Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Диффузионная буферность в одной математической модели биологии, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 5, 135–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im213>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:13:01

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Диффузионная буферность в одной математической модели биологии

Рассматривается система дифференциально-разностных уравнений в частных производных с диффузией при граничных условиях Неймана, моделирующая одну задачу хищник–жертва. Методом бесконечномерной нормализации устанавливается феномен диффузионной буферности, т.е. существование (при подходящем выборе параметров) любого числа устойчивых пространственно неоднородных циклов.

Библиография: 16 наименований.

Будем говорить, что в параболической системе типа реакция-диффузия с граничными условиями Неймана наблюдается *диффузионная буферность*, если при подходящем выборе параметров такая задача имеет любое фиксированное число устойчивых пространственно неоднородных циклов. Впервые это явление с помощью численных методов обнаружено в [1] при исследовании системы двух дифференциально-разностных уравнений с диффузией (модель задачи хищник–жертва с учетом миграции хищника). В этой же работе был поставлен вопрос о теоретическом объяснении явления диффузионной буферности на модельной сингулярно возмущенной краевой задаче без запаздывания. Его решение содержится в статьях [2]–[5], а также в монографии [6]. В настоящей работе полученные в этих публикациях результаты переносятся непосредственно на краевую задачу из [1].

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

1.1. На основе синтеза известных идей Вольтерра и Хатчинсона в [7] для моделирования взаимодействия хищника со своей жертвой предложена следующая краевая задача:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{r_1}{1+a} [1 + a(1 - N_2) - N_1(t - h_1, x)] N_1, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + r_2 [N_1 - N_2(t - h_2, x)] N_2, \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial N_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial N_2}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и при поддержке INTAS.

Здесь $N_1(t, x)$, $N_2(t, x)$ – плотности популяций (в момент t в точке x) жертвы и хищника соответственно; $r_j > 0$, $h_j > 0$, $j = 1, 2$, – мальтузианские коэффициенты линейного роста и возрасты половозрелости; $a > 0$ – коэффициент давления хищника на жертву; $D > 0$ – коэффициент подвижности хищника (подвижность жертвы не учитывается). Предполагается, что среда обитания однородна как для хищника, так и для жертвы и представляет собой отрезок $0 \leq x \leq 1$.

Обозначим через $C([-h_j, 0]; W_2^1)$, $j = 1, 2$, банаховы пространства непрерывных по $s \in [-h_j, 0]$ в метрике $W_2^1[0, 1]$ функций $\varphi(s, x)$ с нормами

$$\|\varphi(s, x)\| = \max_{-h_j \leq s \leq 0} \|\varphi\|_{W_2^1}, \quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим, далее, решение $(N_1(t, x), N_2(t, x))$ краевой задачи (1.1)–(1.3) с произвольными неотрицательными начальными функциями

$$(\varphi_1(s, x), \varphi_2(s, x)) = \varphi(s, x) \in E = C([-h_1, 0]; W_2^1) \times C([-h_2, 0]; W_2^1),$$

которое строится методом шагов.

Например, на первом шаге, т.е. при $0 \leq t \leq h_0 = \min(h_1, h_2)$, сначала из уравнения (1.1) находим

$$N_1(t, x) = \Pi(N_2) = \varphi_1(0, x) \exp \left\{ \frac{r_1}{1+a} \int_0^t [1 + a(1 - N_2(s, x)) - \varphi_1(s - h_1, x)] ds \right\}.$$

Подставляя затем это выражение в уравнение (1.2), для определения $N_2(t, x)$ получаем интегро-дифференциальную смешанную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + r_2 [\Pi(N_2) - \varphi_2(t - h_2, x)] N_2, \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial N_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad N_2|_{t=0} = \varphi_2(0, x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

однозначно разрешимую при $0 \leq t \leq h_0$. Действительно, из дифференциального неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial t} &\leq D \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + b(t, x) N_2, \\ b(t, x) &= r_2 \left[\varphi_1(0, x) \exp \left\{ r_1 \int_0^t (1 - \varphi_1(s - h_1, x)/(1+a)) ds \right\} - \varphi_2(t - h_2, x) \right] \end{aligned}$$

и принципа максимума вытекает априорная оценка

$$0 \leq N_2(t, x) \leq N_2^*(t, x), \quad 0 \leq t \leq h_0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где N_2^* – решение линейной краевой задачи

$$\frac{\partial N_2^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N_2^*}{\partial x^2} + b(t, x) N_2^*, \quad \frac{\partial N_2^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad N_2^*|_{t=0} = \varphi_2(0, x).$$

А отсюда и из общих свойств решений уравнений параболического типа (см. [8], [9]) следует существование и единственность при всех $0 \leq t \leq h_0$, $0 \leq x \leq 1$ классического решения задачи (1.4). При $h_0 \leq t \leq 2h_0$ рассмотрению подлежит аналогичная (1.4) смешанная задача с начальными условиями при $t = h_0$ и т.д.

Из описанного способа построения решения $(N_1(t, x), N_2(t, x))$ заключаем, что, во-первых, оно определено при всех $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$, а во-вторых, формулой

$$T[t, \varphi(s, x)] = (N_1(t + s, x), N_2(t + s, x))$$

в фазовом пространстве E задается сильно непрерывная по t полугруппа нелинейных ограниченных операторов, гладко (по Фреше) зависящая от начального условия $\varphi(s, x) \in E$ и параметров. Это в свою очередь позволяет практически без изменений распространить на краевую задачу (1.1)–(1.3) целый ряд положений качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений – теоремы Ляпунова и Андронова–Витта об устойчивости по первому приближению, теоремы об интегральных многообразиях и др.

1.2. В работе [1] явление диффузионной буферности для краевой задачи (1.1)–(1.3) установлено численными методами при значениях параметров

$$h_1 = 0.8; \quad h_2 = 1.86; \quad r_2 = 0.79; \quad a = 0.1; \quad 2.2 \leq r_1 \leq 3; \quad 0.001 \leq D \leq 0.005 \quad (1.5)$$

(соответствующих задаче лиса–мышевидные). Цель настоящей работы – дать теоретическое объяснение этого явления в рамках задачи (1.1)–(1.3) при некоторых дополнительных ограничениях.

Для их формулировки выполним в (1.1)–(1.3) замены

$$\frac{t}{h_1} \longrightarrow t, \quad N_1 = 1 + u, \quad N_2 = 1 + v,$$

положим

$$a = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{r_1 h_1}{1 + a} = \frac{\pi}{2} + \gamma \varepsilon, \quad r_2 h_1 = r, \quad \frac{h_2}{h_1} = h, \quad h_1 D \longrightarrow D, \quad (1.6)$$

где знак параметра $\gamma \sim 1$ произволен, и будем считать, что

$$rh < \frac{\pi}{2}. \quad (1.7)$$

В результате вместо (1.1)–(1.3) получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \varepsilon \right) [\varepsilon v + u(t - 1, x)](1 + u), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r[u - v(t - h, x)](1 + v), \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

являющуюся объектом дальнейшего анализа. Отметим, что малость a (см. (1.6)) наиболее естественна с биологической точки зрения [1], тогда как специальный выбор r_1 в (1.6) и неравенство (1.7) обусловлены чисто математическими причинами, которые проясняются ниже.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\pi}{2}u(t-1, x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r[u - v(t-h, x)], \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.9)$$

получающуюся из (1.8) при $\varepsilon = 0$ после линеаризации на нулевом состоянии равновесия. Применяя к ней метод Фурье по системе функций $\cos n\pi x$, $n = 0, 1, \dots$, убеждаемся, что спектр ее устойчивости на каждой моде $\cos n\pi x$ определяется из уравнений

$$\lambda + \frac{\pi}{2} \exp(-\lambda) = 0, \quad \lambda + r \exp(-\lambda h) = -n^2 \pi^2 D. \quad (1.10)$$

Первое из них проанализировано, например, в [10], где показано, что все его корни (за исключением простой пары $\pm i\pi/2$) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Отрицательность же действительных частей корней второго уравнения (1.10) при любых n и D обеспечивает условие (1.7).

Итак, при $\varepsilon = 0$ в спектре устойчивости нулевого состояния равновесия системы (1.8) появляется счетное число частот $\pm i\pi/2$, а соответствующее им семейство 4-периодических решений линейной системы (1.9) имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \xi(x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \bar{\xi}(x) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right), \\ v &= \eta(x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \bar{\eta}(x) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right), \quad \eta = -rL(\xi), \end{aligned}$$

где $\xi(x)$ – произвольная функция из $W_2^1[0, 1]$,

$$L = \left[D \frac{d^2}{dx^2} - \varkappa I \right]^{-1}, \quad \varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2, \quad \varkappa_1 = r \cos \frac{\pi}{2}h, \quad \varkappa_2 = \frac{\pi}{2} - r \sin \frac{\pi}{2}h,$$

I – единичный оператор. Поэтому представляется естественным искать автоколебания краевой задачи (1.8) в виде рядов

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\varepsilon} \left[\xi(\tau, x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \bar{\xi}(\tau, x) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right) \right] \\ &\quad + \varepsilon u_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \dots, \\ v &= \sqrt{\varepsilon} \left[\eta(\tau, x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \bar{\eta}(\tau, x) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right) \right] + \varepsilon v_2(t, \tau, x) + \dots, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\tau = \varepsilon t$ – медленное время, $\xi(\tau, x)$, $\eta(\tau, x) = -rL(\xi)$ – подлежащие определению амплитуды колебаний, а u_k , v_k , $k \geq 2$, – тригонометрические полиномы от переменной $\pi t/2$ с зависящими от τ , x коэффициентами.

