Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Полуголоморфные структуры, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 5, 207–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:18:49

УДК 512.6

Н. А. Тюрин

Полуголоморфные структуры

В настоящей работе рассматриваются уравнения $SU(4)$ -инстантона на комплексно-ориентируемых многообразиях, вводится понятие полуголоморфной структуры на расслоениях над данными многообразиями, выводится условие совпадения понятий голоморфности и полуголоморфности.

Библиография: 2 наименования.

§ 0. Введение

В декабре 1996 г. в серии докладов на конференции “Калибровочные теории” в Кембридже С. Дональдсон предложил программу комплексификации “классической” калибровочной теории в размерностях 2, 3 и 4. Под его руководством над этой программой работает группа математиков из Оксфорда (Р. Томас, К. Льюис и др.); предварительное описание основных конструкций приведено в препринте [1]. Фрагментом этой программы является обобщение теории антиавтодуальных связностей на четырехмерных римановых многообразиях.

Анализ предложенной конструкции привел нас к предположению о возможности приложения ее к доказательству гипотезы Ходжа для четырехмерных многообразий Калаби–Яо, например для произведения поверхностей типа КЗ. Это предположение заставляет обратить внимание на исследование соответствующих геометрических конструкций и сконцентрироваться на преодолении значительных технических трудностей, неизменно тормозящих эти исследования.

В настоящей работе представлены некоторые предварительные результаты о полуголоморфных структурах на комплексных расслоениях над четырехмерными многообразиями Калаби–Яо и выявлена связь их с привычными голоморфными структурами.

Необходимо заметить, что ставшее традиционным именование алгебраических многообразий с тривиальным каноническим классом многообразиями Калаби–Яо может привести к недоразумениям. Например, в изложенных ниже конструкциях не используются метрики Калаби–Яо на таких многообразиях, а используется только комплексная ориентация, т.е. тривиализация канонического расслоения. Мы не в силах преодолеть традицию, привнесенную физиками, упорно именуемыми многообразия с тривиальным каноническим классом многообразиями Калаби–Яо.

Работа выполнена при финансовой помощи РФФИ, гранты № 97-01-00933, 96-01-00614.

Во многих аспектах новая теория действительно является “комплексификацией” классической. Это позволяет сохранить результаты многих вычислений, меняя только геометрический смысл “единиц измерения”. Поэтому естественно начать описание конструкций с краткого напоминания их классического варианта.

Рассмотрим X – гладкое, ориентируемое, компактное четырехмерное многообразие. Выбор римановой метрики g и ориентации определяет вещественный оператор Ходжа

$$*_g: \Omega^i \rightarrow \Omega^{4-i},$$

отображающий i -формы на X в $(4-i)$ -формы, так что для любой пары форм α, β

$$\alpha \wedge *_g \beta = (\alpha, \beta) \cdot d\mu, \quad (0.1)$$

где $d\mu$ – элемент объема. Легко видеть, что этот оператор действует как инволюция на пространстве сечений Ω^2 и не зависит от выбора элемента объема, т.е. определяется конформной структурой, задаваемой метрикой g , и выбором ориентации.

Оператор Ходжа $*_g$ согласован с внешним дифференцированием и оператором Лапласа, так что его действие корректно определено на классах когомологий многообразия X . Форма ω называется (*анти*)*автодуальной*, если

$$*_g \omega = (\pm) \omega. \quad (0.2)$$

Таким образом, все пространство 2-форм разлагается в прямую сумму собственных подпространств оператора Ходжа:

$$\Omega^2 = \Omega_+ \oplus \Omega_-. \quad (0.3)$$

Напомним, что 2-форма ω совпадает с формой кривизны некоторой связности на линейном расслоении L , если она замкнута (тождество Бьянки) и представляет после умножения на стандартную константу $(\frac{i}{2\pi})$ целочисленный класс когомологий $(c_1(L))$. Обозначим символом

$$\mathcal{M}_{\text{asd}}(L) \quad (0.4)$$

многообразие антиавтодуальных связностей на линейном расслоении L . Виртуальная размерность

$$\text{v. dim } \mathcal{M}_{\text{asd}}(L) = -b_2^+(X) \quad (0.5)$$

не зависит от топологического типа расслоения L .

