Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Этальные и эквивариантные когомологии вещественного алгебраического многообразия, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 5, 165–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/im214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:36:14

УДК 513.6

В. А. Краснов

Этальные и эквивариантные когомологии вещественного алгебраического многообразия

Применяются эквивариантные когомологии вещественного алгебраического многообразия для решения задач, поставленных с помощью этальных когомологий. В частности, вычисляется группа Витта поверхности Энрикеса.

Библиография: 18 наименований.

Введение

Для неособого вещественного алгебраического многообразия X в работе [16] доказано совпадение этальных когомологий $H_{\text{et}}^n(X, \mathbb{F}_2)$ с эквивариантными когомологиями $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, где $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа. Благодаря этому совпадению когомологий задачи, сформулированные с помощью этальных когомологий, переводятся на язык эквивариантных когомологий, и появляется возможность продвинуться в их решении. Так обстояло дело с когомологической группой Брауэра $\text{Br}'(X)$ (см. [16], [10], [11], [5]). В этой статье мы с помощью эквивариантных когомологий вычисляем группу Витта $W(X)$ вещественной проективной поверхности; наши вычисления продолжают вычисления из [17], проводимые с помощью этальных когомологий. Но сначала мы передокажем с помощью эквивариантных когомологий главные результаты работы [2], а также усилим их. Прежде чем формулировать соответствующие теоремы, введем следующие обозначения. Положим

$$H^0(X, \mathcal{H}^*) = H^0\left(X, \bigoplus_q \mathcal{H}^q\right) = \bigoplus_q H^0(X, \mathcal{H}^q),$$

где $\mathcal{H}^q$ – пучок на X_{zar} , соответствующий предпучку $U \mapsto H_{\text{et}}^q(U, \mathbb{F}_2)$. Абелева группа $H^0(X, \mathcal{H}^*)$ является коммутативным кольцом относительно $\cup$ -произведения, обладающим единицей, $1 \in H^0(X, \mathcal{H}^0) = \mathbb{F}_2$. С другой стороны, структурный морфизм $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{R}$ превращает кольцо $H^0(X, \mathcal{H}^*)$ в алгебру над кольцом многочленов $H_{\text{et}}^*(\text{Spec } \mathbb{R}, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[t]$, где t – образующая группы $H_{\text{et}}^1(\text{Spec } \mathbb{R}, \mathbb{F}_2) = \mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2$, а умножение на t определяется с помощью $\cup$ -произведения. Применение эквивариантных когомологий позволяет доказать следующую теорему, обобщающую один из результатов в [2].

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть d – размерность X ; тогда гомоморфизм

$$\cup t: H^0(X, \mathcal{H}^n) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^{n+1}) \quad (0.1)$$

при $n > d$ является изоморфизмом, а при $n = d$ он будет эпиморфизмом.

Заметим, что в [2] эпиморфность гомоморфизма (0.1) при $n = d$ не доказана, а высказана в качестве гипотезы, в работе [9] это утверждение доказано с помощью эквивариантных когомологий. Отметим еще, что утверждение об изоморфизме (0.1) в [2] доказано только для квазипроективных многообразий.

Итак, группа $H^0(X, \mathcal{H}^n)$ при $n > d$ не зависит от n , в работе [2] эта группа вычислена. Там строится канонический гомоморфизм

$$h_n: H^0(X, \mathcal{H}^n) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad (0.2)$$

который при $n > d$ является изоморфизмом. Этот гомоморфизм строится следующим образом. Каждому сечению $\varphi \in H^0(X, \mathcal{H}^n)$ сопоставляется функция $h_n(\varphi)$ на $X(\mathbb{R})$ со значениями в $\mathbb{F}_2$ с помощью следующего правила. Если $x \in X(\mathbb{R})$, то значение $h_n(\varphi)(x)$ равно образу φ при композиции гомоморфизмов

$$H^0(X, \mathcal{H}^n) \rightarrow \mathcal{H}_x^n \rightarrow H_{\text{ét}}^n(x, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2.$$

В [2] показано, что функция $h_n(\varphi)(x)$ постоянна на каждой компоненте связности множества $X(\mathbb{R})$, поэтому она определяет элемент $h_n(\varphi)$ группы $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. С помощью эквивариантных когомологий мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 0.2. *Гомоморфизм (0.2) является изоморфизмом при $n > d$, а при $n = d$ он будет эпиморфизмом.*

Заметим опять, что утверждение об эпиморфности h_d высказано в [2] в качестве гипотезы, а утверждение об изоморфизме доказано только для квазипроективных многообразий. Отметим еще, что теорема 0.1 вытекает из теоремы 0.2. А сейчас перейдем к формулировке результатов о группе Витта $W(X)$ неособой вещественной проективной поверхности, полученных в [17]. Обозначим через k_{pq} размерность ядра гомоморфизма

$$\cup t^{q-p}: H^0(X, \mathcal{H}^p) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^q).$$

В [17] с помощью результатов и методов из [2] доказана

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть X – неособая вещественная проективная поверхность. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то*

$$W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n,$$

где s – число компонент связности множества $X(\mathbb{R})$, $m = 2k_{12} - k_{13} + k_{23}$, $n = k_{13} - k_{12}$;

2) *если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и $k_{02} = 0$, то*

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n \oplus \mathbb{Z}/8,$$

где $m = 2k_{12} - k_{13} + k_{23}$, $n = k_{13} - k_{12} - 1$;

3) *если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и $k_{02} = 1$, то*

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n,$$

где $m = 2k_{12} - k_{13} + k_{23} - 1$, $n = k_{13} - k_{12} + 1$.

В [17] эта теорема применяется только для рациональной поверхности; там доказана

ТЕОРЕМА 0.4. Пусть X – рациональная поверхность. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то $W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s-1}$;
- 2) если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, то $W(X) = \mathbb{Z}/4$.

Заметим, что в [17] при вычислении группы $W(X)$ для рациональной поверхности в случае $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ допущена ошибка; там утверждается, что $W(X) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4$, что явилось следствием неправильного вычисления группы ${}_2\mathrm{Br}(X)$, потому что применялось неверное равенство $(\mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}})^G = \mathrm{Pic} X \oplus \mathbb{Z}/2$. Так как для рациональной поверхности группа $\mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}} = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, то последнее равенство не имеет места.