Подставляя разложения (1.11) в задачу (1.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , последовательно находим

$$\begin{aligned} u_2 &= A(\tau, x) \exp(i\pi t) + \bar{A}(\tau, x) \exp(-i\pi t), \quad A = \frac{2-i}{5} \xi^2, \\ v_2 &= B(\tau, x) \exp(i\pi t) + \bar{B}(\tau, x) \exp(-i\pi t) + C(\tau, x), \\ B &= -r \left[D \frac{d^2}{dx^2} - (i\pi + r \exp(-i\pi h)) I \right]^{-1} \left(A - \eta^2 \exp\left(-i\frac{\pi}{2}h\right) \right), \\ C &= 2r \cos \frac{\pi}{2} h \left[D \frac{d^2}{dx^2} - r I \right]^{-1} |\eta|^2, \end{aligned}$$

а для u_3 получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\pi}{2} u_3(t-1, \tau, x) &= f_1(\tau, x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \bar{f}_1(\tau, x) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right) \\ &+ f_2(\tau, x) \exp\left(i\frac{3\pi}{2}t\right) + \bar{f}_2(\tau, x) \exp\left(-i\frac{3\pi}{2}t\right). \end{aligned}$$

Условие его разрешимости в нужном классе функций, т.е. равенство $f_1(\tau, x) = 0$, приводит к интегрально-дифференциальной краевой задаче

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{2} r L(\xi) + i\gamma \xi + \frac{\pi(1-3i)}{10} |\xi|^2 \xi, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

для определения амплитуды $\xi(\tau, x)$. Всюду ниже фазовым пространством этой задачи считаем гильбертово пространство $W_2^1[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что краевая задача (1.12) имеет автомодельный цикл*

$$\xi(\tau, x) = \xi_0(x) \exp(i\omega_0 \tau), \tag{1.13}$$

экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ему соответствует цикл краевой задачи (1.8) с асимптотикой (1.11) и теми же свойствами устойчивости.

Справедливость теоремы достаточно просто устанавливается с помощью качественных соображений общего характера, имеющих место для краевой задачи (1.8) в силу сказанного выше. Действительно, разложим фазовое пространство E в прямую сумму:

$$E = V_1 \oplus V_2, \quad V_1 = PE, \quad V_2 = (I - P)E,$$

где проектор P задается равенствами

$$\begin{aligned} P\varphi &= \left(\xi(x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}s\right) + \bar{\xi}(x) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}s\right), \eta(x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}s\right) + \bar{\eta}(x) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}s\right) \right), \\ \xi(x) &= \frac{1}{1+i\frac{\pi}{2}} \left(\varphi_1(0, x) + i\frac{\pi}{2} \int_{-1}^0 \varphi_1(s, x) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}s\right) ds \right), \\ \eta &= -rL(\xi), \quad \varphi(s, x) = (\varphi_1(s, x), \varphi_2(s, x)). \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что V_1, V_2 – корневые подпространства системы (1.9) (инвариантные для ее траекторий), причем первое из них отвечает счетному числу чисто мнимых корней $\pm i\pi/2$, а второе – всем остальным корням уравнений (1.10). Таким образом, если $w_1 = P\varphi$, $w_2 = (I - P)\varphi$, то равенство $w_2 = 0$ задает бесконечномерное экспоненциально орбитально устойчивое инвариантное многообразие Σ_0 системы (1.9).

При переходе от линейной системы (1.9) к нелинейной краевой задаче (1.8) в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия инвариантное многообразие Σ_0 , естественно, сохраняется. Оно задается теперь равенством $w_2 = G(w_1, \varepsilon)$, причем достаточно гладкое по совокупности переменных отображение $G(*, \varepsilon): V_1 \rightarrow V_2$ таково, что

$$G(0, \varepsilon) \equiv 0, \quad G'_{w_1}(0, 0) = 0, \quad G'_\varepsilon(0, 0) = 0$$

(для доказательства можно воспользоваться схемой Хартмана [11], адаптированной для нелинейных полугрупп в банаховых пространствах в работе [12]). Отстае́тся заметить, что в силу своего построения краевая задача (1.12) – укороченная нормальная форма на Σ_0 (отброшенный добавок является ограниченным нелинейным оператором в $W_2^1[0, 1]$ порядка ε). Тем самым утверждение теоремы – непосредственное следствие предположенной грубости цикла (1.13).

В пространстве параметров

$$\left\{ (r, h, D, \gamma): r, h, D > 0, \quad rh < \frac{\pi}{2} \right\}$$

краевой задачи (1.12) введем в рассмотрение открытые множества Ω_n , $n = 1, 2, \dots$, определяющиеся следующим образом. Будем говорить, что набор (r, h, D, γ) принадлежит Ω_n , если при этих значениях параметров краевая задача (1.12) имеет не менее n пространственно неоднородных экспоненциально орбитально устойчивых автомодельных циклов

$$\xi_k(\tau, x) = \xi_k(x) \exp(i\omega_k \tau), \quad \xi_k(x) \not\equiv \text{const}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Основной результат настоящей статьи – следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2 (о диффузионной буферности). *Множество Ω_n не пусто при любом натуральном n .*

Из теорем 1.1, 1.2 следует существование для каждого натурального n и каждого набора параметров $(r, h, D, \gamma) \in \Omega_n$ такого числа $\varepsilon_n > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$ краевая задача (1.8) имеет n экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных циклов с асимптотикой (1.11), (1.14). Таким образом, проблема диффузионной буферности сводится к доказательству теоремы 1.2, которому посвящен следующий параграф.

В заключение добавим, что нулевая диффузия у N_1 (см. (1.1)) в нашем случае вполне естественна, так как подвижность мышевидных пренебрежимо мала. Учет же малой диффузии у жертвы не влияет на факт диффузионной буферности.

§ 2. Доказательство теоремы 1.2

2.1. Для удобства дальнейшего анализа в нормальной форме (1.12) последовательно выполним замены

$$\xi \exp(-i\gamma\tau) \longrightarrow \xi, \quad \frac{2\pi r}{\pi^2 + 4}\tau \longrightarrow \tau, \quad \frac{\gamma(\pi^2 + 4)}{4r} \longrightarrow \gamma, \quad \sqrt{\frac{\pi(3\pi - 2)}{5(\pi^2 + 4)}}\xi \longrightarrow \xi.$$

В результате получим краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \left(1 - i\frac{\pi}{2}\right) L(\xi) + \gamma\xi - (1 + ic_0)|\xi|^2\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.1)$$

где $c_0 = (\pi + 6)/(3\pi - 2) \approx 1.23122\dots$

Автоколебания краевой задачи (2.1) будем исследовать при дополнительном предположении о малости коэффициента диффузии D (см. (1.2)). Точнее говоря, рассмотрим проблему существования и устойчивости пространственно неоднородных автомодельных циклов задачи (2.1), буферирующих из нулевого состояния равновесия при увеличении параметра γ . В связи с этим отметим, что нулевое решение нормальной формы (2.1) экспоненциально устойчиво при выполнении неравенств

$$\varphi(D\pi^2 n^2) < 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

где

$$\varphi(z) = \gamma - \operatorname{Re} \left[\frac{1 - i\frac{\pi}{2}}{z + \pi} \right], \quad z \geq 0, \quad (2.3)$$

и неустойчиво при выполнении хотя бы одного неравенства, строго противоположного (2.2).

Обратим внимание на следующее обстоятельство: если $\varphi(z_0) > 0$ при некотором $z_0 \geq 0$ (т.е. если функция (2.3) имеет участок положительности), то поставленная выше проблема нелокальна. В таком случае при $D \ll 1$ нулевое состояние равновесия задачи (2.1) неустойчиво сразу на асимптотически большом числе мод

Рис. 1

$\cos n\pi x$, $n = 0, 1, 2, \dots$, причем соответствующие им характеристические показатели имеют порядок единица. Напротив, если функция (2.3) отрицательна при всех $z \geq 0$, то нулевое решение задачи (2.1) устойчиво при любом значении D . Таким образом, интересующая нас проблема становится локальной, если потребовать существование такого $z_0 \geq 0$, что

$$\begin{aligned} \varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = 0; \quad \varphi''(z_0) < 0; \quad \varphi(z) < 0 \text{ при } z \neq z_0; \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \gamma < 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Несложный анализ приводит к выводу, что особенность (2.4) в точке $z_0 = 0$ появляется при

$$r = r_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1} - \frac{\pi}{2} \right)}{-\cos \frac{\pi}{2} h + \left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1} - \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2} h}, \\ \gamma_0 &= \frac{\varkappa_1^0 - \frac{\pi}{2} \varkappa_2^0}{(\varkappa_1^0)^2 + (\varkappa_2^0)^2}, \quad \varkappa_1^0 = r_0 \cos \frac{\pi}{2} h, \quad \varkappa_2^0 = \frac{\pi}{2} - r_0 \sin \frac{\pi}{2} h, \end{aligned}$$

и при выполнении неравенств

$$0 < r_0 h < \frac{\pi}{2}, \quad \varkappa_2^0 > 0. \quad (2.6)$$

Отметим еще, что в окрестности данной особенности мы находимся при значениях

$$r = 0.632, \quad h = 2.325, \quad (2.7)$$

соответствующих набору параметров (1.5). Действительно, при $h = 2.325$ получаем весьма близкое к (2.7) значение $r_0 = 0.62667\dots$, удовлетворяющее неравенствам (2.6).