Немного усложняя задачу, рассмотрим $\mathbb{C}^r$ -расслоение E на X с фиксированной эрмитовой формой h и калибровочную группу унитарных автоморфизмов $\mathcal{G}_h$ этого расслоения. Пусть $\mathcal{A}(E_h)$ – пространство эрмитовых связностей на расслоении E . Тогда пространство орбит

$$\mathcal{B}(E_h) = \mathcal{A}_h(E)/\mathcal{G}_h \quad (0.6)$$

наделено структурой банахова орбифолда со множеством простейших особых точек, соответствующих приводимым связностям.

Разложение (0.3) продолжается до разложения пространства форм со значениями в пространстве сечений расслоения $\text{End } E$:

$$\Omega^2(\text{End } E) = \Omega^+(\text{End } E) \oplus \Omega^-(\text{End } E), \quad (0.2')$$

однако в этом случае калибровочная группа $\mathcal{G}_h$ нетривиально действует на пространстве $\Omega^2(\text{End } E)$, сохраняя разложение (0.2'). Иначе говоря, имеется нетривиальное расслоение над пространством орбит (0.6)

$$\overline{\Omega^2(\text{End } E)} = (\mathcal{A}_h(E) \times \Omega^2(\text{End } E)) / \mathcal{G}_h \quad (0.7)$$

со слоем $\Omega^2(\text{End } E)$. Это расслоение имеет выделенное сечение, т.е. $\mathcal{G}_h$ -эквивариантное отображение

$$s_F: \mathcal{A}_h(E) \rightarrow \Omega^2(\text{End } E), \quad (0.8)$$

сопоставляющее связности $a \in \mathcal{A}_h(E)$ ее тензор кривизны F_a .

Множество нулей этого сечения, образуемое орбитами плоских связностей, т.е. классами представлений фундаментальной группы X , пусто, если расслоение E топологически нетривиально.

Разложение (0.2') эквивариантно относительно действия $\mathcal{G}_h$ и, следовательно, определяет разложения расслоения (0.7)

$$\overline{\Omega^2(\text{End } E)} = \overline{\Omega^2(\text{End } E)}_+ \oplus \overline{\Omega^2(\text{End } E)}_- \quad (0.9)$$

и сечения (0.8)

$$\begin{aligned} s_F &= s_F^+ + s_F^-, \\ s_F^+ &: \mathcal{A}_h(E) \rightarrow \Omega^2(\text{End } E)_+, \\ s_F^- &: \mathcal{A}_h(E) \rightarrow \Omega^2(\text{End } E)_-. \end{aligned} \quad (0.10)$$

Множества нулей компонент последнего разложения почти всегда нетривиальны, обозначаются

$$(s_F^+)_0 = \mathcal{M}_{\text{asd}} \quad (0.11)$$

и называются *многообразиями модулей инстантонов или антиавтотодуальных связностей* топологического типа E . Похожим образом

$$(s_F^-)_0 = \mathcal{M}_{\text{sd}} \quad (0.12)$$

называются *многообразиями модулей антиинстантонов или автотодуальных связностей* топологического типа E .

Эти подмножества бесконечномерного пространства орбит конечномерны, гладки в случае $b_+^2 > 0$ или имеют простейшие особенности, если $b_+^2 = 0$.

Топология расслоения E отражается в свойствах тензора кривизны и определяет простейшие запреты на непустоту этих многообразий; напомним, что в алгебре Ли $u(r)$ косоэрмитовых матриц

$$\mathrm{tr}(\xi^2) = -|\xi|^2,$$

поэтому

$$\mathrm{tr} F_a^2 = -(|F_a^+|^2 - |F_a^-|^2) d\mu, \quad (0.13)$$

где $d\mu$ – элемент объема римановой метрики. С другой стороны, класс когомологий формы равен

$$\left[\frac{1}{8\pi^2} \mathrm{tr} F_a^2 \right] = c_2(E) - (1/2)c_1(E)^2, \quad (0.14)$$

где c_i – классы Черна расслоения E . Таким образом, если a – антиавтотдуальная связность $F_a^+ = 0$, то

$$F_a^- \neq 0 \implies c_2(E) - (1/2)c_1(E)^2 > 0,$$

и дополнительное предположение о классах Черна влечет

$$c_2(E) - (1/2)c_1(E)^2 = 0 \implies F_a^- = 0, \quad (0.15)$$

т.е. это возможно, только если a – плоская связность, что в свою очередь возможно, только если E топологически тривиально.

