Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Абрашкин, Фильтрация ветвления группы Галуа локального поля. III, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 5, 3–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 08:24:21

УДК 512.7

В. А. Абрашкин

Фильтрация ветвления группы Галуа локального поля. III

Пусть K – полное дискретно нормированное поле характеристики $p > 0$ с конечным полем вычетов, и пусть $\Gamma(p)$ – группа Галуа его максимального p -расширения. Основной результат работы описывает образ фильтрации ветвления группы Галуа поля K в $\Gamma(p)$ по модулю подгруппы коммутаторов порядка $\geq p$ в терминах образующих группы $\Gamma(p)$.

Библиография: 9 наименований.

Пусть K – полное дискретно нормированное поле характеристики $p > 0$ с конечным полем вычетов $k \simeq \mathbb{F}_{p^{N_0}}$. Мы предполагаем фиксированным некоторый униформизирующий элемент t_0 поля K и используем отождествление $K = k((t_0))$. Выберем сепарабельное замыкание K_{sep} поля K и положим $\Gamma = \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$. Эта группа имеет убывающую фильтрацию нормальных подгрупп $\{\Gamma^{(v)}\}_{v>0}$, состоящую из подгрупп высшего ветвления, снабженных верхней нумерацией (см. [8, гл. III]). Если $\Gamma(p)$ является группой Галуа максимального p -расширения поля K , то $\Gamma(p)$ – свободная про- p -группа (см. [9]), и возникает проблема описания индуцированной фильтрации ветвления $\{\Gamma(p)^{(v)}\}_{v>0}$ в терминах образующих группы $\Gamma(p)$. В настоящей работе мы применяем метод, использованный в работах [1], [2], для получения этого описания по модулю замыкания $C_p(\Gamma(p))$ подгруппы коммутаторов порядка $\geq p$.

Для этого мы строим (см. п. 5.1) просвободную алгебру Ли $\mathcal{L}^0$ над $\mathbb{Z}_p$ и отождествление

$$\bar{\psi}: \Gamma(p)/C_p(\Gamma(p)) \simeq G(\tilde{\mathcal{L}}^0),$$

где $\tilde{\mathcal{L}}^0 = \mathcal{L}^0/C_p(\mathcal{L}^0)$ является максимальным фактором класса нильпотентности $< p$ и $G(\tilde{\mathcal{L}}^0)$ – про- p -группа, полученная из элементов $\tilde{\mathcal{L}}^0$ с помощью закона композиции Кэмпбелла–Хаусдорфа. Конструкция этого отождествления основана на нильпотентной версии теории Артина–Шрейера из [2] и зависит от сделанного выше выбора униформизирующего элемента t_0 , а также элемента $\alpha \in W(k)$ такого, что $\text{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}_p} \alpha = 1$, где K_0 – поле частных кольца векторов Витта $W(k)$.

Проконечная $W(k)$ -алгебра Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 \otimes W(k)$ имеет естественную систему образующих D_{an} , где $a \in \mathbb{Z}^0(p) = \{m \in \mathbb{N} \mid (m, p) = 1\} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $D_{a, n+N_0} = D_{an}$ и $\sigma D_{an} = D_{a, n+1}$ (σ – автоморфизм Фробениуса в $W(k)$). Если $A \subset \mathbb{Z}^0(p)$ – конечное подмножество, рассмотрим свободную $W(k)$ -подалгебру Ли $\mathcal{L}(A)$ в $\mathcal{L}$, порожденную всеми D_{an} с $a \in A$. Тогда $\mathcal{L} = \varprojlim_A \mathcal{L}(A)$ и $\mathcal{L}^0 = \varprojlim_A \mathcal{L}^0(A)$, где $\mathcal{L}^0(A) = \mathcal{L}^0 \cap \mathcal{L}(A)$ является $\mathbb{Z}_p$ -подалгеброй Ли в $\mathcal{L}^0$. Для $v > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ мы определяем в §2 идеалы $\mathcal{L}_N^0(A, v)$ алгебры Ли $\mathcal{L}^0(A)$ как минимальные идеалы, содержащие идеал коммутаторов порядка $\geq p$ и такие, что $\mathcal{L}_N^0(A, v) \otimes W(k)$ содержит некоторые элементы $\mathcal{F}_{\gamma, -N}$

для всех $\gamma \geq v$. Эти элементы $\mathcal{F}_{\gamma, -N}$ определяются явными выражениями как линейные комбинации с некоторыми p -адическими коэффициентами коммутаторов $[\dots [D_{a_1 n_1}, D_{a_2 n_2}], \dots, D_{a_s n_s}]$ таких, что $1 \leq s < p$, $a_1, \dots, a_s \in A$, $n_1 \geq \dots \geq n_s \geq -N$ и $a_1 p^{n_1} + \dots + a_s p^{n_s} = \gamma$.

В § 2 мы также показываем, что последовательность идеалов $\{\mathcal{L}_N^0(A, v)\}_N$ стабилизируется при $N \rightarrow \infty$ и, следовательно, определяет идеал $\mathcal{L}^0(A, v)$. Это дает нам для всех $v > 0$ идеалы $\mathcal{L}^0(v) = \varprojlim_{A \subset \mathbb{Z}^0(p)} \mathcal{L}^0(A, v)$ алгебры Ли $\mathcal{L}^0$, и мы получаем (теорема А из п. 5.3) следующее описание фильтрации ветвления по модулю p -х коммутаторов:

для любого $v > 0$

$$\bar{\psi}(\Gamma(p)^{(v)} \bmod C_p(\Gamma(p))) = G(\tilde{\mathcal{L}}^0(v)),$$

где $\tilde{\mathcal{L}}^0(v) = \mathcal{L}^0(v)/C_p(\mathcal{L}^0)$.

Теорема В из п. 5.3 дает также конструкцию этих идеалов $\tilde{\mathcal{L}}^0(v)$, не использующую операцию перехода к проективному пределу.

Приведенное выше описание фильтрации ветвления является следствием основной теоремы из § 4, которая дает описание образа фильтрации ветвления $\{\Gamma^{(v)}\}_{v>0}$ относительно произвольного эпиморфизма групп $\Gamma \rightarrow G(L)$, где L – конечная алгебра Ли над $\mathbb{Z}_p$ класса нильпотентности $< p$ и $G(L)$ – p -группа, полученная из L с помощью закона композиции Кэмпбелла–Хаусдорфа. Этот результат доказывается с помощью индукции по величине класса нильпотентности и экспоненты L , а также трансфинитной индукции по значениям $v > 0$. Идея доказательства основана на следующем специальном свойстве локальных полей характеристики p : если K' – вполне разветвленное конечное расширение K в K_{sep} , то $K \simeq K'$, и, следовательно, существует изоморфизм $\text{Gal}(K_{\text{sep}}/K) \simeq \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K')$, совместимый с фильтрациями ветвления. После подходящего выбора вспомогательного поля K' индуктивный шаг (по модулю некоторых вычислений с формулой Кэмпбелла–Хаусдорфа из § 3) использует только хорошо известную информацию о ветвлении расширений Артина–Шрейера степени p поля K' .

Доказательства основных утверждений настоящей работы полностью основаны на конструкциях работ [1], [2]. Отметим, что в этих работах изучалась фильтрация ветвления по модулю $I^p C_p(I)$ и по модулю $C_3(I)$ соответственно, где $I = \bigcup_{v>0} \Gamma^{(v)}$ – подгруппа высшего ветвления в Γ , а общий результат о фильтрации ветвления по модулю $C_p(I)$ был лишь анонсирован и применен для описания образа фильтрации ветвления в группе $\Gamma(p)/C_p(\Gamma(p))$. В настоящей работе мы применяем наш метод непосредственно к группе $\Gamma(p)/C_p(\Gamma(p))$ (упомянутое выше описание по модулю $C_p(I)$ может быть отсюда легко восстановлено). Заметим наконец, что используемый метод при необходимости может быть применен также в случае основного поля K с произвольным совершенным полем вычетов.

Часть этой работы была написана в течение моего пребывания в IAS, Princeton (a grant to the Institute for Advanced Study by The Ambrose Monell Foundation), окончательный вариант работы был подготовлен в Arbeitsgruppe “Algebraische Geometrie und Zahlentheorie” (Max-Planck-Gesellschaft, Berlin). Хочется выразить благодарность этим организациям за гостеприимство. Я также благодарен

Г. Абрамову за плодотворные дискуссии и указание мне ряда неточностей в первоначальной версии работы.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Конструкция подъемов. Мы используем следующую конструкцию подъемов из работы [2], являющуюся специальным случаем общей конструкции из работы [3].

Для поля $\mathcal{E}$ такого, что $K \subset \mathcal{E} \subset K_{\text{sep}}$, и натурального числа N рассмотрим $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$ -алгебру

$$O_N(\mathcal{E}) = W_N(\sigma^{N-1}\mathcal{E})[t] \subset W_N(\mathcal{E}),$$

где W_N – функтор векторов Витта длины N , σ – морфизм Фробениуса, а $t = [t_0] \in W_N(K) \subset W_N(\mathcal{E})$ – представитель Тейхмюллера для t_0 . Алгебра $O_N(\mathcal{E})$ является подъемом поля $\mathcal{E}$ по модулю p^N , т.е. $O_N(\mathcal{E})$ – плоская $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$ -алгебра такая, что $O_N(\mathcal{E})/pO_N(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Отметим, что ее конструкция существенно зависит от первоначального выбора унифицирующего элемента поля K . Для любого $N \in \mathbb{N}$ мы имеем эпиморфизм алгебр редукции по модулю p^N

$$O_{N+1}(\mathcal{E}) \longrightarrow O_N(\mathcal{E}) = O_{N+1}(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}.$$

Если $O(\mathcal{E}) = \varprojlim O_N(\mathcal{E})$ по отношению к этим эпиморфизмам, то $O(\mathcal{E})$ является кольцом нормирования абсолютно неразветвленного поля с полем вычетов $\mathcal{E}$. Морфизм Фробениуса векторов Витта индуцирует систему морфизмов Фробениуса $\sigma = \sigma_{\mathcal{E}}: O(\mathcal{E}) \rightarrow O(\mathcal{E})$, функториально зависящую от поля $\mathcal{E}$. Отметим, что $O(K) = W(k)((t))$ и $\sigma t = t^p$. Очевидно, существует естественное действие группы Γ на $O(K_{\text{sep}})$. Если H – открытая подгруппа в Γ и $K_{\text{sep}}^H = \mathcal{E}$, то $O(K_{\text{sep}})^{\Gamma} = O(\mathcal{E})$.

1.2. Группы и алгебры Ли. Пусть $L(X, Y)$ – пополнение свободной алгебры Ли с образующими X и Y по отношению к ее нижнему центральному ряду. Обозначим через $A(X, Y)$ алгебру Магнуса от переменных X и Y с целыми коэффициентами (т.е. пополнение по степеням пополюющего идеала свободной ассоциативной алгебры, порожденной X и Y). Тогда имеется естественное вложение $L(X, Y) \subset A(X, Y)$ и в $A(X, Y) \hat{\otimes} \mathbb{Q}$ согласно формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа выполнено тождество

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp(X \circ Y),$$

где $X \circ Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots \in L(X, Y) \hat{\otimes} \mathbb{Q}$. Отметим, что если $c_i(X, Y)$ – компонента $X \circ Y$ общей степени i , то $c_i(X, Y)$ является p -целой при $1 \leq i < p$.

Рассмотрим категорию $\text{Lie}(p)$ конечных алгебр Ли над $\mathbb{Z}_p$ класса нильпотентности $< p$ и категорию $\text{Gr}(p)$ конечных p -групп с тем же условием на их класс нильпотентности. Если $s \geq 1$ и $L \in \text{Lie}(p)$, то мы будем использовать обозначение $C_s(L)$ для идеала коммутаторов порядка $\geq s$ в L . Аналогично, если $G \in \text{Gr}(p)$, то $C_s(G)$ будет обозначать нормальную подгруппу коммутаторов порядка $\geq s$ в G . Таким образом, в этих обозначениях мы всегда имеем $C_p(L) = 0$ и $C_p(G) = e$, если $L \in \text{Lie}(p)$ и $G \in \text{Gr}(p)$.

Если $L \in \text{Lie}(p)$, то обозначим через $G(L)$ p -группу с законом композиции $(l_1, l_2) \mapsto l_1 \circ l_2$ на элементах l_1, l_2 алгебры Ли L . Соответствие $L \mapsto G(L)$ задает функтор $G: \text{Lie}(p) \rightarrow \text{Gr}(p)$, и этот функтор является эквивалентностью категорий (см. [5]). Нам понадобится приводимая ниже интерпретация этой эквивалентности в терминах обертывающих алгебр объектов категории $\text{Lie}(p)$. Наши аргументы основаны на информации о “dimension subgroups modulo n ” из работы [7].

Пусть $H \in \text{Gr}(p)$ и $J_{\mathbb{Z}}[H]$ – пополняющий идеал группового кольца $\mathbb{Z}[H]$. Согласно основному результату работы [7] для $1 \leq s \leq p$ выполнено

$$H \cap (1 + J_{\mathbb{Z}}[H]^s) = C_s(H).$$

Если $J[H]$ – пополняющий идеал группового кольца $\mathbb{Z}_p[H]$, то $J_{\mathbb{Z}}[H]^s = J[H]^s \cap \mathbb{Z}[H]$ для $s \in \mathbb{N}$, потому что $\mathbb{Z}_p$ является плоским модулем над $\mathbb{Z}$. Это дает для $1 \leq s \leq p$, что

$$H \cap (1 + J[H]^s) = C_s(H). \quad (1)$$

В частности, $H \cap (1 + J[H]^p) = 1$, и мы можем отождествить H с ее образом в $\mathbb{Z}_p$ -алгебре $\mathbb{Z}_p[H]/J[H]^p$.

Очевидно, что усеченный логарифм

$$\widetilde{\log}(1+x) = \sum_{1 \leq n < p} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

индуцирует взаимно однозначное отображение множеств из $(1+J[H]) \bmod J[H]^p$ в $J[H]/J[H]^p$. Обратное отображение индуцировано усеченной экспонентой

$$\widetilde{\exp}(x) = \sum_{0 \leq n < p} \frac{x^n}{n!}.$$

Отметим, что $\widetilde{\log}$ индуцирует для $1 \leq s < p$ изоморфизм мультипликативной группы $(1+J[H]^s) \bmod J[H]^{s+1}$ и аддитивной группы $J[H]^s \bmod J[H]^{s+1}$.

Рассмотрим множество $L(H) = \widetilde{\log}(H) \subset \mathbb{Z}_p[H]/J[H]^p$. Проверим, что $L(H)$ является подалгеброй Ли алгебры $\mathbb{Z}_p[H]/J[H]^p$, т.е. множество $L(H)$ замкнуто относительно линейных операций и скобки Ли в $\mathbb{Z}_p[H]/J[H]^p$.

Если $l = \widetilde{\log} h$, где $h \in H \subset \mathbb{Z}_p[H]/J[H]^p$, то для любого $t \in \mathbb{Z}_p$ мы имеем

$$tl = t \widetilde{\log} h = \widetilde{\log}(h^t) \in L(H).$$

Если $l_1 = \widetilde{\log}(h_1)$, $l_2 = \widetilde{\log}(h_2) \in L(H)$ и $t \in \mathbb{Z}_p$, то

$$\widetilde{\log}(h_1^t h_2^t) = \widetilde{\log}(\widetilde{\exp}(tl_1) \widetilde{\exp}(tl_2)) = \sum_{1 \leq i < p} t^i c_i(l_1, l_2) \in L(H).$$

Это дает $c_1(l_1, l_2) = l_1 + l_2 \in L(H)$ и $c_2(l_1, l_2) = \frac{1}{2}[l_1, l_2] \in L(H)$.

Если $L \in \text{Lie}(p)$ и $H = G(L)$, то отображение

$$\widetilde{\log}: L = H \longrightarrow L(H)$$

является изоморфизмом алгебр Ли. Следовательно, функтор $H \mapsto L(H)$ является обратным к функтору $L \mapsto G(L)$.

Пусть $A(L)$ – обертывающая алгебра для L . Из ее универсального свойства следует, что определенное выше вложение L в $\mathbb{Z}_p[H]/J[H]^p$ индуцирует морфизм алгебр

$$\alpha: A(L) \longrightarrow \mathbb{Z}_p[H]/J[H]^p.$$

Если $J(L)$ – пополняющий идеал $A(L)$, то для $1 \leq s \leq p$

$$\alpha(J(L)^s) = J[H]^s/J[H]^p,$$

и равенство (1) влечет для $1 \leq s \leq p$, что

$$L \cap J(L)^s = C_s(L)$$

(в действительности $\alpha \bmod J(L)^p$ является изоморфизмом алгебр $A(L)/J(L)^p$ и $\mathbb{Z}_p[H]/J[H]^p$).

В результате мы получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если $L \in \text{Lie}(p)$, то:*

(а) *естественное вложение $L \rightarrow A(L)$ индуцирует для $s \geq 1$ инъективные морфизмы*

$$C_s(L)/C_{s+1}(L) \longrightarrow J(L)^s/J(L)^{s+1};$$

(б) *усеченная экспонента $\widetilde{\text{exp}}$ индуцирует инъективное отображение*

$$\widetilde{\text{exp}}: L \longrightarrow A(L)/J(L)^p;$$

(с) *соответствие $L \mapsto \widetilde{\text{exp}}(L) \bmod J(L)^p$ дает конструкцию эквивалентности $G: \text{Lie}(p) \rightarrow \text{Gr}(p)$ в терминах обертывающих алгебр объектов категории $\text{Lie}(p)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Части (б) и (с) приведенного выше предложения являются формальными следствиями части (а). Если все $C_s(L)$ являются прямыми слагаемыми $\mathbb{Z}_p$ -модуля L , то утверждение (а) может быть доказано непосредственно с помощью специального выбора системы образующих в L (см. [6], где был рассмотрен случай алгебр Ли над полем; аналогичные соображения были использованы в [1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно показать, что в обозначениях предложения 1 группа $\widetilde{\text{exp}}(L)$ является группой “диагональных элементов mod $\deg p$ ”, т.е. мультипликативной группой элементов $a \in A(L) \bmod J(L)^p$ таких, что

$$\Delta \hat{a} \equiv \hat{a} \otimes \hat{a} \bmod J(L \oplus L)^p,$$

где $\Delta: A(L) \rightarrow A(L \oplus L) = A(L) \otimes A(L)$ – диагональный морфизм и $\hat{a} \in A(L)$ таков, что $\hat{a} \bmod J(L)^p = a$.

Нам понадобится также следующее небольшое обобщение изложенной выше конструкции.

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, являющееся плоским $\mathbb{Z}_p$ -модулем. Если $L \in \text{Lie}(p)$, то $A(L_R) = A(L) \otimes R$ является обертывающей алгеброй R -алгебры Ли $L_R = L \otimes R$ и $J(L_R) = J(L) \otimes R$ является ее пополняющим идеалом.

Используя свойство плоскости модуля R и предложение 1, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (а) *Естественные отображения $C_s(L_R)/C_{s+1}(L_R) \rightarrow J(L_R)^s/J(L_R)^{s+1}$ являются инъективными.*

(б) $\widetilde{\text{exp}}$ индуцирует вложение $\widetilde{\text{exp}}: L_R \rightarrow A(L_R)/J(L_R)^p$.

(с) *Если L_{R*} является алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_p$, полученной из L_R с помощью ограничения скаляров $\mathbb{Z}_p \rightarrow R$, то $\widetilde{\text{exp}}(L_R) \simeq G(L_{R*})$, и $\widetilde{\text{exp}}$ индуцирует биекцию множества идеалов алгебры Ли L_{R*} и множества нормальных подгрупп группы $\widetilde{\text{exp}}(L_R)$.*

1.3. Нильпотентная теория Артина–Шрейера. Пусть L – конечная алгебра Ли над $\mathbb{Z}_p$ класса нильпотентности $< p$. Нильпотентная версия теории Артина–Шрейера из работы [2] дает следующие свойства:

а) если $\psi \in \text{Hom}(\Gamma, G(L))$, то существуют $f \in G(L \otimes O(K_{\text{sep}}))$ и $e \in G(L \otimes O(K))$ такие, что $\sigma f = f \circ e$ и $\psi(\tau) = (\tau f) \circ (-f)$ для любого $\tau \in \Gamma$;

б) если $e_1 \in G(L \otimes O(K))$, то существует $f_1 \in G(L \otimes O(K_{\text{sep}}))$ такой, что $\sigma f_1 = f_1 \circ e_1$, и соответствие $\tau \mapsto (\tau f_1) \circ (-f_1)$ определяет гомоморфизм групп $\psi_1: \Gamma \rightarrow G(L)$; класс сопряженности ψ_1 не зависит от выбора f_1 ;

с) в использованных выше обозначениях $\psi = \psi_1$, если и только если существует $c \in G(L \otimes O(K))$ такое, что $f_1 = f \circ c$ и $e_1 = (-c) \circ e \circ (\sigma c)$.

Пусть $\mathbb{Z}^+(p) = \{a \in \mathbb{N} \mid (a, p) = 1\}$ и $\mathbb{Z}^0(p) = \mathbb{Z}^+(p) \cup \{0\}$. Выберем $\alpha \in W(k)$ такое, что $\text{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}_p}(\alpha) = 1$ (K_0 – поле частных $W(k)$).