Итак, положим в нормальной форме (2.1)

$$D = \mu \ll 1, \quad r = r_0, \quad \gamma = \gamma_0 + \delta\mu, \quad \delta > 0, \quad (2.8)$$

где параметр $\delta \sim 1$ характеризует “отход” от рассматриваемой особенности (отклонением порядка μ параметра r от своего критического значения r_0 для простоты пренебрегаем, так как нас интересует динамика задачи (2.1) по γ). Подчеркнем, что при этом эволюция графика функции (2.3) имеет вид, показанный на рис. 1: при $\mu > 0$ появляется участок положительности $0 \leq z < z_*(\mu)$, $z_*(\mu) = O(\sqrt{\mu})$. А отсюда вытекает строгое нарушение неравенств (2.2) для асимптотически большого числа номеров $n = 0, 1, \dots, n_0$, $n_0 \sim \mu^{-1/4}$, т.е. моделируется отмеченная выше нелокальная ситуация.

Последовательно выполняя при условиях (2.8) в задаче (2.1) замены

$$\begin{aligned} \xi \exp(-i\omega\tau) &\longrightarrow \xi, & \frac{\xi}{\sqrt{\mu}} &\longrightarrow \xi, & \mu\tau &\longrightarrow \tau, \\ \omega &= -\operatorname{Im} \left[\frac{1 - i\frac{\pi}{2}}{\varkappa_0} \right], & \varkappa_0 &= \varkappa_1^0 + i\varkappa_2^0, \end{aligned}$$

получим краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \Pi(\mu)\xi + \delta\xi - (1 + ic_0)|\xi|^2\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.9)$$

где

$$\Pi(\mu) = -i\sigma_0 \frac{d^2}{dx^2} \left[I - \frac{\mu}{\varkappa_0} \frac{d^2}{dx^2} \right]^{-1}, \quad \sigma_0 = \operatorname{Im} \left[\frac{1 - i\frac{\pi}{2}}{\varkappa_0^2} \right] > 0 \quad (2.10)$$

(положительность σ_0 – следствие условий (2.5), (2.6)). Заметим, что краевая задача (2.9) сингулярна, так как норма в смысле $W_2^1[0, 1]$ ограниченного оператора $\Pi(\mu)$ имеет порядок μ^{-1} .

Введем в рассмотрение краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -i\sigma_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \delta\xi - (1 + ic_0)|\xi|^2\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.11)$$

предельную для задачи (2.9), так как для любой фиксированной функции $\xi(x) \in W_2^2[0, 1]$ в метрике $L_2(0, 1)$ справедливо равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Pi(\mu)\xi = -i\sigma_0 \frac{d^2 \xi}{dx^2}.$$

Ниже будем интересоваться существованием и устойчивостью автомодельных циклов предельной задачи (2.11) и их связью с аналогичными циклами исходной задачи (2.9).

2.2. Предположим, что краевая задача (2.11) имеет автомодельный цикл (1.13) с амплитудой $\xi_0(x) \not\equiv 0$. Выполняя в уравнении (2.11) замену

$$\xi \exp(-i\omega_0\tau) \longrightarrow \xi, \quad (2.12)$$

переводящую этот цикл в состояние равновесия $\xi = \xi_0(x)$, и затем линеаризуя на нем это уравнение, получим спектральную задачу

$$Aw = \lambda w, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=1} = 0, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} w &= \text{colon}(w^1, w^2), \\ A &= \begin{pmatrix} -i\sigma_0 & 0 \\ 0 & i\sigma_0 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ \bar{q}(x) & \bar{p}(x) \end{pmatrix}, \\ p(x) &= \delta - i\omega_0 - 2(1 + ic_0)|\xi_0(x)|^2, \quad q(x) = -(1 + ic_0)\xi_0^2(x). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Несложная проверка показывает, что спектральная задача (2.13) всегда имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция

$$w_0(x) = \text{colon}(i\xi_0(x), -i\bar{\xi}_0(x)). \quad (2.15)$$

Ниже предполагается, что выполнено следующее

УСЛОВИЕ 1. Считаем, что $\lambda = 0$ – простое собственное значение спектральной задачи (2.13).

Докажем теперь справедливость леммы, касающейся краевой задачи (2.9).

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнено условие 1. Тогда найдется такое число $\mu_0 > 0$, что при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ краевая задача (2.9) имеет достаточно гладкий по совокупности переменных автомодельный цикл

$$\xi(\tau, x, \mu) = \xi(x, \mu) \exp(i\omega(\mu)\tau), \quad (2.16)$$

обращающийся при $\mu = 0$ в цикл (1.13) предельной задачи (2.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполняя в уравнении (2.9) замену, аналогичную (2.12), для определения амплитуды $\xi(x, \mu)$ и частоты $\omega(\mu)$ интересующего нас цикла получим краевую задачу

$$\Pi(\mu)\xi + (\delta - i\omega)\xi - (1 + ic_0)|\xi|^2\xi = 0, \quad \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=1} = 0. \quad (2.17)$$

Применив к обеим частям уравнения (2.17) оператор

$$B = I - \frac{\mu}{\kappa_0} \frac{d^2}{dx^2}, \quad (2.18)$$

придем к эквивалентной краевой задаче

$$\begin{aligned} & -i\sigma_0 \frac{d^2 \xi}{dx^2} + (\delta - i\omega)\xi - (1 + ic_0)|\xi|^2 \xi \\ & = \frac{\mu}{\varkappa_0} \left[-i\omega\xi + \delta \frac{d^2 \xi}{dx^2} - (1 + ic_0) \frac{d^2}{dx^2} (|\xi|^2 \xi) \right], \quad \frac{d\xi}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Обратим внимание на то, что, в отличие от задачи (2.17), зависимость от μ краевой задачи (2.19) регулярна, так как стоящий в правой части уравнения (2.19) оператор эквивалентен оператору d^2/dx^2 . Тем самым для доказательства существования решения

$$(\xi(x, \mu), \omega(\mu)): \quad \xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \omega(0) = \omega_0,$$

задачи (2.19) можно воспользоваться стандартной схемой, основные этапы которой описываются ниже.

Дополним краевую задачу (2.19) аналогичной краевой задачей для $\bar{\xi}$ и положим в получившейся системе уравнений

$$\xi = \xi_0(x) + w^1, \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}_0(x) + w^2, \quad \omega = \omega_0 + \psi, \quad w = \text{colon}(w^1, w^2).$$

В итоге приходим к краевой задаче (ср. с (2.13))

$$Aw = \Phi(w, \psi, \mu), \quad \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} & \Phi = \text{colon}(\Phi^1, \Phi^2), \\ & \Phi^1 = i\psi(\xi_0 + w^1) + (1 + ic_0)(\bar{\xi}_0(w^1)^2 + 2\xi_0 w^1 w^2 + (w^1)^2 w^2) \\ & \quad + \frac{\mu}{\varkappa_0} \left[-i(\omega_0 + \psi)(\xi_0 + w^1) + \delta \frac{d^2}{dx^2} (\xi_0 + w^1) \right. \\ & \quad \left. - (1 + ic_0) \frac{d^2}{dx^2} ((\xi_0 + w^1)^2 (\bar{\xi}_0 + w^2)) \right], \\ & \Phi^2 = -i\psi(\bar{\xi}_0 + w^2) + (1 - ic_0)(\xi_0(w^2)^2 + 2\bar{\xi}_0 w^1 w^2 + (w^2)^2 w^1) \\ & \quad + \frac{\mu}{\varkappa_0} \left[i(\omega_0 + \psi)(\bar{\xi}_0 + w^2) + \delta \frac{d^2}{dx^2} (\bar{\xi}_0 + w^2) \right. \\ & \quad \left. - (1 - ic_0) \frac{d^2}{dx^2} ((\bar{\xi}_0 + w^2)^2 (\xi_0 + w^1)) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Рассмотрим вопрос об обратимости оператора A (см. (2.14)). С этой целью обозначим через $g_0(x)$ собственную функцию сопряженного оператора A^* , отвечающую нулевому собственному значению и удовлетворяющую условию нормировки

$$\int_0^1 (w_0(x), g_0(x)) dx = 1;$$

здесь $(*, *)$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$, а $w_0(x)$ – функция (2.15). Отметим, что возможность такой нормировки – следствие предполагаемой в условии 1 простоты нулевого собственного значения.

Из условия 1 также вытекает, что неоднородная краевая задача

$$Aw = f(x), \quad \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad f(x) \in L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2),$$

разрешима тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ортогональна в среднем функции $g_0(x)$. При этом решение $w_f(x)$ указанной неоднородной краевой задачи, ортогональное в среднем функции $g_0(x)$, единственно и удовлетворяет *неравенству коэрцитивности* [13]

$$\|w_f\|_{W_2^2([0, 1]; \mathbb{C}^2)} \leq M \|f\|_{L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)},$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от выбора f .

Обозначим через E_0 подпространство гильбертова пространства $W_2^2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$, состоящее из функций $w(x)$, ортогональных в среднем функции $g_0(x)$ и удовлетворяющих граничным условиям $w'_x = 0$ при $x = 0$ и при $x = 1$. Из сказанного выше следует, что оператор A имеет ограниченный обратный, действующий из $L_2^0([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ в E_0 (здесь $L_2^0 \subset L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ – подпространство функций, ортогональных в среднем функции $g_0(x)$). Поэтому в предположении, что $w \in E_0$, краевая задача (2.20) эквивалентна системе уравнений

$$w = \Psi_1(w, \psi, \mu), \quad \Psi_2(w, \psi, \mu) = 0, \quad (2.22)$$

где $(w, \psi, \mu) \in E_0 \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$,

$$\Psi_1 = A^{-1} \left[\Phi - \int_0^1 (\Phi, g_0(x)) dx \cdot w_0(x) \right], \quad \Psi_2 = \int_0^1 (\Phi, g_0(x)) dx.$$

Из структуры выражений (2.21) и неравенства коэрцитивности видно, что операторы

$$\Psi_1: E_0 \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow E_0, \quad \Psi_2: E_0 \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

являются ограниченными и гладкими (по Фреше) по всем своим аргументам. Формулы (2.21) также показывают, что к системе (2.22) в точке $(0, 0, 0)$ применима теорема о неявной функции, доставляющая ее решение

$$\begin{aligned} w(x, \mu) &= \text{colon}(w^1(x, \mu), w^2(x, \mu)), \quad \psi = \psi(\mu), \\ w^1(x, 0) &\equiv w^2(x, 0) \equiv 0, \quad \psi(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Наконец, отметим, что наряду с этим решением системе (2.22) будет удовлетворять и набор функций

$$w(x, \mu) = \text{colon}(\bar{w}^2(x, \mu), \bar{w}^1(x, \mu)), \quad \psi = \bar{\psi}(\mu)$$

(для доказательства достаточно перейти в (2.20), (2.21) к комплексному сопряжению). А так как решение вида (2.23) единственно, то $\bar{w}^2(x, \mu) \equiv w^1(x, \mu)$, $\bar{\psi}(\mu) \equiv \bar{\psi}(\mu)$. Лемма доказана.