Таким образом, существование инстантов накладывает условия на топологию расслоения, и, в частности, если расслоение E топологически нетривиально, но $c_2(E) - (1/2)c_1(E)^2 = 0$, то не существует инстантов или антиинстантов данного топологического типа.

Для общей римановой метрики $\mathcal{M}_{\mathrm{asd}}$ – гладкое вещественное многообразие размерности

$$\dim \mathcal{M}_{\mathrm{asd}} = 8c_2(E) - 4c_1(E)^2 - (r^2 - r + 1)(1 - b_1 + b_2^+), \quad (0.16)$$

но априорная неотрицательность этого числа не влечет существования инстантов данного топологического типа.

Во всех предыдущих формулах встречается агрегат

$$8\pi^2 \left(c_2(E) - \frac{1}{2}c_1(E)^2 \right) = k(E) \in H^4(X, \mathbb{R}),$$

мы будем его использовать и в дальнейшем.

ЗАМЕЧАНИЕ. Смена ориентации переставляет местами и понятия анти- и автодуальности и многообразия $\mathcal{M}_{\text{asd}}$ и $\mathcal{M}_{\text{sd}}$, но а priori эти последние не только не диффеоморфны, но и разной размерности, если $b_2^+ \neq b_2^-$.

Кольцо когомологий $\mathcal{M}_{\text{asd}}$ порождается поднятыми с X классами точки, фундаментальным и всеми средними $\gamma_i = \mu([\Sigma_i])$, $i = 1, \dots, b_2$. Если размерность многообразия модулей четна, то возможно определить полиномиальные выражения

$$P(\gamma_i) = \gamma^d \cdot [\mathcal{M}_{\text{asd}}], \quad (0.17)$$

из которых наборы численных инвариантов получаются подстановкой определенных выше μ -классов. Определение некорректно, если не задать компактификацию (Фрид–Уленбек) или не представить выбор представителей классов так, чтобы они не “задевали” замыкания (Дональдсон). Как бы то ни было, конструкция дает полиномиальные инварианты гладких структур на четырехмерных многообразиях.

Подробно с теорией Дональдсона можно познакомиться в [2].

§ 1. Комплексный оператор Ходжа

В качестве базовых многообразий для обобщения вещественной теории на случай комплексной размерности 4 необходимо выбрать комплексно-ориентируемые многообразия. Комплексно-аналитическая ориентация – это выбор тривиализации канонического линейного расслоения.

Таким образом, нас будет интересовать комплексно-ориентируемое многообразие, а фиксация старшей голоморфной формы θ и будет задавать комплексную ориентацию.

Пусть X – такое многообразие. Выбор любой келеровой метрики превращает его в многообразие со структурной группой $\text{SU}(4)$.

Выбор метрики, определяющей норму на пространствах форм, и старшей голоморфной формы без нулей $\theta \in \Omega^{4,0}$ определяет “комплексный” оператор Ходжа $*_{\mathbb{C}}: \Omega^{0,2} \rightarrow \Omega^{0,2}$, обладающий следующим свойством:

$$\alpha \wedge *_{\mathbb{C}} \alpha = |\alpha|^2 \cdot \bar{\theta} \quad (1.1)$$

для любой формы $\alpha \in \Omega^{0,2}$. Требования невырожденности и эрмитовости позволяют единственным образом восстановить по квадратичной форме билинейную, и, как и в вещественном случае, оператор $*_{\mathbb{C}}$ задает разложение

$$\Omega^{0,2} = \Omega_+^{0,2} \oplus \Omega_-^{0,2}, \quad (1.2)$$

причем

$$\alpha \in \Omega_{\pm}^{0,2} \equiv \alpha \wedge \alpha = \pm |\alpha|^2 \cdot \bar{\theta}. \quad (1.2')$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из определения, оператор $*_{\mathbb{C}}$ комплексный антилинейный, поэтому разложение $\Omega^{0,2}$ на собственные подпространства *вещественно*.

