B} \in H(\mathcal{A})$;
- 2) множество $\mathbb{B}$, определенное равенством (2.3), замкнуто в $E \times H(\mathcal{A})$;
- 3) все ограниченные на $\mathbb{R}$ решения всех уравнений вида (2.2) рекуррентны;
- 4) каково бы ни было $\mathbb{B} \in H(\mathcal{A})$, уравнение (2.2) имеет не более конечного числа $n_{\mathbb{B}}$ линейно независимых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, причем $n_{\mathbb{B}} = n_{\mathcal{A}}$ при всех $\mathbb{B} \in H(\mathcal{A})$;
- 5) каковы бы ни были $v_0 \in E$ и $\mathbb{B} \in H(\mathcal{A})$, существует $(v, \mathbb{B}) \in \mathbb{B}$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, v_0, \mathbb{B}) - \varphi(t, v, \mathbb{B})| = 0,$$

т.е. любое решение любого уравнения (2.2) асимптотически рекуррентно.

Приведем некоторые признаки асимптотической компактности линейной неавтономной динамической системы, порожденной уравнением (2.1).

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, [E])$, $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $H(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, компактны и выполнены следующие условия:

- 1) нулевое решение уравнения

$$\dot{u} = \mathcal{A}_1(t)u \quad (2.5)$$

равномерно асимптотически устойчиво, т.е. существуют положительные числа N и ν такие, что

$$\|U(t, \mathcal{A}_1)U^{-1}(\tau, \mathcal{A}_1)\| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)} \quad (2.6)$$

при всех $t \geq \tau$ ($t, \tau \in \mathbb{R}$), где $U(t, \mathcal{A}_1)$ – оператор Коши уравнения $\dot{u} = \mathcal{A}_1(t)u$;

- 2) семейство операторов $\{\mathcal{A}_2(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно вполне непрерывно, т.е. для любого ограниченного множества $A \subset E$ множество $\{\mathcal{A}_2(t)A \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ относительно компактно.

Тогда линейная неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (2.1), асимптотически компактна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$; тогда существуют $\{t_n\} \subset T$ и $\mathcal{B}_i \in H(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, такие, что $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}_1(t) + \mathcal{B}_2(t)$ и $\mathcal{B}_i(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_i(t + t_n)$. Заметим, что

$$\varphi(t, v, \mathcal{B}) = U(t, \mathcal{B}_1)v + \int_0^t U(t, \mathcal{B}_1)U^{-1}(\tau, \mathcal{B}_1)\mathcal{B}_2(\tau)\varphi(\tau, v, \mathcal{B}) d\tau. \quad (2.7)$$

Согласно лемме 2.1

$$U(t, \mathcal{B}_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U(t, \mathcal{A}_{it_n}), \quad \mathcal{A}_{it_n}(t) = \mathcal{A}_i(t + t_n),$$

поэтому из равенства

$$U(t, \mathcal{A}_{1t_n})U^{-1}(\tau, \mathcal{A}_{1t_n}) = U(t + t_n, \mathcal{A}_1)U^{-1}(\tau + t_n, \mathcal{A}_1)$$

и неравенства (2.6) следует

$$\|U(t, \mathcal{B}_1)U^{-1}(\tau, \mathcal{B}_1)\| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)} \quad (2.8)$$

при всех $t \geq \tau$ и $\mathcal{B}_1 \in H(\mathcal{A}_1)$. Согласно лемме 1.12 для доказательства теоремы 2.5 достаточно показать, что множество

$$\left\{ \int_0^t U(t, \mathcal{B}_1)U^{-1}(\tau, \mathcal{B}_1)\mathcal{B}_2(\tau)\varphi(\tau, v, \mathcal{B}) d\tau \mid (v, \mathcal{B}) \in A \right\}$$

относительно компактно для каждого $t > 0$ и ограниченного положительно инвариантного множества $A \subseteq E \times Y$. Положим

$$K_A = \overline{\{\mathcal{B}_2(t)\varphi(t, v, \mathcal{B}) \mid t \in \mathbb{R}_+, (v, \mathcal{B}) \in A\}};$$

тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^t U(t, \mathcal{B}_1)U^{-1}(\tau, \mathcal{B}_1)\mathcal{B}_2(\tau)\varphi(\tau, v, \mathcal{B}) d\tau \\ & \in t \cdot \overline{\text{conv}} \{U(t, \mathcal{B}_1)U^{-1}(\tau, \mathcal{B}_1)w \mid 0 \leq \tau \leq t, \mathcal{B}_1 \in H(\mathcal{A}_1), w \in K_A\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.9), условия 2) теоремы 2.5, компактности множеств $H(\mathcal{A}_1)$, $H(\mathcal{A})$ и K_A и леммы 2.1 следует, что и множество $U\{U(t, \mathcal{B}_1)U^{-1}(\tau, \mathcal{B}_1)w \mid 0 \leq \tau \leq t, \mathcal{B}_1 \in H(\mathcal{A}_1), w \in K_A\}$ будет компактным. Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $H(\mathcal{A})$ компактно и существует конечномерный проектор $P \in [E]$ такой, что выполнены следующие условия:

- 1) семейство проекторов $\{P(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, где $P(t) = U(t, \mathcal{A})PU^{-1}(t, \mathcal{A})$, относительно компактно в $[E]$;
- 2) существуют положительные числа N и ν такие, что

$$\|U(t, \mathcal{A})QU^{-1}(\tau, \mathcal{A})\| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)}$$

при всех $t \geq \tau$, где $Q = I - P$.

Тогда линейная неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (2.1), асимптотически компактна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу относительной компактности семейства проекторов $\{P(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ последовательность $\{P(t_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим $P(\mathcal{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(t_n)$ и заметим, что семейство $\mathbb{H} = \{\overline{P(t)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ операторов равномерно вполне непрерывно, где чертой обозначено замыкание в $[E]$. Действительно, пусть A – ограниченное подмножество E , $\{x_n\} \subseteq \{QA \mid Q \in \mathbb{H}\}$ и $\epsilon_n \downarrow 0$. Тогда существуют $t_n \in \mathbb{R}$ и $v_n \in A$ такие, что $\rho(x_n, P(t_n)v_n) \leq \epsilon_n$. В силу относительной компактности последовательности $\{P(t_n)\}$ ее можно считать сходящейся. Пусть $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(t_n)$; тогда L вполне непрерывен и, следовательно, последовательность $\{x'_n\} = \{Lv_n\}$ относительно компактна. Заметим, что

$$\rho(x_n, x'_n) \leq \rho(x_n, P(t_n)v_n) + \rho(P(t_n)v_n, Lv_n) \leq \epsilon_n + \|P(t_n) - L\| \cdot |v_n|,$$

поэтому $\rho(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Таким образом и последовательность $\{x_n\}$ относительно компактна.

Пусть теперь $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$ и $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ такие, что

$$\mathcal{B} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{t_n}, \quad P(\mathcal{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\mathcal{A}_{t_n}),$$

где $P(\mathcal{A}_{t_n}) = U(t_n, \mathcal{A})PU^{-1}(t_n, \mathcal{A})$. Из доказанного выше следует, что семейство проекторов $\{P(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in H(\mathcal{A})\}$ равномерно вполне непрерывно. Заметим, что $Q(\mathcal{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(\mathcal{A}_{t_n})$, где $Q(\mathcal{B}) = I - P(\mathcal{B})$ и $Q(\mathcal{A}_{t_n}) = I - P(\mathcal{A}_{t_n})$. Кроме того, из условия 2) теоремы 2.6 следует, что

$$\|U(t, \mathcal{A}_{t_n})Q(\mathcal{A}_{t_n})U^{-1}(\tau, \mathcal{A}_{t_n})\| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)} \quad (2.10)$$

при всех $t \geq \tau$. Переходя в (2.10) к пределу, когда $n \rightarrow +\infty$, и учитывая лемму 2.1, мы получим

$$\|U(t, \mathcal{B})Q(\mathcal{B})U^{-1}(\tau, \mathcal{B})\| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)}$$

при всех $t \geq \tau$ и $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что $U(t, \mathcal{B})Q(\mathcal{B}) + U(t, \mathcal{B})P(\mathcal{B}) = U(t, \mathcal{B})$, и сослаться на лемму 1.12. Теорема доказана.

