Общероссийский математический портал

О. А. Данилова, А. С. Матвеев, Нетрадиционные условия существования оптимального управления для системы Гурса–Дарбу, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 5, 79–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:51:16

УДК 519.3

О. А. Данилова, А. С. Матвеев

Нетрадиционные условия существования оптимального управления для системы Гурса–Дарбу

Рассмотрена задача оптимального управления нелинейной системой Гурса–Дарбу в случае, когда функционал качества зависит только от фазовой переменной. Показано, что естественный аналог “традиционного” критерия существования оптимального управления для этой задачи несправедлив. При некоторых дополнительных предположениях о системе получены необходимые и достаточные условия того, что любой функционал упомянутого вида достигает минимума. Помимо “традиционного” требования выпуклости множества контингенций эти условия содержат существенное дополнение: правая часть дифференциального уравнения должна быть аффинной относительно каждой из двух младших производных фазовой переменной.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Большинство известных критериев существования оптимального управления идейно связаны со следующим основополагающим результатом [1]. Для объекта управления, описываемого обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f[t, x, u], \quad x(0) = a, \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^l, \quad t \in T := [0, t_f], \quad (0.1)$$

функционал $J = \int \varphi[t, x]dt$ с непрерывным интегрантом $\varphi[t, x]$, непосредственно зависящим только от фазовой переменной, достигает минимума на множестве D траекторий $x(t), t \in T$, если:

- а) множество контингенций $f[t, x, \Omega]$ выпукло и компактно для всех t, x ;
- б) множества D ограничено.

(В случае компактного множества Ω свойство а) не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы при произвольном выборе начальных данных любой функционал указанного вида достигал минимума [2].)

Известно большое число обобщений этого критерия для объектов, описываемых уравнениями различных типов (обыкновенных дифференциальных [1], интегро-дифференциальных [3], в частных производных [4] и т.д.), для задач с различными ограничениями и типами управлений, а также для довольно общих абстрактных моделей систем управления [2], [3]. Все эти обобщения подтверждают один и тот же принцип: *выпуклость и компактность множества контингенций наряду*

с некоторыми естественными требованиями (типа условия b)) гарантируют существование оптимального управления, если функционал качества непосредственно зависит только от состояния.

Однако недавно было обнаружено [5], что упомянутый принцип нарушается для управляемых гиперболических полулинейных систем первого порядка. Это следует из полученных в [5] необходимых и достаточных условий того, что любой интегральный функционал указанного типа достигает минимума на множестве траекторий системы. В отличие от “традиционных”, эти условия помимо аналогов свойств а) и б) включают существенное дополнение, которое часто означает вырождение системы.

Данная работа посвящена выводу аналогичных необходимых и достаточных условий в другом случае: для управляемых систем Гурса–Дарбу. При этом изучается ситуация, исключающая возможность применения результатов [5] несмотря на то, что задачу Гурса–Дарбу, как известно, можно переписать в терминах системы уравнений первого порядка.

Результаты [5] означают, что только в том случае, когда система Гурса–Дарбу вырождена, на множестве ее траекторий достигается минимума любой интегральный функционал с непрерывным интегрантом $\varphi = \varphi[t, \theta, z, z_t, z_\theta]$, непосредственно зависящим от состояния $z = z(t, \theta)$ и его младших производных $z_t = z_t(t, \theta)$, $z_\theta = z_\theta(t, \theta)$. В отличие от [5], в данной работе рассматриваются функционалы с интегрантами, не зависящими от младших производных: $\varphi = \varphi[t, \theta, z]$. Получены необходимые и достаточные условия того, что для данной системы задача оптимизации любого такого функционала имеет решение. Эти условия помимо аналогов свойств а), б) по-прежнему включают существенные дополнительные требования. Однако важно, что в отличие от случая $\varphi = \varphi[t, \theta, z, z_t, z_\theta]$ эти дополнения не означают вырождения системы, а полученные условия выполнены во многих практически значимых случаях.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, описываемый нелинейным гиперболическим уравнением

$$z_{t\theta} = h[t, \theta, z, z_\theta, z_t, u], \quad u(t, \theta) \in \Omega, \quad (t, \theta) \in \Pi = T \times \Theta, \quad (1.1)$$

с граничными условиями Гурса

$$z|_{t=0} = a(\cdot), \quad z|_{\theta=0} = b(\cdot). \quad (1.2)$$

Здесь $z = z(t, \theta) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u = u(t, \theta)$ – управление, $T = [0, t_f]$, $\Theta = [0, \theta_f]$, числа $t_f > 0$, $\theta_f > 0$ и функции $a(\cdot): \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^n$ заданы, причем $a(0) = b(0)$. Символом $PC_1([\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^l)$ обозначим множество всех непрерывных функций $p(\cdot): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^l$, имеющих кусочно непрерывную производную. Предположим, что:

- (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ – непустое компактное множество;

(ii) функция $h[t, \theta, z, x, y, u]$ задана при $(t, \theta) \in \Pi$, $z, x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$, непрерывна по совокупности аргументов и локально липшицева по z, x, y , т.е. для любого $R > 0$ существует такая константа $K = K(R)$, что для всех z, z', x, x', y, y' , по норме не превосходящих R , и при любых $(t, \theta) \in \Pi$, $u \in \Omega$ справедливо неравенство

$$|h[t, \theta, z, x, y, u] - h[t, \theta, z', x', y', u]| \leq K(|z - z'| + |x - x'| + |y - y'|);$$

(iii) $a(\cdot) \in PC_1(\Theta \rightarrow \mathbb{R}^n)$ и $b(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

Допустимыми считаем измеримые управления $u(t, \theta): \Pi \rightarrow \Omega$. Следуя [6], будем называть функцию $z(\cdot)$ абсолютно непрерывной на Π , если она представима в виде

$$z(t, \theta) = z(0, 0) + \int_0^t y(\tau) d\tau + \int_0^\theta x(\sigma) d\sigma + \int_0^t \int_0^\theta q(\tau, \sigma) d\tau d\sigma,$$

где $q(\cdot) \in \mathbf{L}_1(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $y(\cdot) \in \mathbf{L}_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $x(\cdot) \in \mathbf{L}_1(\Theta \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА [6]. Пусть выполнены предположения (i)–(iii), $\bar{t} \in T$, $\bar{\theta} \in \Theta$ и $a(\bar{\theta}) = b(\bar{t})$. Существует такой прямоугольник $\Pi' = [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon] \times [\bar{\theta} - \varepsilon, \bar{\theta} + \varepsilon] \cap \Pi$ ($\varepsilon > 0$), что для любого допустимого управления $u(\cdot)$ задача

$$z|_{t=\bar{t}} = a(\cdot), \quad z|_{\theta=\bar{\theta}} = b(\cdot) \quad (1.3)$$

для уравнения (1.1) однозначно разрешима в классе абсолютно непрерывных функций, заданных на этом прямоугольнике. При этом $z_t(\cdot), z_\theta(\cdot) \in \mathbf{L}_\infty(\Pi' \rightarrow \mathbb{R}^n)$, а функция $z(\cdot)$ непрерывна.

Потребуем дополнительно, чтобы указанная граничная задача была разрешима не только локально, т.е. в малом прямоугольнике Π' , но и глобально во всей области Π . Именно, пусть

(iv) для любых $(\bar{t}, \bar{\theta}) \in \Pi$, функций $a(\cdot), b(\cdot)$, удовлетворяющих условию (iii) и условию согласования $a(\bar{\theta}) = b(\bar{t})$, и при произвольном допустимом управлении $u(\cdot)$ задача (1.1), (1.3) имеет абсолютно непрерывное решение $z(\cdot)$, определенное на всем прямоугольнике Π . Более того, для любого числа $C > 0$ существует такая константа $R = R(C)$, не зависящая от $\bar{t}, \bar{\theta}$ и $u(\cdot)$, что:

$$\left\| \begin{aligned} \|a(\cdot)\|_C + \|a'(\cdot)\|_\infty &\leq C \\ \|b(\cdot)\|_C + \|b'(\cdot)\|_\infty &\leq C \end{aligned} \right\| \Rightarrow \|z(\cdot)\|_C + \|z_t(\cdot)\|_\infty + \|z_\theta(\cdot)\|_\infty \leq R.$$

Рассматриваем функционал качества, непосредственно зависящий только от траектории $z(\cdot)$,

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{t_f} \int_0^{\theta_f} \varphi[t, \theta, z(t, \theta)] dt d\theta \rightarrow \min. \quad (1.4)$$

Выделим три класса интегрантов $\varphi[t, \theta, z]$:

$\mathfrak{F}_1 := \{\varphi[\cdot]: \Pi \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{интегрант } \varphi[\cdot] \text{ непрерывен по совокупности аргумен-}\br/>тов\};$

$\mathfrak{F}_2 := \{\varphi[\cdot] \in \mathfrak{F}_1 \mid \text{интегрант } \varphi[\cdot] \text{ выпуклый по } z\};$

$\mathfrak{F}_3 := \{\varphi[\cdot]: \Pi \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{интегрант } \varphi[\cdot] \text{ — функция Каратеодори, т.е. он}\br/>удовлетворяет следующему условию (v)\}.$

(v) *При всех $z \in \mathbb{R}^n$ функция $\varphi[t, \theta, z]$ измерима по (t, θ) , а при почти всех $(t, \theta) \in \Pi$ непрерывна по z , и для любого $C > 0$ суммируема на Π функция $\psi_C(t, \theta) := \sup_{|z| \leq C} |\varphi[t, \theta, z]|$.*

Для каждого из указанных классов в работе установлены необходимые и доста-
точные условия того, что любой функционал (1.4) с интегрантом $\varphi[\cdot]$ из данного
класса достигает минимума на множестве траекторий системы (1.1), (1.2).

§ 2. Нарушение “традиционного” критерия существования оптимального управления для системы Гурса–Дарбу

Для системы (1.1) естественный аналог “традиционного” критерия существо-
вания оптимума в задаче минимизации функционала (1.4) сводится к требованию
выпуклости множества контингенций

$$h[t, \theta, x, y, \Omega] := \{\gamma \mid \gamma = h[t, \theta, x, y, v], v \in \Omega\}.$$

Действительно, в силу предположений (i), (ii) оно компактно. Таким образом, ес-
ли это множество выпукло, то выполнено условие а) из введения, переформулиро-
ванное естественным образом для системы (1.1). Аналогом условия б), очевидно,
является предположение (iv).

Следующий контрпример показывает, что в случае системы (1.1) выпуклость
множества контингенций уже не гарантирует существования оптимального про-
цесса для функционала (1.4) с выпуклым по z и непрерывным интегрантом φ .

ПРИМЕР. Рассмотрим частный случай задачи (1.1), (1.2)

$$z_{t\theta} = h[z_t, u], \quad z|_{t=0} = 0, \quad z|_{\theta=0} = 0, \quad u(t, \theta) \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad h[\xi, u] = \begin{bmatrix} u \\ 2\xi_1 u \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, система (2.1) удовлетворяет требованиям (i)–(iii). Чтобы убедиться в
справедливости требования (iv), достаточно первое уравнение (2.1) записать по-
компонентно: $\partial^2 z_1 / \partial t \partial \theta = u$, $\partial^2 z_2 / \partial t \partial \theta = u \partial z_1 / \partial t$. Тогда, отметив очевидную
справедливость условия (iv) для первого из полученных двух скалярных уравне-
ний и подставив его решение $z_1(\cdot)$ во второе уравнение, убеждаемся в том, что это
условие для него тоже выполнено.

