Общероссийский математический портал

Т. П. Лукашенко, О свойствах систем разложения, подобных ортогональным, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 5, 187–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/im215>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 02:16:03

УДК 517.518 + 517.982

Т. П. Лукашенко

О свойствах систем разложения, подобных ортогональным

В гильбертовом пространстве вводится понятие системы разложения, подобной ортогональной, для которой выполняются аналог равенства Парсеваля, экстремальное свойство коэффициентов разложения, аналоги теоремы Рисса–Фишера и тождества Бесселя – оценки точности приближения. Для случая, когда гильбертово пространство – пространство Лебега L^2 , доказываются аналоги теоремы Меньшова–Радемахера о сходимости почти всюду и теорем Орлича и Тандори о безусловной сходимости. Даны конструкции и примеры систем разложения, подобных ортогональным, но не ортогональных.

Библиография: 26 наименований.

Введение

Известно, что ортогональные системы и разложения по ним широко применяются в математике и ее приложениях, что объясняется рядом замечательных свойств таких систем. Это и простота вычисления коэффициентов разложения (коэффициентов Фурье) через скалярное произведение $\hat{f}_k = (f, e^k) / \|e^k\|^2$, где e^k – элементы ортогональной системы, и легкость вычисления точности приближения

$$\left\| f - \sum_{k \in K} \hat{f}_k e^k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k \in K} |\hat{f}_k|^2 \cdot \|e^k\|^2 \quad (1)$$

– тождество Бесселя, и следующее из него неравенство Бесселя

$$\|f\|^2 \geq \sum_k |\hat{f}_k|^2 \cdot \|e^k\|^2,$$

превращающееся для полных систем в равенство Парсеваля, записываемое иначе, в эквивалентной форме, как

$$(f, g) = \sum_k \hat{f}_k \bar{\hat{g}}_k \|e^k\|^2, \quad (2)$$

и формула равенства элемента его ряду Фурье для полных систем

$$f = \sum_k \hat{f}_k e^k$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 96-01-00332), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 96/97-15-96073) и INTAS (грант № 94-1044).

– формула восстановления f по $\hat{f}_k$. Приведенные сведения широко известны и излагаются во многих учебниках и монографиях, например, [1, с. 287, 298], [2, с. 191–244], [3, с. 188–205], [4, с. 166–193], [5, с. 3–37], [6, с. 157–173], [7, с. 269–279], [8, с. 64–68, 121–131], [9, с. 132–145]. Цель данной статьи – продемонстрировать, что многие свойства ортогональных систем верны для более широкого класса систем – неотрицательных систем разложения, подобных ортогональным.

§ 1. Определения и основные свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (не обязательно сепарабельное), а Ω – пространство со счетно-аддитивной, соответственно действительной или комплексной мерой μ (см. [7, с. 109–116]). Систему элементов $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ будем называть *ортотподобной* (подобной ортогональной) *системой разложения* в H , если любой элемент $y \in H$ представляется в виде

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega), \quad (3)$$

где $\hat{y}_{\omega} = (y, e^{\omega})$, интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H , причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства Ω (все Ω_k измеримы, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$), быть может, зависящее от y и называемое *подходящим* для y , что функция $\hat{y}_{\omega} e^{\omega}$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega). \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (об интегрировании). Наряду с указанным пониманием интеграла, самым удобным, как представляется автору, возможны и другие понимания. Так, если H – пространство функций на множестве X , то интеграл по Ω или по Ω_k может также пониматься как интеграл от функции на Ω с параметром из X . Можно и вместо интеграла Лебега использовать его многочисленные обобщения, что, впрочем, частично охватывается введением несобственного интегрирования.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (о числовом множителе). Разумеется, в интегралы в формулах (3) и (4) можно добавить действительнзначный или комплекснзначный множитель $a(\omega)$, но от него легко избавиться переходом к системе $\{s^{\omega}\} = \{\sqrt{|a(\omega)|} e^{\omega}\}$ и мере $\eta(E) = (L) \int_E (a(\omega)/|a(\omega)|) d\mu(\omega)$ (здесь считаем $\frac{0}{0} = 0$),

$$(L) \int_{\Omega_{(k)}} a(\omega) (y, e^{\omega}) e^{\omega} d\mu(\omega) = (L) \int_{\Omega_{(k)}} (y, s^{\omega}) s^{\omega} d\eta(\omega),$$

где $\Omega_{(k)}$ – это Ω или Ω_k (см. [7, с. 198, 199]). Существуют и другие переходы, также избавляющие от множителя $a(\omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 (об ортоподобных рядах). В случае, если Ω – конечное подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, получается определение конечной ортоподобной системы, содержащее как частный случай конечные полные ортогональные системы. В случае $\Omega = \mathbb{N}$ и $\Omega_k = \{1, \dots, k\}$ получается определение счетной ортоподобной системы с обычной сходимостью, содержащее как частный случай счетные полные ортогональные системы и ряды по ним (известные как ортогональные ряды).

Ортоподобные системы разложения имеют аналог равенства (2) – равенства Парсеваля.

ТЕОРЕМА 1 (аналог равенства Парсеваля). *Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная система разложения в H , то для любого элемента $y \in H$*

$$\|y\|^2 = \int_{\Omega} |\hat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega),$$

где в соответствии с определением 1 интеграл понимается как собственный интеграл Лебега или как несобственный интеграл Лебега по подходящему для элемента y исчерпыванию; для любых элементов $y, z \in H$

$$(y, z) = \int_{\Omega} \hat{y}_\omega \bar{\hat{z}}_\omega d\mu(\omega),$$

где также интеграл понимается как собственный интеграл Лебега или как несобственный интеграл Лебега по подходящему для y или z исчерпыванию. Если мера μ неотрицательна, то в обоих случаях интеграл может рассматриваться как собственный интеграл Лебега.