В отличие от вещественного случая, когда разложение на автодуальные и анти-автодуальные формы было ортогонально относительно внешнего произведения, на сей раз мы имеем только вещественную ортогональность, т.е. для пары $\alpha^{\pm} \in \Omega_{\pm}^{0,2}$ внешнее произведение $\alpha^+ \wedge \alpha^-$ а priori нулю не равно. Из локальных вычислений следует простая

ЛЕММА. Пусть, как и выше, $\alpha^\pm \in \Omega_\pm^{0,2}$ и $\alpha^+ \wedge \alpha^- = Z(\alpha)\bar{\theta}$, где $Z(\alpha)$ – комплексная функция. Тогда $\operatorname{Re} Z(\alpha) = 0$.

Обратимся теперь к взаимосвязи метрики и формы θ .

Требование невырожденности влечет равенство единице нормы $|\theta|^2$ по метрике в каждой точке. Поэтому

$$\theta \wedge \bar{\theta} = d\mu, \quad (1.3)$$

где последняя форма – элемент объема.

Вещественная и мнимая части формы θ :

$$\operatorname{Re} \theta = \frac{1}{2}(\theta + \bar{\theta}), \quad \operatorname{Im} \theta = \frac{1}{2i}(\theta - \bar{\theta}) \quad (1.4)$$

– пара гармонических форм, представляющих классы $c, \bar{c} \in H^4(X, \mathbb{R})$ соответственно, причем эти классы взаимно ортогональны, а гармонические формы автодуальны в обычном смысле относительно выбранной нами метрики.

Заметим, что форма θ определена с точностью до множителя $\lambda \in \mathbb{C}^*$, но на разложение (1.2) модуль этого числа не влияет, а влияет только множитель $e^{i\tau}$, $\tau = \operatorname{const}$, который мы будем называть *фазой*. При смене фазы классы c и $\bar{c}$ переходят в линейные комбинации исходных, что соответствует повороту на угол τ . Как мы увидим ниже, выбор фазы играет существенную роль в определении полуголоморфных связностей.

Далее, форма кривизны F_a связности a на комплексном многообразии разлагается на (p, q) -компоненты:

$$F_a = F_a^{2,0} + F_a^{1,1} + F_a^{0,2}, \quad (1.5)$$

и последняя компонента принадлежит расщепленному выше пространству $\Omega^{0,2}$.

Унитарная связность a определяет голоморфную структуру на L , если компонента $F_a^{0,2}$ равна нулю. Но теперь на формах типа $(0,2)$ определен оператор $*_{\mathbb{C}}$, и $(0,2)$ -компонента кривизны раскладывается в сумму:

$$F_a^{0,2} = (F_a^{0,2})_+ \oplus (F_a^{0,2})_-.$$

Поэтому естественно рассматривать те связности, у которых зануляется не вся $(0,2)$ -компонента, а только “половина” ее, скажем $(F_a^{0,2})_+$.

§ 2. Пространство $\bar{\partial}$ -операторов

Снова рассмотрим на X комплексное r -расслоение $E \rightarrow X$ и калибровочную группу $\mathcal{G} = \operatorname{Aut} E$ всех автоморфизмов этого расслоения.

Вместо пространства всех связностей $\mathcal{A}(E)$ на расслоении E рассмотрим пространство “полусвязностей”, т.е. пространство $\bar{D}(E)$ всех $\bar{\partial}$ -операторов. А именно, назовем *$\bar{\partial}$ -оператором* дифференциальный оператор, действующий на пространстве сечений расслоения

$$\bar{\partial}: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(E) \quad (2.1)$$

и удовлетворяющий правилу Лейбница: для любой функции f и сечения $s \in \Gamma(E)$

$$\bar{\partial}(f \cdot s) = f\bar{\partial}s + \bar{\partial}f \otimes s. \quad (2.2)$$

Действие такого оператора естественно продолжается на пространства $\Omega^{0,i}(E)$, $\Omega^{0,i}(\text{End } E)$ опять же по правилу Лейбница.