ЛЕММА. *Если $e \in G(L \otimes O(K))$, то существует $c \in G(L \otimes O(K))$ такое, что*

$$(-c) \circ e \circ (\sigma c) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^0(p)} t^{-a} D_{a0},$$

где все $D_{a0} \in L \otimes W(k)$, $\alpha^{-1} D_{00} \in L$ и множество

$$A = \{a \in \mathbb{Z}^0(p) \mid D_{a0} \neq 0\}$$

является конечным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по $s \geq 1$ для доказательства этого утверждения по модулю $C_s(L) \otimes O(K)$. Если $s = 1$, то доказывать нечего.

Предположим, что

$$(-c) \circ e \circ (\sigma c) \equiv \sum t^{-a} D_{a0} \pmod{C_s(L)},$$

где $s \geq 1$, $c \in G(L \otimes O(K))$ и элементы $D_{a0} \pmod{C_s(L \otimes W(k))}$ удовлетворяют утверждению нашей леммы. Тогда

$$(-c) \circ e \circ (\sigma c) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^0(p)} t^{-a} D_{a0} + \sum_{b > -\infty} t^b l_b \pmod{C_{s+1}(L \otimes W(k))},$$

где все $l_b \in C_s(L \otimes W(k))$.

Если $l_+ = \sum_{b > 0} t^b l_b$, то $l_+ = \sigma l'_+ - l'_+$, где $l'_+ = -\sum_{n \geq 0} \sigma^n l_+$.

Рассмотрим $l_- = \sum_{b < 0} t^b l_b$. Эта сумма является конечной. Если $b < 0$, то существуют единственные $a_b \in \mathbb{Z}^+(p)$ и $n_b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ такие, что $-b = a_b p^{n_b}$. Пусть

$$l_-^{(b)} = \sum_{0 \leq n < n_b} t^{-a_b p^n} \sigma^{n-n_b} l_b.$$

Тогда $t^b l_b = \sigma(l_-^{(b)}) - l_-^{(b)} + t^{-a_b}(\sigma^{-n_b} l_b)$. Таким образом, если $l'_- = \sum_{b < 0} l_-^{(b)}$, то

$$l_- = \sigma l'_- - l'_- + \sum_{b < 0} t^{-a_b}(\sigma^{-n_b} l_b).$$

Если $l_0 = \sum_i w_i l_{0i}$, где все $w_i \in W(k)$ и $l_{0i} \in L$, то

$$w_i = \alpha \operatorname{Tr} w_i + \sigma w'_i - w'_i$$

для некоторых $w'_i \in W(k)$, потому что $H^1(\operatorname{Gal}(k/\mathbb{F}_p), W(k)) = 0$ (здесь и далее $\operatorname{Tr} = \operatorname{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}_p}$).

Таким образом, если $l'_0 = \sum_i w'_i l_{0i}$, то $l_0 = \sigma l'_0 - l'_0 + \alpha \sum_i \operatorname{Tr}(w_i) l_{0i}$.

Итак, для $c' = c + l'_+ + l'_0 + l'_-$ мы имеем

$$(-c') \circ e \circ (\sigma c') \equiv \sum_{a \in \mathbb{Z}^0(p)} t^{-a} D'_{a0} \pmod{C_{s+1}(L)},$$

где $\alpha^{-1} D'_{00} = \alpha^{-1} D_{00} + \sum_i (\operatorname{Tr} w_i) l_{0i} \in L$, и для $a \in \mathbb{Z}^+(p)$

$$D'_{a0} = D_{a0} + \sum_{a_b=a} \sigma^{-n_b} l_b.$$

Лемма доказана.

В обозначениях леммы положим $D_0 = \alpha^{-1}D_{00}$. Для любого $\psi \in \text{Hom}(\Gamma, G(L))$ приведенная выше лемма влечет существование $f \in G(L \otimes O(K_{\text{sep}}))$ такого, что

$$\sigma f = f \circ \left(\sum_{a \in \mathbb{Z}^0(p)} t^{-a} D_{a0} \right),$$

и $\psi(\tau) = (\tau f) \circ (-f)$ для любого $\tau \in \Gamma$. Выберем базис $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_0}$ в $W(k) \simeq W(\mathbb{F}_{p^{N_0}})$ над $W(\mathbb{F}_p)$. Если для $1 \leq i \leq N_0$ и $a \in \mathbb{Z}^+(p)$ элементы $D_a^{(i)} \in L$ таковы, что $D_{a0} = \sum_{1 \leq i \leq N_0} \alpha_i D_a^{(i)}$, то группа $\text{Im } \psi \subset G(L)$ порождена D_0 и всеми $D_a^{(i)}$, где $1 \leq i \leq N_0$ и $a \in \mathbb{Z}^+(p)$. Таким образом, ψ является эпиморфизмом групп тогда и только тогда, когда элементы D_0 и $D_a^{(i)}$ порождают алгебру Ли L (или, эквивалентно, элементы D_0 и $\sigma^n D_{a0}$, где $a \in \mathbb{Z}^+(p)$ и $0 \leq n < N_0$, порождают $W(k)$ -алгебру Ли $L \otimes W(k)$).

1.4. Структурные константы $\eta(n_1, \dots, n_s)$. Если $1 \leq s < p$ и $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$, определим константы $\eta(n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}_p$ следующим образом.

Если существуют $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_l = s$ такие, что $n_1 = \dots = n_{s_1} > n_{s_1+1} = \dots = n_{s_2} > \dots > n_{s_{l-1}+1} = \dots = n_{s_l} (= n_s)$, то положим

$$\eta(n_1, \dots, n_s) = \frac{1}{s_1! (s_2 - s_1)! \dots (s_l - s_{l-1})!}.$$

В противном случае положим $\eta(n_1, \dots, n_s) = 0$. Мы расширим это определение, положив для $s = 0$ $\eta(n_1, \dots, n_s) = \eta(\emptyset) = 1$.

ЛЕММА. (а) Если $0 \leq s_1 \leq s < p$, то для любых $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$ имеет место тождество

$$\eta(n_1, \dots, n_{s_1}) \eta(n_{s_1+1}, \dots, n_s) = \sum_{\pi \in I_{s_1 s}} \eta(n_{\pi(1)}, \dots, n_{\pi(s)}),$$

где $I_{s_1 s}$ – подмножество подстановок π порядка s таких, что $\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(s_1)$ и $\pi^{-1}(s_1 + 1), \dots, \pi^{-1}(s)$ являются возрастающими последовательностями в $[1, s]$ (т.е. $I_{s_1 s}$ – множество всех “вставок” упорядоченного множества $\{1, \dots, s_1\}$ в упорядоченное множество $\{s_1 + 1, \dots, s\}$).

(б) Если $0 \leq s < p$ и $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$, то

$$\sum_{0 \leq t \leq s} (-1)^t \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) = \delta_{0s},$$

где δ – символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $a \leq n_1, \dots, n_s \leq b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим свободную алгебру Ли L над $\mathbb{Z}_p$ с образующими D_n , где $a \leq n \leq b$. Обозначим через A обертывающую алгебру для L , а через J – ее пополюющий идеал. Любой элемент из $A \bmod J^p$ однозначно представим в виде линейной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$ произведений $D_{i_1} \dots D_{i_s}$, где $0 \leq s < p$ и $i_1, \dots, i_s \in [a, b]$. Аналогично, любой элемент из $A \otimes A \bmod (1 \otimes J + J \otimes 1)^p$ может быть однозначно представлен в виде $\mathbb{Z}_p$ -линейной комбинации $D_{i_1} \dots D_{i_{s_1}} \otimes D_{j_1} \dots D_{j_{s_2}}$, где $s_1, s_2 \geq 0$, $s_1 + s_2 < p$ и $i_1, \dots, i_{s_1}, j_1, \dots, j_{s_2} \in [a, b]$.

Рассмотрим диагональный морфизм алгебр

$$\Delta: A \bmod J^p \longrightarrow A \otimes A \bmod (1 \otimes J + J \otimes 1)^p,$$

заданный соответствиями $D_n \mapsto 1 \otimes D_n + D_n \otimes 1$ для всех $n \in [a, b]$.

Пусть $\varepsilon = \widehat{\exp}(D_b) \widehat{\exp}(D_{b-1}) \dots \widehat{\exp}(D_a)$, где $\widehat{\exp}(x) = \sum_{0 \leq i < p} x^i / i!$ – усеченная экспонента. Из определения констант $\eta(n_1, \dots, n_s)$ (см. выше) следует, что

$$\varepsilon \bmod J^p = \sum \eta(n_1, \dots, n_s) D_{n_1} \dots D_{n_s},$$

где суммирование ведется по $0 \leq s < p$ и $n_1, \dots, n_s \in [a, b]$.

Теперь тождество (а) вытекает из свойства

$$\Delta \varepsilon \equiv \varepsilon \otimes \varepsilon \bmod (1 \otimes J + J \otimes 1)^p.$$

Тождество (b) получается из разложения

$$\varepsilon^{-1} \equiv \widehat{\exp}(-D_a) \dots \widehat{\exp}(-D_b) \bmod J^p = \sum_{0 \leq s < p} (-1)^s \eta(n_s, \dots, n_1) D_{n_1} \dots D_{n_s}$$

и свойства $\varepsilon^{-1} \varepsilon \equiv 1 \bmod J^p$.

1.5. Поле $K(N, r^*)$. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $q = p^N$ и $r^* > 0$ таково, что $r^*(q - 1) = b^* \in \mathbb{Z}^+(p)$. Мы будем использовать следующее хорошо известное обобщение экспоненты Артина–Хассе

$$E(\alpha, X) = \exp \left(\alpha X + (\sigma \alpha) X^p / p + \dots + (\sigma^i \alpha) X^{p^i} / p^i + \dots \right) \in W(k)[[X]],$$

где $\alpha \in W(k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует расширение $K(N, r^*)$ поля K такое, что:

- (a) $[K(N, r^*) : K] = q$;
- (b) функция Эрбрана φ расширения $K(N, r^*)/K$ есть

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leq x \leq r^*, \\ \frac{x - r^*}{q} + r^* & \text{для } x \geq r^*; \end{cases}$$

(с) существует униформизирующий элемент t'_0 поля $K(N, r^*)$ такой, что

$$t_0 = t_0'^q E(1, t_0'^{b^*})^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r^* = m/n$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $(m, n) = 1$. Тогда $m, n \in \mathbb{Z}^+(p)$, $n \mid (q-1)$ и $m \mid b^*$. Возьмем $u_0 \in K_{\text{sep}}$ такое, что $u_0^n = t_0$. Тогда $L = K(u_0)$ является вполне разветвленным расширением K и $[L : K] = n$. Возьмем $U \in K_{\text{sep}}$ такое, что $U^q + r^*U = u_0^{-m}$. Тогда $L' = L(U)$ – вполне разветвленное расширение L , $[L' : L] = q$ и $L' = K(U)$. Положим $K' = K(U^n) \subset L'$. Нам надо проверить, что поле K' может быть взято в качестве $K(N, r^*)$, т.е. оно удовлетворяет свойствам (а)–(с) нашего предложения.

ЛЕММА. $[L' : K'] = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через K_{ur} максимальное неразветвленное расширение K в K_{sep} и положим $L_{\text{ur}} = LK_{\text{ur}}$, $K'_{\text{ur}} = K'K_{\text{ur}}$ и $L'_{\text{ur}} = L'K_{\text{ur}}$. Так как L вполне разветвлено над K , то достаточно доказать, что $[L'_{\text{ur}} : K'_{\text{ur}}] = n$.

Очевидно, L'_{ur} – расширение Галуа над K_{ur} и существует $\tau \in \text{Gal}(L'_{\text{ur}}/K_{\text{ur}})$ такое, что $\tau^n = \text{id}$ и $\tau u_0 = \gamma u_0$, где $\gamma \in K_{\text{ur}}$ – примитивный корень из единицы порядка n . Так как $n \mid (q-1)$, мы имеем $\gamma^q = \gamma$ и, следовательно, $\tau U = \gamma^{-m}U + \alpha$, где $\alpha \in K_{\text{ur}}$ таков, что $\alpha^q + r^*\alpha = 0$. Мы можем считать, что $n > 1$. Если $\beta = \alpha/(\gamma^{-m} - 1)$, то $\beta^q + r^*\beta = 0$, и для $U_1 = U + \beta$ мы имеем $U_1^q + r^*U_1 = u_0^{-m}$ и $\tau U_1 = \gamma^{-m}U_1$.

Следовательно, $L'_{\text{ur}} = L_{\text{ur}}(U_1) = K_{\text{ur}}(U_1)$ имеет степень n над $K_{\text{ur}}(U_1^n)$. Применяя автоморфизм группы $\text{Gal}(L'_{\text{ur}}/K_{\text{ur}})$, который переводит U_1 в U , мы получаем $[L'_{\text{ur}} : K'_{\text{ur}}] = n$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что K' является вполне разветвленным расширением K степени q .

Расширения L/K и L'/K' являются слабо разветвленными расширениями степени n , следовательно, их функции Эрбрана совпадают:

$$\varphi_{L/K}(x) = \varphi_{L'/K'}(x) = \frac{x}{n}$$

для $x \geq 0$. Для расширения L'/L мы имеем

$$\varphi_{L'/L} = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leq x \leq m, \\ (x-m)/q + m & \text{для } x \geq m. \end{cases}$$

Из свойства композиции функции Эрбрана мы получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{L'/K}(x) &= \varphi_{L/K}(\varphi_{L'/L}(x)) = (1/n) \varphi_{L'/L}(x), \\ \varphi_{L/K}(x) &= \varphi_{K'/K}(\varphi_{L'/K'}(x)) = \varphi_{K'/K}(x/n). \end{aligned}$$

Следовательно, для $x \geq 0$ мы получаем

$$\varphi_{K'/K}(x) = \frac{1}{n} \varphi_{L'/L}(nx) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leq x \leq r^*, \\ (x-r^*)/q + r^* & \text{для } x \geq r^*. \end{cases}$$

Отметим, что $U^n = u_1^{-m}$, где u_1 – униформизирующий элемент поля K' . Это дает $U^{1-q} = u_1^{b^*}$ и

$$u_1^{-mq}(1 + r^* u_1^{b^*})^n = t_0^{-m}.$$

Следовательно,

$$\alpha u_1^q (1 + r^* u_1^{b^*})^{-1/r^*} = t_0$$

для некоторого $\alpha \in K'$ такого, что $\alpha^m = 1$. Так как $(m, q) = 1$, существует $\alpha_1 \in K'$ такое, что $\alpha_1^q = \alpha$. Если $u_2 = \alpha_1 u_1$, то u_2 – униформизирующий элемент поля K' , $u_2^{b^*} = u_1^{b^*}$ (так как $m \mid b^*$) и

$$u_2^q (1 + r^* u_2^{b^*})^{-1/r^*} = t_0.$$

Это дает

$$t_0 \equiv u_2^q (1 - u_2^{b^*}) \equiv u_2^q E(-1, u_2^{b^*}) \pmod{u_2^{q+b^*}}.$$

Теперь подходящий вариант леммы Гензеля дает существование $t'_0 \in K'$ такого, что $t'_0 \equiv u_2 \pmod{u_2^{b^*+1}}$ и $t_0 = t'^q_0 E(-1, t'^{b^*}_0)$. Предложение доказано.

1.6. Характеризация идеала $\psi(\Gamma^{(v_0)}) = L^{(v_0)}$. Выберем $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такое, что $p^{M+1}L = 0$. Очевидно, $L \otimes O(K) = L \otimes O_{M+1}(K)$ и $L \otimes O(K_{\text{sep}}) = L \otimes O_{M+1}(K_{\text{sep}})$. Как ранее, предположим, что $\psi: \Gamma \rightarrow G(L)$ задан соответствием $\tau \mapsto \tau f \circ (-f)$, где $\tau \in \Gamma$, $f \in G(L \otimes O(K_{\text{sep}}))$, $e = \sum_{a \in \mathbb{Z}^0(p)} t^{-a} D_{a0} \in G(L \otimes O(K))$ и $\sigma f = f \circ e$.

Можно использовать униформизирующий элемент $t_0^{p^M}$ поля $\sigma^M K$ для конструкции подъема

$$O_{M+1}(\sigma^M K) = W_{M+1}(\sigma^{2M} K)[t^{p^M}]$$

поля $\sigma^M K$ и подъема

$$O_{M+1}(\sigma^M K_{\text{sep}}) = W_{M+1}(\sigma^{2M} K_{\text{sep}})[t^{p^M}]$$

поля $\sigma^M K_{\text{sep}}$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ мы будем также использовать обозначение $\sigma^n D_{a0} = D_{an}$.

В использованных выше обозначениях мы, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \sigma^M e &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^0(p)} t^{-ap^M} D_{aM} \in L \otimes O_{M+1}(\sigma^M K), \quad \sigma^M f \in L \otimes O_{M+1}(\sigma^M K_{\text{sep}}), \\ \sigma(\sigma^M f) &= (\sigma^M f) \circ (\sigma^M e), \quad \psi(\tau) = \tau(\sigma^M f) \circ (-\sigma^M f) \end{aligned}$$

для любого $\tau \in \Gamma$.

Пусть v_0 – положительное действительное число. Для подгруппы ветвления $\Gamma^{(v_0)}$ в группе Γ положим

$$L^{(v_0)} = \psi(\Gamma^{(v_0)}).$$

Очевидно, $L^{(v_0)}$ является идеалом алгебры Ли L .

Выберем $N^* \in \mathbb{N}$ и $0 < r^* < v_0$ такое, что $r^*(q-1) = b^* \in \mathbb{Z}^+(p)$, где $q = p^{N^*}$. Рассмотрим поле $K' = K(N^*, r^*) \subset K_{\text{sep}}$ и его униформизирующий элемент t'_0 из п. 1.5, чтобы построить для любого $N \in \mathbb{N}$ подъемы полей K' и $K'_{\text{sep}} = K_{\text{sep}}$ по модулю p^N . Мы будем использовать следующие обозначения для этих подъемов: $O'_N(K') = W_N(\sigma^{N-1}K')[t_1]$ и $O'_N(K_{\text{sep}}) = W_N(\sigma^{N-1}K_{\text{sep}})[t_1]$, где $t_1 = [t'_0] \in W_N(K')$, $O'(K') = \varprojlim O'_N(K')$ и $O'(K_{\text{sep}}) = \varprojlim O'_N(K_{\text{sep}})$. Очевидно, вложения $K \subset K'$ и отождествление $K_{\text{sep}} = K'_{\text{sep}}$ индуцируют вложения

$$\begin{aligned} O_{M+1}(\sigma^M K) &\subset W_{M+1}(\sigma^M K) \subset W_{M+1}(\sigma^M K') \subset O'_{M+1}(K') \subset W_{M+1}(K'), \\ O_{M+1}(\sigma^M K_{\text{sep}}) &\subset W_{M+1}(\sigma^M K_{\text{sep}}) \subset O'_{M+1}(K_{\text{sep}}) \subset W_{M+1}(K_{\text{sep}}). \end{aligned}$$

Эти вложения позволяют нам соотнести конструкции нильпотентной теории Артина–Шрейера для различных подъемов $O(K)$ и $O'(K')$.

ЛЕММА. *По отношению к определенному выше вложению $O_{M+1}(\sigma^M K)$ в $O'_{M+1}(K')$ мы имеем*

$$t^{p^M} = t_1^{qp^M} E(1, t_1^{b^*})^{-p^M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $V: W_{M+1}(K') \rightarrow W_{M+1}(K')$ σ^{-1} -линейный морфизм, заданный соответствием $(a_1, a_2, \dots, a_{M+1}) \mapsto (0, a_1, \dots, a_M)$. Очевидно (см. предложение п. 1.5, (с)), что

$$t \equiv t_1^q E(1, t_1^{b^*})^{-1} \pmod{VW_{M+1}(K')},$$

и для любого $s \geq 0$ мы имеем

$$t^{p^s} \equiv t_1^{qp^s} E(1, t_1^{b^*})^{p^s} \pmod{V^{s+1}W_{M+1}(K')}.$$

Лемма доказана, так как $V^{M+1}W_{M+1}(K') = 0$.

Пусть $e_1 = \sum_{a \in \mathbb{Z}^0(p)} t_1^{-a} D_{a, -N^*} \in G(L \otimes O'(K'))$, и выберем $f_1 \in G(L \otimes O'(K_{\text{sep}}))$ такой, что $\sigma f_1 = f_1 \circ e_1$. Так как $\sigma^M f \in G(L \otimes O(\sigma^M K_{\text{sep}})) \subset G(L \otimes O'(K_{\text{sep}}))$, то существует $X \in G(L \otimes O'(K_{\text{sep}}))$ такой, что

$$\sigma^M f = (\sigma^{M+N^*} f_1) \circ X.$$

Если J – идеал алгебры Ли L , то обозначим через $K'_J(X)$ поле определения $X \pmod{(JO'(K_{\text{sep}}))}$ над K' . По определению $K'_J(X) = K_{\text{sep}}^{H_J(X)}$, где $H_J(X)$ является подгруппой в группе $\Gamma' = \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K')$, состоящей из $\tau \in \Gamma'$ таких, что $\tau X \equiv X \pmod{(JO'(K_{\text{sep}}))}$.