Множество контингенций системы (2.1) $h[\xi, \Omega] = \{\gamma \mid \gamma = [v, 2\xi_1 v], -1 \leq v \leq 1\}$ — отрезок в $\mathbb{R}^2$, и, значит, оно выпукло. Таким образом, для нее справедлив

аналог “традиционного” критерия существования оптимума. Тем не менее интегральный функционал

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{t_f} \int_0^{\theta_f} \left[z_1^2 + \left(\frac{1}{2} \theta^2 t - z_2 \right)^2 \right] dt d\theta \quad (2.2)$$

не достигает минимума на множестве траекторий этой системы. Чтобы убедиться в этом, найдем инфимум указанного функционала, построив минимизирующую последовательность. Именно, для $s = 1, 2, \dots$ обозначим $\delta := t_f/s$ и положим

$$u^{(s)}(t, \theta) = \begin{cases} -1, & \text{если } j\delta \leq t < j\delta + \delta/2, \\ 1, & \text{если } j\delta + \delta/2 \leq t < (j+1)\delta, \end{cases} \quad j = 0, \dots, s-1.$$

Тогда с учетом результатов [7, с. 21] для соответствующего решения $z^{(s)}(\cdot) = [z_1^{(s)}(\cdot), z_2^{(s)}(\cdot)]$ задачи (2.1) имеем

$$\frac{\partial z_1^{(s)}(t, \theta)}{\partial t} = \begin{cases} -\theta, & j\delta \leq t < j\delta + \delta/2, \\ \theta, & j\delta + \delta/2 \leq t < (j+1)\delta, \end{cases} \quad j = 0, \dots, s-1, \quad \frac{\partial z_2^{(s)}(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\theta^2}{2}.$$

Фиксируем $\hat{\theta} \in \Theta$. Полученные соотношения можно трактовать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $z_1^{(s)}(\cdot, \hat{\theta})$, $z_2^{(s)}(\cdot, \hat{\theta})$. Правые части этих уравнений удовлетворяют условиям теоремы 5 из [8, гл. 1] о скользящем режиме. В соответствие с ней $z^{(s)}(t, \hat{\theta}) \rightarrow \bar{z}(t, \hat{\theta}) := [0, \frac{1}{2}\hat{\theta}^2 t]^\top$ при $s \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in T$. Здесь в силу условия (iv) $\|z^{(s)}(\cdot)\|_C \leq \text{const} < \infty$, $s = 1, 2, \dots$. Поэтому $J[z^{(s)}(\cdot)] \rightarrow J[\bar{z}(\cdot)] = 0$, а так как $J[\cdot] \geq 0$, то $\inf J[\cdot] = 0$.

Покажем, что этот инфимум не достигается. Действительно, так как согласно (2.2) $J[z(\cdot)] = \inf J[\cdot] = 0 \Leftrightarrow z(\cdot) = \bar{z}(\cdot)$, то в противном случае существовало бы допустимое управление $u(\cdot)$, удовлетворяющее вместе с функцией $\bar{z}(\cdot)$ соотношениям (2.1). Однако при $z(\cdot) = \bar{z}(\cdot)$ они имеют вид $[0, \theta] = [u(t, \theta), 0]$ и, очевидно, не выполнены ни при каком $u(\cdot)$. Таким образом, функционал $J[\cdot]$ с интегрантом $\varphi(\cdot) \in \mathfrak{F}_2$ не достигает минимума на множестве траекторий системы (2.1) несмотря на выполнение аналога “традиционных” условий существования оптимального управления.

§ 3. Формулировка основного результата

Для простоты ограничимся исследованием специального случая системы (1.1). Именно, пусть выполнены следующие два дополнительных условия (vi) и (vii):

(vi) $h[t, \theta, z, x, y, u] = h'[t, \theta, z, x, y] + h''[t, \theta, z, u]$, где функции $h'[\cdot]$ и $h''[\cdot]$ непрерывны по совокупности аргументов и локально липшицевы по z, x, y .

Для формулировки второго предположения напомним некоторые понятия. Введем множество достижимости системы (0.1):

$$X(\bar{t}, a) := \left\{ b \in \mathbb{R}^n \mid b = x(\bar{t}), \text{ где } x(\cdot) - \text{решение системы (0.1) при некотором управлении } u(\cdot) \in \mathbf{L}_\infty([0, \bar{t}] \rightarrow \Omega) \right\}.$$

Система (0.1) называется *вполне управляемой*, если $\text{int } X(\bar{t}, a) \neq \emptyset$ для любых $\bar{t} \in (0, t_f]$ и $a \in \mathbb{R}^n$.

(vii) Для любого $\bar{\theta} \in \Theta$ существует такая функция $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, что вполне управляема следующая система вида (0.1):

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = h[t, \bar{\theta}, p(t), \hat{x}(t), p'(t), w(t)], \quad w(t) \in \Omega, \quad t \in T. \quad (3.1)$$

Аналогично для любого $\bar{t} \in T$ существует такая функция $\rho(\cdot) \in PC_1(\Theta \rightarrow \mathbb{R}^n)$, что вполне управляема следующая система вида (0.1):

$$\frac{d\hat{y}(\theta)}{d\theta} = h[\bar{t}, \theta, \rho(\theta), \rho'(\theta), \hat{y}(\theta), v(\theta)], \quad v(\theta) \in \Omega, \quad \theta \in \Theta. \quad (3.2)$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть для системы (1.1), (1.2) выполнены предположения (i)–(iv), (vi), (vii). Тогда следующие утверждения равносильны.

(А) Для любых начальных данных $a(\cdot), b(\cdot)$, $a(0) = b(0)$, и любого функционала вида (1.4) с непрерывным интегрантом $\varphi: \Pi \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в задаче (1.1), (1.2), (1.4) существует оптимальный процесс.

(В) Для любых начальных данных $a(\cdot), b(\cdot)$, $a(0) = b(0)$, и любого функционала вида (1.4) с непрерывным по $(t, \theta) \in \Pi$, $z \in \mathbb{R}^n$ и выпуклым по z интегрантом $\varphi: \Pi \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в задаче (1.1), (1.2), (1.4) существует оптимальный процесс.

(С) Для любых начальных данных $a(\cdot), b(\cdot)$, $a(0) = b(0)$, и любого функционала вида (1.4) с интегрантом $\varphi: \Pi \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющимся функцией Каратеодори (т.е. удовлетворяющим условию (v)) в задаче (1.1), (1.2), (1.4) существует оптимальный процесс.

(D) Множество $h''[t, \theta, z, \Omega]$ выпукло при любых $(t, \theta) \in \Pi$, $z \in \mathbb{R}^n$, а функция $h'[\cdot]$ представима в виде

$$h'[t, \theta, z, x, y] = h_1[t, \theta, z][x, y] + h_2[t, \theta, z]x + h_3[t, \theta, z]y + h_4[t, \theta, z], \quad (3.3)$$

где $h_2[t, \theta, z]$, $h_3[t, \theta, z]$ – $(n \times n)$ -матрицы, $h_4[t, \theta, z] \in \mathbb{R}^n$, а $h_1[t, \theta, z]$ – билинейный оператор из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, т.е. $h_1[t, \theta, z][x, y] = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, где $\xi_i = y^\top H_i[t, \theta, z]x$, а $H_i[t, \theta, z]$ – $(n \times n)$ -матрица. При этом функции $h_j[\cdot]$, $j = 2, 3, 4$, и $H_i[\cdot]$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны по совокупности аргументов и локально липшицевы по z .

Таким образом, необходимые и достаточные условия существования оптимального управления в задаче (1.1), (1.2), (1.4) помимо выпуклости множества контингенций, включают дополнительное требование к структуре правой части уравнения.

Остальные параграфы статьи посвящены доказательству основной теоремы. Поэтому в дальнейшем ее предположения считаем выполненными.

Рис. 1

§ 4. Лемма о скользящем режиме

В данном параграфе установлен факт, используемый при доказательстве основной теоремы и представляющий самостоятельный интерес. Именно исследуется особая последовательность управлений $\{w^{(s)}(\cdot)\}$, приводящая к возникновению в системе (1.1), (1.2) скользящего режима. Подобные последовательности рассматривались во многих работах применительно к системам различных типов (см. [1], [3], [8] и др.). Их стандартная конструкция состоит в следующем: $w^{(s)}(t, \theta) := u_k(t, \theta)$ при $(t, \theta) \in \Pi_k^{(s)}$. Здесь $u_k(\cdot)$, $k = 1, \dots, m$, – заданные управления и при любом s множества $\Pi_k^{(s)}$ образуют разбиение области Π . Кроме того, $\text{mes}(E \cap \Pi_k^{(s)}) \rightarrow a_k \text{mes } E$ при $s \rightarrow \infty$ для любого измеримого множества E , где a_k – заданные неотрицательные числа, причем $\sum_{k=1}^m a_k = 1$.

Особенность рассматриваемой в данной работе последовательности $\{w^{(s)}(\cdot)\}$ заключается в том, что множества $\Pi_k^{(s)}$ состоят из прямоугольников, ограниченных отрезками характеристик $t = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ системы (1.1), (1.2). Оказалось, что в этом случае возникает особый эффект. Именно, последовательности $\{z_t^{(s)}(\cdot)\}$, $\{z_\theta^{(s)}(\cdot)\}$ частных производных соответствующих траекторий системы (1.1) не имеют предела в обычном смысле, а описание предельного поведения системы требует увеличения размерности фазового пространства.

Известно (см. [3, стр.304]), что предел последовательности $\{w^{(s)}(\cdot)\}$ можно понимать в обобщенном смысле как рандомизированное управление. Аналогичный смысл, как оказалось, можно придать и пределам последовательностей $\{z_t^{(s)}(\cdot)\}$, $\{z_\theta^{(s)}(\cdot)\}$. Необходимость описания всех компонент этих рандомизированных пределов и приводит к повышению порядка системы.

Построим упомянутую последовательность управлений. Обозначим через PC_Π множество кусочно непрерывных функций $u(\cdot): \Pi \rightarrow \Omega$, имеющих разрывы вдоль

Рис. 2 ($m = 3$, $r = 2$)

конечного числа линий $t = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$. Для определенности считаем, что функции $u(\cdot) \in PC_{\Pi}$ непрерывны справа как по $t < t_f$, так и по $\theta < \theta_f$, т.е. $u(t+0, \theta) = u(t, \theta)$ при $t < t_f$, $\theta \leq \theta_f$, $u(t, \theta+0) = u(t, \theta)$ при $t \leq t_f$, $\theta < \theta_f$, и, кроме того, $u(t_f-0, \theta) = u(t_f, \theta)$, $u(t, \theta_f-0) = u(t, \theta_f)$. Пусть $0 < \bar{t} < t_f$, $0 < \bar{\theta} < \theta_f$, $w(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot), v_1(\cdot), \dots, v_r(\cdot) \in PC_{\Pi}$ и $a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0$, $b_1 \geq 0, \dots, b_r \geq 0$, причем $\sum_{k=1}^m a_k = 1$, $\sum_{q=1}^r b_q = 1$. Из точки $(\bar{t}, \bar{\theta})$ проведем прямую $\theta = \alpha t + \beta$ с положительным наклоном и разобьем область Π , как показано на рис. 1. Рассмотрим $s = 1, 2, \dots$ и разобьем интервал $[\bar{t}, t_f]$ на s непересекающихся подынтервалов $T_p^{(s)}$, $p = 1, \dots, s$, длины $(t_f - \bar{t})/s$. Каждый из них разобьем на r интервалов $T_{p,q}^{(s)}$, $q = 1, \dots, r$, длины, пропорциональной числам b_q , т.е. $|T_{p,q}^{(s)}| = b_q(t_f - \bar{t})/s$. Подобным образом разобьем интервал $[\bar{\theta}, \theta_f]$ на подынтервалы $\Theta_{l,k}^{(s)}$, $k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, s$, $s = 1, 2, \dots$, длины $a_k(\theta_f - \bar{\theta})/s$. Положим (см. рис. 2)

$$w^{(s)}(t, \theta) = \begin{cases} u_k(\cdot), & \text{если } (t, \theta) \in \Pi_1 \cup \Pi_2, \theta \in \Theta_{l,k}^{(s)}, \\ v_q(\cdot), & \text{если } (t, \theta) \in \Pi_3 \cup \Pi_4, t \in T_{p,q}^{(s)}, \\ w(\cdot), & \text{если } t, \theta \in \Pi_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

и рассмотрим соответствующее решение $z^{(s)}(\cdot)$ системы (1.1), (1.2). Напомним, что $\mathbf{W}_{\infty}^{1,0}$ ($\mathbf{W}_{\infty}^{0,1}$) – пространство Соболева, состоящее из функций $x(\cdot) \in \mathbf{L}_{\infty}(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ($y(\cdot) \in \mathbf{L}_{\infty}(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$), имеющих обобщенную производную $\partial x / \partial t \in \mathbf{L}_{\infty}$ ($\partial y / \partial \theta \in \mathbf{L}_{\infty}$).