Очевидно, как и пространство связностей, пространство $\bar{D}(E)$ $\bar{\partial}$ -операторов есть аффинное пространство над векторным пространством $\Omega^{0,1}(\text{End } E)$. Квадрат

$$\bar{\partial} \cdot \bar{\partial} \in \Omega^{0,2}(\text{End } E) \quad (2.3)$$

будет уже оператором алгебраическим, просто тензором из $\Omega^{0,2}(\text{End } E)$, который мы будем также называть *кривизной* $\bar{\partial}$ -оператора.

Естественное действие комплексных калибровок на пространство $\bar{D}(E)$ определяет пространство орбит

$$\mathcal{B}(E) = \bar{D}(E)/\mathcal{G}, \quad (2.4)$$

но это множество никакой приличной структурой не обладает. Из привычных математических объектов это множество больше всего напоминает множество листов слоения. Сколько-нибудь продуктивно его можно использовать в окрестности “хорошего” трансверсального сечения. Мы выбираем это сечение как “нулевой уровень отображения моментов”, чтобы воспользоваться соображениями симплектической редукции, которая сводит факторизацию по комплексной группе к факторизации по ее компактной форме (в нашем случае – по $\mathcal{G}_h$, см. (0.6)). Поэтому чуть позже мы опишем хорошо известную связь между полусвязностями и эрмитовыми (унитарными) связностями.

Тем не менее мы рассмотрим расслоение на $\mathcal{B}(E)$, слоем которого является пространство $(0,2)$ -форм с коэффициентами в расслоении $\text{End } E$:

$$\overline{\Omega^{0,2}(\text{End } E)} = (\bar{D}(E) \times \Omega^{0,2}(\text{End } E))/\mathcal{G}. \quad (2.5)$$

Это расслоение тоже имеет сечение, т.е. $\mathcal{G}$ -эквивариантное отображение

$$s_{(0,2)}: \bar{D}(E) \rightarrow \Omega^{0,2}(\text{End } E), \quad (2.6)$$

сопоставляющее полусвязности $\bar{\partial} \in \bar{D}(E)$ ее тензор кривизны (см. (2.3)).

Множество нулей этого сечения совпадает с множеством голоморфных расслоений топологического типа E , так как равенство $\bar{\partial} \cdot \bar{\partial} = 0$ эквивалентно интегрируемости почти комплексной структуры, заданной $\bar{\partial}$. Отсюда мы видим, что наше сечение несколько не трансверсально: его нули содержат все, в том числе и нестабильные, расслоения, составляющие компоненты растущих до бесконечности размерностей.

Разложение (1.2) продолжается и на пространство $\Omega^{0,2}(\text{End } E)$:

$$\Omega^{0,2}(\text{End } E) = \Omega^{0,2}(\text{End } E)_+ \oplus \Omega^{0,2}(\text{End } E)_-, \quad (2.7)$$

и определяет прямое разложение векторного расслоения (2.5):

$$\overline{\Omega^{0,2}(\text{End } E)} = \overline{\Omega^{0,2}(\text{End } E)_+} \oplus \overline{\Omega^{0,2}(\text{End } E)_-}, \quad (2.8)$$

которое и лежит в основе новой конструкции С. Дональдсона. Мы подробно опишем его в следующем параграфе, а сейчас, чтобы сделать эти конструкции математически содержательными, опишем соответствие между полусвязностями и эрмитовыми связностями.

Пусть $\bar{\partial}$ – некоторый оператор Коши–Римана. Для восстановления по нему эрмитовой связности a нам достаточно для каждого сечения $s \in \Gamma(E)$ восстановить первое слагаемое в разложении

$$d_a s = \partial_a s + \bar{\partial}_a s. \quad (2.9)$$

Второе слагаемое – элемент из $\Omega^{0,1}(E) = \Gamma(A^{0,1} \otimes E)$, где $\Omega^{0,1} = \Gamma(A^{0,1})$ и на первом сомножителе действует обычная вещественная структура, поэтому нам достаточно задать сопряжение на втором. Наличие эрмитовой структуры дает отождествление $h: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)^*$, поэтому введение эрмитовой метрики на расслоении определяет необходимый изоморфизм.