Обозначим через $v'_J(X)$ максимальное верхнее число ветвления для расширения $K'_J(X)/K'$. По определению $v'_J(X)$ является числом таким, что подгруппы ветвления $\Gamma'^{(v)}$ группы Γ' действуют тривиально на $K'_J(X)$, если и только если $v > v'_J(X)$ (существование $v'_J(X)$ следует из левонепрерывности фильтрации ветвления).

Для $v > 0$ пусть $\mathcal{J}'_v(X)$ – множество идеалов J алгебры Ли L таких, что $v'_J(X) < v$. Если $J_1, J_2 \in \mathcal{J}'_v(X)$, то $v'_{J_1 \cap J_2}(X) = \max(v'_{J_1}(X), v'_{J_2}(X))$, и, следовательно, $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{J}'_v(X)$. Поэтому множество $\mathcal{J}'_v(X)$ имеет минимальный элемент $J'_v(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $L^{(v_0)} = J'_{qv_0-b^*}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если J – идеал в L , то обозначим через $K_J(f)$ поле определения элемента $f \bmod (JO(K_{\text{sep}}))$, а через $v_J(f)$ – максимальное верхнее число ветвления расширения $K_J(f)/K$. Очевидно, $L^{(v_0)}$ – минимальный элемент множества $\mathcal{J}_{v_0}(f)$ идеалов J в L таких, что $v_J(f) < v_0$.

Наше предложение будет доказано, если мы проверим, что

$$\mathcal{J}_{v_0}(f) = \mathcal{J}'_{qv_0-b^*}(X).$$

Пусть J – произвольный идеал в L . Отметим, что соответствия $\sigma^{-N^*}: k \rightarrow k$, $t_0 \mapsto t'_0$, $t \mapsto t_1$, $e \mapsto e_1$ и $f \mapsto f_1$ определяют изоморфизм расширения $K_J(f)/K$ с расширением $K'_J(f_1)/K'$, где $K'_J(f_1)$ – поле определения $f_1 \bmod (JO'(K_{\text{sep}}))$ над K' . Следовательно, $v_J(f) = v'_J(f_1)$, где $v'_J(f_1)$ – максимальное верхнее число ветвления расширения $K'_J(f_1)/K'$. Отметим также, что $v'_J(f_1)$ является последней точкой излома графика функции Эрбрана $\varphi_{K'_J(f_1)/K'}$. Теперь равенство $\varphi_{K'_J(f_1)/K} = \varphi_{K'_J(f_1)/K'} \circ \varphi_{K'/K}$ дает для максимального верхнего числа ветвления $v_J(f_1)$ расширения $K'_J(f_1)/K$, что

$$v_J(f_1) = \begin{cases} (v'_J(f_1) - r^*)/q + r^* & \text{если } v'_J(f_1) \geq r^*, \\ r^*, & \text{если } v'_J(f_1) \leq r^*. \end{cases}$$

В обоих случаях мы имеем $v_J(f_1) \leq \max\{r^*, v_J(f)\}$, и $v_J(f_1) \geq v_0$ влечет $v_J(f) > v_J(f_1)$ (напомним, что $r^* < v_0$).

Так как $K_J(\sigma^M f) = K_J(f)$ и $K'_J(\sigma^{M+N^*} f_1) = K'_J(f_1)$, то равенство $X = (-\sigma^{M+N^*} f_1) \circ (\sigma^M f)$ дает $K'_J(X) \subset K_J(f)K'_J(f_1)$. Следовательно, если $J \in \mathcal{J}_{v_0}(f)$ и $v_J(X)$ – максимальное верхнее число ветвления расширения $K'_J(X)/K$, то $v_J(X) \leq \max\{v_J(f), v_J(f_1)\} < v_0$. Это эквивалентно выполнению неравенства $v'_J(X) < qv_0 - b^*$, т.е. $J \in \mathcal{J}'_{qv_0-b^*}(X)$.

Если $J \in \mathcal{J}'_{qv_0-b^*}(X)$ и $v_J(f_1) \geq v_0$, то $v_J(f) > v_J(f_1) = \max\{v_J(f_1), v_J(X)\}$ (так как $v_J(X) < v_0$). Это противоречит наличию вложения $K_J(f) \subset K'_J(f_1)K'_J(X)$. Следовательно, $v_J(f_1) < v_0$, $v_J(f) \leq \max\{v_J(f_1), v_J(X)\} < v_0$ и $J \in \mathcal{J}_{v_0}(f)$. Предложение доказано.

§ 2. Алгебра Ли $\mathcal{L}^0(A)$ и ее фильтрация $\{\mathcal{L}^0(A, v)\}_{v \geq 0}$

2.1. Пусть $A \subset \mathbb{Z}^0(p)$ – конечное подмножество и $A^+ = A \setminus \{0\}$. Обозначим через $\mathcal{L}(A)$ свободную алгебру Ли над $W(k)$ с множеством образующих

$$\left\{ \mathcal{D}_a^{(m)} \mid a \in A^+, m \in \mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \mathcal{D}_0 \mid \text{если } 0 \in A \right\}.$$

Пусть σ – автоморфизм Фробениуса в $W(k)$. Определим σ -линейный автоморфизм $\sigma_{\mathcal{L}}$ алгебры $\mathcal{L}(A)$ с помощью соответствий $\sigma_{\mathcal{L}}: \mathcal{D}_a^{(m)} \mapsto \mathcal{D}_a^{(m+1)}$ при $a \in \mathbb{Z}^+(p)$, $m \in \mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z}$ и $\sigma_{\mathcal{L}}: \mathcal{D}_0 \mapsto \mathcal{D}_0$ при $0 \in A$. Мы используем впоследствии более простое обозначение $\sigma_{\mathcal{L}} = \sigma$. Как в п. 1.3, фиксируем $\alpha \in W(k)$ такое, что $\text{Tr } \alpha = 1$.

Если $n \in \mathbb{Z}$, то положим $\mathcal{D}_{an} = \mathcal{D}_a^{(n \bmod N_0)}$ при $a \in A^+$ и $\mathcal{D}_{0n} = (\sigma^n \alpha) \mathcal{D}_0$ при $0 \in A$. Очевидно, $\sigma \mathcal{D}_{an} = \mathcal{D}_{a, n+1}$ для произвольных $a \in \mathbb{Z}^0(p)$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Легко видеть, что

$$\mathcal{L}^0(A) = \{l \in \mathcal{L}(A) \mid \sigma l = l\}$$

является свободной алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_p$ и $\mathcal{L}^0(A) \otimes W(k) = \mathcal{L}(A)$.

В этом параграфе множество A будет фиксировано, так что мы можем использовать более простые обозначения $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^0(A) = \mathcal{L}^0$.

Мы используем также следующие обозначения:

$(\bar{a}, \bar{n}) = (a_1, n_1, \dots, a_s, n_s)$, где $1 \leq s < p$, $a_1, \dots, a_s \in A$ и $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$;

если $N \in \mathbb{Z}$, то $\bar{n} \geq N$ означает $n_1, \dots, n_s \geq N$ (в аналогичном смысле будут использоваться обозначения $\bar{n} \leq N$, $\bar{n} > N$ и т.д.);

$\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = a_1 p^{n_1} + \dots + a_s p^{n_s}$;

если $n \in \mathbb{Z}$, то $n^* = n$ для $n \geq 0$ и $n^* = -\infty$ для $n < 0$ (в этом случае $p^{n^*} = 0$).

Для $\gamma \geq 0$ и $N \in \mathbb{Z}$ рассмотрим элемент алгебры Ли $\mathcal{L}$

$$\mathcal{F}_{\gamma, -N} = \sum (-1)^s \eta(n_1, \dots, n_s) a_1 p^{n_1^*} [\dots [\mathcal{D}_{a_1 n_1}, \mathcal{D}_{a_2 n_2}], \dots, \mathcal{D}_{a_s n_s}],$$

где константы $\eta(n_1, \dots, n_s)$ были определены в п. 1.4, а суммирование берется по наборам

$$(\bar{a}, \bar{n}) \in M_{\gamma, -N}(A) := \{(\bar{a}, \bar{n}) \mid \gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma, n_1 \geq \dots \geq n_s \geq -N\}$$

(легко видеть, что эта сумма имеет только конечное число ненулевых слагаемых).

Для $v > 0$ обозначим через $\mathcal{L}_N(A, v) = \mathcal{L}_N(v)$ минимальный $\sigma_{\mathcal{L}}$ -инвариантный идеал в $\mathcal{L}$, содержащий определенные выше элементы $\mathcal{F}_{\gamma, -N}$ с $\gamma \geq v$, а также идеал $C_p(\mathcal{L})$ коммутаторов порядка $\geq p$. Для произвольного $N \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{L}_N^0(v) := \mathcal{L}_N(v) \cap \mathcal{L}^0$ является идеалом алгебры Ли $\mathcal{L}^0$, и мы имеем $\mathcal{L}_N^0(v) W(k) = \mathcal{L}_N^0(v) \otimes W(k) = \mathcal{L}_N(v)$.

2.2. Для $\gamma > 0$ рассмотрим множество

$$M_{\gamma}(A^+) = \{(\bar{a}, \bar{n}) \mid a_1, \dots, a_s \in A^+, n_1 \geq \dots \geq n_s, \gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma\}.$$

Легко видеть, что $M_{\gamma}(A^+)$ – конечное множество. Следовательно, мы можем положить

$$N(\gamma, A^+) = \min\{N \in \mathbb{Z} \mid \bar{n} \geq -N \text{ для любого } (\bar{a}, \bar{n}) \in M_{\gamma}(A^+)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\gamma \geq v_0 > 0$. Тогда $(\bar{a}, \bar{n}) \in M_{\gamma}(A^+)$ является (v_0, A^+) -*плохим*, если для любого $0 \leq t < s$ и $\gamma_t^- = \gamma_t^-(\bar{a}, \bar{n}) := a_1 p^{n_1} + \dots + a_t p^{n_t}$ мы имеем либо $\gamma_t^- \geq v_0$ и $n_{t+1} \geq -N(\gamma_t^-, A^+)$, либо $\gamma_t^- < v_0$.

Следующие свойства являются непосредственными следствиями этого определения:

а) если $(\bar{a}, \bar{n}) = (a_1, n_1)$ и $a_1 p^{n_1} \geq v_0$, то $(\bar{a}, \bar{n})$ является (v_0, A^+) -плохим;

б) если $(\bar{a}, \bar{n}) \in M_\gamma(A^+)$, $\gamma \geq v_0$ и $\gamma - a_s p^{n_s} < v_0$, то $(\bar{a}, \bar{n})$ является (v_0, A^+) -плохим;

с) если $(\bar{a}, \bar{n})$ является (v_0, A^+) -плохим и $\gamma_{s-1}^- = a_1 p^{n_1} + \dots + a_{s-1} p^{n_{s-1}} \geq v_0$, то $(a_1, n_1, \dots, a_{s-1}, n_{s-1})$ является (v_0, A^+) -плохим;

д) если $(\bar{a}, \bar{n})$ не является (v_0, A^+) -плохим и $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) \geq v_0$, то существует единственный индекс $s_1 < s$ такой, что $(a_1, n_1, \dots, a_{s'}, n_{s'})$ не является (v_0, A^+) -плохим для $s_1 < s' \leq s$ и является (v_0, A^+) -плохим для $s' = s_1$. В частности, $\gamma_{s_1}^- = a_1 p^{n_1} + \dots + a_{s_1} p^{n_{s_1}} \geq v_0$ и $-N(\gamma_{s_1}^-, A^+) > n_{s_1+1} \geq \dots \geq n_s$.

2.3. Для $M \in \mathbb{Z}$ обозначим через $B_M = B_M(v_0, A^+)$ множество (v_0, A^+) -плохих наборов $(\bar{a}, \bar{n})$ таких, что $\bar{n} \leq M$. Очевидно, $B_M = \emptyset$ для достаточно малых M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $M \in \mathbb{Z}$ множество B_M является конечным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\pi = (\bar{a}, \bar{n}) \in M_\gamma(A^+)$, где $\gamma \geq v_0$, то положим

$$m_0(\pi) = \max\{0 \leq t < s \mid \gamma_{s-t}^- = a_1 p^{n_1} + \dots + a_{s-t} p^{n_{s-t}} \geq v_0\}.$$

Достаточно показать, что существует лишь конечное число $\pi \in B_M$ с заданным значением $m_0(\pi)$.

ЛЕММА. Существует

$$\delta(v_0, A^+) = \min\{v_0 - \gamma_1 \mid \gamma_1 < v_0, M_{\gamma_1}(A^+) \neq \emptyset\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $1 \leq s_0 < p$ обозначим через $M_{\gamma_1 s_0}(A^+)$ подмножество в $M_{\gamma_1}(A^+)$, состоящее из наборов $(\bar{a}, \bar{n})$ длины $s \leq s_0$. Используем индукцию по $s_0 \geq 1$, чтобы доказать существование

$$\delta_{s_0} = \delta_{s_0}(v_0, A^+) := \min\{v_0 - \gamma_1 \mid \gamma_1 < v_0, M_{\gamma_1 s_0}(A^+) \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, δ_1 существует. Допустим, что $s_0 \geq 2$ и δ_{s_0-1} существует. Очевидно, существует $\gamma_0 \in (v_0 - \delta_{s_0-1}, v_0)$ такое, что $M_{\gamma_0 s_0}(A^+) \neq \emptyset$. Достаточно доказать существование лишь конечного числа $\gamma' \in (\gamma_0, v_0)$ таких, что $M_{\gamma' s_0}(A^+) \neq \emptyset$.

Пусть $(\bar{a}, \bar{n}) \in M_{\gamma' s_0}(A^+)$. Тогда $a_{s_0} p^{n_{s_0}} \geq \gamma_0 - (v_0 - \delta_{s_0-1}) = \delta' > 0$. Отсюда вытекает существование $N^* = N^*(A^+, \delta')$ такого, что $n_{s_0} \geq N^*$. Следовательно, $(\bar{a}, \bar{n})$ принадлежит конечному множеству

$$\{(\bar{a}, \bar{n}) \mid 1 \leq s \leq s_0, n_1, \dots, n_s \geq N^*, \gamma(\bar{a}, \bar{n}) < v_0\}.$$

Лемма доказана, так как $\delta(v_0, A^+) = \delta_{p-1}$.

Продолжим доказательство предложения индукцией по $m_0(\pi)$.

Пусть $m_0(\pi) = 0$, т.е. $\gamma - a_s p^{n_s} < v_0$. Тогда $a_s p^{n_s} \geq \delta(v_0, A^+)$, и все элементы $\pi \in B_M$, имеющие $m_0(\pi) = 0$, принадлежат конечному множеству

$$\{(\bar{a}, \bar{n}) \mid N^*(A^+, \delta(v_0, A^+)) \leq n_1, \dots, n_s \leq M\}.$$

Предположим, что задано $m^* \in \mathbb{N}$ и что множество $\pi' \in B_M$ таких, что $m_0(\pi') < m^*$, является конечным. Пусть

$$N(m^*, v_0, A^+) = \min\{-N(\gamma', A^+) \mid \exists \pi' \in B_M \cap M_{\gamma'}(A^+) \text{ такой, что } m_0(\pi') < m^*\}.$$

Если $\pi = (\bar{a}, \bar{n}) \in B_M$ и $m_0(\pi) = m^*$, то $\pi_1 = (a_1, n_1, \dots, a_{s-1}, n_{s-1}) \in B_M$ и $m_0(\pi_1) = m^* - 1$. Следовательно, $n_s \geq -N(\gamma(\pi_1), A^+) \geq N(m^*, v_0, A^+)$, и π принадлежит конечному множеству $\{(\bar{a}, \bar{n}) \mid N(m^*, v_0, A^+) \leq n_1, \dots, n_s \leq M\}$. Предложение доказано.

2.4. Пусть $\Gamma_B = \{\gamma(\bar{a}, \bar{n}) \mid (\bar{a}, \bar{n}) \in B_M \text{ для некоторого } M \in \mathbb{Z}\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует $\max\{N(\gamma, A^+) \mid \gamma \in \Gamma_B\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $M_0 = M_0(A^+, v_0) \in \mathbb{N}$ такое, что $ap^{M_0} \geq v_0$ для всех $a \in A^+$. Пусть $M > M_0$ и $(\bar{a}, \bar{n}) \in B_M \setminus B_{M-1}$. Из определения (v_0, A^+) -плохого набора следует, что $(a_1, M_0 - M + n_1, \dots, a_s, M_0 - M + n_s) \in B_{M_0}$, и, значит,

$$\max\{N(\gamma, A^+) \mid \gamma \in \Gamma_B\} = \max\{N(\gamma, A^+) \mid \gamma = \gamma(\bar{a}, \bar{n}), (\bar{a}, \bar{n}) \in B_{M_0}\}$$

существует. Предложение доказано.

2.5. Пусть $N_B(v_0, A^+) = \max\{N(\gamma, A^+) \mid \gamma \in \Gamma_B\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $N \geq N_B(v_0, A^+)$, то $\mathcal{L}_N(A, v_0) = \mathcal{L}_{N_B(v_0, A^+)}(A, v_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\gamma \in \Gamma_B$ рассмотрим множество $B_\gamma \subset M_\gamma(A^+)$, состоящее из всех (v_0, A^+) -плохих наборов $(\bar{a}, \bar{n})$ таких, что $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma$.

Определим подмножество $M(B_\gamma) \subset M_{\gamma, N(\gamma, A^+)}(A)$, состоящее из наборов $(\bar{a}, \bar{n})$ таких, что если мы уберем из $(\bar{a}, \bar{n})$ все $\{a_i, n_i \mid 1 \leq i \leq s, a_i = 0\}$, то получим набор $(\bar{a}', \bar{n}') \in B_\gamma$. Итак, для всех $\gamma \in \Gamma_B$ можно определить элементы

$$\mathcal{F}_{B_\gamma} = \sum (-1)^{s-1} \eta(n_1, \dots, n_s) a_1 p^{n_1} [\dots [\mathcal{D}_{a_1 n_1}, \mathcal{D}_{a_2 n_2}], \dots, \mathcal{D}_{a_s n_s}]$$

алгебры Ли $\mathcal{L}$, где суммирование берется по наборам $(\bar{a}, \bar{n}) \in M(B_\gamma)$.

Обозначим через $\mathcal{L}_B$ минимальный $\sigma_{\mathcal{L}}$ -инвариантный идеал в $\mathcal{L}$, содержащий $C_p(\mathcal{L})$ и все $\mathcal{F}_{B_\gamma}$, где $\gamma \in \Gamma_B$. Мы хотим доказать, что $\mathcal{L}_N(A, v_0) = \mathcal{L}_B$ для $N \geq N_B(v_0, A^+)$.

ЛЕММА 1. Для всех $\gamma \geq v_0$ имеем $\mathcal{F}_{\gamma, -N(\gamma, A^+)} \in \mathcal{L}_N(A, v_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(\bar{a}, \bar{n}) \in M_{\gamma, N(\gamma, A^+)}(A)$, то существует единственный индекс $s_1 \leq s$ такой, что $(a_1, n_1, \dots, a_{s_1}, n_{s_1}) \in M_{\gamma, -N(\gamma, A^+)}(A)$, $a_{s_1+1} = \dots = a_s = 0$ и $-N(\gamma, A^+) > n_{s_1+1} \geq \dots \geq n_s \geq -N$. Это дает

$$\mathcal{F}_{\gamma, -N} = \left(\text{id} + \sum (-1)^t \eta(m_1, \dots, m_t) \text{ad } \mathcal{D}_{0m_1} \circ \dots \circ \text{ad } \mathcal{D}_{0m_t} \right) \mathcal{F}_{\gamma, -N(\gamma, A^+)},$$

где суммирование берется по $t \geq 1$ и всем $-N \leq m_t \leq \dots \leq m_1 < -N(\gamma, A^+)$. Отсюда вытекает утверждение леммы, так как оператор в скобках этого равенства является обратимым.

Следующие две леммы могут быть доказаны аналогично с помощью свойства d) (v_0, A^+) -плохих наборов из п. 2.2.

ЛЕММА 2. Для любого $\gamma \geq v_0$ имеем $\mathcal{F}_{\gamma, -N} \in \mathcal{L}_B$.

Из пп. 2.3, 2.4 вытекает, что $\Gamma_B = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$, где $v_0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$ (в архимедовой топологии $\gamma_n \rightarrow +\infty$, а в p -адической топологии $\gamma_n \rightarrow 0$). Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{L}_B^{(m)}$ идеал в $\mathcal{L}$, порожденный $C_p(\mathcal{L})$ и множеством $\{\mathcal{F}_{B\gamma_i} \mid 1 \leq i < m\}$.

ЛЕММА 3. Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mathcal{F}_{\gamma_m, -N(\gamma_m, A^+)} \equiv \mathcal{F}_{B\gamma_m} \pmod{\mathcal{L}_B^{(m)}}.$$

Лемма 2 дает, что $\mathcal{L}_N(A, v_0) \subset \mathcal{L}_B$.

Согласно лемме 3 идеал $\mathcal{L}_B$ – минимальный σ -инвариантный идеал в $\mathcal{L}$ такой, что $\mathcal{F}_{\gamma_m, -N(\gamma_m, A^+)} \in \mathcal{L}_B$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, из леммы 1 вытекает, что $\mathcal{L}_B \subset \mathcal{L}_N(A, v_0)$. Предложение доказано.