2.3. Займемся теперь анализом свойств устойчивости цикла (2.16). Для этого потребуется одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Найдется такое достаточно большое натуральное число n_0 , что каждому $n \geq n_0$ соответствует пара собственных значений $\lambda_n, \bar{\lambda}_n$ краевой задачи (2.13) с асимптотикой*

$$\lambda_n = i\sigma_0\pi^2 n^2 + p_0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad p_0 = \int_0^1 p(x) dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

При этом асимптотика (в метрике $L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$) отвечающих им нормированных единиц собственных функций имеет вид

$$e_n^1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2} \cos \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad e_n^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{2} \cos \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результаты монографии [14] показывают, что главные члены асимптотики собственных значений и собственных функций оператора A (см. (2.14)) определяются по его главной части $\text{diag} \{-i\sigma_0 d^2/dx^2, i\sigma_0 d^2/dx^2\}$. Поэтому положим в (2.13)

$$w = w_n(x) + y, \quad \lambda = i\sigma_0\pi^2 n^2 + p_0 + \psi, \quad w_n(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2} \cos \pi n x,$$

где y и ψ – поправки к собственной функции и собственному значению. В результате приходим к краевой задаче

$$A_0 y + A_1 y + A_1 w_n(x) = \psi y + \psi w_n(x), \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.26)$$

где

$$A_0 = \text{diag} \left\{ -i\sigma_0 \frac{d^2}{dx^2} - i\sigma_0 \pi^2 n^2 I, i\sigma_0 \frac{d^2}{dx^2} - (i\sigma_0 \pi^2 n^2 + 2i \text{Im } p_0) I \right\},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} p(x) - p_0 & q(x) \\ \bar{q}(x) & \bar{p}(x) - \bar{p}_0 \end{pmatrix}.$$

Из диагональной структуры оператора A_0 следует как его обратимость в подпространстве $L_2^0 \subset L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ функций, ортогональных в среднем $w_n(x)$, так и оценка

$$\|A_0^{-1}\|_{L_2^0 \rightarrow L_2^0} \leq \frac{M}{n}. \quad (2.27)$$

(Здесь и ниже одной и той же буквой M обозначаются различные не зависящие от n положительные постоянные, точные значения которых несущественны.)

Перейдем, далее, от уравнения (2.26) к вспомогательному уравнению в L_2^0 :

$$y = A_0^{-1} \left\{ \Psi - \int_0^1 (\Psi, w_n(x)) dx \cdot w_n(x) \right\},$$

$$\Psi = \psi y - A_1 y - A_1 w_n(x) + \psi w_n(x).$$

Оценка (2.27) позволяет применить к нему принцип сжимающих отображений и получить поправку к собственной функции w – функцию $y(x, \psi)$, удовлетворяющую неравенствам

$$\|y\|_{L_2^0} \leq \frac{M}{n}, \quad \left\| \frac{\partial y}{\partial \psi} \right\|_{L_2^0} \leq \frac{M}{n}. \quad (2.28)$$

Наконец, займемся нахождением поправки ψ к собственному значению λ из уравнения

$$\int_0^1 (\Psi, w_n(x)) dx = 0.$$

Подставляя в него функцию $y(x, \psi)$ и учитывая оценки (2.28) вместе с равенством

$$\int_0^1 (A_1 w_n(x), w_n(x)) dx = \int_0^1 p(x) \cos 2\pi n x dx,$$

убеждаемся, что это уравнение однозначно разрешимо и его решение имеет порядок $\psi = O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Введем теперь еще одно нужное для дальнейшего

УСЛОВИЕ 2. Предполагаем, что все ненулевые собственные значения краевой задачи (2.13) имеют отрицательные действительные части и выполняется неравенство (см. (2.24))

$$\operatorname{Re} p_0 < 0.$$

Смысл условия 2 проясняет лемма 2.2. Действительно, пусть Λ – совокупность всех ненулевых собственных значений краевой задачи (2.13). Из формул (2.24) следует, что условие 2 эквивалентно неравенству

$$\Delta_0 = - \sup_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Введем в рассмотрение аналогичную (2.13) краевую задачу

$$A(\mu)w = \lambda w, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=1} = 0; \quad (2.29)$$

здесь

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \Pi(\mu) & 0 \\ 0 & \bar{\Pi}(\mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x, \mu) & q(x, \mu) \\ \bar{q}(x, \mu) & \bar{p}(x, \mu) \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

где (ср. с (2.10), (2.18))

$$\bar{\Pi}(\mu) = i\sigma_0 \frac{d^2}{dx^2} \bar{B}^{-1}, \quad \bar{B} = I - \frac{\mu}{\varkappa_0} \frac{d^2}{dx^2},$$

а функции $p(x, \mu)$, $q(x, \mu)$ определяются по формулам, аналогичным (2.14) с заменой $\xi_0(x)$, ω_0 на $\xi(x, \mu)$, $\omega(\mu)$. Отметим, что, как и (2.13), краевая задача (2.29) имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция

$$w_0(x, \mu) = \operatorname{colon}(i\xi(x, \mu), -i\bar{\xi}(x, \mu)).$$

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда по любому фиксированному числу $\Delta \in (0, \Delta_0)$ можно указать такое число $\mu_0 = \mu_0(\Delta) > 0$, что при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ все собственные значения (кроме простого нулевого) краевой задачи (2.29) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq -\Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы базируется на тех же идеях, что и обоснование лемм 2.1 и 2.2.

Сначала разберемся с аналогами собственных значений (2.24). Заметим, что главные члены асимптотики (2.25) являются собственными функциями главной части $\operatorname{diag}\{P(\mu), \bar{P}(\mu)\}$ оператора (2.30). Поэтому найдется такое достаточно большое (не зависящее от μ) натуральное n_0 , что каждому $n \geq n_0$ соответствует пара $\lambda_n(\mu), \bar{\lambda}_n(\mu)$, $n \geq n_0$, собственных значений краевой задачи (2.29) с асимптотикой при $n \rightarrow \infty$:

$$\operatorname{Re} \lambda_n(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \varphi(\mu \pi^2 n^2) + p_0 + O\left(\frac{1}{n} + \mu\right), & n_0 \leq n \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}}, \\ \frac{1}{\mu} \varphi(\mu \pi^2 n^2) + O(1), & n \geq \frac{c}{\sqrt{\mu}}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Здесь $\varphi(z)$ – функция (2.3) при условиях (2.5); $c > 0$ – произвольная фиксированная постоянная; p_0 – величина, введенная в (2.24). Доказательство существования собственных значений $\lambda_n(\mu), \bar{\lambda}_n(\mu)$, $n \geq n_0$, с асимптотикой (2.31) проводится по той же схеме, что и обоснование формул (2.24), (2.25).

Учитывая в асимптотических формулах (2.31) свойства функции $\varphi(z)$ (см. рис. 1а) и неравенство из условия 2, убеждаемся в существовании такого числа $\mu_0 > 0$, что при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ все собственные значения $\lambda_n(\mu), \bar{\lambda}_n(\mu)$, $n \geq n_0$, лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq -\Delta$.

Обозначим через $\lambda_k(\mu)$, $k = 1, \dots, k_0$, отличные от $\lambda_n(\mu), \bar{\lambda}_n(\mu)$, $n \geq n_0$, собственные значения краевой задачи (2.29) (номер k_0 не зависит от μ). Для того чтобы разобраться с их расположением, применим к уравнению (2.29) оператор $\operatorname{diag}\{B, \bar{B}\}$ (см. (2.18)). В результате этого сингулярно возмущенная краевая задача (2.29) переходит в регулярно зависящую от μ спектральную задачу

$$Aw - \lambda w = \mu H_1(\mu)w - \mu \lambda H_2 w, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=1} = 0, \quad (2.32)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(\mu) &= \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} p(x) - p(x, \mu) & q(x) - q(x, \mu) \\ \bar{q}(x) - \bar{q}(x, \mu) & \bar{p}(x) - \bar{p}(x, \mu) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \frac{1}{\varkappa_0} \frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\varkappa}_0} \frac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x, \mu) & q(x, \mu) \\ \bar{q}(x, \mu) & \bar{p}(x, \mu) \end{pmatrix}, \\ H_2 &= \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\varkappa_0} \frac{d^2}{dx^2}, \frac{1}{\bar{\varkappa}_0} \frac{d^2}{dx^2} \right\}. \end{aligned}$$

Из теории возмущений [15], справедливой для краевой задачи (2.32) в силу ее регулярности, заключаем, что, во-первых, при всех достаточно малых μ ее нулевое собственное значение является простым (что следует из условия 1), а во-вторых, остальные собственные значения $\lambda_k(\mu)$, $k = 1, \dots, k_0$, при $\mu \rightarrow 0$ стремятся к соответствующим собственным значениям предельной задачи (2.13). Лемма доказана.