Доказательство см. в [10] и [11].

ТЕОРЕМА 2 (о мнимой части меры). *Если $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная система разложения в H , то для любого элемента $y \in H$*

$$\int_{\Omega} \hat{y}_\omega e^\omega d\operatorname{Im} \mu(\omega) = 0,$$

поэтому мнимую часть меры μ можно отбросить и без ограничения общности считать μ действительной мерой.

Доказательство см. в [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ортоподобную (подобную ортогональной) систему разложения будем называть *неотрицательной (с неотрицательной мерой)*, если мера μ неотрицательна.

Ортоподобные неотрицательные системы разложения по своим свойствам во многом похожи на полные ортогональные системы, как видно из нижеследующих теорем.

ТЕОРЕМА 3 (об экстремальном свойстве коэффициентов разложения). Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H , а $c(\omega)$ – функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем рассматривается H) и

$$y = \int_{\Omega} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega), \quad (5)$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H , причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Λ_k измеримы, $\Lambda_k \subset \Lambda_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Lambda_k = \Omega$), что функция $c(\omega) e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Λ_k и

$$\int_{\Omega} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Lambda_k} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega).$$

Тогда

$$\|y\|^2 \leq (L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место лишь в случае, если $c(\omega) = \hat{y}_\omega$ почти всюду на Ω .

Доказательство см. в [11] или [12].

С. В. Бочкарев в разговоре с автором заметил, что из теоремы 3 следует, что для счетной ортоподобной неотрицательной системы разложения функций в $L^2([a, b])$ выполняется условие теоремы Шура (см. [13, с. 256]) и, следовательно, эту систему можно ортонормировать продолжением на множество $E \supset [a, b]$, мера которого больше $b - a$. В абстрактном гильбертовом пространстве ситуация аналогична, что следует из приведенного в [12] критерия, позволяющего определять, когда ортоподобная неотрицательная система разложения является ортогональной проекцией ортогональной системы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $c(\omega)$ – функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем рассматривается H) и

$$\int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty,$$

а $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H .

Тогда если $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – такая последовательность измеримых подмножеств Ω , что (см. [7, с. 141]) $\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \Omega$ и функция $c(\omega) e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Λ_k , то в H существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Lambda_k} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega).$$

Доказательство см. в [11] или [12].

Теорема 4 является аналогом известной для ортонормированных систем теоремы Рисса–Фишера (см. [4, с. 178], [7, с. 414]).

СЛЕДСТВИЕ. Если $c(\omega)$ – функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем рассматривается H) и

$$\int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty,$$

а $\{e^{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H , то для любой последовательности измеримых множеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \Omega$ (в частности, для любого исчерпывания $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства Ω), на элементах Ω_k которой функция $c(\omega)e^{\omega}$ интегрируема по Лебегу, существует один и тот же предел в H

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega)e^{\omega} d\mu(\omega).$$

Действительно, из теоремы 4 следует существование предела для любой указанной в следствии последовательности. А то, что этот предел один и тот же для разных последовательностей, следует из того простого факта, что если Ω является нижним пределом последовательностей $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\Omega'_k\}_{k=1}^{\infty}$, то Ω является нижним пределом и смешанной последовательности $\{\Omega_1, \Omega'_1, \Omega_2, \Omega'_2, \dots\}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Множество указанных в следствии последовательностей для измеримой на Ω функции $c(\omega)e^{\omega}$ не пусто. Например, подходящим является исчерпывание Ω , состоящее из $\Omega_k = \{\omega \in \Omega: 1/k < |c(\omega)| \text{ и } \|c(\omega)e^{\omega}\| < k\} \cup \{\omega \in \Omega: c(\omega) = 0\}$.

ТЕОРЕМА 5 (оценка точности приближения). Пусть $c(\omega)$ – функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем рассматривается H) и

$$\int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty,$$

$\{e^{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H , функция $c(\omega)e^{\omega}$ измерима на Ω , E – измеримое подмножество Ω .

Тогда существуют собственные или несобственные (как в определении 1) интегралы Лебега от функции $c(\omega)e^{\omega}$ по Ω и по E и

$$\left\| \int_{\Omega} c(\omega)e^{\omega} d\mu(\omega) - \int_E c(\omega)e^{\omega} d\mu(\omega) \right\|^2 \leq \int_{\Omega \setminus E} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

Доказательство см. в [11] или [12].

СЛЕДСТВИЕ (оценка точности приближения). Пусть $\{e^{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H , E – измеримое подмножество Ω . Для любого элемента $y \in H$ существует собственный или несобственный (как в определении 1) интеграл Лебега

$$\int_E \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega)$$

и

$$\left\| y - \int_E \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega) \right\|^2 \leq \|y\|^2 - \int_E |\hat{y}_{\omega}|^2 d\mu(\omega).$$

Это утверждение непосредственно следует из теорем 5 и 1. Оно является аналогом известной в теории рядов Фурье по полным ортонормированным системам оценки точности приближения – тождества Бесселя (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4 (об ортоподобных системах со знакопеременной мерой). Для ортоподобных систем, не являющихся неотрицательными, получить аналог теоремы 3 с оценкой

$$\|y\|^2 \leq (L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 |d\mu(\omega)| \equiv (L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 v(\mu, d\omega)$$

(см. [7, с. 115–134]) или хотя бы с оценкой

$$\|y\|^2 \leq C \cdot (L) \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 |d(\omega)|,$$

где C – некоторая не зависящая от системы постоянная, невозможно. Это легко продемонстрировать даже в конечномерной ситуации.