2.2. Линейные функционально-дифференциальные уравнения.

Пусть $r > 0$, $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ – банахово пространство всех непрерывных функций $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\sup$. Если $[a, b] = [-r, 0]$, то положим $\mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Пусть $c \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ и $u \in C([c-r, c+a], \mathbb{R}^n)$. Для любого $t \in [c, c+a]$ определим $u_t \in \mathcal{C}$ соотношением $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$. Обозначим через $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$, наделенное операторной нормой, через $C(\mathbb{R}, \mathfrak{A})$ – пространство всех оператор-функций $\mathcal{A}: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{A}$ с открыто-компактной топологией и через $(C(\mathbb{R}, \mathfrak{A}), \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическую систему сдвигов на $C(\mathbb{R}, \mathfrak{A})$. Положим $H(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}_\tau \mid \tau \in \mathbb{R}\}$, где $\mathcal{A}_\tau$ – сдвиг оператор-функции $\mathcal{A}$ на τ и чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R}, \mathfrak{A})$.

Рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{u} = \mathcal{A}(t)u_t. \quad (2.11)$$

Наряду с уравнением (2.11) рассмотрим семейство уравнений

$$\dot{v} = \mathcal{B}(t)v_t, \quad (2.12)$$

где $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$. Пусть $\varphi(t, v, \mathcal{B})$ – решение уравнения (2.12), удовлетворяющее условию $\varphi(0, v, \mathcal{B}) = v$ и определенное при всех $t \geq 0$. Положим $Y = H(\mathcal{A})$ и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на $H(\mathcal{A})$. Пусть $X = C \times Y$ и $\pi = (\varphi, \sigma)$ – динамическая система на X , определенная равенством $\pi((v, \mathcal{B}), \tau) = (\varphi(\tau, v, \mathcal{B}), \mathcal{B}_\tau)$. Неавтономная система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ ($h = \text{pr}_2: X \rightarrow Y$) является линейной.

ЛЕММА 2.7. Пусть $H(\mathcal{A})$ компактно в $C(\mathbb{R}, \mathfrak{A})$; тогда линейная неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$, порожденная уравнением (2.11), вполне непрерывна, т.е. для любого ограниченного множества $A \subset X$ существует $l = l(A) > 0$ такое, что $\pi^l A$ относительно компактно.

Сформулированное утверждение вытекает из общих свойств решений линейных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа (см., например, [12, леммы 2.2.3, 3.6.1]) и компактности $Y = H(\mathcal{A})$.

Применяя к линейной неавтономной динамической системе, порожденной уравнением (2.11), результаты § 1, мы получим следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{A})$ рекуррентна; тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) все решения всех уравнений семейства (2.12) ограничены на $\mathbb{R}_+$;
- 2) существует положительное число M такое, что $|\varphi(t, v, \mathcal{B})| \leq M|v|$ при всех $t \geq 0$, $v \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{A})$ рекуррентна и все решения всех уравнений семейства (2.12) ограничены на $\mathbb{R}_+$; тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) множество всех ограниченных на $\mathbb{R}$ решений всех уравнений (2.12) замкнуто в $C(\mathbb{R}, \mathcal{C}) \times H(\mathcal{A})$;
- 2) все ограниченные на $\mathbb{R}$ решения всех уравнений (2.12) рекуррентны;
- 3) каково бы ни было $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$, уравнение (2.12) имеет не более конечного числа $n_{\mathcal{B}}$ линейно независимых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, причем $n_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{A}}$ при всех $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$;
- 4) все решения всех уравнений (2.12) асимптотически рекуррентны.