2.4. Леммы 2.1 и 2.3 сводят проблему диффузионной буферности к вопросу о существовании и устойчивости автомодельных циклов у предельной краевой задачи (2.11). Решение этого вопроса, представляющего и самостоятельный интерес, дается ниже.

Выполняя в уравнении (2.11) подстановку $\xi = \xi(x) \exp(i\omega\tau)$, для нахождения пар $(\xi(x), \omega)$ получаем краевую задачу

$$i\sigma_0 \frac{d^2\xi}{dx^2} + i\omega\xi = \delta\xi - (1 + ic_0)|\xi|^2\xi, \quad \frac{d\xi}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.33)$$

исследование которой проведем с помощью так называемого *принципа подобия*.

Зафиксируем произвольное натуральное n и положим в (2.33)

$$y = nx, \quad \omega = \sigma_0 \pi^2 n^2 + \omega_0. \quad (2.34)$$

В результате приходим к краевой задаче

$$i\sigma_0 \left(\frac{d^2\xi}{dy^2} + \pi^2\xi \right) = \alpha [(\delta - i\omega_0)\xi - (1 + ic_0)|\xi|^2\xi], \quad (2.35)$$

$$\frac{d\xi}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{d\xi}{dy} \Big|_{y=n} = 0,$$

где $\alpha = 1/n^2$. Перейдем, далее, от (2.35) к вспомогательной краевой задаче

$$i\sigma_0 \left(\frac{d^2\xi}{dy^2} + \pi^2\xi \right) = \alpha [(\delta - i\omega_0)\xi - (1 + ic_0)|\xi|^2\xi], \quad (2.36)$$

$$\frac{d\xi}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{d\xi}{dy} \Big|_{y=1} = 0.$$

Принцип подобия состоит в следующем: если $(\xi_0(y), \omega_0)$ – решение краевой задачи (2.36), то после продолжения функции $\xi_0(y)$ на отрезок $[-1, 0]$ по четности и затем на всю ось по периодичности с периодом 2 пара $(\xi_0(y), \omega_0)$ становится решением краевой задачи (2.35). Тем самым анализу подлежит вспомогательная краевая задача (2.36), в которой для удобства будем считать параметр α меняющимся непрерывно.

В формулируемом ниже утверждении предполагаем, что

$$0 < \alpha \ll 1.$$

ЛЕММА 2.4. *Найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что при всех $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ существует единственная пара достаточно гладких по своим аргументам функций*

$$(\xi(y, \alpha), \omega_0(\alpha)), \quad \xi(y, 0) = \sqrt{\frac{4\delta}{3}} \cos \pi y, \quad \omega_0(0) = -\delta c_0, \quad (2.37)$$

удовлетворяющая краевой задаче (2.36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изложим сначала асимптотическую часть обоснования леммы. Подставляя в соотношения (2.36) ряды

$$\xi(y, \alpha) = \xi_0 \cos \pi y + \alpha \xi_1(y) + \dots, \quad \omega_0(\alpha) = \omega_{0,0} + \alpha \omega_{0,1} + \dots, \quad (2.38)$$

где $\xi_0, \omega_{0,0}$ – подлежащие определению вещественные постоянные, и приравнявая коэффициенты при α , получим краевую задачу

$$\begin{aligned} i\sigma_0 \left(\frac{d^2 \xi_1}{dy^2} + \pi^2 \xi_1 \right) &= (\delta - i\omega_{0,0})\xi_0 \cos \pi y - (1 + ic_0)\xi_0^3 \cos^3 \pi y, \\ \frac{d\xi_1}{dy} \Big|_{y=0} &= \frac{d\xi_1}{dy} \Big|_{y=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Условие ее разрешимости, имеющее вид

$$(\delta - i\omega_{0,0})\xi_0 - \frac{3}{4}(1 + ic_0)\xi_0^3 = 0,$$

приводит к равенствам, определяющим нужные константы:

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{4\delta}{3}}, \quad \omega_{0,0} = -\delta c_0.$$

Учитывая их в правой части уравнения (2.39), находим

$$\xi_1(y) = -\frac{i(1 + ic_0)\xi_0^3}{32\pi^2\sigma_0} \cos 3\pi y + \xi_1 \cos \pi y,$$

где неизвестная вещественная постоянная ξ_1 вместе с поправкой к частоте $\omega_{0,1}$ определяются из условия разрешимости аналогичной (2.39) краевой задачи для $\xi_2(y)$ и т.д.

Доказательство существования и единственности решения (2.37) с асимптотикой (2.38) сводится к теореме о неявной функции с помощью метода, описанного при обосновании леммы 2.1. Подчеркнем, что в данном случае он применяется в более простой ситуации, когда порождающее уравнение (получающееся из (2.35) при $\alpha = 0$) линейно. Лемма доказана.

Эта лемма вместе с принципом подобия обеспечивает существование у краевой задачи (2.11) счетного числа быстро осциллирующих автомодельных циклов

$$\xi_n(\tau, x) = \xi_n(x) \exp(i\omega_n \tau), \quad n \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}, \quad (2.40)$$

где

$$\xi_n(x) = \xi(y, \alpha) \Big|_{y=nx, \alpha=1/n^2}, \quad \omega_n = \sigma_0 \pi^2 n^2 + \omega_0(\alpha) \Big|_{\alpha=1/n^2}.$$

2.5. Для исследования устойчивости автомодельного цикла (2.40) с произвольно фиксированным достаточно большим номером n рассмотрим отвечающую ему краевую задачу (2.13). Выполним в ней замены (2.34), $\lambda/n^2 \rightarrow \lambda$ и будем считать, как и ранее, параметр $\alpha = 1/n^2$ непрерывно меняющимся и достаточно малым. После отбрасывания членов порядка малости α^2 и выше получим краевую задачу

$$\Lambda_0 \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \pi^2 w \right) + \alpha \Lambda_1(y) w = \lambda w, \quad \frac{dw}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{dw}{dy} \Big|_{y=n} = 0, \quad (2.41)$$

где

$$\begin{aligned} w &= \text{colon}(w^1, w^2), \\ \Lambda_0 &= \text{diag}\{-i\sigma_0, i\sigma_0\}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} p(y) & q(y) \\ \bar{q}(y) & \bar{p}(y) \end{pmatrix}, \\ p(y) &= -\frac{\delta}{3}(1 + ic_0)(1 + 4 \cos 2\pi y), \quad q(y) = -\frac{2\delta}{3}(1 + ic_0)(1 + \cos 2\pi y). \end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ спектр краевой задачи (2.41) ясен: это цепочка чисто мнимых собственных значений

$$\lambda_0(\beta), \quad \bar{\lambda}_0(\beta); \quad \lambda_0(\beta) = i\sigma_0\pi^2(\beta^2 - 1), \quad \beta = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.42)$$

которым отвечают собственные функции

$$\text{colon}(\cos \pi \beta y, 0), \quad \text{colon}(0, \cos \pi \beta y).$$

Таким образом, проблема устойчивости циклов (2.40) сводится к исследованию асимптотики собственных значений (2.42) при $\alpha \ll 1$, равномерной по параметру $\beta \geq 0$.

Основная трудность, возникающая на этом пути, связана с сингулярностью краевой задачи (2.41), так как она рассматривается на асимптотически большом отрезке $0 \leq y \leq n$. Для преодоления указанной трудности используем следующий специальный прием.

Положим в соотношениях (2.41)

$$w = \eta_1(y) \cos \pi \beta y - \eta_2(y) \sin \pi \beta y, \quad (2.43)$$

где $\eta_j(y)$, $j = 1, 2$, – вектор-функции со значениями в $\mathbb{C}^2$. В результате для $\eta = \text{colon}(\eta_1, \eta_2)$ получается регулярная краевая задача

$$\begin{aligned} B_0 \left(\frac{d^2 \eta}{dy^2} + \pi^2(1 - \beta^2)\eta \right) + 2\pi\beta B_1 \frac{d\eta}{dy} + \alpha B_2(y)\eta &= \lambda\eta, \\ \frac{d\eta_1}{dy} \Big|_{y=0} &= \frac{d\eta_1}{dy} \Big|_{y=1} = \eta_2|_{y=0} = \eta_2|_{y=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где четырехмерные матрицы B_j , $j = 0, 1, 2$, задаются равенствами

$$B_0 = \text{diag}\{\Lambda_0, \Lambda_0\}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_0 \\ \Lambda_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_1\};$$

параметр $\beta \geq 0$ в силу произвольности чисел k, n будем считать меняющимся непрерывно.

Остановимся на связи краевых задач (2.41) и (2.44). Предположим, что на некотором промежутке J изменения параметра β вспомогательная краевая задача (2.44) имеет собственное значение $\lambda = \lambda(\beta)$, которому отвечает собственная функция

$$\eta(y, \beta) = \text{colon}(\eta_1(y, \beta), \eta_2(y, \beta)). \quad (2.45)$$

Тогда, продолжая ее компоненты $\eta_j(y, \beta)$, $j = 1, 2$, на отрезок $-1 \leq y \leq 0$ по четности и нечетности соответственно, а затем на всю ось по периодичности с периодом 2, убеждаемся, что построенная по (2.45) функция (2.43) при

$$\beta = \frac{k}{n} \in J, \quad \lambda = \lambda(\beta)|_{\beta=k/n}$$

удовлетворяет исходной краевой задаче (2.41).