2.6. Теперь мы можем положить $\mathcal{L}(A, v_0) = \mathcal{L}_N(A, v_0)$ и $\mathcal{L}^0(A, v_0) = \mathcal{L}_N^0(A, v_0) = \mathcal{L}_N(A, v_0) \cap \mathcal{L}^0$, где $N \geq N_B(v_0, A^+)$. Определим также целое число

$$\tilde{N}(v_0, A^+) = \min\{N \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{L}_N^0(A, v_0) = \mathcal{L}^0(A, v_0)\}.$$

Фильтрация $\{\mathcal{L}(A, v)\}_{v>0}$ является убывающей фильтрацией σ -инвариантных идеалов алгебры Ли $\mathcal{L}$. Фильтрация $\{\mathcal{L}^0(A, v)\}_{v>0}$ является убывающей фильтрацией идеалов алгебры Ли $\mathcal{L}^0$. Множество скачков этой фильтрации содержится в множестве $\{\gamma \mid M_\gamma(A^+) \neq \emptyset\}$. Лемма из п. 2.3 дает, что для любого $v_0 > 0$ существует $\delta = \delta(v_0, A^+) > 0$ такое, что $\mathcal{L}(A, v) = \mathcal{L}(A, v_0)$ и $\mathcal{L}^0(A, v) = \mathcal{L}^0(A, v_0)$ для произвольного $v \in (v_0 - \delta, v_0)$. В частности, фильтрация $\{\mathcal{L}^0(A, v)\}_{v>0}$ является левонепрерывной.

§ 3. Оценки в обертывающей алгебре $\mathcal{A}(\mathcal{L}) \otimes O(K')$

В этом параграфе A – фиксированное конечное подмножество в $\mathbb{Z}^0(p)$. Мы используем обозначения из п. 2.1, опуская указание на множество A . Основной результат здесь – предложение из п. 3.10, которое используется для доказательства основной теоремы из § 4.

3.1. Обозначения и соглашения. Фиксируем положительное действительное число v_0 .

Если $\delta(v_0, A^+)$ – рациональное число из леммы п. 2.3, выберем $0 < \delta < \min\{\delta(v_0, A^+), v_0/3\}$ такое, что $v_0 - \delta \in \mathbb{Z}[1/p]$.

Выберем $0 < \varepsilon < v_0/3$ такое, что $v_0 + \varepsilon \in \mathbb{Z}[1/p]$.

Выберем $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ и $r^* \in \mathbb{Q}$ такие, что если $N^* = \tilde{N} + 1$ и $q = p^{N^*}$, то:

$\tilde{N} \geq \max\{\tilde{N}(v_0, A^+), \tilde{N}(v_0 + \varepsilon, A^+)\}$ (см. обозначения в п. 2.6);

$a^* := q(v_0 - \delta) \in p\mathbb{N}$ и $q(v_0 + \varepsilon) \in \mathbb{N}$;

$b^* := r^*(q - 1) \in \mathbb{Z}^+(p)$;

$(v_0 - \delta)(q + p)/(q - 1) < r^* < v_0$.

Отметим, что $\mathcal{L}^0(v_0) = \mathcal{L}_{\tilde{N}}^0(v_0)$, $\mathcal{L}^0(v_0 + \varepsilon) = \mathcal{L}_{\tilde{N}}^0(v_0 + \varepsilon)$, и приведенное выше неравенство для r^* дает $q(b^* - a^*) > pa^*$ (в частности, $b^* > a^*$).

Рассмотрим поле $K' = K(r^*, N^*)$ и элемент $t_1 = [t'_0] \in O'(K')$, где t'_0 – униформизирующий элемент K' из п. 1.5. Для $N \leq \tilde{N}$ и произвольного γ мы имеем либо $\mathcal{F}_{\gamma, -N} = 0$, либо $q\gamma \in p\mathbb{N}$. В частности, выражение $\mathcal{F}_{\gamma, -N} t_1^{-q\gamma}$ является корректно определенным в алгебре Ли $\mathcal{L}^0 \otimes O'(K')$. Отметим также, что $t_1^{-qa^* p^{-1}}, t_1^{-q(v_0 + \varepsilon)} \in O'(K')$.

Мы будем использовать следующие обозначения:

$$O_1 = O'(K') = W(k)((t_1)), \quad O_0 = W(k)[[t_1]];$$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{L}^0)$ – обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}^0(A)$ и $J = J(\mathcal{L}^0)$ – ее пополняющий идеал;

в алгебре $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \otimes O_1$ положим $J_1 = JO_1$ и $J_O = JO_0$;

$\mathcal{A}_1(v_0)$ и $\mathcal{A}_1(v_0 + \varepsilon)$ будут обозначать минимальные 2-сторонние идеалы в O_1 -алгебре $\mathcal{A}_1$, которые содержат $\mathcal{L}^0(v_0)$ и $\mathcal{L}^0(v_0 + \varepsilon)$ соответственно;

для $s \in \mathbb{N}$ положим $C_s(\mathcal{A}_1(v_0)) = \sum_{0 \leq s_1 < s} J_1^{s_1} \mathcal{A}_1(v_0) J_1^{s-1-s_1}$;

$$\mathcal{A}_1^+(v_0) = C_2(\mathcal{A}_1(v_0)) + \mathcal{A}_1(v_0 + \varepsilon) + p\mathcal{A}_1(v_0);$$

как в §2, $(\bar{a}, \bar{n}) = (a_1, n_1, \dots, a_s, n_s)$, где $0 \leq s < p$, $a_1, \dots, a_s \in A$ и $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$;

для $a \in A$, $n \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определяем степенные ряды $\text{ex}_l(a, n) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$, как

$$\text{ex}_l(a, n) = \text{ex}_l(a, n)(X) = \begin{cases} \exp(ap^{n-l} X^{p^l}) & \text{для } n > l, \\ E(a, X^{p^l}) & \text{для } n = l, \\ 1 & \text{для } n < l, \end{cases}$$

где E – функция из п. 1.5.

Если $0 \leq t \leq s$ и $(\bar{a}, \bar{n}) = (a_1, n_1, \dots, a_s, n_s)$, положим

$$\text{ex}_{lt}(\bar{a}, \bar{n}) = \text{ex}_l(a_{t+1}, n_{t+1}) \dots \text{ex}_l(a_s, n_s)$$

(по определению $\text{ex}_{ls}(\bar{a}, \bar{n}) = 1$). Если $t = 0$, то мы будем использовать более простое обозначение $\text{ex}_l(\bar{a}, \bar{n}) = \text{ex}_{l0}(\bar{a}, \bar{n})$.

Результаты подстановок $X \mapsto t_1^{b^*}$ в определенные выше ряды будут обозначаться через $\mathcal{E}_l(\bar{a}, \bar{n}) = \text{ex}_l(\bar{a}, \bar{n})(t_1^{b^*}) \in O_0$ и $\mathcal{E}_{lt}(\bar{a}, \bar{n}) = \text{ex}_{lt}(\bar{a}, \bar{n})(t_1^{b^*}) \in O_0$.

$\mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} = \mathcal{D}_{a_1 n_1} \dots \mathcal{D}_{a_s n_s}$, где при $1 \leq i \leq s$ элементы $\mathcal{D}_{a_i n_i}$ являются образующими алгебры Ли $\mathcal{L}$ из §2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для произвольного γ имеем:

- (a) $\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + t_1^{-a^*} J_O$;
- (b) $\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0 + \varepsilon) + t_1^{-q(v_0 + \varepsilon)} J_O$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\gamma \geq v_0$, то $\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0)$. Если $\gamma < v_0$, то $\gamma \leq v_0 - \delta$ и $\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma} \in t_1^{-a^*} J_O$, так как $a^* = q(v_0 - \delta)$. Часть (a) доказана. Аналогичным образом доказывается часть (b).

3.2. Пусть $\gamma_0(\bar{a}, \bar{n}) = a_1 p^{n_1^*} + \dots + a_s p^{n_s^*} = \sum_{n_i \geq 0} a_i p^{n_i}$, и для $0 \leq t \leq s$ положим $\gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) = a_{t+1} p^{n_{t+1}^*} + \dots + a_s p^{n_s^*}$ (см. в п. 2.1 определение n^* для $n \in \mathbb{Z}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любых $\gamma \geq 0$ и $N \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\mathcal{F}_{\gamma, -N} = \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}},$$

где суммирование производится по $1 \leq s < p$, $0 \leq t \leq s$ и всем $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma$ и $\bar{n} \geq -N$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $0 \in A$, то сумма в правой части содержит бесконечно много слагаемых. В этом и подобных случаях мы полагаем

$$\mathcal{F}_{\gamma, -N} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{\gamma, -N, l},$$

где $\mathcal{F}_{\gamma, -N, l}$ — часть правой суммы, состоящая из слагаемых с $\bar{n} < l$. В нашем случае легко видеть, применяя тождество (b) из леммы п. 1.4 (см. также доказательство леммы из п. 3.3 ниже), что если $l_0 = l_0(\gamma, A) \in \mathbb{N}$ таково, что $p^{l_0}a > \gamma$ для всех $a \in A^+$, то $\mathcal{F}_{\gamma, -N, l_1} = \mathcal{F}_{\gamma, -N, l_2}$ при $l_1, l_2 \geq l_0(A, \gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $1 \leq s < p$ и $1 \leq t \leq s$ рассмотрим подмножество Φ_{st} подстановок π порядка s таких, что $\pi(1) = t$ и для любых $1 \leq l \leq s$ подмножество $\{\pi(1), \dots, \pi(l)\}$ отрезка $[1, s]$ является “связным”, т.е. существует $n(l) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\{\pi(1), \dots, \pi(l)\} = \{n(l), n(l) + 1, \dots, n(l) + l - 1\}.$$

По определению полагаем $\Phi_{s0} = \Phi_{s, s+1} = \emptyset$.

Пусть $B_t(\bar{n}) = \sum_{\pi \in \Phi_{st}} \eta(n_{\pi(1)}, \dots, n_{\pi(s)})$ для $0 \leq t \leq s$. Отметим, что $B_0(\bar{n}) = B_{s+1}(\bar{n}) = 0$, $B_1(\bar{n}) = \eta(n_1, \dots, n_s)$ и $B_s(\bar{n}) = \eta(n_s, \dots, n_1)$.

ЛЕММА 1. Для произвольного $0 \leq t \leq s$ множество $\Phi_{st} \cup \Phi_{s, t+1}$ является множеством всех “вставок” упорядоченного множества $\{t, \dots, 1\}$ в упорядоченное множество $\{t+1, \dots, s\}$, т.е. $\pi \in \Phi_{st} \cup \Phi_{s, t+1}$, если и только если последовательности $\{\pi^{-1}(t), \dots, \pi^{-1}(1)\}$ и $\{\pi^{-1}(t+1), \dots, \pi^{-1}(s)\}$ возрастают.

Доказательство этой леммы получается непосредственно из данного выше определения множества Φ_{st} .

Следующая лемма вытекает из свойства структурных констант $\eta(\bar{n})$ части (a) леммы п. 1.4.

ЛЕММА 2. Для $0 \leq t \leq s$ имеем

$$B_t(\bar{n}) + B_{t+1}(\bar{n}) = \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s).$$

ЛЕММА 3. Для переменных $X_1, \dots, X_s$ имеет место следующее тождество:

$$\sum_{\substack{1 \leq t \leq s \\ \pi \in \Phi_{st}}} (-1)^{t-1} X_{\pi^{-1}(1)} \dots X_{\pi^{-1}(s)} = [\dots [X_1, X_2], \dots, X_s].$$

Мы опустим доказательство, которое получается с помощью простых комбинаторных рассуждений.

Теперь мы можем переписать правую часть равенства нашего предложения в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1 \leq t \leq s < p \\ \gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma, \bar{n} \geq -N}} (-1)^{s+t+1} B_t(\bar{n}) (\gamma_{0,t-1}(\bar{a}, \bar{n}) - \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq s < p \\ \gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma, \bar{n} \geq -N}} (-1)^s \sum_{1 \leq t \leq s} (-1)^{t+1} B_t(\bar{n}) a_t p^{n_t^*} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq s < p \\ \gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma, \bar{n} \geq -N}} (-1)^s \sum_{\substack{1 \leq t \leq s \\ \pi \in \Phi_{st}}} (-1)^{t+1} \eta(n_{\pi(1)}, \dots, n_{\pi(s)}) a_t p^{n_t^*} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq s < p \\ \gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma, \bar{n} \geq -N}} (-1)^s \eta(n_1, \dots, n_s) a_1 p^{n_1^*} \\
&\quad \times \sum_{\substack{1 \leq t \leq s \\ \pi \in \Phi_{st}}} (-1)^{t+1} \mathcal{D}_{a_{\pi^{-1}(1)}, n_{\pi^{-1}(1)}} \cdots \mathcal{D}_{a_{\pi^{-1}(s)}, n_{\pi^{-1}(s)}}.
\end{aligned}$$

Согласно лемме 3 последнее выражение равняется $\mathcal{F}_{\gamma, -N}$. Предложение доказано.

3.3. Для $\gamma \geq 0$ и $N, l \in \mathbb{Z}$ таких, что $-N < l$, положим

$$\begin{aligned}
C'_{\gamma, -N, l} &= \delta_{\gamma 0} + \sum \eta(n_s, \dots, n_1) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}, \\
C''_{\gamma, -N, l} &= \delta_{\gamma 0} + \sum (-1)^s \eta(n_1, \dots, n_s) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}, \\
\mathcal{F}_{\gamma, -N, l} &= \sum (-1)^s \sum_{0 \leq t \leq s} (-1)^t \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}},
\end{aligned}$$

где δ – символ Кронекера, все три суммы берутся по $1 \leq s < p$ и наборам $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma$ и $-N \leq \bar{n} < l$.

ЛЕММА. Для $\gamma \geq 0$ и $N, l \in \mathbb{Z}$ таких, что $-N < l$,

$$\mathcal{F}_{\gamma, -N} = \mathcal{F}_{\gamma, -N, l} + \sum_{\gamma_1 + \gamma^* + \gamma_2 = \gamma} C'_{\gamma_1, -N, l} \mathcal{F}_{\gamma^*, l} C''_{\gamma_2, -N, l} \mod J_1^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$\mathcal{F}_{\gamma, -N} - \mathcal{F}_{\gamma, -N, l} = \sum_{\substack{\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma \\ \max \bar{n} \geq l}} (-1)^s \alpha(\bar{a}, \bar{n}) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}},$$

где $\alpha(\bar{a}, \bar{n}) = \sum_{0 \leq t \leq s} (-1)^t \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})$.

Пусть $t_1 = t_1(\bar{n}) = \min\{t \mid n_t \geq l\}$ и $t_2 = t_2(\bar{n}) = \max\{t \mid n_t \geq l\}$. Тогда из части (b) леммы п. 1.4 вытекает, что

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{a}, \bar{n}) &= \eta(n_{t_1-1}, \dots, n_1) \eta(n_{t_2+1}, \dots, n_s) \\ &\quad \times \sum (-1)^t \eta(n_t, \dots, n_{t_1}) \eta(n_{t+1}, \dots, n_{t_2}) \gamma_{(t, t_2]}(\bar{a}, \bar{n}), \end{aligned}$$

где $\gamma_{(t, t_2]}(\bar{a}, \bar{n}) = a_{t+1} p^{n_{t+1}^*} + \dots + a_{t_2} p^{n_{t_2}^*}$ и сумма берется по $t_1 - 1 \leq t \leq t_2$. Из определения структурных констант $\eta(\bar{n})$ следует, что $\alpha(\bar{a}, \bar{n}) \neq 0$ влечет $n_t \geq l$ для всех $t_1 \leq t \leq t_2$. Легко видеть теперь, что приведенное выше выражение для $\alpha(\bar{a}, \bar{n})$ дает утверждение нашей леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (a) Если $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $-\tilde{N} \leq \bar{n} < l$, то

$$\mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{i \geq 1} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^i + J_1^p.$$

(b) Если $l \in \mathbb{N}$, то

$$\mathcal{F}_{\gamma, l} t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{i \geq 1} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^i + J_1^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по $2 \leq s_0 \leq p$ для доказательства формул (a) и (b) по модулю $J_1^{s_0}$. Пусть $s_0 = 2$.

Если $s \geq 2$, то $\mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} \in C_2(\mathcal{L})$. Если $s = 1$, т.е. $(\bar{a}, \bar{n}) = (a, n)$ с $a \in \mathbb{Z}^+(p)$ и $-\tilde{N} \leq n < l$, то $\mathcal{D}_{an} \equiv (1/a) \sigma^n(\mathcal{F}_{a, -N}) \pmod{C_2(\mathcal{L})}$ с произвольным $N \geq -n$. Если мы возьмем $N = \tilde{N}$, то для $a \geq v_0$ получим $\mathcal{D}_{an} \in \mathcal{L}(v_0) + C_2(\mathcal{L})$ и $\mathcal{D}_{an} t_1^{-q\gamma(a, n)} \in \mathcal{A}_1(v_0) + J_1^2$. Если $a < v_0$, то $a \leq v_0 - \delta$ и $\mathcal{D}_{an} t_1^{-q\gamma(a, n)} \in t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O$, так как $n < l$. Итак, формула (a) доказана по модулю J_1^2 .

Пусть $l \geq 1$. Если $\gamma \notin p^l \mathbb{N}$, то $\mathcal{F}_{\gamma, l} = 0$. В противном случае $\mathcal{F}_{\gamma, l} \equiv \mathcal{F}_{\gamma, -N} \pmod{C_2(\mathcal{L})}$ с произвольным $-N \leq l$. Следовательно, если $\gamma \geq v_0$, то $\mathcal{F}_{\gamma, l} t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + J_1^2$. Если $\gamma < v_0$, то $\gamma \leq v_0 - \delta$ и $\mathcal{F}_{\gamma, l} t_1^{-q\gamma} \in t_1^{-a^*} J_O$. Итак, формула (b) доказана по модулю J_1^2 .

Допустим, что соотношения (a) и (b) доказаны по модулю $J_1^{s_0}$, где $s_0 \geq 2$.

Из (a) следует теперь, что для $s \geq 2$ и $-\tilde{N} \leq \bar{n} < l$ выполнено

$$\mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \in C_2(\mathcal{A}_1(v_0)) + \sum_{i \geq 2} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^i + J_1^{s_0+1}. \quad (1)$$

Мы получаем также из (a), что для любых $\gamma \geq 0$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$(C'_{\gamma, -\tilde{N}, l} - \delta_{\gamma 0}) t_1^{-q\gamma}, (C''_{\gamma, -\tilde{N}, l} - \delta_{\gamma 0}) t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{i \geq 1} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^i + J_1^{s_0}. \quad (2)$$

Применяя доказанную выше лемму при $l \in \mathbb{N}$ и индуктивное предположение (b) по модулю $J_1^{s_0}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma} &\equiv \mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}, l} t_1^{-q\gamma} + \mathcal{F}_{\gamma, l} t_1^{-q\gamma} \pmod{C_2(\mathcal{A}_1(v_0))} \\ &+ \sum_{i \geq 2} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^i + J_1^{s_0+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $\gamma \in p^l \mathbb{N}$, то $\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}, l}$ является линейной комбинацией $\mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}$ с $s \geq 2$, $-\tilde{N} \leq \bar{n} < l$ и $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma$. Таким образом, можно применить свойство (1) для оценки $\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}, l}$. Так как $l \geq 1$, мы в итоге получаем

$$\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + t_1^{-a^*} J_O + J_1^p \subset \mathcal{A}_1(v_0) + t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O + J_1^p.$$

Теперь соотношение (3) дает формулу (b) по модулю $J_1^{s_0+1}$ в случае $\gamma \in p^l \mathbb{N}$. Если $\gamma \notin p^l \mathbb{N}$, то $\mathcal{F}_{\gamma, l} = 0$, и формула (b) справедлива по тривиальным соображениям. Можно использовать этот аргумент в случае $l = 1$ и $\gamma = a \in \mathbb{Z}^+(p)$, чтобы получить из приведенных выше соотношений (1) и (3), что

$$\mathcal{D}_{a0} t_1^{-qa} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{i \geq 1} (t_1^{-a^*} J_O)^i + J_1^{s_0+1}.$$

Если $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $n < l$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{an} t_1^{-q\gamma(a,n)} &= \sigma^n(\mathcal{D}_{a0} t_1^{-qa}) \in \sigma^n \left(\mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{i \geq 1} (t_1^{-a^*} J_O)^i + J_1^{s_0+1} \right) \\ &\subset \sigma^{l-1} \left(\mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{i \geq 1} (t_1^{-a^*} J_O)^i + J_1^{s_0+1} \right) \\ &\subset \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{i \geq 1} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^i + J_1^{s_0+1}. \end{aligned}$$

В сочетании со свойством (1) это дает, очевидно, формулу (a) по модулю $J_1^{s_0+1}$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если мы применим часть (a) доказанного выше предложения при $s_0 = 1$ и $(\bar{a}, \bar{n}) = (a, 0)$, то предложение 2 из п. 1.2 дает, что если $a \geq sv_0$, где $1 \leq s < p$, то $\mathcal{D}_{an} \in \mathcal{L}(v_0) + C_{s+1}(\mathcal{L})$.