Чтобы применять теорему 0.3, нужно научиться вычислять инварианты k_{pq} ; мы применяем для этого эквивариантные коомологии. Прежде чем сформулировать полученные результаты, введем следующие обозначения. Рассмотрим отображения цикла (см. [8], [9])

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_{\mathbb{C}}: (\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{Q} &\rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-, \\ \mathrm{cl}: \mathrm{Pic} X &\rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2), \end{aligned}$$

где $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-$ – подгруппа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, антиинвариантная относительно инволюции $g \in G$. Размерность ядра гомоморфизма $\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}$ обозначим через $\rho_0(X)$; это число называется *числом Лефшеца*. Образ гомоморфизма cl называется *алгебраической группой эквивариантных коомологий* и обозначается через $H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Через $F^k H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ будем обозначать возрастающую фильтрацию, которая получается из фильтрации $F^k H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, соответствующей второй спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

т.е.

$$F^k H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = F^k H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \cap H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Факторпространство $X(\mathbb{C})/G$ обозначим через Y ; тогда множество $X(\mathbb{R})$ можно считать вложенным в Y . Обозначим через $k^1(Y)$ размерность ядра гомоморфизма ограничения $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Наконец, $q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ – иррегулярность поверхности.

В этой работе докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.5. Выполняются равенства

$$\begin{aligned} k_{12} &= \dim F^1 H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) + \dim(1 + g^*)H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \\ k_{13} &= \dim H^1(Y, \mathbb{F}_2), \\ k_{23} &= \rho_0(X) - q(X) + k^1(Y) + s - 1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 0.6. *Справедливы утверждения:*

- 1) если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$, то $k_{12} = k_{13} = 0$, $k_{23} = \rho_0(X) + s - 1$;
- 2) если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$, $\rho_0(X) = 0$, то $k_{02} = k_{12} = k_{13} = 1$, $k_{23} = 0$.

Из этого следствия и теоремы 0.3 сразу получаем теорему 0.4.

Мы применяем теорему 0.5 для вычисления группы Витта поверхности Энрикеса. Прежде чем сформулировать полученный результат, напомним некоторые факты о вещественных поверхностях Энрикеса (см. подробности в [15], [3]). Итак, пусть X – поверхность Энрикеса и $\pi: W \rightarrow X(\mathbb{C})$ – универсальное накрытие, оно двухлистное. Вещественная структура $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ поднимается до двух вещественных структур $g^{(i)}: W \rightarrow W$, $i = 1, 2$, даже в случае $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ (см. [10]). Положим $X(\mathbb{R})^{(i)} = \pi(W^{g^{(i)}})$; тогда $X(\mathbb{R})$ разбивается на две части: $X(\mathbb{R})^{(1)}$, $X(\mathbb{R})^{(2)}$. В работе [3] доказывается, что число

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) - \dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ &\quad + \dim H^1(G, (H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{Tors}) \otimes \mathbb{F}_2) - \dim H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

всегда делится на 4, а для поверхности Энрикеса, у которой одна из частей $X(\mathbb{R})^{(i)}$ пустая, а другая ориентируемая, число $\Delta(X)$ равно 4 или 8.

В данной работе доказана

ТЕОРЕМА 0.7. *Пусть X – поверхность Энрикеса. Тогда справедливы утверждения:*

- 1) если обе части $X(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, 2$, непустые, то

$$W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s-1};$$

- 2) если одна из частей $X(\mathbb{R})^{(i)}$ пустая, а другая неориентируемая, то

$$\begin{aligned} W(X) &= \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s-2} \oplus \mathbb{Z}/4 && \text{при } w_2(X(\mathbb{R})) \neq 0, \\ W(X) &= \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^s && \text{при } w_2(X(\mathbb{R})) = 0; \end{aligned}$$

- 3) если одна из частей $X(\mathbb{R})^{(i)}$ пустая, а другая ориентируемая, то

$$\begin{aligned} W(X) &= \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s-1} \oplus \mathbb{Z}/4 && \text{при } \Delta(X) = 4, \\ W(X) &= \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s+1} && \text{при } \Delta(X) = 8; \end{aligned}$$

- 4) если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, то

$$\begin{aligned} W(X) &= \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8 && \text{при } t^3 \neq 0, \\ W(X) &= (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/4 && \text{при } t^3 = 0, \end{aligned}$$

где $t \in H^1(Y, \mathbb{F}_2)$ – характеристический класс накрытия $X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$.

Из первого равенства в теореме 0.5 видно, что вычисление числа k_{12} является трудной задачей, но для поверхности, удовлетворяющей условию максимальнойности, это число равно иррегулярности, точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 0.8. Число k_{12} равно $q(X)$, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) X является ГМ-поверхностью и группа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная;
- 2) X является М-поверхностью и 2-примарная подгруппа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2)$ 2-периодическая.

Заметим, наконец, что некоторые технические вопросы об эквивариантных когомологиях мы вынесли в добавление (см. § 4).

§ 1. Структура алгебры $H^0(X, \mathcal{H}^*)$

Мы используем здесь обозначения из введения, поэтому X – неособое d -мерное вещественное алгебраическое многообразие. Через $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q$, $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)$ будем обозначать пучки на X_{zar} , которые получаются из предпучков

$$U \mapsto H^q(U(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \quad U \mapsto H^q(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

соответственно. Для каждого открытого множества $U \subset X$ имеем точную последовательность (см. § 4)

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\alpha} H^n(U(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup t} H^{n+1}(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \\ \xrightarrow{\alpha} H^{n+1}(U(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

где t – образующая группы $H^1(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) = H^1(G, \mathbb{F}_2)$, поэтому получаем соответствующую точную последовательность пучков

$$\dots \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G) \xrightarrow{\cup t} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{n+1}(G) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{n+1} \rightarrow \dots \quad (1.1)$$

ЛЕММА 1.1. При $n > d$ гомоморфизм

$$\cup t: \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{n+1}(G)$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $U \subset X$ – открытое аффинное множество, то $H^n(U(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ при $n > d$ (см., например, [6]). Поэтому при $n > d$ имеем равенство $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n = 0$. Осталось применить точную последовательность (1.1). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь пучки $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q$, $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G)$ на X_{zar} , которые получаются из предпучков

$$U \mapsto H^q(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad U \mapsto H^q(U(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

соответственно. Так как имеет место разложение (см. [4], [7])

$$H^q(U(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

то получаем следующее разложение пучка $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G)$ в прямую сумму:

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G) = \bigoplus_{k=0}^q \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^k. \quad (1.2)$$

Из гомоморфизма ограничения предпучка

$$\beta: H^q(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(U(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

получаем гомоморфизм ограничения для пучка $\beta: \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G)$.