Заметим, далее, что при $\alpha = 0$ краевая задача (2.44) также имеет собственные значения (2.42), которым отвечают собственные функции

$$\text{colon}(1, 0, 0, 0), \quad \text{colon}(0, 1, 0, 0).$$

Поэтому обсуждаемая проблема устойчивости сводится к построению асимптотики этих собственных значений уже в рамках регулярной краевой задачи (2.44).

2.6. При построении асимптотики собственных значений

$$\lambda(a, \beta), \quad \lambda(0, \beta) = \lambda_0(\beta), \quad (2.46)$$

краевой задачи (2.44) естественно возникают два различных случая: в зависимости от того, простым или кратным является собственное значение $\lambda_0(\beta)$ (см. (2.42)) предельной краевой задачи

$$\begin{aligned} B_0 \left(\frac{d^2 \eta}{dy^2} + \pi^2(1 - \beta^2)\eta \right) + 2\pi\beta B_1 \frac{d\eta}{dy} - \lambda\eta &= 0, \\ \frac{d\eta_1}{dy} \Big|_{y=0} &= \frac{d\eta_1}{dy} \Big|_{y=1} = \eta_2|_{y=0} = \eta_2|_{y=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Для нахождения соответствующих значений β рассмотрим полный набор собственных значений и собственных функций краевой задачи (2.47):

$$\begin{aligned}
 \lambda_k^1 &= i\sigma_0\pi^2[(\beta+k)^2-1], & e_k^1(y) &= \text{colon}(\cos k\pi y, 0, \sin k\pi y, 0), \\
 & k = 0, 1, 2, \dots; \\
 \lambda_k^2 &= -i\sigma_0\pi^2[(\beta+k)^2-1], & e_k^2(y) &= \text{colon}(0, \cos k\pi y, 0, \sin k\pi y), \\
 & k = 0, 1, 2, \dots; \\
 \lambda_k^3 &= i\sigma_0\pi^2[(\beta-k)^2-1], & e_k^3(y) &= \text{colon}(\cos k\pi y, 0, -\sin k\pi y, 0), \\
 & k = 1, 2, \dots; \\
 \lambda_k^4 &= -i\sigma_0\pi^2[(\beta-k)^2-1], & e_k^4(y) &= \text{colon}(0, \cos k\pi y, 0, -\sin k\pi y), \\
 & k = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Несложная проверка (с учетом формул (2.48)) показывает, что при $(k, j) \neq (0, 1)$ уравнения

$$\lambda_k^j(\beta) - \lambda_0(\beta) = 0$$

имеют следующие решения:

$$\begin{aligned}
 \beta &= 1 & \text{при } (k, j) &= (0, 2), (2, 3), (2, 4); \\
 \beta &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \text{при } (k, j) &= (1, 4); \\
 \beta &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \text{при } (k, j) &= (1, 2); \\
 \beta &= \frac{m}{2}, \quad m \geq 1, \quad m \neq 2, & \text{при } (k, j) &= (m, 3).
 \end{aligned}$$

Более того, все эти корни простые, за исключением корня $\beta = 1$ при $(k, j) = (2, 4)$, для которого выполняются условия

$$\left. \frac{d}{d\beta} [\lambda_2^4(\beta) - \lambda_0(\beta)] \right|_{\beta=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2}{d\beta^2} [\lambda_2^4(\beta) - \lambda_0(\beta)] \right|_{\beta=1} \neq 0. \tag{2.49}$$

Итак, собственное значение $\lambda_0(\beta)$ (см. (2.42)) является: простым при

$$\beta \neq \frac{m}{2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \beta \neq \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2}; \tag{2.50}$$

четырежды при $\beta = 1$ с собственными функциями

$$\begin{aligned}
 \theta_1(y) &= \text{colon}(1, 0, 0, 0), \\
 \theta_2(y) &= \text{colon}(0, 1, 0, 0), \\
 \theta_3(y) &= \text{colon}(\cos 2\pi y, 0, -\sin 2\pi y, 0), \\
 \theta_4(y) &= \text{colon}(0, \cos 2\pi y, 0, -\sin 2\pi y);
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

двукратным при $\beta = (\sqrt{3} \pm 1)/2$ соответственно с собственными функциями

$$\theta_1(y) = \text{colon}(1, 0, 0, 0), \quad \theta_2(y) = \text{colon}(0, \cos \pi y, 0, -\sin \pi y) \quad (2.52)$$

или

$$\theta_1(y) = \text{colon}(1, 0, 0, 0), \quad \theta_2(y) = \text{colon}(0, \cos \pi y, 0, \sin \pi y); \quad (2.53)$$

двукратным при $\beta = m/2$, $m \geq 1$, $m \neq 2$, с собственными функциями

$$\theta_1(y) = \text{colon}(1, 0, 0, 0), \quad \theta_2(y) = \text{colon}(\cos m\pi y, 0, -\sin m\pi y, 0). \quad (2.54)$$

При условиях (2.50), т.е. в простейшей ситуации, асимптотику собственного значения (2.46) и отвечающей ему собственной функции будем искать в виде

$$\lambda = \lambda_0(\beta) + \alpha \lambda_1(\beta) + \dots, \quad \eta = \theta_0(y) + \alpha \theta_1(y, \beta) + \dots, \quad (2.55)$$

где $\lambda_0(\beta)$ такое, как в (2.42), а $\theta_0(y) = \text{colon}(1, 0, 0, 0)$. Подставляя эти формулы в соотношения (2.44) и приравнивая коэффициенты при α , для поправки $\theta_1(y, \beta)$ получаем краевую задачу

$$S(\beta)\theta_1 = \lambda_1\theta_0(y) - B_2(y)\theta_0(y), \quad (2.56)$$

где $S(\beta)$ – дифференциальный оператор, порожденный краевой задачей (2.47) при $\lambda = \lambda_0(\beta)$. Стандартный анализ задачи (2.56) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \lambda_1(\beta) = -\frac{\delta}{3}(1 + ic_0), \quad \theta_1(y, \beta) = \frac{\delta(1 + ic_0)}{3} \left[\frac{2e_0^2(y)}{\bar{\lambda}_0(\beta) - \lambda_0(\beta)} \right. \\ \left. + \frac{2e_2^1(y)}{\lambda_2^1(\beta) - \lambda_0(\beta)} + \frac{e_2^2(y)}{\lambda_2^2(\beta) - \lambda_0(\beta)} + \frac{2e_2^3(y)}{\lambda_2^3(\beta) - \lambda_0(\beta)} + \frac{e_2^4(y)}{\lambda_2^4(\beta) - \lambda_0(\beta)} \right], \end{aligned} \quad (2.57)$$

где, напомним, $\lambda_k^j(\beta)$, $e_k^j(y)$ задаются формулами (2.48).

Для придания асимптотическим равенствам (2.55) строгого смысла фиксируем произвольное число $\Delta > 0$ и рассмотрим множество значений $\beta \in F = F(\alpha, \Delta)$, где

$$\begin{aligned} F = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{ (1 - \Delta\sqrt{\alpha}, 1 + \Delta\sqrt{\alpha}) \cup (\beta_- - \Delta\alpha, \beta_- + \Delta\alpha) \right. \\ \left. \cup (\beta_+ - \Delta\alpha, \beta_+ + \Delta\alpha) \cup \sum_{m=1, m \neq 2}^{\infty} \left(\frac{m}{2} - \Delta\alpha, \frac{m}{2} + \Delta\alpha \right) \right\}; \\ \mathbb{R}^+ = \{\beta : \beta \geq 0\}, \quad \beta_{\pm} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2} \end{aligned}$$

(отход порядка $\sqrt{\alpha}$ от особенности $\beta = 1$ продиктован дополнительным вырождением (2.49)). Справедливо следующие утверждение.

ЛЕММА 2.5. По любому фиксированному числу $\Delta > 0$ можно указать такое число $\alpha_0 = \alpha_0(\Delta)$, что при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $\beta \in F(\alpha, \Delta)$ для собственного значения (2.46) краевой задачи (2.44) справедливо асимптотическое представление

$$\lambda(\alpha, \beta) = \lambda_0(\beta) + \alpha\lambda_1 + \alpha\psi(\alpha, \beta), \quad |\psi| \leq \frac{M}{\Delta}, \quad (2.58)$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от α , β , Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\beta \in F(\alpha, \Delta)$ положим в краевой задаче (2.44) (см. (2.55))

$$\lambda = \lambda_0(\beta) + \alpha\lambda_1 + \alpha\psi(\alpha, \beta), \quad \eta = \theta_0(y) + \alpha\theta_1(y, \beta) + R(y, \alpha, \beta, \psi).$$

В итоге получим краевую задачу

$$S(\beta)R = \Psi, \quad \Psi = -\alpha B_2(y)(\alpha\theta_1 + R) + \alpha\lambda_1(\alpha\theta_1 + R) + \alpha\psi(\theta_0 + \alpha\theta_1 + R). \quad (2.59)$$

Изучим вопрос об обратимости оператора $S(\beta)$ в подпространстве $L_2^0 \subset L_2([0, 1]; \mathbb{C}^4)$, ортогональном функции $\theta_0(y)$. Метод Фурье по собственным функциям (2.48) приводит к равенствам ($f(x)$ – произвольная функция из L_2^0)

$$f(x) = f_0 e_0^2(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 f_k^j e_k^j(y),$$

$$S^{-1}(\beta)f(x) = \frac{f_0}{\lambda_0(\beta) - \lambda_0(\beta)} e_0^2(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{f_k^j}{\lambda_k^j(\beta) - \lambda_0(\beta)} e_k^j(y).$$

Учитывая здесь отмеченные выше свойства знаменателей $\lambda_k^j(\beta) - \lambda_0(\beta)$ и структуру множества F , приходим к оценке

$$\|S^{-1}(\beta)\|_{L_2^0 \rightarrow L_2^0} \leq \frac{M}{\alpha\Delta}. \quad (2.60)$$

Дальнейший способ действий стандартен (см. аналогичное место в доказательстве леммы 2.2): сначала переходим от (2.59) к вспомогательному уравнению

$$S(\beta)R = \Psi - \int_0^1 (\Psi, \theta_0(y)) dy \cdot \theta_0(y) \quad (2.61)$$

в L_2^0 , затем обращаем оператор $S(\beta)$ и, наконец, к получившемуся интегральному уравнению в L_2^0 применяем принцип сжимающих отображений, справедливость которого гарантируют неравенство (2.60) и оценка

$$\|\theta_1\|_{L_2([0,1]; \mathbb{C}^4)} \leq \frac{M}{\alpha\Delta}$$

(вытекающая из явного вида (2.57) функции θ_1). В результате находим функцию $R(y, \alpha, \beta, \psi)$, удовлетворяющую неравенству

$$\|R\|_{L_2^0} + \left\| \frac{\partial R}{\partial \psi} \right\|_{L_2^0} \leq \frac{M}{\Delta^2}. \quad (2.62)$$

Зануляя теперь поправку к неоднородности Ψ в уравнении (2.61) и учитывая оценку (2.62), находим функцию $\psi(\alpha, \beta)$, для которой $|\psi| \leq M/\Delta$. Лемма доказана.