ЛЕММА 4.1. Последовательность $\{z^s(\cdot)\}_{s=1}^\infty$ имеет при $s \rightarrow \infty$ равномерный предел $\bar{z}(\cdot)$. Его можно дополнить функциями $x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot) \in \mathbf{W}_\infty^{1,0}$, $y_1(\cdot), \dots, y_r(\cdot) \in \mathbf{W}_\infty^{0,1}$ до решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \bar{z}(t, \theta)}{\partial t} = \sum_{q=1}^r b_q y_q(t, \theta), \quad \frac{\partial \bar{z}(t, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^m a_k x_k(t, \theta), \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k(t, \theta)}{\partial t} &= \sum_{q=1}^r b_q h[t, \theta, \bar{z}(t, \theta), x_k(t, \theta), y_q(t, \theta), u_k(t, \theta)], \\ \frac{\partial y_q(t, \theta)}{\partial \theta} &= \sum_{k=1}^m a_k h[t, \theta, \bar{z}(t, \theta), x_k(t, \theta), y_q(t, \theta), u_k(t, \theta)] \quad ((t, \theta) \in \Pi_1 \cup \Pi_2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k(t, \theta)}{\partial t} &= \sum_{q=1}^r b_q h[t, \theta, \bar{z}(t, \theta), x_k(t, \theta), y_q(t, \theta), v_q(t, \theta)], \\ \frac{\partial y_q(t, \theta)}{\partial \theta} &= \sum_{k=1}^m a_k h[t, \theta, \bar{z}(t, \theta), x_k(t, \theta), y_q(t, \theta), v_q(t, \theta)] \quad ((t, \theta) \in \Pi_3 \cup \Pi_4), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k(t, \theta)}{\partial t} &= \sum_{q=1}^r b_q h[t, \theta, \bar{z}(t, \theta), x_k(t, \theta), y_q(t, \theta), w(t, \theta)], \\ \frac{\partial y_q(t, \theta)}{\partial \theta} &= \sum_{k=1}^m a_k h[t, \theta, \bar{z}(t, \theta), x_k(t, \theta), y_q(t, \theta), w(t, \theta)] \quad ((t, \theta) \in \Pi_0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\bar{z}|_{t=0} = a(\cdot), \quad \bar{z}|_{\theta=0} = b(\cdot), \quad (4.6)$$

$$x_k|_{t=0} = a'(\cdot), \quad k = 1, \dots, m, \quad y_q|_{\theta=0} = b'(\cdot), \quad q = 1, \dots, r, \quad (4.7)$$

причем $y_1(\cdot) = \dots = y_m(\cdot) = \bar{z}_t(\cdot)$ в области $\Pi_1 \cup \Pi_0$ и $x_1(\cdot) = \dots = x_r(\cdot) = \bar{z}_\theta(\cdot)$ в области $\Pi_4 \cup \Pi_0$, а равенства (4.2)–(4.5), (4.7) верны почти везде в указанных областях.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отбрасывая одно из уравнений (4.2) и отвечающее ему граничное условие из (4.6), получаем стандартную начально-краевую задачу для полулинейной системы гиперболических уравнений относительно $\bar{z}(\cdot)$, $x_k(\cdot)$, $y_q(\cdot)$. При сделанных предположениях эта задача однозначно разрешима [5]. Таким образом, система (4.2)–(4.7) дает возможность однозначно определить предел $\bar{z}(\cdot)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Далее будет показано, что функции $x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot)$ и $y_1(\cdot), \dots, y_r(\cdot)$ после исправления на множестве нулевой меры можно сделать кусочно непрерывными. При этом линии разрыва функций $x_k(\cdot)$ (функций $y_q(\cdot)$) – это конечное число характеристик вида $\theta = \text{const}$ ($t = \text{const}$), а следы $x_k(\cdot, \theta \pm 0)$, $y_q(t \pm 0, \cdot)$ имеют кусочно непрерывные производные. Подставим в (4.2)–(4.7) $t := t \pm 0$, $\theta := \theta \pm 0$, рассматривая во всех выражениях $t \pm 0$ один и тот же знак (то же касается выражения $\theta \pm 0$). Тогда равенства (4.2)–(4.7) верны для любых $(t, \theta) \in \Pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Так как по лемме 4.1 $x_k(\cdot) = \bar{z}_\theta(\cdot)$, $y_q(\cdot) = \bar{z}_t(\cdot)$ при $(t, \theta) \in \Pi_0$, то в силу (4.5) функция $\bar{z}(\cdot)$ в области Π_0 удовлетворяет уравнению (1.1) с $u = w(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. В силу предположения (iv) последовательность $\{z^{(s)}(\cdot)\}$ ограничена в $\mathbf{W}_\infty^1(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$ и, следовательно [7, с. 21], относительно компактна в $\mathbf{C}(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Пусть $\bar{z}(\cdot)$ – некоторая ее предельная точка, т.е. $\bar{z}(\cdot)$ – равномерный предел некоторой подпоследовательности $\{z^{(s(i))}(\cdot)\}$. Обозначим $z^{(i)}(\cdot) := z^{(s(i))}(\cdot)$, $w^{(i)}(\cdot) := w^{(s(i))}(\cdot)$, $y^{(i)}(\cdot) := z_t^{(i)}(\cdot)$, $x^{(i)}(\cdot) := z_\theta^{(i)}(\cdot)$,

$$u_k^{(i)}(t, \theta) = \begin{cases} u_k(\cdot), & \text{если } (t, \theta) \in \Pi_1 \cup \Pi_2, \\ w^{(i)}(\cdot), & \text{если } (t, \theta) \in \Pi_0 \cup \Pi_3 \cup \Pi_4. \end{cases} \quad (4.8)$$

Для каждого $\hat{\theta} \in [0, \theta_f]$ рассмотрим задачу Гурса

$$z_{t\theta} = h[t, \theta, z(t, \theta), z_\theta(t, \theta), z_t(t, \theta), u_k^{(i)}(t, \theta)], \quad (4.9)$$

$$z|_{t=0} = a(\cdot), \quad z|_{\theta=\hat{\theta}} = z^{(i)}(\cdot, \hat{\theta}). \quad (4.10)$$

Так как $z^{(i)}(\cdot)$ удовлетворяет (1.1) при $u(\cdot) = w^{(i)}(\cdot) \in PC_\Pi$, то, как легко показать, $z^{(i)}(\cdot, \hat{\theta}) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, и в силу (iv) задача (4.9), (4.10) имеет решение $z_k^{(i)}(\cdot | \hat{\theta}) \in \mathbf{W}_\infty^1(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$. При этом

$$\begin{aligned} & \|z^{(i)}(\cdot)\|_C, \|y^{(i)}(\cdot)\|_\infty, \|x^{(i)}(\cdot)\|_\infty, \|z_k^{(i)}(\cdot | \hat{\theta})\|_C, \\ & \|\partial z_k^{(i)}(\cdot | \hat{\theta}) / \partial t\|_\infty, \|\partial z_k^{(i)}(\cdot | \hat{\theta}) / \partial \theta\|_\infty \leq R, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где константа R не зависит от i, k и $\hat{\theta}$. Интегрируя уравнение (4.9) по t , убеждаемся, что для почти всех $\theta \in \Theta$ (т.е. для $\theta \in \tilde{\Theta} \subset \Theta$ с $\text{mes}(\tilde{\Theta}) = \text{mes}(\Theta)$)

$$x(t) = a'(\theta) + \int_0^t h[\tau, \theta, z_k^{(i)}(\tau, \theta | \hat{\theta}), x(\tau), \partial z_k^{(i)}(\tau, \theta | \hat{\theta}) / \partial t, u_k^{(i)}(\tau, \theta)] d\tau, \quad (4.12)$$

где $x(\cdot) = x(\cdot | \theta) := \partial z_k^{(i)}(\cdot, \theta | \hat{\theta}) / \partial \theta$.

Выберем последовательность $\{\theta_j\} \subset \tilde{\Theta}$, сходящуюся к $\hat{\theta} + 0$ (к $\hat{\theta} - 0$). Так как подынтегральное выражение в (4.12), очевидно, не превосходит

$$H := \max\{|h[t, \theta, z, x, y, u]|, (t, \theta) \in \Pi, |x|, |y|, |z| \leq R, u \in \Omega\}, \quad (4.13)$$

то в силу (4.12) и (4.13) $|x(t'', \theta) - x(t', \theta)| \leq H|t'' - t'|$ при $\theta \in \tilde{\Theta}$. Отсюда с учетом (4.11) и критерия Арцела–Асколи следует, что последовательность $\{x(\cdot | \theta_j)\}_{j=1}^\infty \subset C(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$ относительно компактна. Поэтому из нее можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $x(\cdot | \theta_{j(q)}) \rightarrow \tilde{x}(\cdot) =:$

$x_k^{(i)}(\cdot | \hat{\theta} + 0)$ ($\tilde{x}(\cdot) =: x_k^{(i)}(\cdot | \hat{\theta} - 0)$). Рассматривая (4.12) при $x(\cdot) = x(\cdot | \theta_{j(q)})$, $\theta = \theta_{j(q)}$, переходя к пределу при $q \rightarrow \infty$ и учитывая (4.10), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} x_k^{(i)}(t | \hat{\theta} \pm 0) &= a'(\hat{\theta} \pm 0) \\ &+ \int_0^t h[\tau, \hat{\theta}, z^{(i)}(\tau, \hat{\theta}), x_k^{(i)}(\tau | \hat{\theta} \pm 0), y^{(i)}(\tau, \hat{\theta}), u_k^{(i)}(\tau, \hat{\theta} \pm 0)] d\tau, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\|x_k^{(i)}(\cdot | \hat{\theta} \pm 0)\|_C \leq R. \quad (4.15)$$

Множество $I_\Theta := \{\hat{\theta} \in \Theta: \hat{\theta} = 0, \theta_f, \bar{\theta}, \text{ либо } a'(\hat{\theta} - 0) \neq a'(\hat{\theta} + 0), \text{ либо } \int |v(t, \hat{\theta} - 0) - v(t, \hat{\theta} + 0)| dt \neq 0 \text{ для какой-либо из функций } v(\cdot) = w(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot), v_1(\cdot), \dots, v_r(\cdot)\}$ упорядочиваем по возрастанию: $I_\Theta = \{\theta_0, \dots, \theta_M\}$.

Выберем $l = 0, \dots, M - 1$, обозначим $x_k^{(i)}(t, \theta) := x_k^{(i)}(t | \theta - 0)$ при $\theta \in (\theta_l, \theta_{l+1}]$ и $x_k^{(i)}(t, \theta_l) := x_k^{(i)}(t | \theta_l + 0)$ и покажем, что последовательность $\{x_k^{(i)}(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ равномерно непрерывна на множестве $E_l := T \times [\theta_l, \theta_{l+1}]$. На период этого доказательства будем считать, что $a'(\theta_l) := a'(\theta_l + 0)$, $a'(\theta_{l+1}) := a'(\theta_{l+1} - 0)$ и $v(t, \theta_l) := v(t, \theta_l + 0)$, $v(t, \theta_{l+1}) := v(t, \theta_{l+1} - 0)$ для любой функции $v(\cdot) = w(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot), v_1(\cdot), \dots, v_r(\cdot)$.