Рассмотрим теперь нейтральное функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} Du_t = \mathcal{A}(t)u_t, \quad (2.13)$$

где $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{A})$ и $D \in \mathfrak{A}$ – атомарный в нуле оператор [12, с. 67]. Так же, как и в случае с уравнением запаздывающего типа (2.11), уравнение (2.13) естественным образом порождает линейную неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$, где $X = \mathcal{C} \times Y$, $Y = H(\mathcal{A})$ и $\pi = (\varphi, \sigma)$. Имеет место

ЛЕММА 2.10. Пусть $H(\mathcal{A})$ компактно и оператор D устойчив, т.е. нулевое решение однородного разностного уравнения $Du_t = 0$ равномерно асимптотически устойчиво [12]. Тогда линейная неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$, порожденная уравнением (2.13), асимптотически компактна.

Это утверждение вытекает из теоремы 12.3.2, леммы 12.4.1 из [12] и компактности $Y = H(\mathcal{A})$, поэтому теоремы 2.8 и 2.9 имеют место и для уравнений нейтрального типа (2.13).

2.3. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.1) с неограниченными коэффициентами. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, \Lambda)$, где Λ – некоторое полное метрическое пространство линейных замкнутых операторов, действующих в E (например, $\Lambda = \{\mathcal{A}_0 + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in [E]\}$, где $\mathcal{A}_0$ – некоторый замкнутый оператор, действующий в E). Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим и его H -класс (2.2), где $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$. Относительно уравнения (2.1) и его H -класса будем предполагать выполненными следующие условия:

- 1) для любых $v \in E$ и $\mathcal{B} \in H(\mathcal{A})$ существует единственное решение уравнения (2.2), определенное на $\mathbb{R}_+$ с условием $\varphi(0, v, \mathcal{B}) = v$;
- 2) отображение $\varphi: (t, v, \mathcal{B}) \rightarrow \varphi(t, v, \mathcal{B})$ непрерывно в топологии $\mathbb{R}_+ \times E \times C(\mathbb{R}, \Lambda)$;
- 3) при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ отображение $U(t, \cdot): H(\mathcal{A}) \rightarrow [E]$ непрерывно, где $U(t, \mathcal{B})$ – оператор Коши уравнения (2.2), т.е. $U(t, \mathcal{B})v = \varphi(t, v, \mathcal{B})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $v \in E$.

При сделанных выше предположениях уравнение (2.1) порождает линейную неавтономную динамическую систему, к которой применимы результаты § 1, и, следовательно, теоремы 2.2, 2.4 имеют место и в этом случае.

В заключение приведем пример уравнения с частными производными, для которого выполнены условия 1)–3) данного пункта.

ПРИМЕР 2.11. Линейный замкнутый оператор $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow E$ с плотной областью определения $D(\mathcal{A})$ называется [20] *секториальным*, если для некоторого $\varphi \in (0, \pi/2)$, некоторого $M \geq 1$ и некоторого вещественного a сектор

$$S_{a, \varphi} = \{\lambda \mid \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \quad \lambda \neq a\}$$

лежит в резольвентном множестве $\rho(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ и $\|(\lambda \cdot I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M \times |\lambda - a|^{-1}$ при всех $\lambda \in S_{a, \varphi}$. Важным классом секториальных операторов являются равномерно эллиптические операторы [20], [21].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2(t))u, \quad (2.14)$$

где $\mathcal{A}_1$ – не зависящий от $t \in \mathbb{R}$ секториальный оператор и $\mathcal{A}_2 \in C(\mathbb{R}, [E])$. Из результатов [6], [20] следует, что уравнение (2.14) удовлетворяет условиям 1)–3), и, следовательно, для уравнений вида (2.14) имеют место аналоги теорем 2.2, 2.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Утверждения, аналогичные теоремам 2.2 и 2.4, имеют место и для разностных уравнений и получаются из результатов § 1, если их применить к линейным неавтономным динамическим системам с дискретным временем, которые порождаются соответствующими разностными уравнениями.

§ 3. Конечномерные системы

Всюду в этом параграфе предполагается, что банахово пространство E конечномерно и ее норма $|\cdot|$ порождена скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е. $|\cdot|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Для уравнений (0.1) в конечномерном пространстве приводится ряд условий, эквивалентных равномерной биустойчивости нулевого решения уравнения (0.1), а

также доказано, что из равномерной устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения (0.1) следует существование репера из ограниченных на $\mathbb{R}$ решений уравнения (0.1) с отделенным от нуля определителем Грамма.