2.7. Построим асимптотику собственного значения (2.46) при $\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus F$, т.е. в окрестности так называемых *пространственных резонансов*.

Начнем со случая

$$\beta \in \bigcup_{m=1, m \neq 2}^{\infty} \left(\frac{m}{2} - \Delta\alpha, \frac{m}{2} + \Delta\alpha \right). \quad (2.63)$$

Напомним, что в конечном итоге нас интересуют дискретные значения k/n параметра β , лежащие друг от друга на расстоянии $1/n = \sqrt{\alpha}$. С учетом этого обстоятельства множество (2.63) сужается до точек

$$\beta = \frac{m}{2}, \quad m \geq 1, \quad m \neq 2.$$

Но при этих условиях, когда собственное значение $\lambda_0(\beta)$ краевой задачи (2.47) двукратно, описанный в предыдущем пункте алгоритм естественным образом изменяется.

В рассматриваемом случае перейдем от краевой задачи (2.44) к матричной краевой задаче

$$\begin{aligned} S\left(\frac{m}{2}\right)V + \alpha B_2(y)V &= VH, \\ \frac{d}{dy}P_1V \Big|_{y=0} &= \frac{d}{dy}P_1V \Big|_{y=1} = P_2V|_{y=0} = P_2V|_{y=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.64)$$

где матрицы V и H имеют размеры 4×2 и 2×2 соответственно,

$$P_1 = \text{diag}\{I, 0\}, \quad P_2 = \text{diag}\{0, I\},$$

а 0 и I – нулевая и единичная квадратные матрицы 2-го порядка. Подставляя, далее, в задачу (2.64) ряды

$$V = V_0(y) + \alpha V_1(y) + \dots, \quad H = \alpha H_1 + \dots, \quad (2.65)$$

где $V_0(y)$ – матрица размера 4×2 , столбцами которой служат собственные функции $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ из (2.54), и приравнивая коэффициенты при α , для V_1 получаем краевую задачу для уравнения (граничные условия для краткости опускаем)

$$S\left(\frac{m}{2}\right)V_1 = V_0(y)H_1 - B_2(y)V_0(y). \quad (2.66)$$

Из условий ее разрешимости сначала находим

$$H_1 = \int_0^1 V_0^*(y)B_2(y)V_0(y) dy = -\frac{\delta}{3}(1 + ic_0)I, \quad (2.67)$$

а затем, решая уравнение (2.66), определяем и саму матрицу V_1 .

Для придания равенствам (2.65) строгого смысла введем в рассмотрение банахово пространство J матриц размера 4×2

$$V(y) = [v_1(y), v_2(y)], \quad v_j(y) \in L_2([0, 1]; \mathbb{C}^4), \quad j = 1, 2,$$

с нормой

$$\|V\|_J = \|v_1\|_{L_2} + \|v_2\|_{L_2}.$$

Оказывается справедливым следующее утверждение.

ЛЕММА 2.6. *Найдется такое достаточно малое число $\alpha_0 > 0$, что при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ и при каждом натуральном $m \geq 1$, $m \neq 2$, существует пара матриц $V(y, \alpha, m)$, $H(\alpha, m)$, удовлетворяющая краевой задаче (2.64) и допускающая асимптотику*

$$\begin{aligned} V(y, \alpha, m) &= V_0(y) + \alpha V_1(y) + \alpha^2 V_2(y, \alpha, m), \\ H(\alpha, m) &= \alpha H_1 + \alpha^2 H_2(\alpha, m), \quad \|V_2\|_J \leq M, \quad \|H_2\| \leq M, \end{aligned}$$

где константа $M > 0$ не зависит от α , m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы практически дословно повторяет обоснование леммы 2.5 и базируется на оценке

$$\left\| S^{-1} \left(\frac{m}{2} \right) \right\|_{J_0 \rightarrow J_0} \leq M,$$

где J_0 – подпространство J , состоящее из таких матриц $V(y)$, что

$$\int_0^1 V_0^*(y) V(y) dy = 0.$$

При рассмотрении остальных пространственных резонансов, т.е. не вошедших в F отрезков

$$\beta_{\pm} - \Delta\alpha \leq \beta \leq \beta_{\pm} + \Delta\alpha, \quad 1 - \Delta\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq 1 + \Delta\sqrt{\alpha},$$

изложим только алгоритмическую часть, опуская стандартные обоснования.

При $\beta = \beta_{\pm} + b\alpha$, $|b| \leq \Delta$, исследованию подлежит матричная краевая задача (аналогичная (2.64))

$$\begin{aligned} S(\beta)V + \alpha B_2(y)V &= VH, \\ \frac{d}{dy} P_1 V \Big|_{y=0} &= \frac{d}{dy} P_1 V \Big|_{y=1} = P_2 V|_{y=0} = P_2 V|_{y=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Подставляя сюда ряды (2.65), где теперь $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ – собственные функции (2.52) или (2.53), и действуя описанным выше образом, убеждаемся в том, что

$$H_1 = \text{diag} \left\{ -\frac{\delta}{3}(1 + ic_0), -\frac{\delta}{3}(1 - ic_0) \pm 2i\sigma_0\pi^2 b - 4i\sigma_0\pi^2 \beta_{\pm} b \right\}. \quad (2.69)$$

При $\beta = 1 + b\sqrt{\alpha}$, $|b| \leq \Delta$, снова обратимся к краевой задаче (2.68), считая V и H квадратными матрицами 4-го порядка. Подставляя в нее ряды

$$V = V_0(y) + \sqrt{\alpha} V_1(y) + \alpha V_2(y) + \dots, \quad H = \sqrt{\alpha} H_1 + \alpha H_2 + \dots,$$

где $V_0(y)$ – квадратная матрица 4-го порядка, столбцами которой служат собственные функции (2.51), и приравнивая коэффициенты при $\sqrt{\alpha}$ и α , последовательно находим

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{diag}\{0, -4i\pi^2\sigma_0 b, -4i\pi^2\sigma_0 b, 0\}, \quad V_1 = 0; \\ H_2 &= \begin{pmatrix} H_{2,1} & H_{2,2} \\ H_{2,2} & H_{2,1} \end{pmatrix}, \\ H_{2,1} &= \begin{pmatrix} p_0 & 2p_0 \\ 2\bar{p}_0 & \bar{p}_0 - 2i\pi^2\sigma_0 b^2 \end{pmatrix}, \quad H_{2,2} = \begin{pmatrix} 2p_0 & p_0 \\ \bar{p}_0 & 2\bar{p}_0 \end{pmatrix}, \\ p_0 &= -\frac{\delta}{3}(1 + ic_0). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Проведенные построения полностью решают проблему устойчивости циклов (2.40). Действительно, увеличивая подходящим образом параметр Δ в определении множества F , убеждаемся, что $\text{Re } \lambda(\alpha, \beta) < 0$ (см. (2.58)). Далее, собственные значения матриц (2.67), (2.69) также имеют отрицательные действительные части. Таким образом, проблема сводится к анализу расположения собственных значений матрицы (см. (2.70))

$$H_1 + \sqrt{\alpha} H_2, \quad (2.71)$$

где параметр b принимает только целые значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ из отрезка $-\Delta \leq b \leq \Delta$ (так как, напомним, параметр $\beta = k/n$ дискретен).

При $b = 0$ собственными значениями матрицы (2.71) являются

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -2\delta, \quad \lambda_4 = \frac{2\delta}{3}.$$

Заметим, однако, что после перехода к исходной переменной w (см. (2.43)) двум первым из них будет отвечать только одна собственная функция, а числу λ_4 – нулевая собственная функция. Тем самым собственные значения λ_2 и λ_4 фиктивные, их появление обусловлено способом перехода от краевой задачи (2.41) к вспомогательной задаче (2.44).