ЛЕММА 1.2. При $n > d$ гомоморфизм $\beta: \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n(G)$ является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n(G) \\ \downarrow \cup t^n & & \downarrow \cup t^n \\ \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{2n}(G) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{2n}(G) \end{array} \quad (1.3)$$

При $n > d$ гомоморфизм предпучка

$$\beta: H^{2n}(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2n}(U(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом (см. [7]), поэтому нижний гомоморфизм в диаграмме (1.3) будет изоморфизмом. Левый гомоморфизм $\cup t^n$ является изоморфизмом по лемме 1.1. Правый гомоморфизм $\cup t^n$ является тождественным отображением, если использовать разложение (1.2). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. При $k > 0$ пучок $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^k$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in X$ и U – аффинная окрестность P . Тогда достаточно показать, что существует гиперповерхность $V \subset U$, не содержащая точку P , такая, что гомоморфизм ограничения

$$H^k(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(U(\mathbb{R}) \setminus V(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

равен нулю. Существует неособое проективное многообразие $\bar{U}$, содержащее U , такое, что $D = \bar{U} \setminus U$ – дивизор с нормальными пересечениями. Тогда можно добавить к гиперповерхности D конечное число гиперплоских сечений $V_1, \dots, V_m$ таких, что гиперповерхности $D(\mathbb{R}), V_1(\mathbb{R}), \dots, V_m(\mathbb{R})$ разбивают дифференцируемое многообразие $\bar{U}(\mathbb{R})$ на стягиваемые в точку куски. Мы можем взять сечения $V_1, \dots, V_m$, не проходящие через точку P , поэтому многообразие $V = (V_1 \cup \dots \cup V_m) \cap U$ дает искомую гиперповерхность. Лемма доказана.

Таким образом, разложение (1.2) нужно заменить на равенство

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G) = \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0. \quad (1.4)$$

Рассмотрим гомоморфизм предпучков

$$\beta^{q,0}: H^q(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

который равен композиции гомоморфизма ограничения

$$\beta: H^q(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(U(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

и проекции

$$\bigoplus_{k=0}^q H^k(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Тогда он индуцирует гомоморфизм пучков

$$\beta^{q,0}: \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0.$$

Из лемм 1.2, 1.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.4. При $n > d$ гомоморфизм $\beta^{n,0}: \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0$ является изоморфизмом.

Так как $H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, то имеем гомоморфизм

$$\beta^{n,0}: H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G)) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (1.5)$$

Если использовать равенство (1.4), то гомоморфизм (1.5) совпадает с обычным гомоморфизмом ограничения

$$\beta: H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n(G)) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Изоморфизм В. В. Никулина предпучков

$$H_{\text{et}}^n(U, \mathbb{F}_2) = H^n(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

индуцирует изоморфизм пучков $\mathcal{H}^n = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G)$, а также групп сечений этих пучков. Если $x \in X(\mathbb{R})$, то имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X, \mathcal{H}^n) & \longrightarrow & \mathcal{H}_x^n & \longrightarrow & H_{\text{et}}^n(x, \mathbb{F}_2) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G)) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G)_x & \longrightarrow & H^n(x; G, \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \parallel \\ H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n(G)) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n(G)_x & \longrightarrow & H^0(x, \mathbb{F}_2) \\ \parallel & & & & \parallel \\ H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & & \longrightarrow & H^0(x, \mathbb{F}_2) \end{array}.$$

из которой видно, что гомоморфизм $h_n: H^0(X, \mathcal{H}^n) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ совпадает с гомоморфизмом (1.5).

ТЕОРЕМА 1.5. При $n > d$ гомоморфизм (1.5) является изоморфизмом, а при $n = d$ – эпиморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 1.4 вытекает, что достаточно доказать эпиморфность гомоморфизма

$$\beta^{d,0}: H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^d(G)) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (1.6)$$

Компоненты связности X_i , $i = 1, 2, \dots, s$, множества $X(\mathbb{R})$ определяют эквивариантные классы когомологий $X_i \in H^d(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ такие, что при гомоморфизме ограничения

$$\beta: H^d(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^d(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

они переходят в полные классы Штифеля–Уитни $w(X_i)$ (см. [9]), поэтому гомоморфизм

$$\beta^{d,0}: H^d(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$$

эпиморфен. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^d(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta^{d,0}} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^d(G)) & \xrightarrow{\beta^{d,0}} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{array}$$

получаем, что гомоморфизм (1.6) также эпиморфен. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Так как гомоморфизмы

$$\begin{aligned} h_n: H^0(X, \mathcal{H}^n) &\rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \\ \beta^{n,0}: H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G)) &\rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{aligned}$$

совпадают, то из теоремы 1.5 вытекают теоремы 0.1, 0.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Рассмотрим гомоморфизм алгебр $H_{\text{et}}^*(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^*)$, он совпадает с гомоморфизмом $H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^*(G))$. Из доказательства теоремы 1.5 вытекает, что при $n > d$ гомоморфизм

$$H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^n(G))$$

эпиморфен, поэтому также эпиморфен гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^n(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^n)$$

при $n > d$. Следовательно, равны нулю дифференциалы $d_r^{0,n}$ при $n > d$ в спектральной последовательности Блоха–Огуза

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, \mathbb{F}_2). \quad (1.7)$$

В частности, для поверхности $d_2^{0,3} = 0$. Для квазипроективной поверхности с компактным множеством $X(\mathbb{R})$ это равенство доказано в [2].