Пусть $x_1, \dots, x_k$ – набор векторов из E . Напомним [22], что *определителем Грамма* $\Gamma(x_1, \dots, x_k)$ векторов $x_1, \dots, x_k$ называют определитель $|\langle x_i, x_j \rangle|_{i,j=1}^n$. Определитель Грамма векторов $x_1, \dots, x_k$ неотрицателен и равен нулю только тогда, когда векторы $x_1, \dots, x_k$ линейно зависимы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *существует число $M > 0$ такое, что выполнено (1.1) при всех $t \in T$ и $(x, y) \in \mathbb{B}$;*
- 2) *$\mathbb{B}$ замкнуто;*
- 3) *$\mathbb{B}$ – подрасслоение F , т.е. $\mathbb{B}$ замкнуто и существует k такое, что $\dim \mathbb{B}_y = k$ при всех $y \in Y$;*
- 4) *все нетривиальные ограниченные на T движения из F отделены от нуля, т.е. $\inf\{|\varphi(t, x, y)| : t \in T\} > 0$ для любого $(x, y) \in \mathbb{B}$ такого, что $x \neq 0$;*
- 5) *существуют $y_0 \in Y$ и базис $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{B}_{y_0}$ такие, что*

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k; t) = \alpha > 0, \quad (3.1)$$

где $\xi_i = (x_i, y_0)$, $i = \overline{1, k}$, и $\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k; t)$ – определитель Грамма векторов $\pi(\xi_i, t) \in E \times Y$, $i = \overline{1, k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) эквивалентны согласно теореме 1.6; согласно теоремам 1.6, 1.8 из 2) следует 3) (обратная импликация очевидна). Эквивалентность условий 3) и 4) вытекает из [16, теорема 8.22].

Пусть теперь выполнено 4), $y_0 \in Y$ и $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{B}_{y_0}$ – некоторый базис в $\mathbb{B}_{y_0}$. Покажем, что имеет место (3.1). Допустим, что это не так; тогда найдется $\{t_n\} \subset T$ такая, что $|t_n| \rightarrow +\infty$ и $\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k; t_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Так как все ненулевые движения из F отделены от нуля, то согласно лемме 1.1 точки $\xi_1, \dots, \xi_k$ и y совместно рекуррентны. Не умаляя общности рассуждений, последовательности $\{\pi(\xi_i, t_n)\}$, $i = \overline{1, k}$, и $\{\sigma(y, t_n)\}$ можно считать сходящимися.

Положим

$$\eta_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(\xi_i, t_n), \quad i = \overline{1, k}, \quad q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(y_0, t_n).$$

Тогда

$$\Gamma(\eta_1, \dots, \eta_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(\pi(\xi_1, t_n), \dots, \pi(\xi_k, t_n)) = 0$$

и, следовательно, векторы $\eta_1, \dots, \eta_k$ линейно зависимы. Из последнего факта, рассуждая так же, как и выше, получаем линейную зависимость $\xi_1, \dots, \xi_k$, что противоречит ее выбору. Таким образом, из 4) следует 5).

Покажем, что из 5) следует 4). Прежде всего покажем, что какова бы ни была точка $q \in Y$, найдется базис $\eta_1, \dots, \eta_k$ такой, что $\Gamma(\eta_1, \dots, \eta_k; t) \geq \alpha > 0$. Действительно, в силу минимальности Y найдется последовательность $\{t_n\} \subset T$ такая, что $\sigma(y_0, t_n) \rightarrow q$. Так как $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{B}_{y_0}$, то последовательности $\{\pi(\xi_i, t_n)\}$, $i = \overline{1, k}$, можно считать сходящимися. Положим $\eta_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(\xi_i, t_n)$; тогда $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathbb{B}_q$ и

$$\Gamma(\eta_1, \dots, \eta_k; t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(\xi_1, \dots, \xi_k; t + t_n) \quad (3.2)$$