Исследование матрицы (2.71) при $b = m$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, стандартно: поправки порядка $\sqrt{\alpha}$ к ее собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -4i\pi^2\sigma_0 m$ определяются как собственные значения матриц

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_0 \\ \bar{p}_0 & \bar{p}_0 - 2i\pi^2 m^2 \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{p}_0 - 2i\pi^2 m^2 \sigma_0 & \bar{p}_0 \\ p_0 & p_0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Их анализ приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 2.7. *Автомодельные циклы (2.40) краевой задачи (2.11) экспоненциально орбитально устойчивы (неустойчивы) при*

$$\delta - \frac{3}{2}\pi^2 \frac{\sigma_0}{c_0} < 0 \quad (> 0). \quad (2.72)$$

Объединяя леммы 2.1, 2.3, 2.4, 2.7, убеждаемся в непустоте множеств Ω_n (см. п. 1.2) при любом натуральном n . Теорема 1.2 полностью доказана

§ 3. Заключительные замечания

3.1. Обратим внимание на тот факт, что при всех

$$\gamma > \gamma_0 = \frac{\varkappa_1 - \frac{\pi}{2}\varkappa_2}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}, \quad (3.1)$$

где, напомним, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ определены в п. 1.2, нормальная форма (2.1) имеет пространственно однородный (т.е. не зависящий от x) цикл

$$\xi(\tau) = \xi_0 \exp(i\omega_0\tau), \quad \xi_0 = \sqrt{\gamma - \gamma_0}, \quad \omega_0 = -c_0\xi_0^2 - \operatorname{Im} \left[\frac{1 - i\frac{\pi}{2}}{\varkappa} \right]; \quad (3.2)$$

здесь $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$. Рассматривая, далее, отвечающую ему краевую задачу (2.13) и применяя к ней метод Фурье по системе функций $\cos n\pi x$, $n = 0, 1, 2, \dots$, убеждаемся, что за устойчивость цикла (3.2) отвечает спектр матриц

$$\begin{pmatrix} b_{n,1} & b_{n,2} \\ \bar{b}_{n,2} & \bar{b}_{n,1} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где

$$b_{n,1} = -(1 + ic_0)\xi_0^2 - \left(1 - i\frac{\pi}{2}\right) \left[\frac{1}{D\pi^2 n^2 + \varkappa} - \frac{1}{\varkappa} \right], \quad b_{n,2} = -(1 + ic_0)\xi_0^2.$$

Для формулировки следующего утверждения потребуются функции

$$\begin{aligned} w = \Phi(z) &= z \frac{\varphi_1 + \varphi_2 z}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2} [(\varkappa_1 + z)^2 + \varkappa_2^2], \quad z \geq 0; \\ z = \Psi(w) &= \frac{2\psi_1 w}{1 + \frac{\pi^2}{4} + 2\psi_2 w}, \quad w \geq 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 - \pi\varkappa_1\varkappa_2, \quad \varphi_2 = \varkappa_1 - \frac{\pi}{2}\varkappa_2; \\ \psi_1 &= \left(\frac{\pi}{2}c_0 - 1\right)(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2) - 2\left(\frac{\pi}{2} + c_0\right)\varkappa_1\varkappa_2, \\ \psi_2 &= \left(\frac{\pi}{2}c_0 - 1\right)\varkappa_1 + \left(\frac{\pi}{2} + c_0\right)\varkappa_2. \end{aligned}$$

Введем также в рассмотрение на плоскости (w, z) области

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(z, w): z, w > 0, w > \Phi(z), z > \Psi(w)\}, \\ U_2 &= K \setminus \bar{U}_1, \quad K = \{(z, w): z > 0, w > 0\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рис. 2

ЛЕММА 3.1. *Предположим, что параметры краевой задачи (2.1), кроме неравенств (1.7) и (3.1), удовлетворяют еще условиям*

$$\varphi_1 > 0, \quad \varphi_2 < 0, \quad \psi_1 > 0, \quad \psi_2 > 0. \quad (3.6)$$

Тогда цикл (3.2) орбитально экспоненциально устойчив, если при каждом $n = 1, 2, \dots$ справедливы включения

$$(D\pi^2 n^2, \xi_0^2) \in U_1,$$

и неустойчив, если для некоторого $n_0 \geq 1$ имеет место включение

$$(D\pi^2 n_0^2, \xi_0^2) \in U_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы основано на несложном анализе матриц (3.3), который здесь опустим. Отметим лишь, что если точка $(D\pi^2 n^2, \xi_0^2)$ попадает на часть границы области U_1 , задаваемую равенством $w = \Phi(z)$ (или $z = \Psi(w)$), то соответствующая матрица (3.3) имеет нулевое (или чисто мнимое) собственное значение.

При условиях (3.6) графики функций (3.4) имеют вид, показанный на рис. 2, а и 2, б, а типичный характер расположения областей (3.5) представлен на рис. 2, в

(область U_2 заштрихована). Заметим также, что значениям параметров (1.5) соответствует набор параметров

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -0.551417\dots, & \kappa_2 &= 1.8796049\dots, \\ 0.0008 &\leq D \leq 0.004, & 1.6022\dots &\leq \gamma \leq 33.52306\dots, \end{aligned}$$

при которых цикл (3.2) неустойчив; в данном случае выполняются неравенства (3.6), причем (см. рис. 2, в)

$$z_0 = 0,007774\dots, \quad z_1 = 1,8570469\dots,$$

область U_2 имеет показанный на рис. 2, в вид и содержит некоторые из точек $(D\pi^2 n^2, \xi_0^2)$.

Для пояснения смысла леммы 3.1 рассмотрим отвечающую краевой задаче (1.8) точечную модель, т.е. систему

$$\dot{u} = -\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\varepsilon\right) [\varepsilon v + u(t-1)](1+u), \quad \dot{v} = r[u - v(t-h)](1+v). \quad (3.7)$$

Циклу (3.2) этой системы соответствует экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u = u_0(t, \varepsilon), \quad v = v_0(t, \varepsilon) \quad (3.8)$$

с асимптотикой (1.11), (3.2), существующий в силу бифуркационной теоремы Андронова–Хопфа [10]. Приведенная же лемма 3.1 решает проблему устойчивости цикла (3.8) в рамках распределенной модели (1.8).

3.2. Из содержащихся в § 2 результатов вытекают следующие характерные особенности динамики краевой задачи (1.8) при увеличении параметра γ .

ВТОРИЧНАЯ БУФЕРНОСТЬ. При увеличении γ неустойчивые пространственно неоднородные циклы, отвечающие от нулевого состояния равновесия в результате вторичных бифуркаций Андронова–Хопфа, становятся устойчивыми, возрастая по амплитуде. Отметим, что именно такие циклы конструировались при доказательстве теоремы 1.2. Более того, показано, что при подходящем уменьшении коэффициента диффузии таких устойчивых циклов может быть любое конечное число (но не счетное, как в случае краевой задачи (2.11)).

УСЛОЖНЕНИЕ ДИНАМИКИ. При дальнейшем увеличении γ все пространственно неоднородные циклы, о которых говорилось в § 1, 2, теряют устойчивость колебательным образом (см. (2.72)). Данное обстоятельство согласуется с результатом монографии [16] о том, что усложнение динамики при увеличении мальтузианского коэффициента линейного роста жертвы происходит уже в рамках точечной модели (системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся из уравнений (1.1), (1.2) при $D = 0$). Приведенные выше результаты показывают, что в рамках распределенной модели этот процесс идет значительно быстрее. В самом деле, в распределенной модели (1.8) имеет место диффузионная буферность, а в отвечающей ей точечной модели (3.7) – лишь единственный устойчивый цикл (3.8).

ЭЛЕМЕНТЫ САМООРГАНИЗАЦИИ. Устойчивые пространственно неоднородные циклы, доставляемые теоремой 1.2, могут сосуществовать с устойчивым однородным циклом. Для доказательства достаточно заметить, что однородный цикл

$$\xi(\tau) = \xi_0 \exp(i\omega_0\tau), \quad \xi_0 = \sqrt{\delta}, \quad \omega_0 = -c_0\delta,$$

краевой задачи (2.11) экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при

$$\delta - \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_0}{c_0} < 0 \quad (> 0),$$

и снова воспользоваться леммами 2.1, 2.3, 2.4, 2.7.

Итак, может возникать достаточно странная на первый взгляд ситуация: однородный цикл устойчив и, казалось бы, нет необходимости в существовании других устойчивых циклов. Однако они существуют, причем в достаточно большом количестве, и имеют лучшие биологические характеристики – меньше размах колебаний хищника и больше его средняя численность (в рамках изложенной в §2 асимптотической теории эти эффекты незначительны, но хорошо видны при численном эксперименте [1]). Тем самым можно говорить об элементах самоорганизации у хищника: он искусственно (за счет миграций) создает себе неоднородную среду обитания и повышает свой “уровень жизни”.

В заключение отметим, что в принципе все перечисленные выше особенности динамики были выявлены в работах [2]–[5] на модельной параболической системе с малыми коэффициентами диффузии. Однако перенос соответствующих результатов на исходную задачу (1.1)–(1.3), как выяснилось, отнюдь не тривиален. В частности, в статьях [2]–[5] не использовался метод бесконечномерной нормализации и нет аналога интегро-дифференциальной краевой задачи (1.12).

Список литературы

1. Захаров А. А., Колесов Ю. С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник–жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль, 1984. С. 3–15.
2. Колесов А. Ю. Существование асимптотически большого числа устойчивых бегущих волн в одной трехмерной системе параболических уравнений // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1986. С. 57–66.
3. Колесов А. Ю. Автоколебания сингулярно возмущенных параболических систем первой степени негрубости // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 62–69.
4. Колесов А. Ю. Бифуркация периодических решений сингулярно возмущенных параболических систем первой степени негрубости // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42. № 8. С. 1037–1042.
5. Колесов А. Ю. Теоретическое объяснение явления диффузионной буферности // Моделирование динамики популяций. Н. Новгород, 1990. С. 35–38.
6. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
7. Колесов Ю. С. Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1979. С. 3–40.

8. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.
9. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
10. Колесов Ю. С., Швирта Д. И. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
12. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1976. С. 114–129.
13. Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
14. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
15. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
16. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Тр. МИРАН. 1993. Т. 199. С. 3–125.

Поступило в редакцию
4.XI.1996