§ 2. Вычисление инвариантов k_{pq} для поверхности

В этом параграфе X – неособая вещественная проективная алгебраическая поверхность. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\cup t} & H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{F}_2) \\ \downarrow e & & \downarrow e \\ H^0(X, \mathcal{H}^1) & \xrightarrow{\cup t} & H^0(X, \mathcal{H}^2) \end{array} \quad (2.1)$$

где $e: H_{\text{et}}^q(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^q)$ – краевой гомоморфизм спектральной последовательности Блоха–Огуза (1.7). Так как $E_2^{p,q} = 0$ при $p > q$ (см. [1]), то левый

гомоморфизм в диаграмме (2.1) является изоморфизмом, а правый – эпиморфизмом. Таким образом, число

$$k_{12} = \dim \operatorname{Ker} [\cup t: H^0(X, \mathcal{H}^1) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^2)]$$

равно размерности ядра композиции гомоморфизмов

$$H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup t} H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{e} H^0(X, \mathcal{H}^2).$$

Изучим гомоморфизм

$$\cup t: H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{F}_2) \quad (2.2)$$

с помощью спектральной последовательности Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^2(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, \mathbb{F}_2),$$

где $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$. Так как гомоморфизм

$$\cup t: H^1(G, H_{\text{et}}^0(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^2(G, H_{\text{et}}^0(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{F}_2))$$

является изоморфизмом, а гомоморфизм

$$\cup t: H^0(G, H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^1(G, H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{F}_2)) \quad (2.3)$$

– эпиморфизмом, то ядро гомоморфизма (2.2) равно ядру гомоморфизма (2.3), т.е. группе $(1 + g^*)H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{F}_2)$, а образ гомоморфизма (2.2) совпадает с подгруппой $F^1 H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{F}_2)$, где $F^k H_{\text{et}}^q(X, \mathbb{F}_2)$ – возрастающая фильтрация, возникающая из спектральной последовательности Хохшильда–Серра. Таким образом, имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow (1 + g^*)H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup t} F^1 H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0.$$

Ядро краевого гомоморфизма $e: H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^2)$ равно образу отображения цикла (см. [1]) $\text{cl}: \operatorname{Pic} X \rightarrow H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{F}_2)$; обозначим его через $H_{\text{alg}}^2(X, \mathbb{F}_2)$, а пересечение

$$H_{\text{alg}}^2(X, \mathbb{F}_2) \cap F^1 H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{F}_2)$$

обозначим через $F^1 H_{\text{alg}}^2(X, \mathbb{F}_2)$. Тогда из рассуждений, приведенных выше, вытекает

Предложение 2.1. *Выполняется равенство*

$$k_{12} = \dim F^1 H_{\text{alg}}^2(X, \mathbb{F}_2) + \dim(1 + g^*)H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{F}_2).$$

В [16] показано, что спектральная последовательность Хохшильда–Серра совпадает со спектральной последовательностью эквивариантных когомологий, поэтому равенство в предложении 2.1 совпадает с первым равенством в теореме 0.5. Далее мы будем применять эквивариантные когомологии. Рассмотрим отображение цикла (см. [8])

$$\text{cl}: \operatorname{Pic} X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-),$$

где $\mathbb{Z}_-$ – G -пучок на $X(\mathbb{C})$ со слоем $\mathbb{Z}$, на котором инволюция g действует умножением на -1 . Образ этого отображения обозначим через $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$.

ЛЕММА 2.2. *Выполняется включение*

$$F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \subset H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из длинной экспоненциальной точной последовательности

$$\begin{array}{ccc} \cdots \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\text{cl}} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\times 2\pi i} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \rightarrow \cdots \\ \parallel \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \parallel \\ \text{Pic } X \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})^G \end{array}$$

следует, что группа кручения $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}$ содержится в $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$. Осталось заметить, что группа $F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ 2-периодическая. Лемма доказана.

Рассмотрим гомоморфизм редукции по mod 2

$$R: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2);$$

тогда выполняется равенство

$$R(H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)) = H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

а также включение

$$R(F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)) \subset F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Поэтому из леммы 2.2 получаем включение

$$R(F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)) \subset F^1 H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (2.4)$$

ЛЕММА 2.3. *Если гомоморфизм Бокштейна*

$$B: H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \rightarrow {}_2 H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \quad (2.5)$$

эпиморфен, то гомоморфизм редукции

$$R: F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

мономорфен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что мономорфны следующие гомоморфизмы:

$$\begin{aligned} H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) &\rightarrow H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2), \\ H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Первый из них всегда мономорфен, так как группа $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ свободная (см. [7]). Для проверки мономорфности второго гомоморфизма рассмотрим точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{B} {}_2 H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow 0;$$

тогда из соответствующей длинной точной последовательности когомологий группы G и условия леммы получим, что гомоморфизм (2.6) также мономорфен. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Если гомоморфизм Бокштейна (2.4) и гомоморфизм забывания вещественной структуры

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \quad (2.7)$$

эпиморфны, а гомоморфизм

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \quad (2.8)$$

мономорфен, то выполняется равенство

$$\dim F^1 H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \dim F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{R} & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G & \xrightarrow{R} & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \end{array}$$

Пусть $a \in H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ – такой элемент, что $R(a) \in F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$; тогда $\alpha(R(a)) = 0$, поэтому $R(\alpha(a)) = 0$. Из мономорфности гомоморфизма (2.8) следует, что существует элемент $b \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G$ такой, что $\alpha(a) = 2b$. В силу эпиморфности гомоморфизма (2.7) существует элемент $c \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ такой, что $\alpha(c) = b$, а тогда $\alpha(a - 2c) = 0$, т.е. $a - 2c \in F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$. Таким образом, имеем включение

$$F^1 H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \subset R(F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)).$$

Осталось применить включение (2.4) и лемму 2.3. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть X является GM-поверхностью и группа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная; тогда $k_{12} = q(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, то гомоморфизм Бокштейна (2.5) эпиморфен, а гомоморфизм (2.8) мономорфен. Из условий теоремы следует, что X является GM $\mathbb{Z}$ -поверхностью (см. [7]), а поэтому гомоморфизм (2.7) эпиморфен. Применим лемму 2.4; тогда получим равенство (2.9), следовательно,

$$\dim F^1 H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)).$$

Осталось заметить, что

$$\dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) + \dim(1 + g^*)(H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2) = q(X).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть X является M -поверхностью и 2-примарная подгруппа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2)$ 2-периодическая; тогда $k_{12} = q(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для M -поверхности инволюция $g^*: H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ тривиальна, поэтому гомоморфизм Бокштейна (2.5) эпиморфен. Каждая M -поверхность является GMZ -поверхностью (см. [14]), следовательно, гомоморфизм (2.7) также эпиморфен. Чтобы применить лемму 2.4, осталось доказать мономорфность гомоморфизма (2.8). Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G_{\text{tors}} & \rightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G & \rightarrow & (H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)/\text{Tors})^G & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G_{\text{tors}} & \rightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G & \rightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)/\text{Tors} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Нижняя строка в ней всегда точная, а для M -поверхности верхняя строка тоже будет точной (см. [14]). Умножим эту диаграмму тензорно на $\mathbb{F}_2$. Так как по условию $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)(2) = {}_2H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$, а для M -поверхности выполняется равенство ${}_2H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G = {}_2H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$, то гомоморфизм