ПРИМЕР 1. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ – ортонормированная система в $\mathbb{R}^n$, $w = \sum_{k=1}^n e^k$. Тогда система, состоящая из векторов $s^k = e^k + \alpha w$, $k = 1, \dots, n$, и $s^{n+1} = \beta w$ при условии $2\alpha + n\alpha^2 = \beta^2$ со знакопеременной мерой μ , $\mu(k) = 1$ при $k = 1, \dots, n$ и $\mu(n+1) = -1$, будет ортоподобной системой, т.е. любой элемент $y \in \mathbb{R}^n$ представляется в виде

$$y = \sum_{k=1}^n (y, s^k) s^k - (y, s^{n+1}) s^{n+1}.$$

Возьмем $n = 2$ и вектор $y = e^1 - e^2$; тогда $y = s^1 - s^2$, $y - e^1 = -e^2$, $\|y - s^1\|^2 = \|-s^2\|^2 = (1 + \alpha)^2 + \alpha^2$, и если бы выполнялось неравенство $\|y - s^1\|^2 \leq C \cdot (-1)^2 = C$, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнялось бы неравенство $(1 + \alpha)^2 + \alpha^2 \leq C$, что невозможно.

§ 2. О сходимости почти всюду

Теория абстрактных ортогональных систем состоит из небольшого количества важных результатов. Количественно значительно более богатой является теория ортогональных систем функций (см. [13–15]). Одной из наиболее известных в этой теории теорем является следующая теорема Меньшова–Радемахера, которая, кроме первоначальных работ [16], [17], изложена также в [13, с. 291–294], [14, с. 188–192], [15, с. 85–89].

ТЕОРЕМА (Меньшова–Радемахера). Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система функций на отрезке $[a, b]$. Если коэффициенты $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \log_2^2(n+1) < \infty, \quad (6)$$

то ортогональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (7)$$

сходится почти всюду на $[a, b]$. Кроме того, мажоранта частичных сумм ряда (7)

$$S^*(x) = \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \right|$$

удовлетворяет оценке

$$\|S^*(x)\|_{L^2} \leq CD^{\frac{1}{2}},$$

где C – абсолютная постоянная.

В данном параграфе мы получим аналог этой теоремы для ортоподобных неотрицательных систем разложения функций.

ЛЕММА 1. Для любых чисел $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, где n – неотрицательное целое число, и любого натурального l , $1 \leq l < 2^n$, справедлива оценка

$$|z_l - z_0|^2 \leq n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{2^{n-j}-1} |z_{i2^j} - z_{(i-1)2^j}|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое число l , $1 \leq l < 2^n$, представляется в виде $l = \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_r 2^r$, где $\varepsilon_r = 0$ или $\varepsilon_r = 1$; пусть $l_0 = 0$, $l_p = \sum_{r=n-p}^{n-1} \varepsilon_r 2^r$ при $p = 1, \dots, n$, l_p кратно 2^{n-p} и разность $l_p - l_{p-1}$ равна или нулю, или 2^{n-p} . Значит,

$$z_l - z_0 = \sum_{p=1}^{n-1} (z_{l_p} - z_{l_{p-1}}),$$

где каждая ненулевая разность $z_{l_p} - z_{l_{p-1}}$ равна $z_{i2^j} - z_{(i-1)2^j}$ при $j = n - p$ и таком i , что $(i-1)2^j = l_{p-1}$. По неравенству Коши–Буняковского–Шварца для комплексных чисел

$$|z_l - z_0|^2 \leq n \sum_{p=1}^{n-1} |z_{l_p} - z_{l_{p-1}}|^2 \leq n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{2^{n-j}-1} |z_{i2^j} - z_{(i-1)2^j}|^2.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть X – пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой, $H = L^2(X)$, $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – ортоподобная неотрицательная система разложения, $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ – набор измеримых подмножеств Ω , $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_{2^n-1}$, $c(\omega)$ – измеримая числовая функция на Ω , $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Λ_k , $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

Тогда

$$\left\| \max_{0 \leq k < 2^n} \left| \left(\int_{\Lambda_k} - \int_{\Lambda_0} \right) c(\omega) e^\omega(x) d\mu(\omega) \right| \right\|^2 \leq n^2 \int_{\Lambda_{2^n-1} \setminus \Lambda_0} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $z_k(x) = \int_{\Lambda_k} c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega)$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, из леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \max_{0 \leq k < 2^n} \left| \left(\int_{\Lambda_k} - \int_{\Lambda_0} \right) c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega) \right| \right\|^2 \\ & \leq n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{2^{n-j}-1} \left\| \left(\int_{\Lambda_{i2^j}} - \int_{\Lambda_{(i-1)2^j}} \right) c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega) \right\|^2 \\ & \leq n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{2^{n-j}-1} \left(\int_{\Lambda_{i2^j}} - \int_{\Lambda_{(i-1)2^j}} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \\ & \leq n \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Lambda_{2^{n-1}} \setminus \Lambda_0} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) = n^2 \int_{\Lambda_{2^{n-1}} \setminus \Lambda_0} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6 (аналог теоремы Меньшова–Радемахера). Пусть X – пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой, $H = L^2(X)$, $\{e^{\omega}(x)\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H , $c(\omega)$ – измеримая функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем рассматривается H), а $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такое исчерпывание Ω , что функция $c(\omega) e^{\omega}$ интегрируема по Лебегу на Ω_k , $k \in \mathbb{N}$. Если функция $c(\omega)$ удовлетворяет условию

$$D = \left(\int_{\Omega_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \log_2^2 k \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty, \quad (8)$$

то последовательность частичных интегралов

$$I_k(x) = \int_{\Omega_k} c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega) \quad (9)$$

сходится почти всюду на X . Кроме того, мажоранта последовательности частичных интегралов (9)

$$I^*(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k(x)|$$

удовлетворяет оценке

$$\|I^*(x)\| \leq 3\sqrt{D}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое натуральное число $n > 1$ представляется в виде $n = 2^m + k$, где $m \in \mathbb{N}$, k целое, $0 \leq k < 2^m$. Поэтому

$$\begin{aligned} I^*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |I_n(x)| & \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{0 \leq k < 2^m} |I_{2^m+k}(x) - I_{2^m}(x)| \\ & + \sup_{0 \leq m \in \mathbb{Z}} |I_{2^m}(x)| \equiv I_1^*(x) + I_2^*(x) \end{aligned}$$

($\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ – множества натуральных и целых чисел).