Для $(t', \theta'), (t'', \theta'') \in E_l$ с учетом (4.13), (4.14) имеем

$$|x_k^{(i)}(t', \theta') - x_k^{(i)}(t'', \theta'')| \leq H|t' - t''| + |x_k^{(i)}(t', \theta') - x_k^{(i)}(t', \theta'')|. \quad (4.16)$$

В силу (ii), (iii) и равномерной непрерывности последовательности $\{z^{(i)}(\cdot)\}$ найдутся такие функции $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot)$, что $\gamma_j(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, $j = 1, 2$, и

$$\begin{aligned} |a'(\theta') - a'(\theta'')| &\leq \gamma_1(|\theta' - \theta''|), \\ |h[t, \theta', z^{(i)}(t, \theta'), x, y, v(t, \theta')] - h[t, \theta'', z^{(i)}(t, \theta''), x, y, v(t, \theta'')]| &\leq \gamma_2(|\theta' - \theta''|) \end{aligned}$$

для любых $\theta', \theta'' \in [\theta_l, \theta_{l+1}]$, $t \in T$, $i = 1, 2, \dots$, любой функции $v(\cdot) = w(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot), v_1(\cdot), \dots, v_r(\cdot)$ и любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ с $|x| \leq R$, $|y| \leq R$. Из (4.14) и (ii) следует, что при $\theta_l \leq \theta' \leq \theta'' \leq \theta_{l+1}$

$$\begin{aligned} |x_k^{(i)}(t, \theta'') - x_k^{(i)}(t, \theta')| &\leq \gamma_1(|\theta' - \theta''|) + K(R) \int_0^t |x_k^{(i)}(\tau, \theta'') - x_k^{(i)}(\tau, \theta')| d\tau \\ &+ K(R) \int_0^t |y^{(i)}(\tau, \theta'') - y^{(i)}(\tau, \theta')| d\tau \\ &+ \int_0^t \left| h[\tau, \theta'', z^{(i)}(\tau, \theta''), x_k^{(i)}(\tau, \theta'), y^{(i)}(\tau, \theta'), u_k^{(i)}(\tau, \theta'')] \right. \\ &\quad \left. - h[\tau, \theta', z^{(i)}(\tau, \theta'), x_k^{(i)}(\tau, \theta'), y^{(i)}(\tau, \theta'), u_k^{(i)}(\tau, \theta')] \right| d\tau. \end{aligned}$$

В силу (4.1), (4.8) $u_k^{(i)}(\tau, \theta') = v(\tau, \theta')$ и $u_k^{(i)}(\tau, \theta'') = v(\tau, \theta'')$ при $\tau \notin (t', t'') = \left(\frac{\theta' - \beta}{\alpha}, \frac{\theta'' - \beta}{\alpha}\right)$ (см. рис. 1), где $v(\cdot)$ — одна из функций: $v(\cdot) = w(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$,

$v_1(\cdot), \dots, v_r(\cdot)$ (вообще говоря, разная для разных τ). Поэтому подынтегральное выражение в последнем слагаемом при $\tau \notin (t', t'')$ не превосходит $\gamma_2(|\theta' - \theta''|)$. Согласно (4.11), (4.13) и (4.15) при $\tau \in (t', t'')$ оно не превосходит $2H$. Поэтому последнее слагаемое не больше, чем $2H \frac{(\theta'' - \theta')}{\alpha} + t_f \gamma_2(|\theta' - \theta''|)$. Так как $y_\theta^{(i)}(\cdot) = z_{t\theta}^{(i)}(\cdot)$, то с учетом (1.1), (4.11) и (4.13) третье слагаемое не превосходит $K(R)Ht_f|\theta' - \theta''|$. Применив лемму Гронвулла, заключаем, что $|x_k^{(i)}(t, \theta') - x_k^{(i)}(t, \theta'')| \leq C_1 \gamma(|\theta' - \theta''|)$, где $\gamma(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Отсюда с учетом (4.16) следует равномерная непрерывность последовательности $\{x_k^{(i)}(\cdot)\}$ на множестве E_l .

Примем теперь во внимание произвольность индекса $l = 0, \dots, M-1$, (4.15) и критерий Арцела–Асколи [3]. Тогда, переходя к подпоследовательности $\{x_k^{(i(j))}(\cdot)\}$ и учитывая определение функций $x_k^{(i)}(\cdot)$, убеждаемся в том, что $x_k^{(i(j))}(t|\hat{\theta} \pm 0) \rightarrow x_k(t, \hat{\theta} \pm 0)$ при $j \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in T$, $\hat{\theta} \in \Theta$, $k = 1, \dots, m$. Здесь $x_k(\cdot): \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторые функции, непрерывные при $\theta \notin I_\Theta$ и допускающие непрерывное продолжение с любого множества $T \times (\theta_l, \theta_{l+1})$ на его замыкание.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что для $\hat{t} \in T$, $q = 1, \dots, r$ и $i = 1, 2, \dots$ существует решение $y_q^{(i)}(\hat{t} \pm 0 | \cdot): \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ уравнения

$$y_q^{(i)}(\hat{t} \pm 0, \theta) = b'(\hat{t} \pm 0) + \int_0^\theta h[\hat{t}, \sigma, z^{(i)}(\hat{t}, \sigma), x^{(i)}(\hat{t}, \sigma), y_q^{(i)}(\hat{t} \pm 0, \sigma), v_k^{(i)}(\hat{t} \pm 0, \sigma)] d\sigma,$$

где $v_q^{(i)}(t, \theta) = w^{(i)}(t, \theta)$ при $(t, \theta) \in \Pi_0 \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ и $v_q^{(i)}(t, \theta) = v_q(t, \theta)$ при $(t, \theta) \in \Pi_3 \cup \Pi_4$. При этом, переходя, если нужно, еще раз к подпоследовательности, можно обеспечить равномерную по $\hat{t} \in T$, $\theta \in \Theta$, $q = 1, \dots, r$, сходимость $y_q^{(i)}(\hat{t} \pm 0 | \theta) \rightarrow y_q(\hat{t} \pm 0, \theta)$ при $j \rightarrow \infty$, где $y_q(\cdot): \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($q = 1, \dots, r$) – некоторые функции. По аналогии с I_Θ введем множество $I_T = \{t_0 < \dots < t_N\} \subset T$. Функции $y_q(t, \theta)$ непрерывны при $t \notin I_T$ и допускают непрерывное продолжение с любой области $(t_p, t_{p+1}) \times \Theta$ на ее замыкание.

Так как в силу (4.8) и (4.14) функции $x_k^{(j)}(t, \theta)$, $k = 1, \dots, m$, совпадают в области $\Pi_0 \cup \Pi_4$, то $x_1(t, \theta) = \dots = x_m(t, \theta)$ при $(t, \theta) \in \Pi_0 \cup \Pi_4$. Аналогично $y_1(t, \theta) = \dots = y_r(t, \theta)$ при $(t, \theta) \in \Pi_0 \cup \Pi_1$. Из тех же соображений с учетом (4.1) следует, что $x_1(t, \theta) = \dots = x_m(t, \theta) = z_\theta^0(t, \theta)$ и $y_1(t, \theta) = \dots = y_r(t, \theta) = z_t^0(t, \theta)$ при $(t, \theta) \in \Pi_0$, где $z^0(\cdot)$ – решение задачи (1.1), (1.2) при $u(\cdot) := w(\cdot)$.

Положим $\bar{x}^{(j)}(t, \hat{\theta}) := x_1(t, \hat{\theta})$ при $\hat{\theta} \leq \bar{\theta}$ и $\bar{x}^{(j)}(t, \hat{\theta}) = x_k(t, \hat{\theta})$ при $\hat{\theta} \in \Theta_{l,k}^{(i(j))}$. Согласно (4.1) и (4.8) $u_k^{(i(j))}(t, \hat{\theta}) = w^{(i(j))}(t, \hat{\theta})$ при $\hat{\theta} \in \Theta_{l,k}^{(i(j))}$. Поэтому, вспоминая, что при $z(\cdot) = z^{(j)}(\cdot)$ и $u(\cdot) = w^{(j)}(\cdot)$ верно (1.1), и интегрируя (1.1) по t , а также сравнивая результат с (4.14), убеждаемся в справедливости равенства $x_k^{(j)}(t, \hat{\theta}) = x^{(j)}(t, \hat{\theta}) := z_\theta^{(j)}(t, \hat{\theta})$ при $\hat{\theta} \in \Theta_{l,k}^{(i(j))}$. Следовательно,

$$|\bar{x}^{(j)}(t, \theta \pm 0) - x^{(j)}(t, \theta \pm 0)| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty \text{ равномерно по } (t, \theta) \in \Pi.$$

Аналогично, положив $\bar{y}^{(j)}(t, \theta) := y_1(t, \theta)$ при $t \leq \bar{t}$ и $\bar{y}^{(j)}(t, \theta) := y_q(t, \theta)$ при $t \in T_{p,q}^{(i(j))}$, заключаем, что

$$|\bar{y}^{(j)}(t \pm 0, \theta) - y^{(j)}(t \pm 0, \theta)| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty \text{ равномерно по } (t, \theta) \in \Pi. \quad (4.17)$$

Поэтому при всех $\hat{\theta} \in [0, \theta_f]$ выражение в правой части (4.14) при $i = i(j)$ и $j \rightarrow \infty$ сходится к тому же пределу, что и

$$a'(\hat{\theta} \pm 0) + \int_0^t h[t, \hat{\theta}, \bar{z}(\tau, \hat{\theta}), x_k(\tau, \hat{\theta} \pm 0), \bar{y}^{(j)}(\tau, \hat{\theta}), u_k^{(i(j))}(\tau, \hat{\theta} \pm 0)] d\tau. \quad (4.18)$$

В силу леммы о скользящем режиме для обыкновенных дифференциальных уравнений [8, гл. 1] предел выражения (4.18) существует и равен

$$C_1(t, \hat{\theta} \pm 0) := a'(\hat{\theta} \pm 0) + \int_0^t \sum_{q=1}^r b_q h[t, \hat{\theta}, \bar{z}(\tau, \hat{\theta}), x_k(\tau, \hat{\theta} \pm 0), y_q(\tau, \hat{\theta}), u_k(\tau, \hat{\theta} \pm 0)] d\tau \quad (4.19)$$

при $(t, \hat{\theta}) \in \Pi_1 \cup \Pi_2$, и

$$C_2(\hat{\theta} \pm 0) + \int_{m(\hat{\theta})}^t \sum_{q=1}^r b_q h[t, \hat{\theta}, \bar{z}(\tau, \hat{\theta}), x_k(\tau, \hat{\theta} \pm 0), y_q(\tau, \hat{\theta}), v_q(\tau, \hat{\theta} \pm 0)] d\tau \quad (4.20)$$

при $(t, \hat{\theta}) \in \Pi_3 \cup \Pi_4$. Здесь

$$C_2(\theta) := \begin{cases} z_{\bar{\theta}}^0(\bar{t}, \theta) & \text{при } \theta \leq \bar{\theta}, \\ C_1((\theta - \beta)/\alpha) & \text{при } \theta > \bar{\theta}, \end{cases} \quad m(\theta) := \max\{(\theta - \beta)/\alpha, \bar{t}\}.$$

Левая часть равенства (4.14) при $i = i(j)$ и $j \rightarrow \infty$ сходится к $x_k(t, \hat{\theta} \pm 0)$. Поэтому, рассматривая в (4.14) $i = i(j)$, переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ с учетом (4.18)–(4.20) и дифференцируя полученные равенства, убеждаемся в справедливости первых соотношений из пар (4.3)–(4.5) и (4.7). Рассуждая аналогично, устанавливаем справедливость вторых соотношений из пар (4.3)–(4.5) и (4.7), а также замечания 4.2. В силу (4.17) правая часть равенства

$$z^{(j)}(t, \hat{\theta}) = a(\hat{\theta}) + \int_0^t y^{(j)}(\tau, \hat{\theta}) d\tau$$

для всех $\hat{\theta} \in [0, \theta_f]$ имеет тот же предел при $j \rightarrow \infty$, что и выражение $a(\hat{\theta}) + \int_0^t \bar{y}^{(i)}(\tau, \hat{\theta}) d\tau$. Применяя к нему лемму о скользящем режиме для обыкновенных дифференциальных уравнений [8, гл. 1], получаем первое соотношение (4.2). Второе доказываем аналогично.

Итак, произвольную предельную точку $\bar{z}(\cdot)$ C -относительно компактной последовательности $\{z^{(s)}(\cdot)\}_{s=1}^{\infty}$ можно дополнить функциями $x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot), y_1(\cdot), \dots, y_r(\cdot)$ до решения начально-краевой задачи (4.2)–(4.7). Решение этой задачи единственно [5]. Поэтому все предельные точки рассматриваемой последовательности совпадают. Следовательно, она имеет равномерный предел.