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G_{\text{tors}} \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G_{\text{tors}} \otimes \mathbb{F}_2$$

будет изоморфизмом, а поэтому мономорфен гомоморфизм (2.8). Осталось применить лемму 2.4 и заметить, что для M -поверхности выполняются равенства

$$(1 + g^*)H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0, \quad \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = q(X).$$

Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $Y = X(\mathbb{C})/G$; тогда

$$k_{13} = \dim H^1(Y, \mathbb{F}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов §1 следует, что k_{13} равно размерности ядра гомоморфизма

$$\beta^{1,0}: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Но из первой спектральной последовательности

$$I_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta^{1,0}} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Каждый ненулевой элемент θ группы $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ задает вещественное двухлистное неразветвленное накрытие $\pi: W_\theta \rightarrow X$. Образ $\pi(W_\theta(\mathbb{R}))$ составляет часть компонент связности множества $X(\mathbb{R})$. Элемент θ называется *неразбивающим* $X(\mathbb{R})$, если $\pi(W_\theta(\mathbb{R}))$ равно $\emptyset$ или $X(\mathbb{R})$. Подгруппа $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \subset H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ как раз состоит из неразбивающих $X(\mathbb{R})$ элементов (подробности см. в [13]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Выполняется равенство*

$$k_{23} = \rho_0(X) - q(X) + k^1(Y) + s - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм

$$\cup t: H^0(X, \mathcal{H}^2) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^3) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

является эпиморфизмом (см. §1). Следовательно,

$$k_{23} = \dim H^0(X, \mathcal{H}^2) - s.$$

Группа $H^0(X, \mathcal{H}^2)$ равна 2-периодической части группы Брауэра ${}_2\text{Br}(X)$. В [11] доказано равенство

$$\dim {}_2\text{Br}(X) = \rho_0(X) - q(X) + k^1(Y) + 2s - 1.$$

Заметим, что в [11] это равенство сформулировано для случая $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, но на самом деле доказательство проходит и в случае $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. Предложение доказано.

Отметим, что предложения 2.1, 2.7, 2.9 составляют теорему 0.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *Если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то $k_{02} = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X(\mathbb{R})$; тогда рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(X, \mathcal{H}^0) & \longrightarrow & \mathcal{H}_x^0 & \longrightarrow & H_{\text{et}}^0(x, \mathbb{F}_2) & = & H^0(G, \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \cup t^2 & & \downarrow \cup t^2 & & \downarrow \cup t^2 & \cong & \downarrow \cup t^2 \\ H^0(X, \mathcal{H}^2) & \longrightarrow & \mathcal{H}_x^2 & \longrightarrow & H_{\text{et}}^2(x, \mathbb{F}_2) & = & H^2(G, \mathbb{F}_2) \end{array}$$

Из нее следует, что гомоморфизм

$$\cup t^2: H^0(X, \mathcal{H}^0) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^2)$$

мономорфен. Предложение доказано.

Пусть теперь $X(\mathbb{R}) = \emptyset$; тогда из доказательства предложения 2.1 вытекает, что равенство $k_{02} = 1$ имеет место, если и только если $t^2 \in H_{\text{alg}}^2(X, \mathbb{F}_2)$, где $t^2 = t^2 \cup 1$ и $1 \in H_{\text{et}}^0(X, \mathbb{F}_2)$ – образующая.

§ 3. Группа Витта поверхности Энриквеса

В этом параграфе мы вычисляем группу Витта для поверхности, удовлетворяющей условиям

$$H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2, \quad p_g(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}) = 0.$$

Заметим, что поверхность Энриквеса этим условиям удовлетворяет. Отметим еще, что из равенства $p_g(X) = 0$ следуют равенства (см. [10])

$$\rho_0(X) = 0, \quad H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Обозначим через θ образующую группы $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, она определяет два элемента $\theta^{(i)} \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, $i = 1, 2$, таких, что $\alpha(\theta^{(i)}) = \theta$. Соответствующие двухлистные накрытия будем обозначать через $\pi: W^{(i)} \rightarrow X$, а образы множества вещественных точек $\pi(W^{(i)}(\mathbb{R}))$ обозначим через $X(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если обе части $X(\mathbb{R})^{(1)}$, $X(\mathbb{R})^{(2)}$ непустые, то*

$$W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие предложения эквивалентно следующему равенству: $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$ (см. [16], [13]). Из предложения 2.7 следует, что $k_{13} = 0$, а поэтому $k_{12} = 0$. Предложение 2.9 дает равенство $k_{23} = s - 1$. Осталось применить теорему 0.3. Предложение доказано.

Пусть теперь одна из частей $X(\mathbb{R})^{(i)}$ пустая, но $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; в этом случае $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$ и образующую этой группы обозначим через θ_Y . Заметим, что при гомоморфизме

$$f^*: H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

где $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ — проекция, образующая θ_Y переходит в θ . Образ θ_Y при гомоморфизме $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ обозначим через θ . Тогда $\beta^{1,0}(\theta) = 0$, а элементы θ , $\theta + t$, где t — образующая группы $H^1(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \subset H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, совпадают с элементами $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, так как $\alpha(\theta) = \alpha(\theta + t) = 0$.