при всех $t \in T$. Таким образом, $\eta_1, \dots, \eta_k$ линейно независимы и, следовательно, $n_q = \dim \mathbb{B}_q \geq n_{y_0} = \dim \mathbb{B}_{y_0}$. В силу минимальности Y имеет место и обратное неравенство и, следовательно, $n_q = n_{y_0}$ при всех $q \in Y$. Из этого следует, что $\eta_1, \dots, \eta_k$ является базисом в $\mathbb{B}_q$. Итак, мы показали, что для любого $q \in Y$ существует в $\mathbb{B}_q$ базис $\eta_1, \dots, \eta_k$, удовлетворяющий условию (3.2). Для любого $q \in Y$ и $(x, q) \in \mathbb{B}_q$ имеем $\inf\{|\varphi(t, x, q)| : t \in T\} > 0$. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся $(x_0, q) \in \mathbb{B}_q$, $x_0 \neq 0$, и $|t_n| \rightarrow +\infty$ такие, что

$$|\varphi(t_n, x_0, y)| \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

при $n \rightarrow +\infty$. Пусть $\eta'_1, \dots, \eta'_k$ – базис в $\mathbb{B}_q$ и $\eta'_1 = (x_0, q)$; тогда согласно (3.3) имеем

$$\Gamma(\eta'_1 t_n, \dots, \eta'_k t_n) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Так как $\eta_1, \dots, \eta_k$ и $\eta'_1, \dots, \eta'_k$ – два базиса в $\mathbb{B}_q$, то существует невырожденное линейное преобразование, переводящее первый базис во второй и наоборот. Из (3.4) следует, что аналогичное соотношение имеет место и для базиса $\eta_1, \dots, \eta_k$, а это противоречит неравенству (3.2). Полученное противоречие завершает доказательство импликации 5) $\Rightarrow$ 4). Теорема полностью доказана.

Применяя теорему 3.1 к линейной неавтономной динамической системе, порожденной уравнением (0.1), получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, [E])$ рекуррентна; тогда следующие условия эквивалентны:

- а) множество $\mathbb{B} = \{(u, \mathcal{B}) \in E \times H(\mathcal{A}) \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t, u, \mathcal{B})| < +\infty\}$ замкнуто в $E \times H(\mathcal{A})$;
- б) существует положительное число M такое, что

$$|\varphi(t, u, \mathcal{B})| \leq M|u| \quad (3.5)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $(u, \mathcal{B}) \in \mathbb{B}$;

в) $\mathbb{B}$ замкнуто и все слои $\mathbb{B}_{\mathcal{B}}$ имеют одинаковую размерность, т.е. все уравнения семейства (2.2) имеют одинаковое число линейно независимых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений;

г) все нетривиальные ограниченные на $\mathbb{R}$ решения всех уравнений из H -класса отделены от нуля, т.е.

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t, u, \mathcal{B})| > 0 \quad (3.6)$$

при всех $(u, \mathcal{B}) \in \mathbb{B}$, $u \neq 0$;

д) существует базис $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, где $k = \dim \mathbb{B}_{\mathcal{A}}$ и $\mathbb{B}_{\mathcal{A}} = \{(u, \mathcal{A}) \mid (u, \mathcal{A}) \in \mathbb{B}\}$, из ограниченных на $\mathbb{R}$ решений уравнения (2.1), удовлетворяющий условию $\Gamma(\varphi_1, \dots, \varphi_k; t) \geq \alpha > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, где $\Gamma(\varphi_1, \dots, \varphi_k; t) = |\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle|_{i,j=1}^n$ – определитель Грамма функций $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $\mathcal{A} \in C(\mathbb{R}, [E])$ рекуррентна; тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) все решения всех уравнений из H -класса (2.2) ограничены на $\mathbb{R}$;
- 2) существует $M > 0$ такое, что $|\varphi(t, u, \mathcal{B})| \leq M|u|$ при всех $t \in T$ и $u \in E$;
- 3) все ненулевые решения всех уравнений H -класса (2.2) ограничены на $\mathbb{R}$ и отделены от нуля, т.е. (3.6) имеет место для всех $(u, \mathcal{B}) \in \mathbb{B}$, $u \neq 0$;
- 4) существуют положительные числа C и α такие, что $\|U(t, \mathcal{A})\| \leq C$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $\inf\{|\det U(t, \mathcal{A})| : t \in \mathbb{R}\} = \alpha$, где $U(t, \mathcal{A})$ – оператор Коши уравнения (2.1).

Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 3.2 и того, что $\Gamma(\varphi_1, \dots, \varphi_n; t) = |\det U(t, \mathcal{A})|^2$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – вектор-столбцы матрицы $U(t, \mathcal{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Эквивалентность условий 1) и 2) установлена ранее в работах [1], [2]. Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) уточняет один результат из [2].

ТЕОРЕМА 3.5. Предположим, что все решения всех уравнений из H -класса (2.2) ограничены на $\mathbb{R}_+$; тогда существует $M > 0$ такое, что $|\varphi(t, u, \mathcal{B})| \leq M|u|$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $(u, \mathcal{B}) \in \mathbb{B}$, т.е. множество $\mathbb{B}$ замкнуто.

Сформулированное утверждение вытекает из теорем 1.6 и 1.10.

В заключение приведем некоторые примеры, иллюстрирующие полученные выше результаты.

ПРИМЕР 3.6. Рассмотрим почти периодическую по Бору функцию $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определенную равенством

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{3/2}} \sin \frac{t}{2k+1}, \quad (3.7)$$

и пусть

$$h(t) = \int_0^t a(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^{1/2}} \sin^2 \frac{t}{2(2k+1)}.$$

Заметим, что $a(t + t_n) \rightarrow -a(t)$ равномерно на $\mathbb{R}$, где $t_n = \pi(2n+1)!!$, поэтому $-a \in H(a) = \{a_\tau \mid \tau \in \mathbb{R}\}$. Пользуясь неравенством $|\sin t| \geq \frac{1}{2}|t|$ при $|t| \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^{1/2}} \sin^2 \frac{t}{2(2k+1)} \geq \sum_{k \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|t|}{2} - 1 \right)} \frac{t^2}{8} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{5/2}} \\ &= \frac{t^2}{8} \int_{\frac{1}{2} \left(\frac{|t|}{2} - 1 \right)}^{\infty} \frac{ds}{(2s+1)^{5/2}} = \frac{t^2 2^{3/2}}{24|t|^{3/2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} |t|^{1/2} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

при $|t| \rightarrow +\infty$. Из этого следует, что модули всех ненулевых решений уравнения

$$\dot{x} = a(t)x \quad (3.8)$$

стремятся к $+\infty$ при $|t| \rightarrow +\infty$, а уравнения

$$\dot{y} = b(t)y, \quad (3.9)$$

где $b = -a \in H(a)$, стремятся к нулю.

Приведенный выше пример является незначительной модификацией известного примера Фавара (см. [23] или [24, с. 435]). Отметим, что, в отличие от примера Фавара, в нашем случае решения уравнения (3.9) не только ограничены на $\mathbb{R}$, но и стремятся к нулю при $|t| \rightarrow +\infty$. Таким образом, ненулевое решение уравнения (3.9) асимптотически устойчиво, а нулевое решение уравнения (3.8) этим свойством не обладает и $a \in H(b)$.

ПРИМЕР 3.7. Пусть $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – почти периодическая по Бору функция, определенная равенством

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{3/2}} \cos \frac{t}{2k+1}, \quad (3.10)$$

и пусть

$$h(t) = \int_0^t a(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sin \frac{t}{2k+1}.$$

Отметим, что:

1) $h_n \rightarrow h$ равномерно на любом отрезке $[-l, l]$, $l > 0$, где

$$h_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^{1/2}} \sin \frac{t}{2k+1};$$

2) $h_n(t + t_n) = -h_n(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, где $t_n = \pi(2n+1)!!$;