Оценим $I_1^*(x)$. Так как

$$(I_1^*(x))^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sup_{0 \leq k < 2^m} |I_{2^m+k}(x) - I_{2^m}(x)| \right)^2,$$

то, используя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} \|I_1^*\|^2 &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sup_{0 \leq k < 2^m} |I_{2^m+k} - I_{2^m}| \right\|^2 \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \int_{\Lambda_{2^{m+1}-1} \setminus \Lambda_{2^m}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \\ &\leq \sum_{k=3}^{\infty} \log_2^2 k \int_{\Lambda_k \setminus \Lambda_{k-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq D. \end{aligned}$$

Теперь оценим $I_2^*(x)$. Так как

$$\begin{aligned} I_2^*(x) &\leq |I_1(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} |I_{2^m}(x) - I_{2^{m-1}}(x)| \\ &= |I_1(x)| + |I_2(x) - I_1(x)| + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m-1} (m-1) |I_{2^m}(x) - I_{2^{m-1}}(x)|, \end{aligned}$$

то, используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца для чисел, получаем

$$\begin{aligned} (I_2^*(x))^2 &\leq \left(2 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(m-1)^2} \right) \\ &\quad \times \left(|I_1(x)|^2 + |I_2(x) - I_1(x)|^2 + \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)^2 |I_{2^m}(x) - I_{2^{m-1}}(x)|^2 \right), \end{aligned}$$

откуда, используя теорему 3 и оценку $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2$, имеем

$$\begin{aligned} \|I_2^*\|^2 &\leq 4 \left(\|I_1\|^2 + \|I_2 - I_1\|^2 + \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)^2 \|I_{2^m} - I_{2^{m-1}}\|^2 \right) \\ &\leq 4 \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} + \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)^2 \int_{\Omega_{2^m} \setminus \Omega_{2^{m-1}}} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \\ &\leq 4 \left(\int_{\Omega_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \log_2^2 k \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) = 4D. \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки, получаем

$$\|I^*(x)\| \leq \|I_1^*(x)\| + \|I_2^*(x)\| \leq \sqrt{D} + 2\sqrt{D} = 3\sqrt{D}.$$

Оценка (10) доказана.

Осталось доказать, что последовательность $I_k(x)$ сходится почти всюду к функции $y(x)$ – пределу по норме в $L^2(X)$ последовательности $I_k(x)$ (который существует согласно теореме 4). Так как

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |I_k(x) - y(x)| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k(x)| + |y(x)| = I^*(x) + |y(x)|,$$

то из выведенной выше оценки $\|I^*\|$ и из теоремы 3 получаем

$$\left\| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |I_k(x) - y(x)| \right\| \leq 3\sqrt{D} + \left(\int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 4\sqrt{D}.$$

При $k > N$ разность $I_k(x) - y(x)$ не изменится, если функцию $c(\omega)$ заменить функцией $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \Omega_N}(x)$, равной нулю на Ω_N , не изменится при этом и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |I_k(x) - y(x)|$, а правая часть последней оценки при такой замене может быть сделана сколь угодно малой (за счет выбора достаточно большого N), значит, $\left\| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |I_k(x) - y(x)| \right\| = 0$, т.е. $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |I_k(x) - y(x)| = 0$ почти всюду на X , что означает $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k(x) = y(x)$ почти всюду на X . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 6 – обобщение теоремы Меньшова–Радемахера (см. замечание 3 к определению 1), (8) является аналогом (6), сходимость последовательности (9) – аналог сходимости ряда (7). Частными случаями теоремы 6 являются как сама теорема Меньшова–Радемахера, так и некоторые связанные с ней результаты (см. [14, с. 191], [15, с. 90–92]). Невозможность замены в теореме 6 функции $\log_2^2 k$ любой функцией, являющейся $o(\log_2^2 k)$, следует из невозможности сделать то же самое в теореме Меньшова–Радемахера (см. [16] или [13, с. 295–303], или [14, с. 195–198, 371], или [15, с. 94–108]).

§ 3. О безусловной сходимости почти всюду

В теории ортогональных систем функций большое внимание уделяется вопросу сходимости ортогональных рядов почти всюду при любом порядке их членов, т.е. безусловной сходимости почти всюду (при этом нуль-множество точек расходимости может изменяться с каждой перестановкой). Наиболее известными теоремами по безусловной сходимости являются теорема В. Орлича из работы [18], которая изложена также в [14, с. 198–200] и в [15, с. 108–110], и теорема К. Тандори из работы [19], которая изложена также в [13, с. 308, 309]. Приведем их формулировки.

ТЕОРЕМА (Орлича). Пусть $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность индексов, для которой $\log n_{k+1} = O(\log n_k)$, а $\lambda(x)$ – такая положительная неубывающая функция, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_k)} < \infty.$$

Тогда из условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda(k) \log_2^2 k < \infty \quad (11)$$

следует безусловная сходимость почти всюду ряда ортонормированных на отрезке $[a, b]$ функций $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ (т.е. сходимость почти всюду при любом порядке членов ряда).