3.4. Нам понадобится также следующая модификация только что доказанного предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (a) Если $l \geq 0$ и $-\tilde{N} \leq \bar{n} < l$, то

$$\mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{-q(v_0+\varepsilon)} J_O + \sum_{i \geq 2} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^i + J_1^p.$$

(b) Если $l \geq 1$, то

$$\mathcal{F}_{\gamma, l} t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{-q(v_0+\varepsilon)} J_O + \sum_{i \geq 2} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^i + J_1^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем часть (b) предложения из п.3.1 и то, что $\mathcal{A}_1^+(v_0)$ содержит $C_2(\mathcal{A}_1(v_0)) + \mathcal{A}_1(v_0 + \varepsilon)$. Если $s \geq 2$, то (a) следует из (1) п.3.3 при $s_0 = p - 1$. В случае $s = 1$ можно использовать аргументы, примененные в конце п.3.3. Для доказательства свойства (b) можно допустить, что $\gamma \in p^l \mathbb{N}$. Тогда (b) следует из формулы (3) п.3.3, где $s_0 = p - 1$.

3.5. Для $\gamma \geq 0$, $N \in \mathbb{Z}$ и $i \in \mathbb{N}$ положим (см. замечание из п.3.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\gamma, -N}(i) &= \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^i \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}, \\ \mathcal{F}_{\gamma, -N}(0, i) &= \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_0(\bar{a}, \bar{n}) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^i \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}},\end{aligned}$$

где обе суммы берутся по $1 \leq s < p$, $0 \leq t \leq s$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma$ и $\bar{n} \geq -N$.

Отметим, что $\mathcal{F}_{\gamma, -N}(1) = \mathcal{F}_{\gamma, -N}$; если $l \geq 0$, то $\mathcal{F}_{\gamma, l}(0, i) = \gamma \mathcal{F}_{\gamma, l}(i)$; если $\gamma \notin \mathbb{N}$, то $\mathcal{F}_{\gamma, 0}(i) = 0$.

ЛЕММА 1. Для $\gamma \geq 0$ и $N, i \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad \mathcal{F}_{\gamma, -N}(i) &= \sum_{\gamma_1 + \gamma^* + \gamma_2 = \gamma} C'_{\gamma_1, -N, 0} \mathcal{F}_{\gamma^*, 0}(i) C''_{\gamma_2, -N, 0} \mod J_1^p; \\ \text{(b)} \quad \mathcal{F}_{\gamma, -N}(0, i) &= \sum_{\gamma_1 + \gamma^* + \gamma_2 = \gamma} C'_{\gamma_1, -N, 0} \gamma^* \mathcal{F}_{\gamma^*, 0}(i) C''_{\gamma_2, -N, 0} \mod J_1^p.\end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы из п.3.3.

ЛЕММА 2. Для $N \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$ и $\gamma \geq 0$ имеем

$$\sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \mathcal{F}_{\gamma_1, -N}(1) \mathcal{F}_{\gamma_2, -N}(i) = \mathcal{F}_{\gamma, -N}(i+1) - \mathcal{F}_{\gamma, -N}(0, i) \mod J_1^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из части (b) леммы п.1.4 следует, что для произвольного набора $(\bar{a}, \bar{n})$ выполнено

$$\sum_{0 \leq t \leq s} (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_0(\bar{a}, \bar{n}) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} = 0.$$

Итак, если при $0 \leq t \leq s$ мы положим $\gamma_{0t}^-(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma_0(\bar{a}, \bar{n}) - \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) = a_1 p^{n_1^*} + \dots + a_t p^{n_t^*}$, то

$$\mathcal{F}_{\gamma_1, -N}(1) = - \sum_{\substack{0 \leq t \leq s < p \\ \gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma_1}} (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_{0t}^-(\bar{a}, \bar{n}) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}.$$

Для вычисления левой части тождества нашей леммы в записанном выше выражении для $\mathcal{F}_{\gamma_1, -N}(1)$ можно использовать индексы (s', t') , где $1 \leq s' < p$ и

$0 \leq t' \leq s'$, а в выражении для $\mathcal{F}_{\gamma_2, -N}(i)$ – индексы (s, t'') , где $s' \leq s < p$ и $s' \leq t'' \leq s$. Так как $\gamma_{00}^-(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma_{0s}(\bar{a}, \bar{n}) = 0$, то можно считать также, что $1 \leq t' \leq s'$ и $s' \leq t'' < s$. Теперь мы получаем следующее сравнение по модулю J_1^p :

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \mathcal{F}_{\gamma_1, -N}(1) \mathcal{F}_{\gamma_2, -N}(i) \\ & \equiv - \sum \eta(n_{t'}, \dots, n_1) \gamma_{0t'}^-(\bar{a}, \bar{n}) R_{t't''}(-1)^{s+t''} \eta(n_{t''+1}, \dots, n_s) \gamma_{0t''}(\bar{a}, \bar{n})^i \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где сумма берется по $2 \leq s < p$, $1 \leq t' \leq t'' < s$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\bar{n} \geq -N$, $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma$ и

$$R_{t't''} = \sum_{t' \leq s_1 \leq t''} (-1)^{s_1-t'} \eta(n_{t'+1}, \dots, n_{s_1}) \eta(n_{t''}, \dots, n_{s_1+1}).$$

Согласно части (b) леммы п. 1.4 мы имеем $R_{t't''} = \delta_{t't''}$, где δ – символ Кронекера. Таким образом, мы можем взять $t' = t'' = t$, и после применения тождества

$$\gamma_{0t}^-(\bar{a}, \bar{n}) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^i = \gamma_0(\bar{a}, \bar{n}) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^i - \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^{i+1}$$

правая часть равенства (1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & - \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_0(\bar{a}, \bar{n}) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^i \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} \\ & + \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^{i+1} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}, \end{aligned}$$

где обе суммы берутся по $2 \leq s < p$, $1 \leq t < s$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\bar{n} \geq -N$ и $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma$. Отметим теперь, что в этом выражении можно использовать суммирование по индексам (s, t) таким, что $1 \leq s < p$ и $0 \leq t \leq s$. Действительно, для любого $1 \leq s < p$ мы имеем $\gamma_{0s}(\bar{a}, \bar{n}) = 0$, а для $t = 0$ мы имеем $\gamma_0(\bar{a}, \bar{n}) \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^i = \gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^{i+1}$.

Таким образом, правая часть сравнения (1) равняется $-\mathcal{F}_{\gamma, -N}(0, i) + \mathcal{F}_{\gamma, -N}(i+1)$, и лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $i \in \mathbb{N}$ и $\gamma \geq 0$, то:

- (a) $\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}}(i) t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j \leq i} (t_1^{-a^*} J_O)^j + J_1^p$;
- (b) $\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}}(i) t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{-q(v_0+\varepsilon)} J_O + \sum_{2 \leq j \leq i} (t_1^{-a^*} J_O)^j + J_1^p$;
- (c) $\mathcal{F}_{\gamma, 0}(i) t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j \leq i} (t_1^{-a^*} J_O)^j \sum_{j_1 \geq 0} (t_1^{-a^* p^{-1}} J_O)^{j_1} + J_1^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $i = 1$, то формулы (а) и (б) доказаны (см. предложение п. 3.1). Предположим по индукции, что (а) и (б) доказаны для $i = i_0 \geq 1$. Теперь мы допустим, что (с) доказано для $i = i_0$ по модулю $J_1^{s_0}$, где $1 \leq s_0 < p$. Тогда свойство (2) из п. 3.3 при $l = 0$ и часть (а) леммы 1 дают

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}}(i_0)t_1^{-q\gamma} &\equiv \mathcal{F}_{\gamma, 0}(i_0)t_1^{-q\gamma} \pmod{C_2(\mathcal{A}_1(v_0))} \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq i_0} (t_1^{-a^*} J_O)^j \sum_{j_1 \geq 1} (t_1^{-a^* p^{-1}} J_O)^{j_1} + J_1^{s_0+1}. \end{aligned}$$

Согласно индуктивному предположению (а) при $i = i_0$ это дает формулу (с) по модулю $J_1^{s_0+1}$. Таким образом, часть (с) доказана для $i = i_0$ индукцией по $1 \leq s_0 \leq p$.

Из части (с) при $i = i_0$, свойства (2) из п. 3.3 и части (б) леммы 1 следует

$$\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}}(0, i_0)t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j \leq i_0} (t_1^{-a^*} J_O)^j \sum_{j_1 \geq 0} (t_1^{-a^* p^{-1}} J_O)^{j_1} + J_1^p. \quad (1)$$

Индуктивное предположение (а) для $i = i_0$ дает

$$\sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \mathcal{F}_{\gamma_1, -\tilde{N}}(1) \mathcal{F}_{\gamma_2, -\tilde{N}}(i_0)t_1^{-q\gamma} \in C_2(\mathcal{A}_1(v_0)) + \sum_{2 \leq i \leq i_0+1} (t_1^{-a^*} J_O)^i + J_1^p. \quad (2)$$

Теперь соотношения (1) и (2) с леммой 2 дают формулу (а) при $i = i_0 + 1$ (мы используем, что $(t_1^{-a^* p^{-1}} J_O)^{j_1} \subset t_1^{-a^*} J_O$ для $1 \leq j_1 < p$).

Действуя подобным образом, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}}(i_0 + 1)t_1^{-q\gamma} &\equiv \mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}}(0, i_0)t_1^{-q\gamma} \equiv \gamma \mathcal{F}_{\gamma, 0}(0, i_0)t_1^{-q\gamma} \\ &\equiv \gamma \mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}}(i_0)t_1^{-q\gamma} \pmod{C_2(\mathcal{A}_1(v_0))} + \sum_{2 \leq i \leq i_0+1} (t_1^{-a^*} J_O)^i + J_1^p \end{aligned}$$

(мы использовали лемму 2 для первого сравнения и лемму 1 для второго и третьего сравнений). Эти сравнения дают часть (б) при $i = i_0 + 1$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $l, i \in \mathbb{N}$, то:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \mathcal{F}_{\gamma, l}(i)t_1^{-q\gamma} &\in \sum_{j=1}^i p^{(i-j)l} C_j(\mathcal{A}_1(v_0)) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq i \\ j_1 \geq j}} p^{(i-j)l} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^{j_1} + J_1^p; \\ \text{(б)} \quad \mathcal{F}_{\gamma, l}(i)t_1^{-q\gamma} &\in p^{(i-1)l} \mathcal{A}^+(v_0) + \sum_{j=2}^i p^{(i-j)l} C_j(\mathcal{A}_1(v_0)) \\ &+ p^{(i-1)l} t_1^{-q(v_0+\varepsilon)} J_O + \sum_{\substack{2 \leq j \leq i \\ j_1 \geq j}} p^{(i-j)l} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^{j_1} + J_1^p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по $i \geq 1$. Если $i = 1$, то

$$\mathcal{F}_{\gamma,l}(1)t_1^{-q\gamma} = \mathcal{F}_{\gamma,l}t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{j_1 \geq 1} (t_1^{-a^*p^{l-1}}J_O)^{j_1} + J_1^p$$

согласно части (b) предложения п. 3.3.

Допустим, что наше предложение доказано при $i = i_0 \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \mathcal{F}_{\gamma_1,l}(1)\mathcal{F}_{\gamma_2,l}(i_0)t_1^{-q\gamma} &\in \sum_{2 \leq j \leq i_0+1} p^{(i_0+1-j)l}C_j(\mathcal{A}_1(v_0)) \\ &+ \sum_{\substack{2 \leq j \leq i_0+1 \\ j_1 \geq j}} p^{(i_0+1-j)l}(t_1^{-a^*p^{l-1}}J_O)^{j_1} + J_1^p. \end{aligned} \quad (1)$$

Очевидно, $\mathcal{F}_{\gamma,l}(0, i_0) = \gamma \mathcal{F}_{\gamma,l}(i_0)$, и мы имеем либо $\gamma \in p^l\mathbb{N}$, либо $\mathcal{F}_{\gamma,l}(i_0) = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma,l}(0, i_0)t_1^{-q\gamma} &\in \sum_{1 \leq j \leq i_0} p^{(i_0+1-j)l}C_j(\mathcal{A}_1(v_0)) \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq i_0 \\ j_1 \geq j}} p^{(i_0+1-j)l}(t_1^{-a^*p^{l-1}}J_O)^{j_1} + J_1^p, \end{aligned}$$

и мы получаем часть (a) для $i = i_0 + 1$ из леммы 2 при $-N = l$ и $i = i_0$.

Часть (b) для $i = i_0 + 1$ может быть получена теперь из формулы (1), леммы 2 и индуктивного предположения (b) при $i = i_0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $i, l \geq 1$, то:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad &\left(\frac{\mathcal{F}_{\gamma,l}(i)}{i!}\right)t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j < p} (t_1^{-a^*p^{l-1}}J_O)^j + J_1^p; \\ \text{(b)} \quad &\left(\frac{\mathcal{F}_{\gamma,l}(i)}{i!}\right)t_1^{-q\gamma} \in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{-q(v_0+\varepsilon)}J_O + \sum_{2 \leq j < p} (t_1^{-a^*p^{l-1}}J_O)^j + J_1^p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, если $\bar{n} \geq l$, то $\gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) \in p^l\mathbb{N}$ для $0 \leq t \leq s$. Следовательно,

$$\frac{\mathcal{F}_{\gamma,l}(i)}{i!} \in \left(\frac{p^{li}}{i!}\right)\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_1.$$

Если $i \in \mathbb{N}$, то согласно предложению 2 $\mathcal{F}_{\gamma,l}(i)t_1^{-q\gamma}$ принадлежит

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq j \leq \min\{i, p-1\}} p^{(i-j)l}C_j(\mathcal{A}_1(v_0)) \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq j_1 \leq \min\{i, p-1\}} p^{(i-j)l}(t_1^{-a^*p^{l-1}}J_O)^{j_1} + J_1^p \\ &\subset p^{\tilde{i}}\mathcal{A}_1(v_0) + p^{\tilde{i}} \sum_{1 \leq j_1 < p} (t_1^{-a^*p^{l-1}}J_O)^{j_1} + J_1^p, \end{aligned}$$

где $\tilde{i} = \max\{0, i - (p - 1)\}$.

Можно легко проверить, что $v_p(i!) \leq \tilde{i}$ при $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, “ J_1^p -компонента” выражения $\mathcal{F}_{\gamma, l}(i)t_1^{-q\gamma}$ также делится на $i!$, и мы получаем часть (а) следствия.

Часть (b) доказывается аналогично.

3.6. Используем обозначения из п. 3.1, чтобы определить для $N \leq \tilde{N}$ и $l \geq 0$ следующие элементы алгебры $\mathcal{A} \otimes O_1[[X]]$:

$$\begin{aligned} \Psi_{-N}^{(l)} &= \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \\ &\quad \times \text{ex}_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} \prod_{l_1=1}^l \text{ex}_{l_1}(\bar{a}, \bar{n}), \end{aligned}$$

где суммирование берется по $0 \leq s < p$, $0 \leq t \leq s$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\bar{n} \geq -N$ (часть этой суммы, отвечающая $s = 0$, предполагается равной 1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Смысл правой части приведенного выше выражения может быть пояснен следующим образом. Если $l_1 \in \mathbb{N}$ и $\Psi_{-N, l_1}^{(l)}$ — часть этой суммы, состоящая из членов с $\bar{n} < l_1$, то $\Psi_{-N, l_1}^{(l)} \in \mathcal{A} \otimes O_0[t_1^{-1}][[X]]$. Легко видеть, что если $l_1 \geq l_2 > l$, то

$$\Psi_{-N, l_1}^{(l)} \equiv \Psi_{-N, l_2}^{(l)} \pmod{p^{l_2-l} \mathcal{A} \otimes O_0[t_1^{-1}][[X]]},$$

и, следовательно,

$$\Psi_{-N}^{(l)} := \lim_{l_1 \rightarrow +\infty} \Psi_{-N, l_1}^{(l)} \in \mathcal{A} \otimes O_1[[X]] = \mathcal{A}_1 \otimes_{O_1} O_1[[X]].$$

Для $l, N \in \mathbb{Z}$ таких, что $-N < l$, положим

$$\begin{aligned} C'_{-N, l} &= 1 + \sum \eta(n_s, \dots, n_1) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \prod_{1 \leq l_1 < l} \text{ex}_{l_1}(\bar{a}, \bar{n}), \\ C''_{-N, l} &= 1 + \sum (-1)^s \eta(n_1, \dots, n_s) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \prod_{0 \leq l_1 < l} \text{ex}_{l_1}(\bar{a}, \bar{n}), \end{aligned}$$

где обе суммы берутся по $1 \leq s < p$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $-N \leq \bar{n} < l$.

ЛЕММА 1. Для $l_1, N \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем

$$\Psi_{-N}^{(l)} = C'_{-N, l_1} \Psi_{l_1}^{(l)} C''_{-N, l_1}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы п. 3.3. Заметим лишь, что $\text{ex}_{l_1}(\bar{a}, \bar{n}) = 1$, если $\bar{n} < l_1$.

Для $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $0 \leq t \leq s$ рассмотрим разложения по степеням X :

$$\text{ex}_l(\bar{a}, \bar{n}) = \sum_{j \geq 0} c_j^{(l)}(\bar{a}, \bar{n}) X^{jp^l}, \quad \text{ex}_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) = \sum_{j \geq 0} c_j^{(0)}(t, \bar{a}, \bar{n}) X^j.$$

Если $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, положим $\gamma_l(\bar{a}, \bar{n}) = a_1 p^{(n_1-l)^*} + \dots + a_s p^{(n_s-l)^*}$ и заметим, что это определение совпадает с определением из п. 3.2 в случае $l = 0$, а для $\bar{n} \geq l$ мы имеем $\gamma_l(\bar{a}, \bar{n}) = p^{-l} \gamma_0(\bar{a}, \bar{n})$.

ЛЕММА 2. (а) Для $1 \leq j < p$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$c_j^{(l)}(\bar{a}, \bar{n}) = \frac{\gamma_l(\bar{a}, \bar{n})^j}{j!}, \quad c_j^{(0)}(t, \bar{a}, \bar{n}) = \frac{\gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n})^j}{j!}.$$

(б) Для $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\bar{n} > l$ $\text{ex}_l(\bar{a}, \bar{n}) = \exp(\gamma_l(\bar{a}, \bar{n})X^{p^l})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть (а) следует из того, что экспонента Артина–Хассе $E(1, X)$ совпадает с обычной экспонентой в степенях $< p$. Часть (б) вытекает из определения $\text{ex}_l(\bar{a}, \bar{n})$ (см. п. 3.1).

Для произвольных $N \leq \tilde{N}$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ используем разложения по степеням X для рядов $\text{ex}_{0t}(\bar{a}, \bar{n})$ и $\text{ex}_{l_1}(\bar{a}, \bar{n})$, где $1 \leq l_1 \leq l$, чтобы получить разложения $\Psi_{-N}^{(l)}$:

$$\Psi_{-N}^{(l)} = \sum_{i \geq 0} \Psi_{-N}^{(l)}(i) X^i.$$

Согласно части (б) леммы п. 1.4 мы имеем $\Psi_{-N}^{(l)}(0) = 1$. Если $0 \leq l_1 < l$ и $1 \leq i < p^{l_1+1}$, то

$$\Psi_{-N}^{(l)}(i) = \Psi_{-N}^{(l_1)}(i),$$

так как $\text{ex}_{l_1+1}(\bar{a}, \bar{n}) \equiv \dots \equiv \text{ex}_l(\bar{a}, \bar{n}) \equiv 1 \pmod{(\deg p^{l_1+1})}$.

ЛЕММА 3. Если $1 \leq i < p$, то

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \Psi_{-\tilde{N}}^{(0)}(i) &\in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j \leq i} (t_1^{-a^*} J_O)^j + J_1^p; \\ \text{(б)} \quad \Psi_{-\tilde{N}}^{(0)}(i) &\in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{-q(v_0+\varepsilon)} J_O + \sum_{2 \leq j \leq i} (t_1^{-a^*} J_O)^j + J_1^p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно части (а) леммы 2 мы имеем при $1 \leq i < p$

$$\Psi_{-\tilde{N}}^{(0)}(i) = \sum_{\gamma} \left(\frac{\mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}}(i)}{i!} \right) t_1^{-q\gamma},$$

и лемма вытекает из предложения 1 п. 3.5.