§ 5. Необходимые условия существования оптимального управления

Перейдем к непосредственному доказательству основной теоремы, начав с обоснования импликации (B) $\Rightarrow$ (D). Условия основной теоремы всюду далее считаем выполненными. Установим вначале три технических результата.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\bar{\theta} \in \Theta$ и $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Для любых $\bar{t} \in T$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и измеримого управления $w(\cdot): T \rightarrow \Omega$ задача Коши $\hat{x}(\bar{t}) = x_0$ для уравнения (3.1) имеет решение $\hat{x}(\cdot) \in \mathbf{W}_\infty^1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, причем $\|\hat{x}(\cdot)\|_C \leq R$. Здесь константа R не зависит от $\bar{t}$ и $w(\cdot)$, но, возможно, зависит от x_0 и $p(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (iv) граничная задача

$$z|_{t=\bar{t}} = p(\bar{t}) + x_0(\theta - \bar{\theta}), \quad z|_{\theta=\bar{\theta}} = p(\cdot) \quad (5.1)$$

для уравнения (1.1) ($u(t, \theta) := w(t)$) имеет решение $z(\cdot) \in \mathbf{W}_\infty^1(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$, причем $\|z(\cdot)\|_C + \|z_t(\cdot)\|_\infty + \|z_\theta(\cdot)\|_\infty \leq R$. Интегрируя (1.1) по t и учитывая результаты [7, с. 21], убеждаемся, что при почти всех $\theta \in \Theta$ интегральное уравнение

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_{\bar{t}}^t h[\tau, \theta, z(\tau, \theta), \hat{x}(\tau), z_t(\tau, \theta), w(\tau)] d\tau \quad (5.2)$$

имеет решение $\hat{x}(\cdot) := z_\theta(\cdot, \theta) \in \mathbf{W}_\infty^1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Рассуждая так же, как при анализе уравнения (4.12), убеждаемся, что уравнение (5.2) имеет решение $\hat{x}(\cdot) \in C(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$ при любом $\theta \in \Theta$, причем справедлива оценка $\|\hat{x}(\cdot)\|_C \leq R$, аналогичная (4.15). Рассматривая (5.2) при $\theta = \bar{\theta}$, учитывая (5.1), а также вытекающее из (5.1) равенство $z_t(\cdot, \bar{\theta}) = p'(\cdot)$ и дифференцируя (5.2) по t , убеждаемся, что функция $\hat{x}(\cdot)$ удовлетворяет (3.1), причем $\hat{x}(\bar{t}) = x_0$ и $\|\hat{x}(\cdot)\| \leq R$.

Выберем функции $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$ и $\rho(\cdot) \in PC_1(\Theta \rightarrow \mathbb{R}^n)$, а также точку $(\bar{t}, \bar{\theta}) \in \Pi$. Символом $X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$ ($Y_{\bar{t}}(\bar{\theta}, y_0)$) обозначим множество достижимости системы (3.1) (системы (3.2)).

ЛЕММА 5.2. Пусть $\bar{\theta} \in \Theta$, $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$ и соответствующая система (3.1) вполне управляема. Рассмотрим $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $0 < t_* < \bar{t} < t_f$ и положим

$$\tilde{p}(t) := \begin{cases} p(t), & t \leq t_*, \\ p(t_*) + (\bar{z} - p(t_*))(t - t_*)/(\bar{t} - t_*), & t_* < t \leq \bar{t}, \\ \bar{z}, & t > \bar{t}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Тогда вполне управляема следующая система вида (3.1):

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = h[t, \bar{\theta}, \tilde{p}(t), \tilde{x}(t), \tilde{p}'(t), w(t)], \quad w(t) \in \Omega. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символом $\tilde{X}_{\bar{\theta}}(t, x_0)$ обозначим множество достижимости системы (5.4). Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для $0 < \hat{t} \leq t_*$, очевидно, $\tilde{X}_{\bar{\theta}}(\hat{t}, x_0) = X_{\bar{\theta}}(\hat{t}, x_0)$, и поэтому $\text{int } \tilde{X}_{\bar{\theta}}(\hat{t}, x_0) = \text{int } X_{\bar{\theta}}(\hat{t}, x_0) \neq \emptyset$.

Пусть $\hat{t} > t_*$. Фиксируем измеримое управление $w(\cdot): T \rightarrow \Omega$. Для $a \in \mathbb{R}^n$, $t, \tau \in T$ обозначим $\mathcal{B}_{t,\tau}(a) := \tilde{x}(\tau)$, где $\tilde{x}(\cdot)$ – решение задачи Коши $\tilde{x}(t) = a$ для уравнения (5.4). Отображение $\mathcal{B}_{t,\tau}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно ввиду непрерывной зависимости решения $\tilde{x}(\cdot)$ от a [3]. Так как, очевидно, $\mathcal{B}_{t,\tau}\mathcal{B}_{\tau,t} = \text{id}$, то $\mathcal{B}_{t,\tau}$ – гомеоморфизм. Осталось заметить, что $\tilde{X}_{\bar{\theta}}(\hat{t}, x_0) \supset \mathcal{B}_{t_*,\hat{t}}(X_{\bar{\theta}}(t_*, x_0))$, и поэтому $\text{int } \tilde{X}_{\bar{\theta}}(\hat{t}, x_0) \supset \mathcal{B}_{t_*,\hat{t}}(\text{int } X_{\bar{\theta}}(t_*, x_0)) \neq \emptyset$.

Символом $X_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{t}, x_0)$ ($Y_{\bar{t}}^{PC}(\bar{\theta}, y_0)$) обозначим совокупность всех состояний $\hat{x}(\bar{t})$ ($\hat{y}(\bar{\theta})$), в которые можно попасть в системе (3.1) (в системе (3.2)) из состояния $\hat{x}(0) = x_0$ ($\hat{y}(0) = y_0$) с помощью некоторого кусочно непрерывного управления $w(\cdot): [0, \bar{t}] \rightarrow \Omega$ ($v(\cdot): [0, \bar{\theta}] \rightarrow \Omega$).

ЛЕММА 5.3. Множество $X_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{t}, x_0)$ плотно в $X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x} \in X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$, т.е. $\bar{x} = \hat{x}(\bar{t})$, где $\hat{x}(\cdot)$ – решение уравнения (3.1) при некотором измеримом управлении $w(\cdot): T \rightarrow \Omega$, причем $\hat{x}(0) = x_0$.

Аппроксимируем $w(\cdot)$ функцией $u(\cdot) \in PC(T \rightarrow \Omega)$. Именно, выберем $\kappa > 0$, $\delta > 0$ и конечную κ -сеть $\{v_l\}_{l=1}^{P(\kappa)}$ в компактном множестве Ω . Обозначим $T'_l := \{t \in T: |w(t) - v_l| < \kappa\}$, $T_1 := T'_1$, $T_l := T'_l \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} T'_i$ (при $l \geq 2$). Множества T_l , очевидно, измеримы и образуют разбиение T . Положим $v(t) := v_l$ при $t \in T_l$; тогда $\|w(\cdot) - v(\cdot)\|_1 \leq \kappa T$.

Для любого l выберем такое простое (т.е. являющееся объединением конечного числа интервалов вида $[t', t'']$) множество $C_l \subset T$, что $\text{mes}(T_l \Delta C_l) \leq \delta$. Положим $D_1 := C_1$ и $D_l := C_l \setminus \bigcup_{s=1}^{l-1} C_s$ (при $l \geq 2$). Очевидно, $D_l \cap D_s = \emptyset$ при $l \neq s$. Определим функцию $u(\cdot) \in PC(T \rightarrow \Omega)$, полагая $u(t) := v_l$ при $t \in D_l$ и $u(t) := v_1$ при $t \in T \setminus \bigcup_{l=1}^{P(\kappa)} D_l$. Тогда $\|v(\cdot) - u(\cdot)\|_1 \leq 2C_u \sum_{l=1}^{P(\kappa)} \text{mes}(T_l \Delta D_l)$, где $C_u := \max\{|u|: u \in \Omega\}$ и

$$\begin{aligned} \text{mes}(T_l \Delta D_l) &\leq \text{mes}(T_l \Delta C_l) + \text{mes}(C_l \Delta D_l) \\ &\leq \delta + \text{mes}\left[C_l \Delta \left(C_l \setminus \bigcup_{s=1}^{l-1} C_s\right)\right] \leq \delta + \text{mes}\left[\bigcup_{s=1}^{l-1} (C_l \cap C_s)\right]. \end{aligned}$$

Здесь $(C_l \cap C_s) \subset T_l \Delta C_l \cup C_s \Delta T_s$, поэтому $\text{mes}(T_l \Delta D_l) \leq \delta + \sum_{s=1}^{l-1} [\text{mes}(T_l \Delta C_l) + \text{mes}(C_s \Delta T_s)] \leq \delta(2l - 1)$. Таким образом,

$$\|w(\cdot) - u(\cdot)\|_1 \leq \|w(\cdot) - v(\cdot)\|_1 + \|v(\cdot) - u(\cdot)\|_1 \leq \kappa T + 2C_u \delta P(\kappa)^2 =: \eta.$$

Здесь $u(\cdot) \in PC$ и величину η можно сделать сколь угодно малой за счет выбора κ и δ . Поэтому существует такая последовательность $\{u_s(\cdot)\} \subset PC(T \rightarrow \Omega)$, что $\|u_s(\cdot) - w(\cdot)\|_1 \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Выберем подпоследовательность $\{u_{s(i)}(\cdot)\}$, сходящуюся к $w(\cdot)$ почти всюду. Пусть $\hat{x}_{s(i)}(\cdot)$ – решение уравнения (3.1) (при $w(\cdot) := u_{s(i)}(\cdot)$) с $\hat{x}_{s(i)}(0) = x_0$. По лемме 5.1 $\|\hat{x}_{s(i)}(\cdot)\|_C \leq R$, откуда с учетом (ii) и (3.1)

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{s(i)}(t) - \hat{x}(t)| &\leq K(R) \int_0^t |\hat{x}_{s(i)}(\tau) - \hat{x}(\tau)| d\tau + \\ &+ \int_0^T |h[\tau, \bar{\theta}, p(\tau), \hat{x}(\tau), p'(\tau), u_{s(i)}(\tau)] - h[\tau, \bar{\theta}, p(\tau), \hat{x}(\tau), p'(\tau), w(\tau)]| d\tau. \end{aligned}$$

Здесь в силу теоремы Лебега второй интеграл стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$. Поэтому с учетом леммы Гронцуола $|\hat{x}_{s(i)}(t) - \hat{x}(t)| \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. В частности, $|\hat{x}_{s(i)}(\bar{t}) - \bar{x}| \rightarrow 0$, где $\hat{x}_{s(i)}(\bar{t}) \in X_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{t}, x_0)$. Таким образом, $\bar{x} \in \overline{X_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{t}, x_0)}$ для любого $\bar{x} \in X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Аналогии лемм 5.1–5.3 справедливы для системы (3.2).

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Рассмотрим точку $(\bar{t}, \bar{\theta}) \in \Pi$ и такие функции $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $\rho(\cdot) \in PC_1(\Theta \rightarrow \mathbb{R}^n)$, что $p(\bar{t}) = \rho(\bar{\theta}) =: \bar{z}$. Пусть справедливо утверждение (В) основной теоремы. Тогда для любых векторов $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_m \in X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$, $y_1, \dots, y_r \in Y_{\bar{t}}(\bar{\theta}, y_0)$, $u_1, \dots, u_m \in \Omega$ и чисел $a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0$, $b_1 \geq 0, \dots, b_r \geq 0$, $\sum_{k=1}^m a_k = 1$, $\sum_{q=1}^r b_q = 1$, существует решение $u_* \in \Omega$ уравнения

$$h\left[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, \sum_{k=1}^m a_k x_k, \sum_{q=1}^r b_q y_q, u_*\right] = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^r a_k b_q h[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, x_k, y_q, u_k]. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что $x_k \in X_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{t}, x_0)$, $y_q \in Y_{\bar{t}}^{PC}(\bar{\theta}, y_0)$. Выберем управление $w(\cdot) \in PC_{\Pi}$. По условию (iv) граничная задача $z|_{t=\bar{t}} = \rho(\cdot)$, $z|_{\theta=\bar{\theta}} = p(\cdot)$ для уравнения (1.1) при $u = w(\cdot)$ имеет решение $\hat{z}(\cdot): \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$. Положим $a(\theta) = \hat{z}(0, \theta)$ при $\theta \in [0, \bar{\theta}]$ и $a(\theta) := \hat{z}(0, \bar{\theta}) + (\theta - \bar{\theta})x_0$ при $\theta \in (\bar{\theta}, \theta_f]$. Аналогично $b(t) := \hat{z}(t, 0)$ при $t \in [0, \bar{t}]$ и $b(t) := \hat{z}(\bar{t}, 0) + (t - \bar{t})y_0$ при $t \in (\bar{t}, t_f]$. Очевидно, $a(0) = b(0)$.