ТЕОРЕМА (Тандори). *Из условия*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} a_k^2 \log_2^2 k \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad v_n = 2^{2^n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

следует безусловная сходимость почти всюду ряда ортонормированных на отрезке $[a, b]$ функций $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$.

В данном параграфе мы получим аналоги этих теорем для ортоподобных неотрицательных систем разложения функций.

Всюду в параграфе X – пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой, $H = L^2(X)$, $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H (по определениям 1 и 2), $c(\omega)$ – измеримая функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем рассматривается H), а $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такая последовательность попарно непересекающихся измеримых подмножеств Ω , что $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \Omega$, и функция $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу на E_k , $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$I_k(x) = \int_{E_k} c(\omega) e^\omega(x) d\mu(\omega), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Рассмотрим в параграфе условия безусловной сходимости почти всюду ряда интегралов

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x).$$

ТЕОРЕМА 7 (аналог теоремы Орлича). *Пусть $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность индексов, для которой $\log_2 n_{k+1} = O(\log_2 n_k)$, а $\lambda(x)$ – такая строго положительная неубывающая функция, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_k)} < \infty.$$

Тогда из условия

$$Q = \left(\int_{E_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda(k) \log_2^2 k \int_{E_k} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty \quad (14)$$

следует безусловная сходимость почти всюду на множестве X ряда интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$. Кроме того, для любой перестановки натурального ряда $\mathbb{N}$, определяемой функцией $m(k)$, мажоранта частичных сумм переставленного ряда интегралов

$$S^*(x) = \sup_{K \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) \right|$$

удовлетворяет оценке

$$\|S^*\| \leq C \sqrt{Q}, \quad (15)$$

где постоянная C зависит только от последовательности $\{n_k\}$ и функции $\lambda(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать $n_1 = 2$. Введем для $i, j \in \mathbb{N}$

$$I_{i,j}(x) = \begin{cases} I_j, & \text{если } i = j = 1 \text{ или } n_{i-1} \leq j < n_i \text{ при } i > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, $\sum_{i=1}^{\infty} I_{i,j}(x) = I_j(x)$, причем в этой сумме только один член может быть отличен от нуля.

Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} I_{1,j}(x)$ имеет не более одного отличного от нуля члена, норма мажоранты частичных сумм ряда, полученного из него перестановкой $m(k)$,

$$S_1^*(x) = \sup_{l \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^l I_{1,m(k)}(x) \right|,$$

равна нулю или совпадает с нормой этого члена. Значит, используя теорему 3, получаем оценку

$$\|S_1^*\|^2 \leq \int_{E_1} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

При $i > 1$ ряд $\sum_{j=1}^{\infty} I_{i,j}(x)$ имеет не более $n_i - n_{i-1}$ отличных от нуля членов; норму мажоранты частичных сумм ряда, полученного из него перестановкой $m(k)$,

$$S_i^*(x) = \sup_{l \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^l I_{i,m(k)}(x) \right|,$$

легко оценить, используя лемму 2. Действительно, отбросив некоторое число нулевых членов (что, очевидно, не меняет мажоранты), можно перейти к конечному ряду, содержащему $2^{l_i} - 1$ членов, где l_i — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $2^{l_i} > n_i - n_{i-1}$. Тогда по лемме 2 квадрат нормы мажоранты частичных сумм такого ряда, а значит, и первоначального переставленного ряда, оценивается величиной

$$l_i^2 \sum_{n_{i-1} \leq j < n_i} \int_{E_j} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

Так как по условию теоремы $\log_2 n_i = O(\log_2 n_{i-1})$, то существует зависящая только от последовательности n_i такая постоянная $C' \geq 1$, что

$$\begin{aligned} \|S_i^*\|^2 &\leq C' \log_2^2 n_{i-1} \sum_{n_{i-1} \leq j < n_i} \int_{E_j} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \\ &\leq C' \sum_{n_{i-1} \leq j < n_i} \log_2^2 j \int_{E_j} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Так как

$$\|S^*\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|S_i^*\| = \|S_1^*\| + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda(n_{i-1})}} \sqrt{\lambda(n_{i-1})} \|S_i^*\|,$$

то, используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца для чисел, имеем

$$\|S^*\|^2 \leq \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_{i-1})}\right) \left(\|S_1^*\|^2 + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda(n_{i-1}) \|S_i^*\|^2\right).$$

Используя это неравенство и полученные выше оценки $\|S_i^*\|$, получаем

$$\|S^*\|^2 \leq C' \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_i)}\right) \left(\int_{E_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda(k) \log_2^2 k \int_{E_k}\right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

Оценка (15) доказана.

Осталось доказать, что ряд интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ безусловно сходится почти всюду на X к функции $y(x)$ – сумме в пространстве $L^2(X)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ (который существует согласно теореме 4). Так как

$$\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right| \leq \sup_{K \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) \right| + |y(x)| = S^*(x) + |y(x)|,$$

то из выведенной выше оценки $\|S^*\|$ и из теоремы 3 получаем

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right| \right\| &\leq \|S^*(x)\| + \|y(x)\| \\ &\leq C\sqrt{Q} + \left(\int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(C + \frac{1}{\sqrt{\lambda(1)}} \right) \sqrt{Q}. \end{aligned}$$

При $K > N$ разность $\sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x)$ не изменится, если функцию $c(\omega)$ заменить функцией $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^N E_{m(k)}}(x)$, равной нулю на $\bigcup_{k=1}^N E_{m(k)}$, не изменится при этом и $\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right|$, а Q (а значит, и правая часть последней оценки) при такой замене может быть сделана сколь угодно малой (за счет выбора достаточно большого N); значит, $\left\| \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right| \right\| = 0$, т.е. $\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right| = 0$ почти всюду на X , что означает $\sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)}(x) = y(x)$ почти всюду на X . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 7 – обобщение теоремы Орлича (см. замечание 3 к определению 1), (14) является аналогом (11), безусловная сходимость ряда интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ – аналог безусловной сходимости ряда функций $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$.