3) пусть $M_n = \max\{h_n(t) : t \in [0, 2t_n]\}$ и $\tau_n \in [0, 2t_n]$ таково, что $h_n(\tau_n) = M_n$; тогда $M_n \geq \sum_{k=0}^n (2k+1)^{-1/2} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$;

4) так как $\sin x \geq 0$ при $x \in [0, 1]$, то при $n \geq n(t) = \lceil \frac{t-1}{2} \rceil + 1$ имеем $\sin \frac{t}{2k+1} \geq 0$ и $h(t) \geq h_n(t)$ при всех $n \geq n(t)$ и $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $\sup\{h(t) : t \in \mathbb{R}_+\} = +\infty$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3.8), где a определена равенством (3.10). Из 1)–4) следует, что все ненулевые решения уравнения (3.8) не ограничены на $\mathbb{R}$, причем $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t, x, a)| = 0$, где $\varphi(t, x, a) = x \exp \int_0^t a(s) ds$.

ПРИМЕР 3.8. Пусть $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ определена равенством $a(t) = -1 + \sin \sqrt[3]{t}$, $t \in \mathbb{R}$. Для уравнения (3.8) множества

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^+ &= \{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}, b \in H(a)\} = \mathbb{R} \times H(a), \\ \mathbb{B} &= \{(0, b) \mid b \in H(a)\} \cup \{(x, \theta) \mid x \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

где $\theta \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – тождественно равная нулю функция, замкнуты. Таким образом, рекуррентность матрицы $\mathcal{A}$ в теореме 3.2 (соответственно в теореме 3.5) является условием достаточным, но не является необходимым.

Список литературы

1. *Cameron R. H.* Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients // *J. Math. Phys.* 1936. V. 15. P. 73–81.
2. *Johnson R. A.* On a Floquet theory for almost periodic, two-dimensional linear systems // *J. Differ. Equat.* 1980. V. 37. P. 184–205.
3. *Чебан Д. Н.* О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы // *Дифференц. уравн.* 1988. Т. 24. № 9. С. 1564–1576.
4. *Сибирский К. С., Шубэ А. С.* Полудинамические системы. Кишинев: Штиинца, 1987.
5. *Бронштейн И. У.* Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975.
6. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
7. *Жиков В. В.* К проблеме существования почти периодических решений дифференциальных и операторных уравнений // *Научн. тр. ВВПИ. Математика.* Т. 8. Владимир, 1969. С. 94–188.
8. *Жиков В. В.* Монотонность в теории почти периодических решений нелинейных операторных уравнений // *Матем. сб.* 1978. Т. 90. № 2. С. 214–228.
9. *Saperstone S. H.* Semidynamical systems in infinite dimensional spaces. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1981.
10. *Чебан Д. Н.* Глобальные аттракторы бесконечномерных динамических систем. I // *Изв. АН РМ. Математика.* 1994. Т. 2(15). С. 12–21.
11. *Чебан Д. Н., Факиз Д. С.* Глобальные аттракторы дисперсных динамических систем. Кишинев: Sigma, 1994.
12. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
13. *Ладыженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // *УМН.* 1987. Т. 42. № 6(258). С. 25–60.
14. *Sacker R. J., Sell G. R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems. I // *J. Differ. Equat.* 1974. V. 15. P. 429–458.
15. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975.
16. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. Кишинев: Штиинца, 1984.
17. *Чебан Д. Н.* Теория линейных дифференциальных уравнений (избранные главы). Кишинев: Штиинца, 1980.
18. *Чебан Д. Н.* Признаки конвергентности нелинейных систем по первому приближению // *Дифференциальные уравнения и их инварианты. Математические исследования.* Вып. 88. Кишинев: Штиинца, 1986. С. 144–150.
19. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
20. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
21. *Izé A. F.* On a topological method for the analysis of the asymptotic behavior of dynamical systems and processes // *Complex analysis, functional analysis and approximation theory.* North-Holland, 1986. P. 109–128.
22. *Белман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
23. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presque-périodiques // *Acta math.* 1927. V. 51. P. 31–81.
24. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

Поступило в редакцию
18.III.1996
30.I.1997