ЛЕММА 3.2. *При вышеприведенных предположениях равенство $k_{12} = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t \cdot \theta^2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае группа $H^0(X, \mathcal{H}^1) = H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ порождена элементами t , θ . Рассуждения, приведенные в доказательстве предложения 2.10, показывают, что элементы t^2 , $t(t + \theta)$ из $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ не алгебраические. Таким образом, число k_{12} может равняться 1 тогда и только тогда, когда $t \cdot \theta \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ является алгебраическим элементом. Так как $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, то

$$H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = R(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)),$$

где R — гомоморфизм редукции. Следовательно, элемент $t \cdot \theta$ алгебраический тогда и только тогда, когда $B_-(t \cdot \theta) = 0$, где

$$B_-: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$$

– эквивариантный гомоморфизм Бокштейна, возникающий из точной последовательности G -пучков

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_- \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_- \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0.$$

В [11] показано, что в данном случае группа $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = \text{Br}(X)$ 2-периодическая, поэтому гомоморфизм редукции

$$R: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

мономорфен. Композиция $b_- = R \circ B_-$ также называется эквивариантным гомоморфизмом Бокштейна. Осталось заметить, что $b_-(t \cdot \theta) = t \cdot \theta^2$ (см. § 4). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть одна из частей $X(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, 2$, пустая, но $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, то $W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s-2} \oplus \mathbb{Z}/4$;
- 2) если $\theta|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} = 0$, то $W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$, то из предложения 2.7 получаем равенство $k_{13} = 1$. Из условия $\theta|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$ следует неравенство $\theta_Y|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, поэтому $k^1(Y) = 0$. Применим предложение 2.9; тогда получим равенство $k_{23} = s - 1$. Осталось вычислить k_{12} . Из неравенства $\theta_Y|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$ следует, что гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

мономорфен (см. [12]), поэтому $t \cdot \theta^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\beta(t \cdot \theta^2) = 0$. Так как $\beta^{1,0}(\theta) = 0$, то $\beta(t \cdot \theta^2) = t \cdot \theta^2|_{X(\mathbb{R})}$. Следовательно, $t \cdot \theta^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} = 0$. Применим лемму 3.2; тогда получим, что в случае $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$ выполняется равенство $k_{12} = 0$, а если $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} = 0$, то $k_{12} = 1$. Осталось применить теорему 0.3. Предложение доказано.

Элемент $\theta^2 \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ инвариантен относительно инволюции g^* , поэтому он определяет элемент группы $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$, который также будем обозначать через θ^2 , но этот элемент может быть нулевым. Рассмотрим число

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) - \dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ &\quad + \dim H^1(G, (H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{Tors}) \otimes \mathbb{F}_2) - \dim H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

оно всегда делится на 4 (см. [3]).

ЛЕММА 3.5. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, но одна из частей $X(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, 2$, пустая и $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$. Тогда $\Delta(X)$ равно 4 или 8, причем справедливы утверждения:

- 1) если $\theta^2 \neq 0$ в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$, то $\Delta(X) = 4$;
- 2) если $\theta^2 = 0$ в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$ и $\Delta(X) = 4$, то $\theta^2 \neq 0$ в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2)$;

3) если $\Delta(X) = 8$, то дифференциал

$$d_2^{1,2} : H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^3(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$$

не равен нулю.

Доказательство этой леммы для поверхности Энриквеса изложено в [3]. Чтобы получить доказательство леммы в общем случае, нужно заменить в доказательстве для поверхности Энриквеса в [3] класс $w_2(X(\mathbb{C}))$ на θ^2 . Подробности мы опускаем.

В группе $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ существует и единствен элемент второго порядка, он равен $B_-(\theta)$, где $B_- : H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ – гомоморфизм Бокштейна. При гомоморфизме редукции этот элемент переходит в $\theta^2 \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$.

ЛЕММА 3.6. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, но одна из частей $X(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, 2$, пустая и $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$. Тогда $\Delta(X) = 4$, если и только если элемент $B_-(\theta)$ не равен нулю в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Delta(X) = 4$, то из леммы 3.5 с помощью гомоморфизма редукции выводится неравенство $B_-(\theta) \neq 0$ в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))$. Пусть $\Delta(X) = 8$; покажем, что тогда $B_-(\theta) = 0$ в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму, в которой $d_2^{1,2}, d_2^{1,3}$ – дифференциалы из второй спектральной последовательности,

$$\begin{array}{ccc} H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) & \xrightarrow{B_-} & H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \\ \downarrow d_2^{1,2} & & \downarrow d_2^{1,3} \\ H^3(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) & \xrightarrow{B_-} & H^3(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \end{array}$$

Нам нужно показать, что нижний гомоморфизм B_- равен нулю, но так как дифференциал $d_2^{1,2}$ ненулевой, то достаточно проверить обращение в нуль верхнего гомоморфизма B_- . По лемме 3.5 $\theta^2 = 0$ в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$, поэтому любой элемент из $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, имеющий ненулевой образ при гомоморфизме Бокштейна

$$B_- : H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

не может попасть в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$, так как его произведение с θ^2 не равно нулю. Следовательно, верхний гомоморфизм B_- обращается в нуль. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, но одна из частей $X(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, 2$, пустая и $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если $\Delta(X) = 4$, то $W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s-1} \oplus \mathbb{Z}/4$;
- 2) если $\Delta(X) = 8$, то $W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^{s+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно показать, что $k_{12} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta(X) = 4$. Равенство $k_{12} = 0$ равносильно неравенству $B_-(t \cdot \theta) \neq 0$ (см. доказательство леммы 3.2). Так как $t \cdot \theta \in F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, то $B_-(t \cdot \theta) \in F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$.

Рассмотрим гомоморфизм

$$\alpha: F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)),$$

возникающий из второй спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-);$$

тогда получим равенство

$$\alpha(B_-(t \cdot \theta)) = B_-(\theta). \quad (3.1)$$

Если $\Delta(X) = 4$, то по лемме 3.6 $B_-(\theta) \neq 0$, поэтому из (3.1) следует требуемое неравенство $B_-(t \cdot \theta) \neq 0$. Чтобы доказать обратное утверждение, заметим следующее. Так как $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) = 0$, то выполняются равенства

$$F^1 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = F^0 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Гомоморфизм ограничения

$$\beta: F^0 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow F^0 H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

мономорфен, поэтому элемент $B_-(t \cdot \theta)$ не может принадлежать $F^1 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, так как $\beta(B_-(t \cdot \theta)) = 0$ в силу равенств

$$\beta(B_-(t \cdot \theta)) = B_-(t \cdot \beta(\theta)), \quad \beta(\theta) = \beta^{1,0}(\theta) + \theta|_{X(\mathbb{R})} = 0.$$

Таким образом, из неравенства $B_-(t \cdot \theta) \neq 0$ следует неравенство $B_-(\theta) \neq 0$ в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))$. Осталось применить лемму 3.6. Предложение доказано.