ТЕОРЕМА 8 (аналог теоремы Тандори). *Из условия*

$$\begin{aligned} G = & \left(\left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} \log_2^2 k \int_{E_k} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned} \quad (16)$$

где $v_n = 2^{2^n}$, $n = 0, 1, \dots$, следует безусловная сходимость почти всюду на множестве X ряда интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$. Кроме того, для любой перестановки натурального ряда $\mathbb{N}$, определяемой функцией $m(k)$, мажоранта частичных сумм переставленного ряда интегралов

$$S^*(x) = \sup_{K \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) \right|$$

удовлетворяет оценке

$$\|S^*\| \leq 2\sqrt{G}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем для $i = -1, 0, 1, 2, \dots$, $j \in \mathbb{N}$

$$I_{i,j}(x) = \begin{cases} I_j, & \text{если } 1 \leq j \leq 2, \quad i = -1 \text{ или } v_i < j \leq v_{i+1} \text{ при } i \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, $\sum_{i=-1}^{+\infty} I_{i,j}(x) = I_j(x)$, причем в этой сумме только один член может быть отличен от нуля.

Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} I_{-1,j}(x)$ имеет не более двух отличных от нуля членов; норму мажоранты частичных сумм ряда, полученного из него перестановкой $m(k)$,

$$S_{-1}^*(x) = \sup_{l \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^l I_{-1,m(k)}(x) \right|,$$

легко оценить, используя лемму 2. Действительно, отбросив некоторое число нулевых членов (что, очевидно, не меняет мажоранты), можно перейти к конечному ряду, содержащему три члена. Тогда по лемме 2 квадрат нормы мажоранты частичных сумм (их четыре) такого ряда, а значит, и первоначального переставленного ряда $\sum_{k=1}^l I_{-1,m(k)}$, оценивается величиной

$$4 \left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

При $i \geq 0$ ряд $\sum_{j=1}^{\infty} I_{i,j}(x)$ имеет не более $v_{i+1} - v_i$ отличных от нуля членов; норму мажоранты частичных сумм ряда, полученного из него перестановкой $m(k)$,

$$S_i^*(x) = \sup_{l \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^l I_{i,m(k)}(x) \right|,$$

легко оценить, используя лемму 2. Действительно, отбросив некоторое число нулевых членов (что, очевидно, не меняет мажоранты), можно перейти к конечному ряду, содержащему $v_{i+1} - 1 = 2^{2^{i+1}} - 1$ членов. Тогда по лемме 2 квадрат нормы мажоранты частичных сумм такого ряда (их v_{i+1}), а значит, и первоначального переставленного ряда, оценивается величиной

$$\log_2^2 v_{i+1} \left(\sum_{j=v_i+1}^{v_{i+1}} \int_{E_j} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

Так как

$$\begin{aligned}
\|S^*\| &\leq \sum_{i=-1}^{+\infty} \|S_i^*\| \leq 2 \left(\left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \log_2 v_{i+1} \left(\sum_{j=v_i+1}^{v_{i+1}} \int_{E_j} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \left(\left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} 2 \left(\sum_{j=v_i+1}^{v_{i+1}} \log_2^2 j \int_{E_j} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{G},
\end{aligned}$$

то оценка (17) доказана.

Осталось доказать, что ряд интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ безусловно сходится почти всюду на X к функции $y(x)$ – сумме в пространстве $L^2(X)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ (который существует согласно теореме 4). Так как

$$\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right| \leq \sup_{K \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) \right| + |y(x)| = S^*(x) + |y(x)|,$$

то из выведенной выше оценки $\|S^*\|$ и из теоремы 3 получаем

$$\begin{aligned}
\left\| \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right| \right\| &\leq \|S^*(x)\| + \|y(x)\| \\
&\leq 2\sqrt{G} + \left(\int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 3\sqrt{G}.
\end{aligned}$$

При $K > N$ разность $\sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x)$ не изменится, если функцию $c(\omega)$ заменить функцией $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^N E_{m(k)}}(x)$, равной нулю на $\bigcup_{k=1}^N E_{m(k)}$, не изменится при этом и $\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right|$, а G (а значит, и правая часть последней оценки) при такой замене может быть сделана сколь угодно малой (за счет выбора достаточно большого N); значит, $\left\| \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right| \right\| = 0$, т.е. $\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^K I_{m(k)}(x) - y(x) \right| = 0$ почти всюду на X , что означает $\sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)}(x) = y(x)$ почти всюду на X . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 8 – обобщение теоремы Тандори (см. замечание 3 к определению 1), (16) является аналогом (12), безусловная сходимость ряда интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ – аналог безусловной сходимости ряда функций $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$.

В теории ортогональных рядов из теорем Орлича и Тандори выводятся многочисленные следствия, многие из которых были получены другими авторами ранее этих теорем (см. [14, с. 200, 201], [15, с. 110–115], [13, с. 309, 310]). Все они имеют свои аналоги для ортоподобных неотрицательных систем разложения функций. Для иллюстрации приведем два из них.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log_2^2 k (\log_2 \log_2 k)^{1+\varepsilon} \int_{E_k} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty, \quad (18)$$

то ряд интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ (см. (13)) безусловно сходится почти всюду.