ЛЕММА 4. Если $l \in \mathbb{N}$ и $p^l \leq i < p^{l+1}$, то:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \Psi_{-\tilde{N}}^{(l)}(i) &\in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j < p} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^j + J_1^p; \\ \text{(б)} \quad \Psi_{-\tilde{N}}^{(l)}(i) &\in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{-q(v_0+\varepsilon)} J_O + \sum_{2 \leq j < p} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^j + J_1^p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение $\Psi_{-\tilde{N}}^{(l)} = C'_{-\tilde{N},l} \Psi_l^{(l)} C''_{-\tilde{N},l}$ из леммы 1, и пусть $C'_{-\tilde{N},l} = \sum_{i \geq 0} C'_{-\tilde{N},l}(i) X^i$ и $C''_{-\tilde{N},l} = \sum_{i \geq 0} C''_{-\tilde{N},l}(i) X^i$. Согласно предложению п. 3.3 мы имеем для $i \geq 1$

$$C'_{-\tilde{N},l}(i), C''_{-\tilde{N},l}(i) \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{j \geq 1} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^j + J_1^p.$$

Из леммы 2 следует, что для $1 \leq i < p^{l+1}$ значение $\Psi_l^{(l)}(i)$ совпадает с коэффициентом при X^i в выражении

$$\begin{aligned} & \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \exp(\gamma_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) X) \\ & \times \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \prod_{1 \leq u \leq l} \exp\left(\frac{\gamma(\bar{a}, \bar{n}) X^{p^u}}{p^u}\right) \\ & = \sum_{\substack{\gamma \in p^l \mathbb{N} \\ j \geq 1}} \exp\left[\gamma \left(\frac{X^{p^l}}{p^l} + \dots + \frac{X^p}{p}\right)\right] \left(\frac{\mathcal{F}_{\gamma,l}(j)}{j!}\right) t_1^{-q\gamma} X^j, \end{aligned}$$

где первая сумма берется по $1 \leq s < p$, $0 \leq t \leq s$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\bar{n} \geq l$. Следовательно, $\Psi_l^{(l)}(i)$ является линейной комбинацией с p -целыми коэффициентами выражений вида $\sum_{\gamma} (\mathcal{F}_{\gamma,l}(j)/j!) t_1^{-q\gamma}$, где $j \in \mathbb{N}$ и, следовательно, принадлежит (см. следствие из п. 3.5)

$$\mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j_1 < p} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^{j_1} + J_1^p.$$

Теперь часть (а) леммы вытекает из соотношения

$$\Psi_{-\tilde{N}}^{(l)}(i) = \sum_{i_1 + i^* + i_2 = i} C'_{-\tilde{N},l}(i_1) \Psi_l^{(l)}(i^*) C''_{-\tilde{N},l}(i_2).$$

Часть (b) может быть получена аналогично с помощью оценок

$$C'_{-\tilde{N},l}(i), C''_{-\tilde{N},l}(i), \frac{\mathcal{F}_{\gamma,l}(i)}{i!} \in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{-q(v_0+\varepsilon)} J_O + \sum_{j \geq 2} (t_1^{-a^* p^{l-1}} J_O)^j + J_1^p,$$

где $i \geq 1$.

ЛЕММА 5. Если $l \geq 0$ и $i \geq p^{l+1}$, то:

- (a) $\Psi_{-\tilde{N}}^{(l)}(i) \in \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j < p} (t_1^{-a^* p^l} J_O)^j + J_1^p;$
- (b) $\Psi_{-\tilde{N}}^{(l)}(i) \in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{-q(v_0+\varepsilon)} J_O + \sum_{2 \leq j < p} (t_1^{-a^* p^l} J_O)^j + J_1^p.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение $\Psi_{-\tilde{N}}^{(l)} = C'_{-\tilde{N}, l+1} \Psi_{l+1}^{(l)} C''_{-\tilde{N}, l+1}$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 4, мы получаем часть (а) нашей леммы, так как

$$\Psi_{l+1}^{(l)} = \sum_{\substack{\gamma \in p^{l+1}\mathbb{N} \\ j \geq 1}} \exp \left[\gamma \left(\frac{X^{p^l}}{p^l} + \dots + \frac{X^p}{p} \right) \right] \left(\frac{\mathcal{F}_{\gamma, l+1}(j)}{j!} \right) t_1^{-q\gamma} X^j.$$

Часть (b) леммы получается аналогично части (b) леммы 4.

3.7. Для любых $\gamma \geq 0$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $N \in \mathbb{Z}$ положим

$$\Psi_{\gamma, -N}^{(l)} = \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \text{ex}_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} \prod_{l_1=1}^l \text{ex}_{l_1}(\bar{a}, \bar{n}),$$

где сумма берется по $0 \leq t \leq s < p$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\bar{n} \geq -N$ и $\gamma(\bar{a}, \bar{n}) = \gamma$. Тогда $\Psi_{\gamma, -N}^{(l)} \in \mathcal{A} \otimes W(k)[[X]]$, и легко видеть, что если $\gamma \rightarrow +\infty$, то $\Psi_{\gamma, -N}^{(l)} \rightarrow 0$ в p -адической топологии. Следовательно,

$$\Psi_{-N}^{(l)} = \sum_{\gamma} \Psi_{\gamma, -N}^{(l)} t_1^{-q\gamma}$$

и $\Psi_{-N}^{(l)}$ сходится для $X = t_1^{b^*}$. Положим $\Theta_{-N}^{(l)} = \Psi_{-N}^{(l)}(t_1^{b^*}) \in \mathcal{A}_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (а) Для любого $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ мы имеем

$$\Theta_{-\tilde{N}}^{(l)} \in 1 + \mathcal{A}_1(v_0) + t_1^{b^* - a^*} J_O + J_1^p.$$

(b) Имеем

$$\Theta_{-\tilde{N}}^{(0)} \equiv 1 + \sum_{\gamma} \mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma + b^*} \pmod{(\mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{b^* - a^*} J_O + J_1^p)}.$$

(c) Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеется сравнение

$$\Theta_{-\tilde{N}}^{(m)} \equiv \Theta_{-\tilde{N}}^{(m-1)} \pmod{(\mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{p^m(b^* - a^*)} J_O + J_1^p)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено в п. 3.6, если $0 \leq l_1 < l$, то для $1 \leq i < p^{l_1+1}$ мы имеем $\Psi_{-\tilde{N}}^{(l_1)}(i) = \Psi_{-\tilde{N}}^{(l)}(i)$. Следовательно,

$$\Theta_{-\tilde{N}}^{(l)} = \sum_{i=0}^{p-1} \Psi_{-\tilde{N}}^{(0)}(i) t_1^{ib^*} + \cdots + \sum_{i=p^l}^{p^{l+1}-1} \Psi_{-\tilde{N}}^{(l)}(i) t_1^{ib^*} + \sum_{i \geq p^{l+1}} \Psi_{-\tilde{N}}^{(l)}(i) t_1^{ib^*},$$

и утверждение (а) следует из частей (а) доказанных выше лемм 3–5, так как для произвольного $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ мы имеем $p^{l+1}b^* - a^*p^l(p-1) \geq b^* - a^*$.

Рассмотрим равенство

$$\Theta_{-\tilde{N}}^{(0)} = 1 + \Psi_{-\tilde{N}}^{(0)}(1) t_1^{b^*} + \sum_{i \geq 2} \Psi_{-\tilde{N}}^{(0)}(i) t_1^{ib^*}.$$

Если $i \geq 2$, то $-q(v_0 + \varepsilon) + ib^* \geq b^* - a^*$.

Действительно, $-q(v_0 + \varepsilon) + ib^* \geq -q(v_0 + \varepsilon) + 2b^* = b^* - a^* - q(\delta + \varepsilon) + r^*(q-1)$, а неравенства (см. п. 3.1) $\varepsilon, \delta < v_0/3$ и $r^* > (q+p)(v_0 - \delta)/(q-1)$ дают

$$-q(\delta + \varepsilon) + r^*(q-1) > q(v_0 - \varepsilon - 2\delta) + \frac{pa^*}{q} > 0.$$

Таким образом, согласно частям (b) лемм 3–5 из п. 3.6 мы получаем

$$\sum_{i \geq 2} \Psi_{-\tilde{N}}^{(0)}(i) t_1^{ib^*} \in \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{b^*-a^*} J_O + J_1^p.$$

Так как $\Psi_{-\tilde{N}}^{(0)}(1) t_1^{b^*} = \sum_{\gamma} \mathcal{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma+b^*}$, часть (b) предложения доказана. Аналогично доказывается часть (c), так как

$$\Theta_{-\tilde{N}}^{(m)} - \Theta_{-\tilde{N}}^{(m-1)} = \sum_{i \geq p^m} \Psi_{-\tilde{N}}^{(m)}(i) t_1^{ib^*} - \sum_{i \geq p^m} \Psi_{-\tilde{N}}^{(m-1)}(i) t_1^{ib^*}.$$

Предложение доказано.

3.8. Для $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ рассмотрим следующие три подгруппы $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_1^0 \supset \mathcal{H}_1^+$ группы обратимых элементов алгебры $\mathcal{A}_1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= 1 + \mathcal{A}_1(v_0) + \sum_{j \geq 1} (t_1^{-a^*p^M} J_O)^j + J_1^p; \\ \mathcal{H}_1^0 &= 1 + \mathcal{A}_1(v_0) + (t_1^{(b^*-a^*)qp^M} J_O) \sum_{j \geq 0} (t_1^{-a^*p^M} J_O)^j + J_1^p; \\ \mathcal{H}_1^+ &= 1 + \mathcal{A}_1^+(v_0) + (t_1^{(b^*-a^*)qp^M} J_O) \sum_{j \geq 0} (t_1^{-a^*p^M} J_O)^j + J_1^p. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\mathcal{H}_1^0$ и $\mathcal{H}_1^+$ являются нормальными подгруппами в группе $\mathcal{H}_1$, и $\mathcal{H}_1^0/\mathcal{H}_1^+$ является центральной подгруппой в $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_1^+$ экспоненты p .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\widehat{N} = \widetilde{N} + M$, то:

- (а) для $m, l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таких, что $n + m - 1 \leq \widehat{N}$, выполнено $\sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}+m}^{(l)} \in \mathcal{H}_1$;
 (б) если m, l, n удовлетворяют предположению из (а) и $n + l \geq \widehat{N} + 1$, то

$$\sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}+m}^{(l)} \equiv \sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}+m}^{(l-1)} \pmod{\mathcal{H}_1^+};$$

$$(c) \sigma^{\widehat{N}+1} \Theta_{-\widetilde{N}}^{(0)} \equiv \widetilde{\exp} \left(\sigma^{\widehat{N}+1} \sum_{\gamma} \mathcal{F}_{\gamma, -\widetilde{N}} t_1^{-q\gamma + b^*} \right) \pmod{\mathcal{H}_1^+}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из части (а) предложения п. 3.7 вытекает, что для любых $l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполнено $\sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}}^{(l)} \in \mathcal{H}_1$.

Заметим теперь, что степенные ряды $C'_{-N, l}$ и $C''_{-N, l}$, рассмотренные в начале п. 3.6, сходятся для $X = t_1^{b^*}$. Поэтому $\sigma^n C'_{-\widetilde{N}, -\widetilde{N}+m}(t_1^{b^*}) - 1$ и $\sigma^n C''_{-\widetilde{N}, -\widetilde{N}+m}(t_1^{b^*}) - 1$ являются линейными комбинациями с коэффициентами из O_0 выражений вида $\mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})}$, где

$$\bar{n} \leq n - \widetilde{N} + m - 1 \leq M$$

согласно предположению (а) из нашего предложения. Следовательно, из предложения п. 3.3 мы получаем

$$\sigma^n C'_{-\widetilde{N}, -\widetilde{N}+m}(t_1^{b^*}), \sigma^n C''_{-\widetilde{N}, -\widetilde{N}+m}(t_1^{b^*}) \in \mathcal{H}_1.$$

Таким образом, часть (а) вытекает из тождества (см. п. 3.6)

$$\sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}+m}^{(l)} = \left(\sigma^n C'_{-\widetilde{N}, -\widetilde{N}+m}(t_1^{b^*}) \right)^{-1} \left(\sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}}^{(l)} \right) \left(\sigma^n C''_{-\widetilde{N}, -\widetilde{N}+m}(t_1^{b^*}) \right)^{-1}. \quad (1)$$

Из частей (а) и (с) предложения п. 3.7 следует

$$\Theta_{-\widetilde{N}}^{(l)} (\Theta_{-\widetilde{N}}^{(l-1)})^{-1} \in 1 + \mathcal{A}_1^+(v_0) + t_1^{p^l(b^* - a^*)} J_O + J_1^p,$$

и, значит, если $n + l \geq \widehat{N} + 1 = N^* + M$, то мы получаем

$$\sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}}^{(l)} \equiv \sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}}^{(l-1)} \pmod{\mathcal{H}_1^+}.$$

Теперь тождество (1), см. выше, дает, что $\sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}+m}^{(l)}$ и $\sigma^n \Theta_{-\widetilde{N}+m}^{(l-1)}$ имеют один и тот же образ в группе $\mathcal{H}_1 / \mathcal{H}_1^+$, и часть (б) доказана.

Часть (с) легко следует из части (б) предложения п. 3.7.

3.9. Для $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим (см. замечание из п. 3.6)

$$\Phi_m^{(N)} = \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}} \prod_{0 \leq i \leq N} \mathcal{E}_{it}(\bar{a}, \bar{n}),$$

где сумма берется по $0 \leq t \leq s < p$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\bar{n} \geq m$.

Отметим, что $\Phi_m^{(0)} = \Theta_m^{(0)}$.

Для $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ рассмотрим

$$E_M = \sum \eta(n_s, \dots, n_1) \mathcal{E}_M(\bar{a}, \bar{n}) \dots \mathcal{E}_0(\bar{a}, \bar{n}) t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}$$

и

$$E'_M = \sum \eta(n_s, \dots, n_1) t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}},$$

где обе суммы берутся по $0 \leq s < p$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $n_1 = \dots = n_s = M$. Из предложения п. 3.3 получаем, что $E_M, E'_M \in \mathcal{H}_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (а) $\Phi_M^{(\hat{N})}, \sigma\Phi_M^{(\hat{N})} \in \mathcal{H}_1$.

(б) $\Phi_M^{(\hat{N})} E_M \equiv E'_M (\sigma\Phi_M^{(\hat{N})}) \pmod{\mathcal{H}_1^0(1 + p^{M+1}\mathcal{A}_1)}$.

(с) $\Phi_M^{(\hat{N})} E_M \equiv E'_M (\sigma\Phi_M^{(\hat{N})}) \exp\left(-\sigma^{\hat{N}+1} \sum_{\gamma} \mathcal{F}_{\gamma, -\hat{N}} t_1^{-q\gamma+b^*}\right) \pmod{\mathcal{H}_1^+(1 + p^{M+1}\mathcal{A}_1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем леммы.

ЛЕММА 1. $\Phi_M^{(\hat{N})} E_M \equiv E'_M \Phi_{M+1}^{(\hat{N})} \pmod{J_1^p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что в обозначениях, использованных в начале п. 3.6, мы имеем $E_M^{-1} = C''_{M, M+1}(t_1^{b^*})$. Тождество

$$\Phi_M^{(\hat{N})} = E'_M \tilde{\Phi}_{M+1}^{(\hat{N})} C''_{M, M+1}(t_1^{b^*}) \pmod{J_1^p}$$

аналогично тождеству из леммы 1 п. 3.6, и может быть доказано таким же образом.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если $N \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$, то $(\sigma\Phi_{m-1}^{(N-1)})\Theta_m^{(N)} = \Phi_m^{(N)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $0 \leq t \leq s < p$ и $l \in \mathbb{N}$ положим $(\bar{a}, \bar{n})_{(0, t]} = (a_1, n_1, \dots, a_t, n_t)$ и $\mathcal{E}_{lt}^-(\bar{a}, \bar{n}) = \mathcal{E}_l((\bar{a}, \bar{n})_{(0, t]})$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma\Phi_{m-1}^{(N-1)} &= \sum (-1)^{s+t} \eta(n_t, \dots, n_1) \\ &\quad \times [\eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \mathcal{E}_{Nt}(\bar{a}, \bar{n}) \dots \mathcal{E}_{1t}(\bar{a}, \bar{n})] t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}, \\ \Theta_m^{(N)} &= \sum (-1)^s [(-1)^t \eta(n_t, \dots, n_1) \mathcal{E}_{Nt}^-(\bar{a}, \bar{n}) \dots \mathcal{E}_{1t}^-(\bar{a}, \bar{n})] \\ &\quad \times \eta(n_{t+1}, \dots, n_s) \mathcal{E}_{Nt}(\bar{a}, \bar{n}) \dots \mathcal{E}_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}}, \end{aligned}$$

где обе суммы берутся по $0 \leq t \leq s < p$ и $(\bar{a}, \bar{n})$ таким, что $\bar{n} \geq m$. При умножении этих выражений можно использовать часть (b) леммы п. 1.4 для упрощения произведения в квадратных скобках. В результате мы получаем требуемую формулу.

Из этой леммы и части (a) предложения п. 3.8 получаем

$$\begin{aligned}\Phi_M^{(\hat{N})} &= \left(\sigma^{\hat{N}} \Theta_{-\hat{N}}^{(0)} \right) \left(\sigma^{\hat{N}-1} \Theta_{-\hat{N}+1}^{(1)} \right) \dots \left(\sigma \Theta_{M-1}^{(\hat{N}-1)} \right) \Theta_M^{(\hat{N})} \in \mathcal{H}_1, \\ \sigma \Phi_M^{(\hat{N})} &= \left(\sigma^{\hat{N}+1} \Theta_{-\hat{N}}^{(0)} \right) \prod_{l=1}^{\hat{N}} \sigma^{\hat{N}+1-l} \Theta_{-\hat{N}+l}^{(l)} \in \mathcal{H}_1.\end{aligned}$$

Часть (a) доказана.

Аналогичным образом мы получаем равенство

$$\Phi_{M+1}^{(\hat{N})} = \prod_{l=1}^{\hat{N}} \left(\sigma^{\hat{N}+1-l} \Theta_{-\hat{N}+l}^{(l-1)} \right) \Theta_{M+1}^{(\hat{N})}.$$

Согласно части (b) предложения п. 3.8 для всех $1 \leq l \leq \hat{N}$ мы имеем

$$\sigma^{\hat{N}+1-l} \Theta_{-\hat{N}+l}^{(l)} \equiv \sigma^{\hat{N}+1-l} \Theta_{-\hat{N}+l}^{(l-1)} \pmod{\mathcal{H}_1^+}.$$

Если $\bar{n} \geq M+1$, то $\mathcal{E}_{0t}(\bar{a}, \bar{n}) \in 1 + p^{M+1}O_0$, и лемма из п. 1.4 дает $\Theta_{M+1}^{(\hat{N})} \in 1 + p^{M+1}\mathcal{A}_1$. Итак,

$$\Phi_{M+1}^{(\hat{N})} \equiv \left(\sigma^{\hat{N}+1} \Theta_{-\hat{N}}^{(0)} \right)^{-1} \left(\sigma \Phi_M^{(\hat{N})} \right) \pmod{\mathcal{H}_1^+(1 + p^{M+1}\mathcal{A}_1)},$$

и утверждения (b) и (c) вытекают из приведенной выше леммы 1 и частей (a) и (c) предложения п. 3.8.

3.10. Пусть $\hat{t} = t_1^q E(-1, t_1^{b*}) \in O_1$. Отметим (см. лемму п. 1.6), что

$$\hat{t}^{p^M} \pmod{p^{M+1}O_1} = t^{p^M} \in O_{M+1}(\sigma^M K).$$

Пусть

$$e'_{\mathcal{L}} = \sum_{a \in A} t_1^{-a} \mathcal{D}_{a, -N^*}, \quad e_{\mathcal{L}}^{(M)} = \sum_{a \in A} \hat{t}^{-ap^M} \mathcal{D}_{aM}.$$

ЛЕММА 1. $E'_M = \sigma^{\hat{N}+1} \widetilde{\exp}(e'_{\mathcal{L}})$, $E_M = \widetilde{\exp}(e_{\mathcal{L}}^{(M)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма вытекает из того, что E'_M и E_M могут быть представлены в следующем виде:

$$E'_M = \sigma^{\hat{N}+1} \sum_{\substack{0 \leq s < p \\ a_1, \dots, a_s \in A}} \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^s (t_1^{-a_i} \mathcal{D}_{a_i, -N^*}),$$

$$E_M = \sum_{\substack{0 \leq s < p \\ a_1, \dots, a_s \in A}} \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^s (\hat{t}^{-a_i} p^M \mathcal{D}_{a_i, M}).$$

ЛЕММА 2. Существует $\phi_M^{(\hat{N})} \in \mathcal{L}^0 \otimes \mathcal{O}_1 = \mathcal{L}_1$ такое, что

$$\Phi_M^{(\hat{N})} \equiv \widetilde{\exp}(\phi_M^{(\hat{N})}) \pmod{J_1^p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m \in \mathbb{N}$, то пусть $\Phi_{M,m}^{(\hat{N})}$ задано с помощью того же выражения, что и $\Phi_M^{(\hat{N})}$, но суммирование берется при дополнительном ограничении $\bar{n} < \hat{N} + m$. Тогда (см. замечание из п. 3.6)

$$\Phi_M^{(\hat{N})} \equiv \Phi_{M,m}^{(\hat{N})} \pmod{p^m \mathcal{A}_1}.$$

Легко видеть, что $\Phi_{M,m}^{(\hat{N})} \equiv \Phi_{1m} \Phi_{2m} \pmod{J_1^p}$, где

$$\Phi_{1m} = \sum \eta(n_s, \dots, n_1) t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}},$$

$$\Phi_{2m} = \sum (-1)^s \eta(n_1, \dots, n_s) \mathcal{E}_{0-\hat{N}}(\bar{a}, \bar{n}) t_1^{-q\gamma(\bar{a}, \bar{n})} \mathcal{D}_{\bar{a}\bar{n}},$$

обе суммы берутся по $0 \leq s < p$, $\bar{a} \in A^s$ и $M \leq \bar{n} < \hat{N} + m$, и мы используем обозначение $\mathcal{E}_{0-\hat{N}}(\bar{a}, \bar{n}) = \mathcal{E}_0(\bar{a}, \bar{n}) \dots \mathcal{E}_{\hat{N}}(\bar{a}, \bar{n})$.