Нам осталось разобрать случай $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. Тогда проекция $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ является неразветвленным двухлистным накрытием. Если гомоморфизм

$$f^*: H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \quad (3.2)$$

эпиморфен, то $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^2$, в противном случае $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$. Заметим, что для поверхности Энриквеса $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^2$ (см. [10]). Ядро гомоморфизма (3.2) порождается характеристическим классом накрытия $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$. Из спектральной последовательности

$$I_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

следует, что краевой гомоморфизм $i^*: H^n(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ является изоморфизмом. Поэтому гомоморфизм (3.2) совпадает с гомоморфизмом $\alpha: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, если отождествить $H^1(Y, \mathbb{F}_2)$ с $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, так как выполняется равенство $\alpha \circ i^* = f^*$ (см. [4]). Отсюда следует, что характеристический класс накрытия $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ совпадает с образом t при каноническом гомоморфизме $H^1(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, его мы также будем обозначать через t .

ЛЕММА 3.8. Пусть $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$, то $t^2 = 0$ в $H^2(Y, \mathbb{F}_2)$;
- 2) если $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^2$, то $t^2 \neq 0$ в $H^2(Y, \mathbb{F}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

следует, что $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^2$ тогда и только тогда, когда $t^2 \neq 0$ в $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Поэтому утверждения леммы следуют из равенства $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^n(Y, \mathbb{F}_2)$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$; тогда $W(X) = \mathbb{Z}/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$ следуют равенства $k_{13} = 1$, $k_{23} = 0$. Из равенств $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$, $t^2 = 0$ получаем, что гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \cup t^2: H^0(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2), \\ \cup t: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \end{aligned}$$

нулевые, а поэтому равны нулю гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \cup t^2: H^0(X, \mathcal{H}^0) &\rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^2), \\ \cup t: H^0(X, \mathcal{H}^1) &\rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^2), \end{aligned}$$

следовательно, $k_{02} = 1$, $k_{12} = 1$. Осталось применить теорему 0.3. Предложение доказано.

Если $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^2$, то через θ_Y обозначим какой-нибудь элемент из $H^1(Y, \mathbb{F}_2)$, переходящий при отображении (3.2) в образующую $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. В этом случае подгруппа элементов второго порядка ${}_2H^2(Y, \mathbb{Z})$ порождается элементами $B(t)$, $B(\theta_Y)$, где B – гомоморфизм Бокштейна. Образы элементов $B(t)$, $B(\theta_Y)$ в $H^2(Y, \mathbb{F}_2)$ при гомоморфизме редукции равны t^2 , θ_Y^2 , причем они лежат в группе $H^2(Y, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2$ и ортогональны любому элементу из этой группы относительно $\cup$ -произведения. В частности, имеем равенства $t^4 = 0$, $\theta_Y^4 = 0$, $t^2 \cdot \theta_Y^2 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Пусть $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и $t^3 \neq 0$ в $H^3(Y, \mathbb{F}_2)$; тогда $W(X) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.8 выполняется равенство $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^2$, поэтому из теоремы 0.5 получаем равенства $k_{13} = 2$, $k_{23} = 1$. Рассуждения, проведенные в [10] для поверхности Энрикеса, показывают, что $\text{Br}(X) = \mathbb{Z}/2$, поэтому гомоморфизм

$$B_-: F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Br}(X) = H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$$

имеет ненулевое ядро, так как $\dim F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = 2$. Следовательно, $k_{12} \geq 1$; но так как $t^3 = b_-(t^2) \neq 0$, то $k_{12} = 1$. Из неравенства $b_-(t^2) \neq 0$ следует также равенство $k_{02} = 0$. Осталось применить теорему 0.3. Предложение доказано.

ЛЕММА 3.11. Пусть $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^2$, $t^3 = 0$ в $H^3(Y, \mathbb{F}_2)$ и элемент θ^2 равен нулю в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$; тогда

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $t^3 = 0$ вытекает равенство $F^0 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = 0$. Так как $t^3 \cdot \theta_Y = 0$, $t^2 \cdot \theta_Y^2 = 0$, то $t^2 \cdot \theta_Y = 0$. Следовательно, $\Pi_{\infty}^{2,1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$, и поэтому $F^1 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = 0$. Так как $t \cdot \theta_Y^2$ принадлежит $F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, то из равенства нулю θ^2 в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$ вытекает равенство $t \cdot \theta_Y^2 = 0$. Из равенств $t^3 = 0$, $t \cdot \theta_Y^2 = 0$ получаем, что $b_-(t^2) = 0$, $b_-(t \cdot \theta_Y) = 0$. Так как $\text{Br}(X) = H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = \mathbb{Z}/2$ (см. [10]), то выполняются равенства $B_-(t^2) = 0$, $B_-(t \cdot \theta_Y) = 0$. Следовательно, элементы t^2 , $t \cdot \theta_Y \in F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ алгебраические, поэтому $k_{12} = 2$. А из предыдущих рассуждений в доказательстве предложения 3.10 вытекают равенства $k_{02} = 1$, $k_{13} = 2$, $k_{23} = 1$. Осталось применить теорему 0.3. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Пусть X – поверхность Энриквеса, $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и $t^3 = 0$; тогда $W(X) = (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно только показать, что элемент θ^2 равен нулю в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$. Из равенства $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ следует, что квадратичная форма $Q^*(x, x) = x \cdot g^*(x)$ на $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ нулевая, так как $[X(\mathbb{R})]^* \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ – характеристический класс этой формы. Из равенства нулю формы $Q^*(x, x)$ следует равенство нулю формы $Q(x, x) = x^2$ в пространстве $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$, поэтому элемент $w_2(X(\mathbb{C}))$ равен нулю в $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$. Осталось заметить, что для поверхности Энриквеса $\theta^2 = w_2(X(\mathbb{C}))$. Предложение доказано.

Заметим, что из предложений 3.1, 3.3, 3.7, 3.10, 3.12 вытекает теорема 0.7.