Так как $x_k \in X_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{t}, x_0)$, то $x_k = \hat{x}_k(\bar{t})$, где $\hat{x}_k(0) = x_0$ и $\hat{x}_k(\cdot)$ удовлетворяет (3.1) при $w(\cdot) = \hat{u}_k(\cdot) \in PC([0, \bar{t}] \rightarrow \Omega)$. Положим $u_k(t, \theta) := \hat{u}_k(t)$ при $t \leq \bar{t}$ и $u_k(t, \theta) := u_k$ при $t > \bar{t}$. Аналогично $y_q = \hat{y}_q(\bar{\theta})$, где $\hat{y}_q(0) = y_0$ и $\hat{y}_q(\cdot)$ удовлетворяет (3.2) при $v(\cdot) = \hat{v}_q(\cdot) \in PC([0, \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Выберем $v_1, \dots, v_r \in \Omega$ и положим $v_q(t, \theta) = \hat{v}_q(\theta)$ при $\theta \leq \bar{\theta}$ и $v_q(t, \theta) := v_q$ при $\theta > \bar{\theta}$, $q = 1, \dots, r$.

Исходя из функций $w(\cdot)$, $u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$, $v_1(\cdot), \dots, v_r(\cdot) \in PC_{\Pi}$ и чисел $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_r$, построим последовательность $\{w^{(s)}(\cdot)\}$ согласно (4.1). В силу леммы 4.1 соответствующая последовательность траекторий $\{z^{(s)}(\cdot)\}$ системы (1.1), (1.2) имеет равномерный предел $\bar{z}(\cdot)$. Рассмотрим функционал $J[z] = \int_0^{t_f} \int_0^{\theta_f} [z - \bar{z}(t, \theta)]^2 dt d\theta$ с непрерывным интегрантом $\varphi(t, \theta, z) = [z - \bar{z}(t, \theta)]^2$, выпуклым по z . Очевидно, $J[z^{(s)}(\cdot)] \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Так как $J[z(\cdot)] = 0 \Leftrightarrow z(\cdot) = \bar{z}(\cdot)$, то согласно (В) $\bar{z}(\cdot)$ удовлетворяет равенствам (1.1), (1.2) при некотором допустимом управлении $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$.

Выразим в (1.1) производные $\bar{z}_t(\cdot)$ и $\bar{z}_\theta(\cdot)$ из (4.2). Продифференцируем первое равенство (4.2) по θ . Затем выразим в его правой части производные $\partial y_q(\cdot)/\partial\theta$ из (4.3), а левую часть – из (1.1). В итоге убеждаемся, что для почти всех $(t, \theta) \in \Pi' := \Pi_1 \cup \Pi_2$ (т.е. для $(t, \theta) \in E \subset \Pi'$, где $\text{mes}(\Pi' \setminus E) = 0$)

$$\begin{aligned} & h \left[t, \theta, \bar{z}(t, \theta), \sum_{k=1}^m a_k x_k(t, \theta), \sum_{q=1}^r b_q y_q(t, \theta), u_{t, \theta} \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^r a_k b_q h[t, \theta, \bar{z}(t, \theta), x_k(t, \theta), y_q(t, \theta), u_k(t, \theta)], \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $u_{t, \theta} := \bar{u}(t, \theta)$. Рассмотрим такую последовательность $\{(t_s, \theta_s)\} \subset E$, что $t_s \rightarrow \bar{t} + 0$ и $\theta_s \rightarrow \bar{\theta} + 0$. Воспользовавшись компактностью Ω и переходя к подпоследовательности, обеспечим сходимость $\bar{u}(t_{s(i)}, \theta_{s(i)}) \rightarrow u_* =: u_{\bar{t}+0, \bar{\theta}+0}$. Тогда, рассматривая (5.6) при $t = t_{s(i)}$, $\theta = \theta_{s(i)}$ и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, убеждаемся, что равенство (5.6) верно при $t = \bar{t} + 0$, $\theta = \bar{\theta} + 0$.

В силу (4.6), замечания 4.3 и по построению функции $\bar{z}(\cdot)$ и $\hat{z}(\cdot)$ в области Π_0 являются решениями одной и той же граничной задачи (1.1), (1.2) (при $u(\cdot) := w(\cdot)$). Значит, $\bar{z}(\cdot) = \hat{z}(\cdot)$ при $(t, \theta) \in \Pi_0$. В частности, $\bar{z}(t, \bar{\theta}) = \hat{z}(t, \bar{\theta}) = p(t)$ и, следовательно, $\bar{z}_t(t, \bar{\theta}) = p'(t)$, при $t \leq \bar{t}$, где в силу леммы 4.1 и замечания 4.3 $\bar{z}_t(t, \bar{\theta}) = y_1(t, \bar{\theta}) = \dots = y_r(t, \bar{\theta})$.

По построению $u_k(t, \bar{\theta} + 0) = u_k(t)$ при $t \leq \bar{t}$. Поэтому, рассматривая первое уравнение (4.3) при $\theta := \bar{\theta} + 0$ и $t \leq \bar{t}$, убеждаемся, что функция $x_k(\cdot, \bar{\theta} + 0)$ на интервале $[0, \bar{t}]$ удовлетворяет уравнению (3.1) (с $w(\cdot) := u_k(\cdot)$). В силу (4.7) и по построению $x_k(0, \bar{\theta} + 0) = a'(\bar{\theta} + 0) = x_0$. Таким образом, функция $x_k(\cdot, \bar{\theta} + 0)$ является решением той же задачи Коши для уравнения (3.1), что и функция $\hat{x}_k(\cdot)$. Значит, $x_k(t, \bar{\theta} + 0) = \hat{x}_k(t)$ при $t \in [0, \bar{t}]$, где по замечанию 4.2 функция $x_k(t, \bar{\theta} + 0)$ непрерывна по $t \in [0, T]$. Поэтому $x_k(\bar{t} + 0, \bar{\theta} + 0) = \hat{x}_k(\bar{t}) = x_k$. Аналогично $y_q(\bar{t} + 0, \bar{\theta} + 0) = y_q$.

Рассматривая (5.6) при $t = \bar{t} + 0$, $\theta = \bar{\theta} + 0$ и учитывая вытекающие из построения равенства $u_k(\bar{t} + 0, \bar{\theta} + 0) = u_k$, $\bar{z}(\bar{t}, \bar{\theta}) = p(\bar{t}) = \bar{z}$, убеждаемся в справедливости (5.5) (при $u_* = u_{\bar{t}+0, \bar{\theta}+0}$). Итак, в случае $x_k \in X_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{t}, x_0)$, $y_q \in Y_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{\theta}, y_0)$ лемма доказана.

Пусть теперь $x_1, \dots, x_m \in X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$ и $y_1, \dots, y_r \in Y_{\bar{\theta}}(\bar{\theta}, y_0)$. В силу леммы 5.3 существуют такие последовательности $\{x_k^s\}_{s=1}^\infty \subset X_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{t}, x_0)$, $\{y_q^s\}_{s=1}^\infty \subset Y_{\bar{\theta}}^{PC}(\bar{\theta}, y_0)$, что $x_k^s \rightarrow x_k$, $y_q^s \rightarrow y_q$, $k = 1, \dots, m$, $q = 1, \dots, r$, при $s \rightarrow \infty$. По доказанному для любого s при $x_k := x_k^s$, $y_q := y_q^s$ и некотором $u_* := u^s$ верно (5.5). Так как множество Ω компактно, из последовательности $\{u^s\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $u_{s(i)} \rightarrow u_* \in \Omega$. Остается рассмотреть (5.5) при $x_k := x_k^{s(i)}$, $y_q := y_q^{s(i)}$, $u_* := u^{s(i)}$ и перейти к пределу при $i \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. С учетом (vi) равенство (5.5) принимает вид

$$\begin{aligned} & h' \left[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, \sum_{k=1}^m a_k x_k, \sum_{q=1}^r b_q y_q \right] + h'' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, u_*] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^r a_k b_q h' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, x_k, y_q] + \sum_{k=1}^m a_k h'' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, u_k]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Пусть справедливо утверждение (B) основной теоремы. Тогда для любых $(\bar{t}, \bar{\theta}) \in \Pi$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ множество $h'' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, \Omega]$ выпукло.

Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в (5.7) $p(\cdot) = \rho(\cdot) := \bar{z}$ и $x_1 := \dots := x_m$, $y_1 := \dots := y_r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Заключение основной леммы означает, что для любых $x_1, \dots, x_m \in X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$, $y_1, \dots, y_r \in Y_{\bar{t}}(\bar{\theta}, y_0)$, $a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0$, $b_1 \geq 0, \dots, b_r \geq 0$, $\sum_{k=1}^m a_k = 1$, $\sum_{q=1}^r b_q = 1$,

$$\begin{aligned} & h' \left[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, \sum_{k=1}^m a_k x_k, \sum_{q=1}^r b_q y_q \right] + h'' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, \Omega] \\ & \supset \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^r a_k b_q h' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, x_k, y_q] + h'' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, \Omega]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

ЛЕММА 5.4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – непустое выпуклое компактное множество и $d, c \in \mathbb{R}^n$. Тогда $d + A \subset c + A \Leftrightarrow d = c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $d + A \subset c + A \Rightarrow d = c$. Ввиду компактности множества A его опорная функция $f_A(\xi) := \max_{a \in A} \xi^* a$ принимает только конечные значения. В силу включения $d + A \subset c + A$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} \xi^* d + f_A(\xi) &= \max_{a \in A} \xi^* (d + a) = \max_{x \in d + A} \xi^* x \\ &\leq \max_{x \in c + A} \xi^* x = \max_{a \in A} \xi^* (c + a) = \xi^* c + f_A(\xi). \end{aligned}$$

Следовательно, $\xi^* d \leq \xi^* c$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$, т.е. $d = c$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Применяя лемму 5.4 к множеству $A := h'' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, \Omega]$ и включению (5.8), убеждаемся, что

$$h' \left[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, \sum_{k=1}^m a_k x_k, \sum_{q=1}^r b_q y_q \right] = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^r a_k b_q h' [\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, x_k, y_q], \quad (5.9)$$

где $\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, x_k, y_q, a_k, b_q$ такие, как указано в основной лемме.

ЛЕММА 5.5. Пусть справедливо утверждение (B) и $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $\bar{\theta} \in \Theta$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда множество D всех траекторий $\hat{x}(\cdot)$ системы (3.1) с $\hat{x}(0) = x_0$ выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{x}_1(\cdot), \hat{x}_2(\cdot) \in D$, т.е. $\hat{x}_i(0) = x_0$ и $\hat{x}_i(\cdot)$ удовлетворяет (3.1) при некотором $w(\cdot) = \hat{u}_i(\cdot) \in \mathbf{L}_\infty(T \rightarrow \Omega)$. Рассмотрим $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, и покажем, что $\hat{x}(\cdot) := \alpha \hat{x}_1(\cdot) + \beta \hat{x}_2(\cdot) \in D$. Очевидно, $\hat{x}(0) = x_0$. Обозначим $\hat{\xi}(t) := h'[t, \bar{\theta}, p(t), \hat{x}(t), p'(t)]$ и покажем, что для любого $\bar{t} \in T$

$$\hat{\xi}(\bar{t}) = \alpha h'[\bar{t}, \bar{\theta}, p(\bar{t}), \hat{x}_1(\bar{t}), p'(\bar{t})] + \beta h'[\bar{t}, \bar{\theta}, p(\bar{t}), \hat{x}_2(\bar{t}), p'(\bar{t})]. \quad (5.10)$$

Для этого применим замечание 5.5 при $\rho(\cdot) \equiv p(\bar{t})$, $m = 2$, $r := 1$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $x_i = \hat{x}_i(\bar{t})$, $b_1 := 1$. Для определения вектора y_0 , фигурирующего в условиях основной леммы, выберем $v(\cdot) \in PC(\Theta \rightarrow \mathbb{R}^n)$, найдем решение $\hat{y}(\cdot)$ задачи Коши $\hat{y}(\bar{\theta}) = p'(\bar{t})$ для уравнения (3.2) и положим $y_0 := \hat{y}(0)$. Тогда в (5.9) можно взять $y_1 := p'(\bar{t})$, после чего (5.9) принимает вид (5.10). По замечанию 5.3 $\alpha h''[t, \bar{\theta}, p(t), \Omega] + \beta h''[t, \bar{\theta}, p(t), \Omega] = h''[t, \bar{\theta}, p(t), \Omega]$. Следовательно,

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} \in \hat{\xi}(t) + \alpha h''[t, \bar{\theta}, p(t), \Omega] + \beta h''[t, \bar{\theta}, p(t), \Omega] = \hat{\xi}(t) + h''[t, \bar{\theta}, p(t), \Omega]$$

и по теореме измеримого выбора [3] $d\hat{x}(t)/dt = \hat{\xi}(t) + h''[t, \bar{\theta}, p(t), \hat{u}(t)]$ при некотором $\hat{u}(\cdot) \in \mathbf{L}_\infty([0, \bar{t}] \rightarrow \Omega)$, т.е. $\hat{x}(\cdot) \in D$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. При любых $\bar{t} \in T$, $\bar{\theta} \in \Theta$, $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множество $X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$ выпукло.