Из определения структурных констант (см. п. 1.4) вытекает теперь, что

$$\Phi_{1m} = \prod_{n=\hat{N}+m}^M \widetilde{\exp} \left(\sigma^n \sum_{a \in A} t_1^{-qa} \mathcal{D}_{a0} \right) \pmod{J_1^p},$$

$$\Phi_{2m} = \prod_{n=M}^{\hat{N}+m} \widetilde{\exp} \left(- \sum_{a \in A} \mathcal{E}_{0-\hat{N}}(a, n) \sigma^n (t_1^{-qa} \mathcal{D}_{a0}) \right) \pmod{J_1^p}.$$

Это влечет существование $\phi_{Mm}^{(\hat{N})} \in \mathcal{L}_1$ такого, что $\Phi_{M,m}^{(\hat{N})} = \widetilde{\exp}(\phi_{Mm}^{(\hat{N})})$. Очевидно, существует $\phi_M^{(\hat{N})} = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{Mm}^{(\hat{N})} \in \mathcal{L}_1$ и $\Phi_M^{(\hat{N})} = \widetilde{\exp}(\phi_M^{(\hat{N})})$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{L}_1(v_0) = \mathcal{L}^0(v_0)O_1$. Рассмотрим идеал

$$\mathcal{L}^{0+}(v_0) = [\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^0(v_0)] + p\mathcal{L}^0(v_0) + \mathcal{L}^0(v_0 + \varepsilon)$$

алгебры Ли $\mathcal{L}^0$. Положим также $\mathcal{L}_1^+(v_0) = \mathcal{L}^{0+}(v_0)O_1$ и $\mathcal{L}_O = \mathcal{L}^0O_0$.

Заметим, что

$$\mathcal{L}_1(v_0) = \mathcal{L}_1 \cap (\mathcal{A}_1(v_0) + J_1^p), \quad \mathcal{L}_1^+(v_0) = \mathcal{L}_1 \cap (\mathcal{A}_1^+(v_0) + J_1^p).$$

Рассмотрим следующие O_0 -подмодули в $\mathcal{L}_1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{H}_1 &= \mathcal{L}_1(v_0) + \sum_{1 \leq j < p} t_1^{-ja^*p^M} C_j(\mathcal{L}_O) + p^{M+1}\mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}\mathcal{H}_1^0 &= \mathcal{L}_1(v_0) + t_1^{qp^M(b^*-a^*)} \sum_{1 \leq j < p} t_1^{-(j-1)a^*p^M} C_j(\mathcal{L}_O) + p^{M+1}\mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}\mathcal{H}_1^+ &= \mathcal{L}_1^+(v_0) + t_1^{qp^M(b^*-a^*)} \sum_{1 \leq j < p} t_1^{-(j-1)a^*p^M} C_j(\mathcal{L}_O) + p^{M+1}\mathcal{L}_1. \end{aligned}$$

По отношению к индуцированным скобкам Ли $\mathcal{L}\mathcal{H}_1$ является алгеброй Ли над O_0 , $\mathcal{L}\mathcal{H}_1^0$ и $\mathcal{L}\mathcal{H}_1^+$ являются ее идеалами и $\mathcal{L}\mathcal{H}_1^0/\mathcal{L}\mathcal{H}_1^+$ – абелев идеал в $\mathcal{L}\mathcal{H}_1/\mathcal{L}\mathcal{H}_1^+$, аннулируемый умножением на p .

ЛЕММА 3. Если $l \in \mathcal{L}_1$, то:

- (a) $l \in \mathcal{L}\mathcal{H}_1 \iff \widehat{\exp}(l) \in \mathcal{H}_1(1 + p^{M+1}\mathcal{A}_1)$;
- (b) $l \in \mathcal{L}\mathcal{H}_1^0 \iff \widehat{\exp}(l) \in \mathcal{H}_1^0(1 + p^{M+1}\mathcal{A}_1)$;
- (c) $l \in \mathcal{L}\mathcal{H}_1^+ \iff \widehat{\exp}(l) \in \mathcal{H}_1^+(1 + p^{M+1}\mathcal{A}_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$ -алгебру Ли

$$\tilde{L}^0 = \mathcal{L}^0/(\mathcal{L}^0(v_0) + p^{M+1}\mathcal{L}^0).$$

Тогда $\tilde{L}^0$ является конечной алгеброй Ли класса нильпотентности $< p$.

Пусть $\tilde{L} = \tilde{L}^0 \otimes W(k)$, $\tilde{L}_O = \tilde{L}^0 \otimes O_0$, $\tilde{L}_1 = \tilde{L}^0 \otimes O_1$. Если $\tilde{J}^0$ – пополняющий идеал обертывающей алгебры алгебры Ли $\tilde{L}^0$, то положим $\tilde{J} = \tilde{J}^0 \otimes W(k)$, $\tilde{J}_O = \tilde{J}^0 \otimes O_0$ и $\tilde{J}_1 = \tilde{J}^0 \otimes O_1$. В этих обозначениях часть (a) нашей леммы эквивалентна следующему утверждению:

$$(a') \quad \sum_{1 \leq j < p} t_1^{-ja^*p^M} C_j(\tilde{L}_O) = \tilde{L}_1 \cap \left(\sum_{j \geq 1} t_1^{-ja^*p^M} \tilde{J}_O^j + \tilde{J}_1^p \right).$$

Очевидно, множество, стоящее в левой части выражения (a'), содержится во множестве из его правой части. Далее отметим, что любой элемент $\tilde{j} \in \tilde{J}_1$ может быть однозначно представлен в виде

$$\tilde{j} = \sum_{a \gg -\infty} t_1^a j_a,$$

где $j_a \in \tilde{J}$ для всех $a \in \mathbb{Z}$ и $j_a = 0$ для достаточно малых a . В этих обозначениях $\tilde{j} \in \tilde{L}_1$, если и только если $j_a \in \tilde{L}_1$ для всех $a \in \mathbb{Z}$, и

$$\tilde{j} \in \sum_{j \geq 1} t_1^{-ja^* p^M} \tilde{J}_O^j + J_1^p,$$

если и только если для $1 \leq s < p$ мы имеем $j_a \in \tilde{J}^{s+1}$ при $a < -sa^* p^M$.

Следовательно, если $\tilde{j}$ принадлежит множеству из правой части (а'), то для $1 \leq s < p$ и $a < -sa^* p^M$ имеем $j_a \in \tilde{L} \cap \tilde{J}^{s+1}$. Согласно п. (а) предложения 2 п. 1.2 $\tilde{L} \cap \tilde{J}^{s+1} = C_{s+1}(\tilde{L})$, и, следовательно, $\tilde{j}$ принадлежит множеству из левой части (а').

Части (b) и (c) нашей леммы доказываются аналогично.

Теперь предложение из п. 3.9 может быть сформулировано следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеем:*

- (a) $\phi_M^{(\hat{N})}, \sigma \phi_M^{(\hat{N})} \in G(\mathcal{L}\mathcal{H}_1)$;
- (b) $\phi_M^{(\hat{N})} \circ \hat{e}_{\mathcal{L}}^{(M)} \equiv (\sigma^{\hat{N}+1} e'_{\mathcal{L}}) \circ (\sigma \phi_M^{(\hat{N})}) \pmod{G(\mathcal{L}\mathcal{H}_1^0)}$;
- (c) $\phi_M^{(\hat{N})} \circ \hat{e}_{\mathcal{L}}^{(M)} \equiv (\sigma^{\hat{N}+1} e'_{\mathcal{L}}) \circ (\sigma \phi_M^{(\hat{N})}) \circ \left(-\sigma^{\hat{N}+1} \sum_{\gamma} \mathcal{F}_{\gamma, -\hat{N}} t_1^{-q\gamma + b^*} \right) \pmod{G(\mathcal{L}\mathcal{H}_1^+)}.$

§ 4. Основная теорема

В этом параграфе мы рассматриваем произвольный эпиморфизм групп $\psi: \Gamma \rightarrow G(L)$, где L – конечная алгебра Ли над $\mathbb{Z}_p$ класса нильпотентности $< p$.

Согласно § 1 для любого $\tau \in \Gamma$ мы имеем $\psi(\tau) = \tau f \circ (-f)$, где $f \in G(L \otimes O(K_{\text{sep}}))$ таков, что $\sigma f = f \circ e$, $e = \sum_{a \in A} t^{-a} D_{a0} \in G(L \otimes O(K))$ и $A \subset \mathbb{Z}^0(p)$ – конечное подмножество.

Рассмотрим алгебры Ли $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}^0(A)$ и $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A)$ из § 2. Тогда соответствия $\mathcal{D}_{a0} \mapsto D_{a0}$, где $a \in A$, определяют единственный σ -инвариантный морфизм алгебр Ли

$$\pi: \mathcal{L} \longrightarrow L \otimes W(k).$$

Для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{Z}^0(p)$ положим $D_{an} = \sigma^n D_{a0} = \pi(\mathcal{D}_{an})$. Очевидно, что π индуцирует эпиморфизм алгебр Ли над $\mathbb{Z}_p$

$$\pi^0: \mathcal{L}^0 \longrightarrow L,$$

и мы получаем индуцированную убывающую фильтрацию $\{L(v)\}_{v \geq 0}$ идеалов $L(v) = \pi^0(\mathcal{L}^0(A, v))$ алгебры Ли $\mathcal{L}^0$.

Для произвольных $\gamma \geq 0$ и $N \in \mathbb{Z}$ положим $F_{\gamma, -N} = \pi(\mathcal{F}_{\gamma, -N})$. Если $v_0 > 0$ и $N \geq \tilde{N}(v_0, A^+)$, то $L(v)W(k)$ является минимальным σ -инвариантным идеалом в $L \otimes W(k)$, который содержит множество $\{F_{\gamma, -N} \mid \gamma \geq v_0\}$.

ТЕОРЕМА. Если $v > 0$ и $\Gamma^{(v)}$ – подгруппа ветвления группы Γ в верхней нумерации, то

$$\psi(\Gamma^{(v)}) = G(L(v)) \subset G(L).$$

Доказательству этой теоремы посвящены нижеследующие пункты этого параграфа.

4.1. Индуктивное предположение. Пусть $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таково, что $p^{M+1}L = 0$, и пусть $1 \leq s_0 < p$ таково, что $C_{s_0+1}(L) = 0$. Мы можем предположить по индукции, что теорема доказана для композиций морфизма ψ с естественными проекциями $G(L) \rightarrow G(L/p^M L)$ и $G(L) \rightarrow G(L/C_{s_0}(L))$.

Это предположение дает, что для любого $v > 0$ выполнены сравнения

$$L^{(v)} \equiv L(v) \pmod{C_{s_0}(L)}, \quad L^{(v)} \equiv L(v) \pmod{p^M L}, \quad (1)$$

где $L^{(v)}$ – идеал в L такой, что $\psi(\Gamma^{(v)}) = G(L^{(v)})$.

Рассмотрим множество $\mathcal{R} = \{v \in \mathbb{R}_{>0} \mid L^{(v)} \neq L(v)\}$.

Легко видеть, что для достаточно больших v выполнено $L^{(v)} = L(v) = 0$. Отсюда следует, что либо $\mathcal{R} = \emptyset$ (и теорема доказана), либо существует $v_0 = \sup \mathcal{R} > 0$. В этом случае $L^{(v_0)} \neq L(v_0)$. Действительно, обе фильтрации $\{L(v)\}_{v>0}$ и $\{L^{(v)}\}_{v>0}$ являются конечными и левонепрерывными. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что для любого $v \in (v_0 - \delta, v_0]$ мы имеем $L^{(v)} = L^{(v_0)}$ и $L(v) = L(v_0)$, и из равенства $L(v_0) = L^{(v_0)}$ получаем $v_0 = \sup \mathcal{R} \leq v_0 - \delta$. Противоречие.

Таким образом, теорема будет доказана, если мы возьмем произвольное $v_0 > 0$, предположим, что

$$L(v) = L^{(v)} \quad \forall v > v_0, \quad (2)$$

и покажем, что $L^{(v_0)} = L(v_0)$.

4.2. Для взятого в п. 4.1 $v_0 > 0$ и $A \subset \mathbb{Z}^0(p)$ используем выбор $\varepsilon, \delta, \tilde{N}, N^*, q, a^*, b^*$ и обозначения из § 3. Положим $L_1 = L \otimes O_1$, $L_O = L \otimes O_0$, $L_1(v_0) = L(v_0)O_1$, $L_1(v_0 + \varepsilon) = L(v_0 + \varepsilon)O_1$, $L^+(v_0) = [L, L(v_0)] + pL(v_0) + L(v_0 + \varepsilon)$ и $L_1^+(v_0) = L^+(v_0)O_1$.

Пусть $\pi_1 = \pi^0 \otimes O_1: \mathcal{L}_1 \rightarrow L_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \pi_1(e'_{\mathcal{L}}) &= e_1 = \sum_{a \in A} t_1^{-a} D_{a, -N^*}, \\ \pi_1(\hat{e}_{\mathcal{L}}^{(M)}) &= \sigma^M e = \sum_{a \in A} t^{-ap^M} D_{aM} \in L \otimes O_{M+1}(\sigma^M K) \subset L_1, \\ \pi_1(\mathcal{L} \mathcal{H}_1) &= L_1(v_0) + \sum_{j \geq 1} t_1^{-ja^* p^M} C_j(L_O) := LH_1, \\ \pi_1(\mathcal{L} \mathcal{H}_1^0) &= L_1(v_0) + t_1^{qp^M(b^* - a^*)} \sum_{j \geq 1} t_1^{-(j-1)a^* p^M} C_j(L_O) := LH_1^0, \\ \pi_1(\mathcal{L} \mathcal{H}_1^+) &= L_1^+(v_0) + t_1^{qp^M(b^* - a^*)} \sum_{j \geq 1} t_1^{-(j-1)a^* p^M} C_j(L_O) := LH_1^+. \end{aligned}$$

Очевидно, LH_1 – алгебра Ли над O_0 , LH_1^0 и LH_1^+ – ее идеалы, а фактор LH_1^0/LH_1^+ – абелев идеал в LH_1/LH_1^+ , аннулируемый умножением на p .

Во введенных обозначениях предложение из п. 3.10 дает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\phi^* = \pi_1(\phi_M^{(\hat{N})})$, то:

- (a) $\phi^*, \sigma\phi^* \in G(LH_1)$;
- (b) $\phi^* \circ (\sigma^M e) \equiv (\sigma^{\hat{N}+1} e_1) \circ (\sigma\phi^*) \pmod{G(LH_1^0)}$;
- (c) $\phi^* \circ (\sigma^M e) \equiv (\sigma^{\hat{N}+1} e_1) \circ (\sigma\phi^*) \circ (-\sigma^{\hat{N}+1} \sum_{\gamma} F_{\gamma, -\hat{N}} t_1^{-q\gamma+b^*}) \pmod{G(LH_1^+)}.$

4.3. Положим

$$L_{\text{sep}} = L \otimes O'(K_{\text{sep}}), \quad L(v_0)_{\text{sep}} = L(v_0)O'(K_{\text{sep}}), \quad L(v_0)_{\text{sep}}^+ = L^+(v_0)O'(K_{\text{sep}}).$$

Как в п. 4.2, положим

$$\begin{aligned} LH_{\text{sep}} &= L(v_0)_{\text{sep}} + \sum_{j \geq 1} t_1^{-ja^*p^M} C_j(L_O), \\ LH_{\text{sep}}^0 &= L(v_0)_{\text{sep}} + t_1^{qp^M(b^*-a^*)} \sum_{j \geq 1} t_1^{-(j-1)a^*p^M} C_j(L_O), \\ LH_{\text{sep}}^+ &= L(v_0)_{\text{sep}}^+ + t_1^{qp^M(b^*-a^*)} \sum_{j \geq 1} t_1^{-(j-1)a^*p^M} C_j(L_O). \end{aligned}$$

Как и ранее, мы также получаем, что LH_{sep} – алгебра Ли над O_0 , LH_{sep}^0 и LH_{sep}^+ – ее идеалы, а $LH_{\text{sep}}^0/LH_{\text{sep}}^+$ является абелевым идеалом в $LH_{\text{sep}}/LH_{\text{sep}}^+$, аннулируемым умножением на p . Мы имеем также естественные вложения

$$LH_1 \subset LH_{\text{sep}}, \quad LH_1^0 \subset LH_{\text{sep}}^0, \quad LH_1^+ \subset LH_{\text{sep}}^+.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует $f_1^0 \in \{f_1 \in G(L_{\text{sep}}) \mid \sigma f_1 = f_1 \circ e\}$ такое, что для $X^0 = (-\sigma^{\hat{N}+1} f_1^0) \circ (\sigma^M f)$ выполнено $X^0 \equiv \phi^* \pmod{G(LH_{\text{sep}}^0)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, отсюда вытекает, что $X^0 \in G(LH_{\text{sep}})$. Можно показать, что $\sigma^M f, \sigma^{\hat{N}+1} f_1 \in G(LH_{\text{sep}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции можно считать, что существует $f_1' \in G(L_{\text{sep}})$ такое, что $\sigma f_1' = f_1' \circ e_1$, и для $X' = (-\sigma^{\hat{N}+1} f_1') \circ (\sigma^M f)$ мы имеем

$$X' \equiv \phi^* \pmod{G(LH_{\text{sep}} + C_{s_0}(L_{\text{sep}}))}. \quad (1)$$

Равенства $\sigma f_1' = f_1' \circ e_1$ и $\sigma f = f \circ e$ дают

$$X' \circ (\sigma^M e) = (\sigma^{\hat{N}+1} e_1) \circ (\sigma X').$$

Из сравнения (1) следует, что $X' = \phi^* \circ U$, где $U \in G(LH_{\text{sep}} + C_{s_0}(L_{\text{sep}}))$. Заметим, что фактор $G(LH_{\text{sep}}^0 + C_{s_0}(L_{\text{sep}}))/G(LH_{\text{sep}}^0)$ является центральной подгруппой в $G(LH_{\text{sep}})/G(LH_{\text{sep}}^0)$. Из сравнения (см. предложение п. 4.2)

$$\phi^* \circ (\sigma^M e) \equiv (\sigma^{\hat{N}+1} e_1) \circ (\sigma \phi^*) \pmod{G(LH_{\text{sep}}^0)}$$

мы получаем $\sigma U - U \in G(LH_{\text{sep}}^0)$. Следовательно, $U \in LH_{\text{sep}}^0 + L$, так как $G(L_{\text{sep}})|_{\sigma=\text{id}} = G(L)$, а для любого

$$l \in t_1^{qp^M(b^*-a^*)} \sum_{j \geq 1} t_1^{-(j-1)a^*p^M} C_j(L_O)$$

ЭЛЕМЕНТ

$$l_1 = - \sum_{n \geq 0} \sigma^n l \in t_1^{qp^M(b^*-a^*)} \sum_{j \geq 1} t_1^{-(j-1)a^*p^M} C_j(L_O)$$

удовлетворяет тождеству $\sigma l_1 - l_1 = l$.

Итак, $U \equiv u \pmod{G(LH_{\text{sep}})}$, где $u \in C_{s_0}(L)$.

Пусть $f_1^0 = f_1' \circ u$; тогда $\sigma f_1^0 = f_1^0 \circ e_1$ и

$$X^0 = (-\sigma^{\hat{N}+1} f_1^0) \circ (\sigma^M f) = X' \circ (-u) \equiv \phi^* \pmod{G(LH_{\text{sep}})}.$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. $L^{(v_0)} \subset L(v_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях п. 1.6 из только что доказанного предложения следует, что для поля определения $X \pmod{L(v_0)_{\text{sep}}}$ над K' мы имеем

$$K'(X \pmod{L(v_0)_{\text{sep}}}) = K',$$

т.е. $L(v_0) \in \mathcal{J}'_{qv_0-b^*}(X)$, и согласно предложению п. 1.6 имеется включение $L(v_0) \supset L^{(v_0)}$.

4.4. Согласно индуктивному предположению (1) из п. 4.1 и следствию из п. 4.3

$$L^+(v_0) \subset L^{(v_0)} \subset L(v_0).$$

Следовательно, для $\tilde{L} = L(v_0)/L^{(v_0)}$ мы имеем $p\tilde{L} = C_2(\tilde{L}) = 0$.

Пусть $\tilde{L}_{\text{sep}} = \tilde{L} \otimes K_{\text{sep}}$, $\tilde{L}_1 = \tilde{L} \otimes K'$ и $\tilde{L}_k = \tilde{L} \otimes k$.