§ 4. Добавление: гомоморфизм сдвига и эквивариантный гомоморфизм Бокштейна

Пусть X – топологическое пространство с инволюцией $g: X \rightarrow X$, $\mathcal{A}$ – пучок абелевых групп на X , на котором также определена инволюция, согласованная с инволюцией на X . Пусть $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка, $t \in H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}_-) = H^1(G, \mathbb{Z}_-)$ – образующая, $\mathcal{A}_- = \mathcal{A} \otimes \mathbb{Z}_-$. Тогда $\cup$ -произведение на t определяет гомоморфизм

$$T: H^n(X; G, \mathcal{A}) \rightarrow H^{n+1}(X; G, \mathcal{A}_-).$$

Этот гомоморфизм в [13] назван *гомоморфизмом сдвига*, так как ему можно дать следующее конструктивное определение. Пусть

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{\partial} \dots$$

– каноническая резольвента Годемана пучка $\mathcal{A}$; тогда все пучки $\mathcal{A}^q$ являются

G -пучками. Образует бикомплекс из сечений $C^q = \Gamma(X, \mathcal{A}^q)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array} \tag{4.1}$$

Из результатов, полученных в [4], следует, что когомологии $H^n(X; G, \mathcal{A})$ совпадают с полными когомологиями бикомплекса (4.1), т.е.

$$H^n(X; G, \mathcal{A}) = \frac{\text{Ker}[C^{\leq n} \xrightarrow{d} C^{\leq n+1}]}{\text{Im}[C^{\leq n-1} \xrightarrow{d} C^{\leq n}]},$$

где $C^{\leq q} = \bigoplus_{k=0}^q C^k$. Умножим бикомплекс (4.1) тензорно на $\mathbb{Z}_-$; тогда новый бикомплекс получается из бикомплекса (4.1) изменением знака перед g на противоположный, т.е. получим бикомплекс

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array} \tag{4.2}$$

Рассмотрим гомоморфизм бикомплекса (4.1) в бикомплекс (4.2), который поднимает бикомплекс (4.1) на один этаж и отображает тождественно в бикомплекс (4.2); тогда индуцированный гомоморфизм полных когомологий бикомплексов задает требуемый гомоморфизм

$$T: H^n(X; G, \mathcal{A}) \rightarrow H^{n+1}(X; G, \mathcal{A}_-).$$

Из этого конструктивного определения видно, что имеет место следующая точная последовательность коомологий:

$$\dots \xrightarrow{\alpha} H^n(X, \mathcal{A}) \rightarrow H^n(X; G, \mathcal{A}) \xrightarrow{T} H^{n+1}(X; G, \mathcal{A}_-) \xrightarrow{\alpha} H^{n+1}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \dots, \quad (4.3)$$

где связывающий гомоморфизм $H^n(X, \mathcal{A}) \rightarrow H^n(X; G, \mathcal{A})$ получается из отображения комплекса C^* в бикомплекс (4.1) с помощью гомоморфизма $1 + g$. Отметим, наконец, что если $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$, $\mathbb{Z}_\pm$ и X – клеточный комплекс с клеточной инволюцией, то в качестве групп C^q в бикомплексах (4.1), (4.2) можно брать группы клеточных копечей. Далее X – клеточный комплекс. Рассмотрим точную последовательность G -пучков на G -пространстве X

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\pm \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_\pm \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0.$$

Из нее получаем связывающий гомоморфизм для эквивариантных коомологий

$$B_\pm: H^n(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{n+1}(X; G, \mathbb{Z}_\pm),$$

композицию которого с гомоморфизмом редукции

$$R: H^{n+1}(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^{n+1}(X; G, \mathbb{F}_2)$$

обозначим через

$$b_\pm: H^n(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{n+1}(X; G, \mathbb{F}_2).$$

Гомоморфизмы $B_\pm$, $b_\pm$ будем называть *эквивариантными гомоморфизмами Бокштейна*. Сейчас мы приведем два предложения, которые используются в основном тексте.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Всегда выполняется равенство $b_-(t \cdot \theta) = t \cdot b_+(\theta)$, где $\theta \in H^n(X; G, \mathbb{F}_2)$.*

Доказательство проводится с помощью непосредственной проверки с использованием конструктивного определения гомоморфизма умножения на t и конструктивного определения связывающего гомоморфизма. Подробности мы опускаем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Если $\theta \in H^1(X; G, \mathbb{F}_2)$, то $b_+(\theta) = \theta^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведем это равенство к аналогичному равенству для обычных коомологий. Пусть S^∞ – бесконечномерная сфера с антиподальной инволюцией, $X^\infty = X \times_G S^\infty$; тогда согласно определению Бореля (см., например, [18]) имеем равенства

$$H^n(X; G, \mathbb{F}_2) = H^n(X^\infty, \mathbb{F}_2), \quad H^n(X; G, \mathbb{Z}) = H^n(X^\infty, \mathbb{Z}).$$

Поэтому обычный гомоморфизм Бокштейна

$$b: H^n(X^\infty, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{n+1}(X^\infty, \mathbb{F}_2)$$

совпадает с эквивариантным гомоморфизмом Бокштейна

$$b_+: H^n(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{n+1}(X; G, \mathbb{F}_2).$$

Осталось заметить, что для $\theta \in H^1(X^\infty, \mathbb{F}_2)$ выполняется равенство $b(\theta) = \theta^2$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Если $\theta \in H^1(X; G, \mathbb{F}_2)$, то $b_-(t \cdot \theta) = t \cdot \theta^2$.

Список литературы

1. Bloch S., Ogus A. Gersten's conjecture and the homology of schemes // Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^{ème} Serie. 1974. V. 7. P. 181–202.
2. Colliot-Thélène J.-L., Parimala R. Real components of algebraic varieties and étale cohomology // Invent. math. 1990. V. 101. P. 81–99.
3. Degtyarev A., Kharlamov V. Distribution of the components of a real Enriques surface // Topology (to appear).
4. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
5. Mangolte F., van Hamel J. Algebraic cycles and topology of real Enriques surfaces // Compositio Math. (to appear).
6. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
7. Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
8. Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
9. Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
10. Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
11. Краснов В. А. О группе Брауэра вещественной алгебраической поверхности // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 6. С. 935–938.
12. Краснов В. А. Эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 101–126.
13. Краснов В. А. Вещественные алгебраические GM-многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 39–66.
14. Краснов В. А. Вещественные алгебраические GMZ-поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 4. С. 51–80.
15. Nikulin V. V., Sujatha R. On Brauer group of real Enriques surfaces // J. reine angew. Math. 1993. V. 444. P. 115–154.
16. Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic geometry and its applications. Yaroslavl', 1992. P. 114–136.
17. Sujatha R. Witt groups of real projective surfaces // Math. Ann. 1990. Bd. 288. S. 89–101.
18. У И Сян. Когомологическая теория топологических групп преобразований. М.: Мир, 1979.

Поступило в редакцию
7.VII.1997