Этот факт немедленно вытекает из леммы 5.5.

ЛЕММА 5.6. Пусть справедливо утверждение (B). Рассмотрим $\bar{\theta} \in \Theta$ и такую функцию $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, что система (3.1) вполне управляема. Тогда для любых $\bar{t} \in (0, t_f]$ и $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ найдется такое начальное состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$, что $\bar{x} \in \text{int } X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $u_0(\cdot) \in \mathbf{L}_\infty(T \rightarrow \Omega)$ и, опираясь на лемму 5.1, рассмотрим решение $x_0(\cdot) \in \mathbf{W}_\infty^1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$ задачи Коши $x_0(\bar{t}) = \bar{x}$ для уравнения (3.1) (с $w(\cdot) := u_0(\cdot)$). Обозначим $a := x_0(0)$. Так как $\text{int } X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, a) \neq \emptyset$, можно так выбрать точки $x_1, \dots, x_n \in X_{\bar{\theta}}(\bar{t}, a)$, что векторы $e_k := x_k - \bar{x}$, $k = 1, \dots, n$, линейно независимы. Выбранным точкам соответствуют управления $u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)$.

Рассмотрим $\delta a \in \mathbb{R}^n$, малый параметр ε и решение $x_{\varepsilon, k}(\cdot)$ задачи Коши $x_{\varepsilon, k}(0) = a + \varepsilon \delta a$ для уравнения (3.1) (с $w(\cdot) = u_k(\cdot)$). Известно, что

$$x_{\varepsilon, k}(t) = x_k(t) + \varepsilon \delta x_k(t) + o(\varepsilon), \quad (5.11)$$

где $\delta \dot{x}_k(t) = h_x[t, \theta, p(t), x_k(t), p'(t), u_k(t)] \delta x_k(t)$, $\delta x_k(0) = \delta a$.

Выберем такое δa , что $\delta x_0(\bar{t}) = y := -\sum_{k=1}^n e_k$. Покажем, что $\bar{x} \in \text{int } X_\varepsilon$ при малых ε , где $X_\varepsilon := X_{\bar{t}}(\bar{t}, a + \varepsilon \delta a)$. Так как $x_{\varepsilon,k}(\bar{t}) \in X_\varepsilon$ и множество X_ε выпукло по следствию 5.1, достаточно показать, что $\bar{x} \in \text{int } S_\varepsilon$, где S_ε – симплекс с вершинами $x_{\varepsilon,0}(\bar{t}), \dots, x_{\varepsilon,n}(\bar{t})$.

Так как $e_{\varepsilon,k} := x_{\varepsilon,k}(\bar{t}) - x_{\varepsilon,0}(\bar{t}) = e_k + \varepsilon(\delta x_k(\bar{t}) - \delta x_0(\bar{t})) + o(\varepsilon)$, где $k = 1, \dots, n$ и $e_1, \dots, e_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$, векторы $e_{\varepsilon,1}, \dots, e_{\varepsilon,n}$ линейно независимы при малых ε . Значит, $\text{int } S_\varepsilon \neq \emptyset$ и для обоснования включения $\bar{x} \in \text{int } S_\varepsilon$ достаточно показать, что для коэффициентов $\alpha_k(\varepsilon)$ разложения

$$\bar{x} - x_{\varepsilon,0}(\bar{t}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\varepsilon) e_{\varepsilon,k} \quad (5.12)$$

справедливы оценки $\alpha_k(\varepsilon) > 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k(\varepsilon) < 1$.

Обозначим $\delta e_k := \delta x_k(\bar{t}) - \delta x_0(\bar{t})$ и запишем (5.12) с учетом (5.11):

$$\bar{x} - x_{\varepsilon,0}(\bar{t}) = -\varepsilon \delta x_0(\bar{t}) + o(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=1}^n e_k + o(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\varepsilon) (e_k + \varepsilon \delta e_k + o(\varepsilon)).$$

Отсюда следует, что $\alpha_k(\varepsilon) = \varepsilon + o(\varepsilon)$, а значит, справедливы требуемые оценки.

Функцию $\psi(\cdot): \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ назовем *аффинной на выпуклом множестве* $C \subset \mathbb{R}^p$, если $\psi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \psi(x_1) + \beta \psi(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in C$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Функцию $\psi(\cdot)$ назовем *аффинной*, если она аффинна на всем пространстве $\mathbb{R}^p$, и *локально аффинной*, если любая точка $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ имеет выпуклую окрестность $V(\bar{x})$, на которой функция $\psi(\cdot)$ аффинна.

ЛЕММА 5.7. *Любая локально аффинная функция $\psi(\cdot): \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ аффинна и имеет вид $\psi(x) = \Psi x + c$. Здесь Ψ – $(q \times p)$ -матрица и $c \in \mathbb{R}^q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x', x'' \in \mathbb{R}^p$. Функция $\nu(\sigma) := \psi[(1 - \sigma)x' + \sigma x'']$ переменной $\sigma \in \mathbb{R}$, очевидно, локально аффинна: $\nu(\sigma) = (1 - \alpha)\nu(\sigma') + \alpha\nu(\sigma'')$, если $\sigma = \sigma(\alpha) := (1 - \alpha)\sigma' + \alpha\sigma''$, $\alpha \in [0, 1]$ и $\sigma', \sigma'' \in V(\bar{\sigma}) = (\bar{\sigma} - \varepsilon(\bar{\sigma}), \bar{\sigma} + \varepsilon(\bar{\sigma}))$. Здесь $\varepsilon(\bar{\sigma}) > 0$ и точка $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}$ произвольна. Дифференцируя указанное равенство по α , убеждаемся, что $d\nu(\sigma)/d\sigma = (d\nu(\sigma)/d\alpha)(d\alpha/d\sigma) = (\nu(\sigma'') - \nu(\sigma'))/(\sigma'' - \sigma')$ при $\sigma \in [\sigma', \sigma'']$. Полагая $\sigma' := \bar{\sigma} - \frac{1}{2}\varepsilon(\bar{\sigma})$, $\sigma'' := \bar{\sigma} + \frac{1}{2}\varepsilon(\bar{\sigma})$, убеждаемся, что $\nu'(\cdot) = \text{const}$ на интервале $(\bar{\sigma} - \frac{1}{2}\varepsilon(\bar{\sigma}), \bar{\sigma} + \frac{1}{2}\varepsilon(\bar{\sigma}))$ для любого $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что производная $\nu'(\cdot)$ постоянна на всей оси $\mathbb{R}$. Поэтому функция $\nu(\cdot)$ аффинна, откуда ввиду произвольности x', x'' следует аффинность функции $\psi(\cdot)$.

Обозначим $\nu(x) := \psi(x) - \psi(0)$. Для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $\rho \in [0, 1]$ имеем $\nu(\rho x) = \psi[\rho x + (1 - \rho)0] - \psi(0) = \rho\psi(x) + (1 - \rho)\psi(0) - \psi(0) = \rho\nu(x)$. Для $\rho > 1$ имеем $\nu(\frac{1}{\rho}(\rho x)) = \frac{1}{\rho}\nu(\rho x)$, т.е. $\nu(\rho x) = \rho\nu(x)$ для всех $\rho \geq 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \nu(x_1) + \nu(x_2) &= 2 \left[\frac{1}{2}\psi(x_1) + \frac{1}{2}\psi(x_2) \right] - 2\psi(0) = 2\psi \left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right] - 2\psi(0) \\ &= 2\nu \left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right] = \nu(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

В частности, $\nu(x) + \nu(-x) = \nu(0) = 0$ и $\nu(-x) = -\nu(x)$. В итоге $\nu(\rho x) = \rho\nu(x)$ для всех $\rho \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\nu: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ – линейный оператор. Значит, $\nu(x) = \Psi x$ для всех $x \in \mathbb{R}^p$, где Ψ – $(q \times p)$ -матрица. Следовательно, $\psi(x) = \Psi x + c$, где $c := \psi(0)$.

ЛЕММА 5.8. (B) $\Rightarrow$ (D).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $0 < \bar{t} \leq t_f$, $0 < \bar{\theta} \leq \theta_f$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$. По условию (vii) существует такая функция $p(\cdot) \in PC_1(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$, что система (3.1) вполне управляема. Выберем $0 < t_* < \bar{t}$ и изменим функцию $p(\cdot)$ согласно (5.3); по лемме 5.2 система (3.1) остается вполне управляемой. Положим $\rho(\cdot) \equiv p(\bar{t})$, выберем $v(\cdot) \in PC(\Theta \rightarrow \Omega)$, рассмотрим решение $\hat{y}(\cdot)$ задачи Коши $\hat{y}(\bar{\theta}) = y$ для уравнения (3.2) и в основной лемме возьмем $y_0 := \hat{y}(0)$. Тогда $y \in Y_{\bar{t}}(\bar{\theta}, y_0)$. По построению $p(\bar{t}) = \rho(\bar{\theta})$.

В силу замечания 5.5 (где возьмем $y_1 := \dots := y_r := y$), следствия 5.1 и леммы 5.6 функция $\psi(x, y) := h'[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}, x, y]$ локально аффинна по x . Согласно лемме 5.7 она аффинна по x . Аналогично устанавливаем, что эта функция аффинна по y при любом $x \in \mathbb{R}^n$. (Хотя эти свойства доказаны для $\bar{t} > 0$, $\bar{\theta} > 0$, по непрерывности они распространяются на все $(\bar{t}, \bar{\theta}) \in \Pi$.) Поэтому по лемме 5.7, с одной стороны, $\psi(x, y) = A(y)x + b(y)$ и, с другой стороны, $\psi(x, y) = C(x)y + d(x)$. Здесь $A(y)$ и $C(x)$ – $(n \times n)$ -матрицы и $b(y), d(x) \in \mathbb{R}^n$. Положив в обоих равенствах $y := 0$, получим $d(x) = A(0)x + b(0)$. Рассматривая $y := y^{(j)} := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где единица стоит на j -м месте, получим

$$C(x)y^{(j)} = A(y^{(j)})x + b(y^{(j)}) - A(0)x - b(0) = \underbrace{[A(y^{(j)}) - A(0)]}_{A_j} x + \underbrace{b(y^{(j)}) - b(0)}_{b_j}.$$

Таким образом, для $x = \|x_i\| \in \mathbb{R}^n$ и $y = \|y_j\| \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= C(x)y + d(x) = \sum_{j=1}^n y_j C(x)y^{(j)} + A(0)x + b(0) \\ &= \sum_{j=1}^n y_j [A_j x + b_j] + A(0)x + b(0). \end{aligned}$$

Положив

$$\begin{aligned} h_1[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}][x, y] &:= \sum_{j=1}^n y_j A_j x, \\ h_2[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}] &:= A(0), \quad h_3[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}] := [b_1, \dots, b_n], \quad h_4[\bar{t}, \bar{\theta}, \bar{z}] := b(0), \end{aligned}$$

убеждаемся в справедливости (3.3).