Действительно, по неравенству Коши–Буняковского–Шварца для чисел

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} n^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \left(\sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} \log_2^2 k \int_{E_k} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\varepsilon} \sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} \log_2^2 k \int_{E_k} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} \log_2^2 k (\log_2 \log_2 k)^{1+\varepsilon} \int_{E_k} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned}$$

по условию (18), где $v_n = 2^{2^n}$, $n = 0, 1, \dots$

Итак, условие (18) влечет условие (16) теоремы 8. Значит, ряд интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ безусловно сходится почти всюду.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{E_k} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{1-\varepsilon} < \infty, \quad (19)$$

то ряд интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)$ (см. (13)) безусловно сходится почти всюду.

Действительно, рассмотрим такую перестановку натурального ряда $\mathbb{N}$, определяемую функцией $m(k)$, что числа $|\int_{E_{m(k)}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega)|$, $k \in \mathbb{N}$, образуют невозрастающую последовательность. Тогда в силу сходимости ряда (19)

$$\left(\int_{E_{m(k)}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{1-\varepsilon} = o\left(\frac{1}{k}\right)$$

и, значит, для переставленного ряда интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)}(x)$ выполнено условие (16)

$$\begin{aligned} & \left(\left(\int_{E_{m(1)}} + \int_{E_{m(2)}} \right) |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=v_n+1}^{v_{n+1}} \log_2^2 k \int_{E_{m(k)}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned}$$

где $v_n = 2^{2^n}$, $n = 0, 1, \dots$; поэтому ряд интегралов $\sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)}(x)$ безусловно сходится почти всюду.

Следствие 2 для ортогональных рядов впервые было установлено Д.Е. Меньшовым в [20], это первый результат о безусловной сходимости функциональных рядов. Следствие 1 для ортогональных рядов впервые получено В. Орличем в [18]. Оба следствия легко вывести и из упомянутой теоремы Орлича. Об окончательности результатов по безусловной сходимости ортогональных рядов (а значит, и ортоподобных неотрицательных систем разложения функций) см. [15, с. 112, 113] и [13, с. 310–316].

§ 4. О примерах и конструкциях систем

В этом параграфе будут приведены примеры ортоподобных неотрицательных систем разложения и доказаны некоторые теоремы об общих методах их построения. Простейшей из них является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9. *Если P – оператор проектирования в гильбертовом пространстве H на подпространство H' , а $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – ортоподобная система разложения в H (по определению 1), то ее проекция $\{P(e^\omega)\}_{\omega \in \Omega} \subset H'$ – ортоподобная система разложения в H' (причем если начальная система была неотрицательной, то спроектированная система также неотрицательна).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in H'$, то $(y, e^\omega) = (y, P(e^\omega))$, а так как $y = P(y)$, то, используя [7, с. 128], получаем для случаев и собственного, и несобственного интегрирования по Лебегу, что

$$y = P \left(\int_{\Omega} (y, P(e^\omega)) e^\omega d\mu(\omega) \right) = \int_{\Omega} (y, P(e^\omega)) P(e^\omega) d\mu(\omega).$$

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет из ортонормированных систем с помощью проектирования получать примеры ортоподобных неотрицательных систем, не являющихся ортогональными. Из изложенного в [12] критерия, позволяющего определять, когда ортоподобная неотрицательная система разложения является ортогональной проекцией ортогональной или ортонормированной системы, следует, что все не более чем счетные ортоподобные неотрицательные системы могут быть получены операцией проектирования ортогональных систем.

Изложим еще некоторый метод построения ортоподобных неотрицательных систем разложения функций.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H (по определениям 1 и 2). Пусть Υ – пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой ν , $\Omega \times \Upsilon$ – произведение пространств Ω и Υ , $\mu \times \nu$ – произведение мер μ и ν (см. [7, с. 201–206]), Φ_ν – такое измеримое отображение Υ в пространство линейных непрерывных операторов, отображающих H в H , что*

$$\int_{\Upsilon} \Phi_\nu \cdot \Phi_\nu^* d\nu(\nu) = E, \quad (20)$$

E – тождественный оператор, под Φ^* понимается оператор, сопряженный с Φ , интеграл берется от функций со значениями в нормированном пространстве линейных непрерывных операторов.

Тогда $\{\Phi_v(e^\omega)\}_{(\omega,v) \in \Omega \times \Upsilon} \in H$ – ортоподобная неотрицательная система разложения в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(y, \Phi_v(e^\omega)) = (\Phi_v^*(y), e^\omega)$, то

$$\Phi_v^*(y) = \int_{\Omega} (y, \Phi_v(e^\omega)) e^\omega d\mu(\omega).$$

Так как Φ_v – непрерывный линейный оператор, то, используя [7, с. 128], имеем

$$\Phi_v \cdot \Phi_v^*(y) = \int_{\Omega} (y, \Phi_v(e^\omega)) \Phi_v(e^\omega) d\mu(\omega)$$

как для собственного, так и для несобственного интегрирования по Лебегу. В силу (20)

$$y = (L) \int_{\Upsilon} \Phi_v \cdot \Phi_v^*(y) d\nu(v) = (L) \int_{\Upsilon} \left(\int_{\Omega} (y, \Phi_v(e^\omega)) \Phi_v(e^\omega) d\mu(\omega) \right) d\nu(v).$$

Теорема доказана в случае, когда внутренний интеграл в правой части последнего равенства – собственный интеграл Лебега. В случае, когда этот интеграл несобственный, требуется дополнительное рассуждение. По условию теоремы $\Phi_v \cdot \Phi_v^*$, а значит, и $\|\Phi_v \cdot \Phi_v^*\|$, интегрируемы по Лебегу на Υ . По теоремам 1 и 3

$$\left\| \int_{\Omega_k} (y, \Phi_v(e^\omega)) e^\omega d\mu(\omega) \right\| = \left\| \int_{\Omega_k} (\Phi_v^*(y), e^\omega) e^\omega d\mu(\omega) \right\| \leq \|\Phi_v^*(y)\| \leq \|\Phi_v^*\| \cdot \|y\|.$$