Для $\gamma \geq v_0$ обозначим через $\tilde{F}_{\gamma, -\tilde{N}}$ образ $F_{\gamma, -\tilde{N}}$ при естественной проекции $L(v_0) \rightarrow \tilde{L}_k$ и рассмотрим $\tilde{U} \in \tilde{L}_{\text{sep}}$ такое, что

$$\sigma \tilde{U} - \tilde{U} = \sum_{v_0 \leq \gamma < v_0 + \varepsilon} \tilde{F}_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma + b^*}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $K'(\tilde{U})$ – поле определения $\tilde{U}$ над K' , то для максимального верхнего числа ветвления $v'(\tilde{U})$ расширения $K'(\tilde{U})/K'$ мы имеем

$$v'(\tilde{U}) < qv_0 - b^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения п. 4.3 получаем $X^0 = \phi^* \circ U$, где $U \in G(LH_{\text{sep}}^0)$. Используем теперь равенство

$$X^0 \circ (\sigma^M e) = (\sigma^{\hat{N}+1} e_1) \circ (\sigma X^0),$$

часть (с) предложения п. 4.2 и то, что $G(LH_{\text{sep}}^0)/G(LH_{\text{sep}}^+)$ – центральная подгруппа в $G(LH_{\text{sep}})/G(LH_{\text{sep}}^+)$, чтобы получить сравнение

$$\sigma U - U \equiv \sigma^{\hat{N}+1} \sum_{\gamma} F_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma+b^*} \pmod{(L^+(v_0)_{\text{sep}} + t_1 L_O)}. \quad (1)$$

В стоящей справа сумме все слагаемые с $\gamma < v_0$ могут быть опущены, так как в этом случае $-q\gamma + b^* > -a^* + b^* > 0$ и $F_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma+b^*} \in t_1 L_O$. Мы можем также опустить все члены с $\gamma \geq v_0 + \varepsilon$, так как здесь $F_{\gamma, -\tilde{N}} t_1^{-q\gamma+b^*} \in L_1(v_0 + \varepsilon) \subset L^+(v_0)_{\text{sep}}$.

Если U_1, U_2 – некоторые решения сравнения (1), то

$$U_1 - U_2 \in L^+(v_0)_{\text{sep}} + t_1 L_O + L.$$

Следовательно, эти элементы, взятые по модулю $L^{(v_0)} O'(K_{\text{sep}})$ имеют одно и то же поле определения. Обозначим это поле через $\tilde{K}$.

Очевидно, $\tilde{K} = K'(X^0 \pmod{L^{(v_0)} O'(K_{\text{sep}})})$. Согласно предложению п. 1.6 максимальное верхнее число ветвления расширения $\tilde{K}/K'$ меньше, чем $qv_0 - b^*$. Легко видеть, что существует решение $U_1 \in G(L_{\text{sep}})$ сравнения (1) такое, что $U_1 \pmod{L^{(v_0)} O'(K_{\text{sep}})} = \sigma^{\hat{N}+1} \tilde{U}$ по отношению к естественному вложению $\tilde{L}_{\text{sep}} \subset L_{\text{sep}}/L^{(v_0)} O'(K_{\text{sep}})$, и, следовательно, $\tilde{K} = K'(\tilde{U})$.

4.5. Предположим, что $\tilde{L} = L(v_0)/L^{(v_0)} \neq 0$ и $l_1, \dots, l_n$ является базисом $\tilde{L}$ над $\mathbb{F}_p$. Заметим, что множество $\{\sigma^n \tilde{F}_{\gamma, -\tilde{N}} \mid v_0 \leq \gamma < v_0 + \varepsilon, n \in \mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z}\}$ порождает $\tilde{L}_k$ над k . Следовательно, множество коэффициентов

$$\{a_{\gamma i} \in k \mid v_0 \leq \gamma < v_0 + \varepsilon\}$$

разложений

$$\tilde{F}_{\gamma, -\tilde{N}} = \sum_{i=1}^n a_{\gamma i} l_i$$

содержит по меньшей мере один ненулевой элемент, т.е. существуют $\gamma_0 \geq v_0$ и $1 \leq i_0 \leq n$ такие, что $a_{\gamma_0, i_0} \neq 0$.

Рассмотрим разложение

$$\tilde{U} = \sum_{i=1}^n U_i l_i,$$

где для $i = 1, \dots, n$ элементы $U_i \in K_{\text{sep}}$ удовлетворяют соотношениям

$$U_i^p - U_i = \sum_{v_0 \leq \gamma < v_0 + \varepsilon} a_{\gamma i} t_0'^{-q\gamma + b^*}.$$

Очевидно, $K'(\tilde{U})$ является композитом полей $K(U_i)$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно,

$$v'(\tilde{U}) \geq v'_{i_0},$$

где v'_{i_0} – максимальное верхнее число ветвления расширения $K'(U_{i_0})/K'$. Согласно выбору $\tilde{N}$, q и b^* из п. 3.1 мы имеем либо $F_{\gamma, -\tilde{N}} = 0$, либо $q\gamma - b^* \in \mathbb{Z}$ и $(q\gamma - b^*, p) = 1$. Заметим также, что $\gamma \geq v_0$ влечет $q\gamma - b^* > 0$. По этой причине из того, что $a_{\gamma_0, i_0} \neq 0$, следует, что $K'(U_{i_0})$ имеет степень p над K' и $v'_{i_0} = q\gamma_{i_0} - b^*$, где $\gamma_{i_0} = \max\{\gamma \mid a_{\gamma i_0} \neq 0\} \geq \gamma_0 \geq v_0$.

Итак, для максимального верхнего числа ветвления $v'(\tilde{U})$ расширения $\tilde{K}/K'$ мы получаем $v'(\tilde{U}) \geq q\gamma_0 - b^* \geq v_0$. Это противоречит предложению п. 4.4. Таким образом, $L(v_0) = L^{(v_0)}$, и теорема доказана.

§ 5. Описание фильтрации ветвления по модулю p -х коммутаторов

5.1. $\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}$ -модуль K^*/K^{*p^M} . Как и ранее, K – полное дискретно нормированное поле характеристики $p > 0$ с конечным полем вычетов $k \simeq \mathbb{F}_{p^{N_0}}$ и фиксированным униформизирующим элементом t_0 . Для $M \in \mathbb{N}$ рассмотрим подъем $O_M(K)$ поля K по модулю p^M из п. 1.1. Пусть $\text{Col}_M: K^* \rightarrow O_M(K)^*$ – мультипликативное сечение Колемана для проекции $O_M(K) \rightarrow K$. Этот гомоморфизм однозначно определен условиями: $t_0 \mapsto t$ и $E(\alpha, t_0^a) \mapsto E(\alpha, t^a)$, где $\alpha \in W(k)$, $a \in \mathbb{Z}^+(p)$ и $E(\alpha, X)$ – степенной ряд из п. 1.5.

Рассмотрим спаривание Витта

$$(\cdot, \cdot): O_M(K) \times K^* \longrightarrow \mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z},$$

заданное с помощью явного закона взаимности Витта (см. [4])

$$(f, g) = (\text{Res} \circ \text{Tr})(f d_{\log} \text{Col}_M(g)),$$

где $f \in O_M(K)$, $g \in K^*$ и Tr индуцирован следом поля частных K_0 кольца $W(k)$ над $\mathbb{Q}_p$. Мы получаем индуцированное отождествление

$$K^*/K^{*p^M} = \text{Hom}(O_M(K)/(\sigma - \text{id})O_M(K), \mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}).$$

Как в п. 1.3, фиксируем $\alpha \in W(k)$ такое, что $\text{Tr } \alpha = 1$. Тогда имеется разложение

$$O_M(K) = (\sigma - \text{id})O_M(K) \oplus \left(\bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^+(p)} W_M(k)t^{-a} \oplus (\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})\alpha \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K^*/K^{*p^M} \otimes W_M(k) &= \prod_{a \in \mathbb{Z}^+(p)} \text{Hom}(W_M(k)t^{-a}, W_M(k)) \\ &\quad \times \text{Hom}((\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})\alpha, W_M(k)). \end{aligned}$$

Для $a \in \mathbb{Z}^+(p)$ (соответственно $a = 0$) и $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $D_{an}^{(M)}$ элемент из $K^*/K^{*p^M} \otimes W_M(k)$ с единственной ненулевой компонентой, которая лежит в $\text{Hom}(W_M(k)t^{-a}, W_M(k))$ (соответственно $\text{Hom}((\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})\alpha, W_M(k))$) и задается с помощью соответствия $wt^{-a} \mapsto \sigma^n w$ (соответственно $\alpha \mapsto \sigma^n \alpha$). Очевидно, для любого $a \in \mathbb{Z}^0(p)$ мы имеем $D_{an}^{(M)} = D_{a, n+N_0}^{(M)}$, и множество

$$\{D_{an}^{(M)} \mid a \in \mathbb{Z}^0(p), 0 \leq n < N_0\}$$

порождает $W_M(k)$ -модуль $K^*/K^{*p^M} \otimes W_M(k)$.

Пусть A – конечное подмножество в $\mathbb{Z}^0(p)$. Тогда множество

$$\{D_{an}^{(M)} \mid a \in A, 0 \leq n < N_0\}$$

порождает свободный $W_M(k)$ -модуль $\mathcal{M}(A, M) \otimes W_M(k)$, где $\mathcal{M}(A, M)$ является образом в K^*/K^{*p^M} подгруппы K^* , порожденной множеством

$$\{E(\alpha, t^a) \mid \alpha \in W(k), a \in A \cap \mathbb{Z}^+(p)\}$$

и элементом t_0 , если $0 \in A$ (это следует из явного закона взаимности Витта). Если $A_1 \subset A$, то имеется естественный эпиморфизм модулей

$$\mathcal{M}(A, M) \longrightarrow \mathcal{M}(A_1, M),$$

индуцированный соответствиями $D_{an}^{(M)} \mapsto D_{an}^{(M)}$ при $a \in A_1$ и $D_{an}^{(M)} \mapsto 0$ при $a \in A \setminus A_1$. По отношению к этим эпиморфизмам мы, очевидно, получаем

$$\varprojlim_A \mathcal{M}(A, M) = K^*/K^{*p^M}.$$

Мы имеем также следующее разложение:

$$\begin{aligned} K^*/K^{*p^M} \otimes O_M(K) &= \left(K^*/K^{*p^M} \otimes W_M(k) \right) \bigotimes_{W_M(k)} O_M(K) \\ &= \text{Hom} \left(\bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^+(p)} W_M(k)t^{-a} \oplus (\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})\alpha, O_M(K) \right). \end{aligned}$$

Обозначим через $e^{(M)} \in K^*/K^*p^M \otimes O_M(K)$ элемент, отвечающий естественному вложению $\bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^+(p)} W_M(k)t^{-a} \oplus (\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})\alpha$ в $O_M(K)$. Легко видеть, что

$$e^{(M)} = \sum_{a \in \mathbb{Z}^0(p)} t^{-a} D_{a0}^{(M)},$$

и образ $e^{(M)}$ при естественной проекции K^*/K^*p^M в $\mathcal{M}(A, M)$ равен

$$e^{(A, M)} = \sum_{a \in A} t^{-a} D_{a0}^{(M)}.$$

Заметим наконец, что при отображении редукции по модулю p^M

$$K^*/K^*p^{M+1} \longrightarrow K^*/K^*p^M$$

мы имеем $D_{an}^{(M+1)} \mapsto D_{an}^{(M)}$ и $e^{(M+1)} \mapsto e^{(M)}$.

5.2. Алгебра Ли $\mathcal{L}^0$ и отождествление $\bar{\psi}$. Пусть $K^*(p) = \varprojlim_M K^*/K^*p^M$ по отношению к морфизмам редукции по модулю p^M из K^*/K^*p^{M+1} в K^*/K^*p^M , $M \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{L}^0$ (соответственно $\mathcal{L}^0(M)$) свободную алгебру Ли с модулем топологических образующих $K^*(p)$ (соответственно K^*/K^*p^M) над $\mathbb{Z}_p$ (соответственно $\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}$). Если $A \subset \mathbb{Z}^0(p)$ – конечное подмножество, то пусть $\mathcal{L}^0(A, M)$ – свободная алгебра Ли над $\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}$ с порождающим модулем $\mathcal{M}(A, M)$ (см. п. 5.1).

Очевидно, проективная система $\mathbb{Z}_p$ -модулей $\{\mathcal{M}(A, M)\}_{A, M}$ определяет проективную систему алгебр Ли $\{\mathcal{L}^0(A, M)\}_{A, M}$ и

$$\varprojlim_A \mathcal{L}^0(A, M) = \mathcal{L}^0(M), \quad \varprojlim_{A, M} \mathcal{L}^0(A, M) = \varprojlim_A \mathcal{L}^0(A) = \mathcal{L}^0,$$

где $\mathcal{L}^0(A) = \varprojlim_M \mathcal{L}^0(A, M)$.

Положим $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 \otimes W(k)$, $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}^0(M) \otimes W_M(k)$ и $\mathcal{L}(A, M) = \mathcal{L}^0(A, M) \otimes W_M(k)$. Заметим, что алгебры Ли $\mathcal{L}^0(A)$ и $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}^0(A) \otimes W(k)$ естественно отождествляются с алгебрами Ли из § 2, обозначенными теми же символами. При этом отождествлении для всех $a \in A$ и $n \in \mathbb{Z}$ мы имеем $\varprojlim_M D_{an}^{(M)} = \mathcal{D}_{an}$, где элементы $\mathcal{D}_{an} \in \mathcal{L}(A)$ были введены в п. 2.1. Алгебра $\mathcal{L}$ является просвободной алгеброй Ли над $W(k)$, множество

$$\{\mathcal{D}_{an} \mid a \in \mathbb{Z}^0(p), n \in \mathbb{Z}\}$$

порождает $\mathcal{L}$ и $\sigma \mathcal{D}_{an} = \mathcal{D}_{a, n+1}$ для любых $a \in \mathbb{Z}^0(p)$ и $n \in \mathbb{Z}$. Мы будем использовать тильду в обозначении любой из упомянутых выше алгебр Ли, если будем рассматривать ее фактор по идеалу коммутаторов порядка $\geq p$.

Рассмотрим элементы $e^{(A,M)} \in G(\tilde{\mathcal{L}}^0(A, M) \otimes O_M(K))$ из п. 5.1. Эти элементы совместимы в проективной системе $\{G(\tilde{\mathcal{L}}^0(A, M) \otimes O_M(K))\}_{A,M}$. Если

$$\mathcal{F}(A, M) = \left\{ f \in G(\tilde{\mathcal{L}}^0(A, M) \otimes O(K_{\text{sep}})) \mid \sigma f = f \circ e^{(A,M)} \right\},$$

то $\{\mathcal{F}(A, M)\}_{A,M}$ – проективная система непустых конечных множеств, и, следовательно, ее проективный предел непуст (в действительности все связывающие морфизмы этой проективной системы являются эпиморфизмами). Выберем $f \in \varprojlim_{A,M} \mathcal{F}(A, M)$ и обозначим через $f^{(A,M)}$ его проекцию в $\mathcal{F}(A, M)$. Тогда соответствия

$$\tau \mapsto \tau f^{(A,M)} \circ (-f^{(A,M)})$$

определяют согласованную систему гомоморфизмов групп

$$\psi^{(A,M)}: \Gamma \longrightarrow G(\tilde{\mathcal{L}}^0(A, M)).$$

Легко видеть, что $\psi^{(M)} = \varprojlim_A \psi^{(A,M)}$ индуцирует изоморфизм групп

$$\bar{\psi}^{(M)}: \Gamma/\Gamma^{p^M} C_p(\Gamma) \longrightarrow G(\tilde{\mathcal{L}}^0(M))$$

и $\psi = \varprojlim_{A,M} \psi^{(A,M)}$ индуцирует изоморфизм групп

$$\bar{\psi}: \Gamma(p)/C_p(\Gamma(p)) \longrightarrow G(\tilde{\mathcal{L}}^0),$$

где $\Gamma(p) = \varprojlim_M \Gamma/\Gamma^{p^M}$ – группа Галуа максимального p -расширения поля K в K_{sep} . Заметим, что $\bar{\psi} \bmod C_2(\Gamma(p)): \Gamma(p)^{\text{ab}} \simeq K^*(p)$ индуцирован отображением взаимности локальной теории полей классов.

5.3. Для конечного подмножества $A \subset \mathbb{Z}^0(p)$ и действительного числа $v > 0$ рассмотрим идеал $\mathcal{L}^0(A, v)$ алгебры Ли $\mathcal{L}^0(A)$ из п. 2.6. Легко видеть, что $\{\mathcal{L}^0(A, v)\}_A$ – проективная подсистема в проективной системе $\{\mathcal{L}^0(A)\}_A$. Следовательно, $\varprojlim_A \mathcal{L}^0(A, v) = \mathcal{L}^0(v)$ – идеал в $\mathcal{L}^0$. Если $\tilde{\mathcal{L}}^0(v) = \mathcal{L}^0(v)/C_p(\mathcal{L}^0)$, то из основной теоремы § 4 вытекает

ТЕОРЕМА А. *Для любого $v > 0$ имеет место равенство*

$$\bar{\psi}(\Gamma(p)^{(v)} \bmod C_p(\Gamma(p))) = G(\tilde{\mathcal{L}}^0(v)).$$

Введенные выше идеалы $\tilde{\mathcal{L}}^0(v)$ могут быть описаны следующим образом.

Для любых $a \in \mathbb{Z}^0(p)$ и $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{Q}}_{an}$ образ $\mathcal{Q}_{an} \in \mathcal{L}$ в $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/C_p(\mathcal{L})$. Если $v > 0$ и $\tilde{\mathcal{L}}(v) = \tilde{\mathcal{L}}^0(v) \otimes W(k) \subset \tilde{\mathcal{L}}$, то согласно замечанию из п. 3.3 мы имеем:

если $a \geq sv$, где $1 \leq s < p$, то для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{\mathcal{Q}}_{an} \in \tilde{\mathcal{L}}(v) + C_{s+1}(\tilde{\mathcal{L}})$.

Пусть $A(v) = \mathbb{Z}^0(p) \cap [1, (p-1)v]$ и в обозначениях п. 2.6 пусть $N(v) = \tilde{N}(v, A(v)^+)$. Мы используем константы $\eta(n_1, \dots, n_s)$ из п. 1.4, чтобы определить для любого $\gamma > 0$ следующие элементы $\tilde{\mathcal{F}}_\gamma(v)$ алгебры Ли $\tilde{\mathcal{L}}$:

$$\tilde{\mathcal{F}}_\gamma(v) = \sum (-1)^s \eta(n_1, \dots, n_s) a_1 p^{n_1} [\dots [\tilde{\mathcal{D}}_{a_1 n_1}, \tilde{\mathcal{D}}_{a_2 n_2}], \dots, \tilde{\mathcal{D}}_{a_s n_s}],$$

где суммирование ведется по $1 \leq s < p$, $a_1, \dots, a_s \in A(v)$ и $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$ таким, что $n_1 \geq 0$, $n_1 \geq \dots \geq n_s \geq -N(v)$ и $a_1 p^{n_1} + \dots + a_s p^{n_s} = \gamma$.

Легко видеть, что:

1) для любого $\gamma > 0$ приведенное выше выражение для $\tilde{\mathcal{F}}_\gamma(v)$ содержит лишь конечное число слагаемых;

2) множество $\mathcal{S}(v) = \{\gamma > 0 \mid \tilde{\mathcal{F}}_\gamma(v) \neq 0\}$ является дискретным в архимедовой топологии и, следовательно, $\mathcal{S}(v) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m, \dots\}$, где $0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_m < \dots$;

3) в p -адической топологии мы имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{F}}_{\gamma_m}(v) = 0$.

Таким образом, получено следующее описание идеалов $\tilde{\mathcal{L}}^0(v)$.

ТЕОРЕМА В. Для любого $v > 0$ $\tilde{\mathcal{L}}^0(v)$ – минимальный замкнутый идеал в алгебре Ли $\tilde{\mathcal{L}}^0$ такой, что его расширение скаляров $\tilde{\mathcal{L}}^0(v) \otimes W(k)$ содержит множество

$$\{\tilde{\mathcal{F}}_\gamma(v) \mid \gamma \geq v\} \cup \{\tilde{\mathcal{D}}_{a0} \mid a \geq (p-1)v\}.$$

Список литературы

1. Абрашкин В. А. Фильтрация ветвления группы Галуа локального поля // Тр. С.-Петерб. матем. об-ва. 1995. Т. 3. С. 47–127.
2. Абрашкин В. А. Фильтрация ветвления группы Галуа локального поля. II // Тр. МИ РАН. 1995. Т. 208. С. 18–69.
3. Berthelot P., Messing W. Théorie de Deudonné Cristalline III: Théorèmes d'Équivalence et de Pleine Fidélité // The Grothendieck Festschrift. A Collection of Articles Written in Honor of 60th Birthday of Alexander Grothendieck / Eds. P. Cartier etc. V. 1. Birkhauser, 1990. P. 173–247.
4. Fontaine J.-M. Representations p -adiques des corps locaux (1-ère partie) // The Grothendieck Festschrift. A Collection of Articles Written in Honor of the 60th Birthday of Alexander Grothendieck / Eds. P. Cartier etc. V. II. Birkhauser, 1990. P. 249–309.
5. Lazard M. Sur les groupes nilpotentes et les anneaux de Lie // Ann. Ecole Norm. Sup. 1954. V. 71. P. 101–190.
6. Knus M. A. On the envelopping algebra and the descending central series of a Lie algebra // J. of Algebra. 1969. V. 12. P. 335–338.
7. Moran S. Dimension subgroups modulo n // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1970. V. 68. P. 579–582.
8. Serre J.-P. Corps locaux. Paris: Hermann, 1968.
9. Шафаревич И. Р. О p -расширениях // Матем. сб. 1947. Т. 20. С. 351–363.