Положим $x = 0$, $y = 0$. Тогда из (3.3) с учетом (vi) следует непрерывность по совокупности аргументов и локальная липшицевость по z функции $h_4[\cdot]$. Рассматривая в (3.3) сначала $x := 0$, $y := y^{(q)}$, а затем $x := y^{(q)}$, $y := 0$ ($q = 1, \dots, n$), убеждаемся в наличии аналогичного свойства у функций $h_3[\cdot]$ и $h_2[\cdot]$. Подставляя в (3.3) $x := y^{(l)}$, $y := y^{(q)}$, $l, q = 1, \dots, n$, устанавливаем, что тем же свойством обладают матричные функции $H_i(\cdot)$ в утверждении (D). В итоге с учетом замечания 5.3 убеждаемся в справедливости (D).

§ 6. Достаточные условия существования оптимального управления

В данном параграфе мы завершаем доказательство основной теоремы. При этом основное внимание будет уделено обоснованию импликации (D) $\Rightarrow$ (C). Предположения основной теоремы по-прежнему считаем выполненными.

ЛЕММА 6.1. Пусть множество D траекторий системы (1.1), (1.2) замкнуто относительно C -нормы. Тогда справедливо утверждение (C) основной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z(\cdot) \in D$ в силу (iv) $|z(t'', \theta'') - z(t', \theta')| \leq R(|\theta'' - \theta'| + |t'' - t'|)$, $\|z(\cdot)\|_C \leq R$, т.е. в силу леммы Арцела–Асколи множество D компактно в $C(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Поэтому для обоснования (C) достаточно показать, что в предположении (v) функционал (1.4) C -непрерывен.

Пусть $\{z_l(\cdot)\} \subset D$ и $z_l(\cdot) \rightarrow z_0(\cdot) \in D$ при $l \rightarrow \infty$. Тогда

$$\xi_l(t, \theta) := \varphi[t, \theta, z_l(t, \theta)] \rightarrow \xi_0(t, \theta) := \varphi[t, \theta, z_0(t, \theta)]$$

почти всюду в области Π . В силу (iv) и (v) существует такая функция $\psi(\cdot) \in \mathbf{L}_1$, что $|\xi_l(t, \theta)|, |\xi_0(t, \theta)| \leq \psi(t, \theta)$ при почти всех $(t, \theta) \in \Pi$. Следовательно, по теореме Лебега

$$\int_0^{t_f} \int_0^{\theta_f} \varphi[t, \theta, z_l(t, \theta)] dt d\theta \rightarrow \int_0^{t_f} \int_0^{\theta_f} \varphi[t, \theta, z_0(t, \theta)] dt d\theta, \quad l \rightarrow \infty.$$

Символом $x_r(\cdot) \xrightarrow{*} x_0(\cdot)$ обозначим $\mathbf{L}_2$ -слабую сходимость.

ЛЕММА 6.2. Пусть $\{x_r(\cdot)\}, \{y_r(\cdot)\} \subset \mathbf{L}_2(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$ – последовательности функций, имеющих обобщенные производные $\partial x_r(\cdot)/\partial t, \partial y_r(\cdot)/\partial \theta \in \mathbf{L}_\infty$, и пусть $x_r(\cdot) \xrightarrow{*} x_0(\cdot)$, $y_r(\cdot) \xrightarrow{*} y_0(\cdot)$, $\partial x_r(\cdot)/\partial t \xrightarrow{*} \partial x_0(\cdot)/\partial t$, $\partial y_r(\cdot)/\partial \theta \xrightarrow{*} \partial y_0(\cdot)/\partial \theta$, $x_i|_{t=0} = g(\cdot)$, $y_i|_{\theta=0} = q(\cdot)$ для $i = 0, 1, \dots$, где $g(\cdot) \in L_2(\Theta \rightarrow \mathbb{R}^n)$ и $q(\cdot) \in L_2(T \rightarrow \mathbb{R}^n)$ не зависят от индекса i . Тогда для любой функции $\Psi(\cdot) \in C(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n})$ и любых $(\bar{t}, \bar{\theta}) \in \Pi$

$$\int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} y_r^\top(t, \theta) \Psi(t, \theta) x_r(t, \theta) dt d\theta \rightarrow \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} y_0^\top(t, \theta) \Psi(t, \theta) x_0(t, \theta) dt d\theta, \quad r \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\bar{\Pi} := [0, \bar{t}] \times [0, \bar{\theta}]$ и заметим, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{\Pi}} y_r(t, \theta)^\top \Psi(t, \theta) x_r(t, \theta) dt d\theta \\
&= C_r + \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} dt d\theta \left[\int_0^\theta \frac{\partial y_r(t, \sigma)}{\partial \theta} d\sigma \right]^\top \Psi(t, \theta) \left[\int_0^t \frac{\partial x_r(\tau, \theta)}{\partial t} d\tau \right] \\
&= C_r + \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} dt d\sigma \left[\frac{\partial y_r(t, \sigma)}{\partial \theta} \right]^\top \int_0^t \int_\sigma^{\bar{\theta}} \Psi(t, \theta) \frac{\partial x_r(\tau, \theta)}{\partial t} d\tau d\theta \\
&= C_r + \left\langle A \frac{\partial x_r}{\partial t}, \frac{\partial y_r}{\partial \theta} \right\rangle, \\
C_r &= \int_{\bar{\Pi}} [q(t)^\top \Psi(t, \theta) + y_r(t, \theta)^\top \Psi(t, \theta) g(\theta) - q(t)^\top \Psi(t, \theta) g(\theta)] dt d\theta.
\end{aligned}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(\bar{\Pi} \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $A: \mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{L}_2$ – оператор Гильберта-Шмидта:

$$Ap(\cdot) = q(\cdot), \quad q(t, \sigma) := \int_0^{\bar{t}} \int_\sigma^{\bar{\theta}} \Psi(t, \theta) p(\tau, \theta) d\tau d\theta.$$

Следовательно, оператор A вполне непрерывен, и поэтому [9, с. 171]

$$\begin{aligned}
& \left\langle A \frac{\partial x_r}{\partial t}, \frac{\partial y_r}{\partial \theta} \right\rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left\langle A \frac{\partial x_0}{\partial t}, \frac{\partial y_0}{\partial \theta} \right\rangle, \\
& \int_{\bar{\Pi}} y_r(t, \theta)^\top \Psi(t, \theta) x_r(t, \theta) dt d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{\Pi}} y_0(t, \theta)^\top \Psi(t, \theta) x_0(t, \theta) dt d\theta.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 6.3. (D) $\Rightarrow$ (C).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6.1 достаточно установить, что $\{z_l(\cdot)\}_{l=1}^\infty \subset D$, $\|z_l(\cdot) - z_0(\cdot)\|_C \rightarrow 0 \Rightarrow z_0(\cdot) \in D$. Обозначим $x_l(\cdot) := \partial z_l(\cdot)/\partial \theta$, $y_l(\cdot) := \partial z_l(\cdot)/\partial t$. Согласно (1.1), (1.2), (vi) и (3.3) имеем (ниже $l' := l$, $\Delta_{l,l}(\bar{t}, \bar{\theta}) := 0$)

$$\begin{aligned}
z_{l'}(\bar{t}, \bar{\theta}) &= a(\bar{\theta}) + b(\bar{t}) - a(0) \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} h_1[t, \theta, z_{l'}(t, \theta)] [x_l(t, \theta), y_l(t, \theta)] dt d\theta \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} h_2[t, \theta, z_{l'}(t, \theta)] x_l(t, \theta) dt d\theta \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} h_3[t, \theta, z_{l'}(t, \theta)] y_l(t, \theta) dt d\theta \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} h_4[t, \theta, z_{l'}(t, \theta)] dt d\theta \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{\theta}} h''[t, \theta, z_{l'}(t, \theta), u_l(t, \theta)] dt d\theta + \Delta_{l,l'}(\bar{t}, \bar{\theta}), \quad (6.1)
\end{aligned}$$

где $u_l(\cdot) \in \mathbf{L}_\infty(\Pi \rightarrow \Omega)$. При подстановке в (6.1) $l' := 0$, очевидно, возникает невязка $\Delta_{l,0}(\bar{t}, \bar{\theta}) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Далее (6.1) рассматриваем только при $l' := 0$.

Обозначим $\xi_l(t, \theta) := h''[t, \theta, z_0(t, \theta), u_l(t, \theta)]$. Согласно (i), (iv), (vi) последовательности $\{\xi_l(\cdot)\}$, $\{x_l(\cdot)\}$, $\{y_l(\cdot)\} \in \mathbf{L}_\infty$ -ограничены. В силу (1.1), (4.13) $\|\partial x_l(\cdot)/\partial t\|_\infty \leq H$, $\|\partial y_l(\cdot)/\partial \theta\|_\infty \leq H$. Поэтому последовательности $\{x_l(\cdot)\}$, $\{y_l(\cdot)\}$, $\{\xi_l(\cdot)\}$, $\{\partial x_l(\cdot)/\partial t\}$ и $\{\partial y_l(\cdot)/\partial \theta\}$ слабо относительно компактны в $\mathbf{L}_2(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Следовательно, можно так выбрать подпоследовательность $l(r)$, что $x_r(\cdot) := x_{l_r}(\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} x_0(\cdot)$, $y_r(\cdot) := y_{l_r}(\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} y_0(\cdot)$, $\partial x_r(\cdot)/\partial t \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha(\cdot)$, $\partial y_r(\cdot)/\partial \theta \overset{*}{\rightharpoonup} \beta(\cdot)$, $\xi_r(\cdot) := \xi_{l_r}(\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0(\cdot)$. Здесь согласно [7] и с учетом (1.2) $\alpha(\cdot) = \partial x_0(\cdot)/\partial t$, $\beta(\cdot) = \partial y_0(\cdot)/\partial \theta$ и $x_r|_{t=0} = a'(\cdot)$, $y_r|_{\theta=0} = b'(\cdot)$ для всех $r = 0, 1, \dots$.

По лемме Мазура [2] $\xi_0 \in \overline{\text{co}}\{\xi_r(\cdot)\}_{r=1}^\infty$, где замыкание берется в топологии $\mathbf{L}_2(\Pi \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Так как $\xi_r(t, \theta) \in h''[t, \theta, z_0(t, \theta), \Omega]$ при почти всех $(t, \theta) \in \Pi$, то с учетом (D) $\xi_0(t, \theta) \in \overline{\text{co}} h''[t, \theta, z_0(t, \theta), \Omega] = h''[t, \theta, z_0(t, \theta), \Omega]$ при почти всех $(t, \theta) \in \Pi$. По теореме измеримого выбора [3, 1.2.7] существует такая измеримая функция $u_0(\cdot): \Pi \rightarrow \Omega$, что $\xi_0(t, \theta) = h''[t, \theta, z_0(t, \theta), u_0(t, \theta)]$ при почти всех $(t, \theta) \in \Pi$.

Рассмотрим (6.1) при $l := l(r)$, $l' := 0$ и перейдем к пределу при $r \rightarrow \infty$. В результате убеждаемся, что равенство (6.1) верно при $l := 0$, $l' := 0$. (Напомним, что $\Delta_{0,0}(\bar{t}, \bar{\theta}) := 0$.) Действительно, предельный переход в шестом, пятом и восьмом слагаемых очевиден; в четвертом он обоснован леммой 6.2.

Итак, (6.1) верно при $l = 0$, $l' = 0$. Это означает, что $z_0(\cdot) \in D$. Отсюда и из леммы 6.1 вытекает справедливость (C).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Импликации (C) $\Rightarrow$ (A) и (A) $\Rightarrow$ (B) очевидны, импликация (B) $\Rightarrow$ (D) обоснована леммой 5.8, а (D) $\Rightarrow$ (C) – леммой 6.3.

Список литературы

1. Gamkrelidze R. V. On some extremal problems in the theory of differential equations // SIAM J. on Control. 1965. V. 3. P. 106–128.
2. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
4. Cesary L. Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints. I, II // Trans. AMS. 1966. V. 124. P. 369–430.
5. Matveev A. S. Distributed systems with nontraditional conditions of optimal control existence // Proceedings of the Third European Control Conference, the Netherlands. Groningen, 1993. P. 1377–1380.
6. Плотников В. И., Сумин В. И. Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу // Дифференц. уравн. 1972. № 5. С. 845–856.
7. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
8. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
9. Люстерник А. А., Соболев С. Л. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

Поступило в редакцию
27.V.1996