Так как для любого линейного непрерывного оператора A из H в H выполняется равенство

$$\|A \cdot A^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1, \|z\| \leq 1} (A \cdot A^*(y), z) = \sup_{\|y\| \leq 1, \|z\| \leq 1} (A^*(y), A^*(z)) = \|A^*\|^2 = \|A\|^2,$$

то, значит,

$$\left\| \Phi_v \left(\int_{\Omega_k} (y, \Phi_v(e^\omega)) e^\omega d\mu(\omega) \right) \right\| \leq \|\Phi_v\| \cdot \|\Phi_v^*\| \cdot \|y\| = \|\Phi_v \cdot \Phi_v^*\| \cdot \|y\|,$$

где $\|\Phi_v \cdot \Phi_v^*\| \cdot \|y\|$ – интегрируемая по Лебегу на Υ функция. Пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [7, с. 168]), получаем

$$\begin{aligned} y &= (L) \int_{\Upsilon} \Phi_v \cdot \Phi_v^*(y) d\nu(v) \\ &= (L) \int_{\Upsilon} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} (y, \Phi_v(e^\omega)) \Phi_v(e^\omega) d\mu(\omega) \right) d\nu(v) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Upsilon} \int_{\Omega_k} (y, \Phi_v(e^\omega)) \Phi_v(e^\omega) d\mu(\omega) d\nu(v) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Upsilon \times \Omega_k} (y, \Phi_v(e^\omega)) \Phi_v(e^\omega) d(\nu(v) \times \mu(\omega)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Примерами континуальных ортоподобных неотрицательных систем разложения являются всплески Габора и Морле.

ПРИМЕР 1. Порожденное одной функцией $w(x)$ семейство функций

$$w_{\lambda,\beta}(x) = e^{2\pi i \lambda x} w(x - \beta),$$

где параметры λ, β и переменная x из $\mathbb{R}$, называют *системой всплесков Габора*. Если $w \in L^2(\mathbb{R})$ и $\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, то любая функция $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ представляется в виде

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f, w_{\lambda,\beta}) w_{\lambda,\beta}(x) d\lambda d\beta,$$

где последний интеграл понимается как предел в $L^2(\mathbb{R})$ интеграла

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{|\lambda| \leq A} (f, w_{\lambda,\beta}) w_{\lambda,\beta}(x) d\lambda d\beta$$

при $A \rightarrow \infty$.

Этот результат при дополнительном предположении суммируемости на $\mathbb{R}$ функции $w(x)$ был получен Д. Габором (см. [21] или [22, с. 317, 318]). В более общем виде он изложен в [21]–[23].

ПРИМЕР 2. Порожденное одной функцией $\psi(x)$ семейство функций

$$\psi_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \psi\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right),$$

где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$, называют *системой всплесков Морле*. Если функция ψ принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ и

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda = 1,$$

где $\widehat{\psi}(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $\psi(x)$, то любая функция $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ представляется в виде

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f, \psi_{\alpha,\beta}) \psi_{\alpha,\beta}(x) d\beta \frac{d\alpha}{\alpha^2},$$

где последний интеграл понимается как предел в $L^2(\mathbb{R})$ интеграла

$$\int_{|\alpha| \geq \varepsilon} \int_{\mathbb{R}} (f, \psi_{\alpha,\beta}) \psi_{\alpha,\beta}(x) d\beta \frac{d\alpha}{\alpha^2}$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Этот результат при дополнительном предположении суммируемости на $\mathbb{R}$ функции $\psi(x)$ был получен А. Гроссманном и Дж. Морле (см. [26] или [22, с. 325, 326]). В более общем виде он изложен в [21]–[23].

Заметим, что в [23] оба приведенных примера получаются при помощи некоторой общей конструкции.

В заключение отметим, что приведенные результаты свидетельствуют, по мнению автора, о перспективности изучения систем разложения, подобных ортогональным.

Список литературы

1. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Т. 2. М.: Изд-во МГУ, 1987.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 3. М.: Высшая школа, 1989.
3. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1991.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
5. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1. Харьков: Вища школа, 1977.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
8. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1987.
9. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1989.
10. Лукашенко Т. П. Системы разложения, подобные ортогональным // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. № 2. С. 487–517.
11. Лукашенко Т. П. Ортоподобные неотрицательные системы разложения // Вест. Моск. ун-та. Сер. I. Математика, механика. 1997. № 5. С. 27–31.
12. Лукашенко Т. П. О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12. С. 57–72.
13. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
14. Качмарж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.
15. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963.
16. Меньшов Д. Е. Sur les séries de fonctions orthogonales // Fund. Math. 1923. V. 4. P. 82–105.
17. Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Annalen. 1922. Bd. 87. P. 111–138.
18. Orlicz W. Zur Theorie der Orthogonalfunktionen // Bull. Intern. Acad. Sci. Polon. Cracovie. 1927. P. 81–115.
19. Tandori K. Über die orthogonalen Funktionen X (unbedingte Konvergenz) // Acta Scient. Math. 1962. V. 23. № 3–4. P. 185–221.
20. Меньшов Д. Е. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales // C. R. Acad. Sci. Paris. 1924. V. 178. P. 301–303.
21. Gabor D. Theory of communication // J. Inst. Elec. Eng. (London). 1946. V. 93. № 3. P. 429–457.
22. Gasquet C., Witomski P. Analyse de Fourier et applications. Paris: Masson, 1990.
23. Лукашенко Т. П. Всплески на топологических группах // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 1. С. 15–17.
24. Лукашенко Т. П. Всплески на топологических группах // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 88–102.
25. Лукашенко Т. П. Системы разложения на пространствах с мерой // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 165–174.
26. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 723–736.

Поступило в редакцию
9.X.1996