Все получаемые таким образом связности совместимы с выбираемой метрикой h . Отсюда видно, что пространство операторов Коши–Римана на самом деле изоморфно пространству $U(r)$ -связностей на E :

$$\bar{D}(E) = \mathcal{A}_h(E). \quad (2.10)$$

При этом отождествлении унитарная калибровочная группа $\mathcal{G}_h$ – компактная форма комплексной группы $\mathcal{G}$, т.е. если мы рассмотрим проекцию

$$\mathcal{A}(E) \rightarrow \bar{D}(E) \quad (2.11)$$

пространства связностей $\mathcal{A}(E)$ на E , сопоставляющую ковариантной производной связности ее $\bar{\partial}$ -компоненту, то подпространство эрмитовых связностей $\mathcal{A}_h(E) \subset \mathcal{A}(E)$ является сечением этой проекции. Однако оно не эквивариантно относительно действия комплексной калибровочной группы, а эквивариантно только относительно компактной подгруппы $\mathcal{G}_h$. Чтобы сравнить соответствующие факторы, мы должны наложить условия на эрмитовы связности, играющие роль нулевого уровня отображения моментов. В качестве иного пути сравнения можно предложить введение новой калибровочной эквивалентности, в основе которой лежит стремление комплексифицировать группу $\mathcal{G}_h$.

Напомним, что две связности, $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_h(E)$, являются $\mathcal{G}_h$ -эквивалентными, если существует унитарное преобразование, сопрягающее одну связность во вторую. Иными словами, калибровочная эквивалентность предполагает существование унитарного преобразования s такого, что

$$d_{a_1} - d_{a_2} = d_{a_1} s \in \Omega^1(\text{End } E), \quad (2.12)$$

и это соотношение симметрично. Переход к полной группе $\mathcal{G}$ происходит снятием ограничения на унитарность s . Но при сопряжении неунитарным автоморфизмом мы выйдем из нашего пространства $\mathcal{A}_h(E)$. Вместо этой натуральной комплексификации можно предложить следующее.

На кокасательном расслоении Ω_X^1 над комплексным многообразием X имеются два действия группы $\mathbb{C}^*$ ($\Omega^1 = T_{\mathbb{C}}^*X = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$ – прямая сумма пространств голоморфных и антиголоморфных форм). Первое действие – просто умножение на $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}^*$. Второе действие можно определить как перестановочное с вещественной структурой (очевидно, что первое не сохраняет вещественность формы).

На пространстве Ω^1 имеется вещественный оператор I – комплексная структура, естественно задаваемая комплексной структурой на касательном расслоении. Если форма $\omega \in T^*X$ вещественна, то и $I(\omega) \in T^*X$ будет такой.

Определим действие $\alpha + i\beta$ на ω как

$$(\alpha + i\beta)(\omega) = \alpha\omega - \beta I(\omega). \quad (2.13)$$

Очевидно, такое определение дает

$$\begin{aligned} [(\alpha + i\beta)(\omega)]^{1,0} &= (\alpha - i\beta)\omega^{1,0}, \\ [(\alpha + i\beta)(\omega)]^{0,1} &= (\alpha + i\beta)\omega^{0,1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

(Безусловно, в правой части формулы (2.13) можно вместо минуса поставить плюс, тогда в правых частях последних формул знаки также поменяются местами.)

Назовем эти действия группы $\mathbb{C}^*$ *естественным* и *вещественным* соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта пара задает явное действие группы $SU(2)$ на касательном и кокасательном расслоениях над комплексным (или почти комплексным) многообразием. Кроме того, в гиперкелеровом случае каждая из тройки комплексных структур I, J, K задает свое вещественное действие $\mathbb{C}^*$, и теперь уже четверка порождает действие группы $SU(4)$.

Вернемся к вопросу о калибровочной эквивалентности связностей.

Назовем две связности $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ -*полуэквивалентными*, если их разность имеет вид

$$a_1 - a_2 = (\alpha + i\beta)_{\mathbb{R}}(d_{a_1}s) = \alpha d_{a_1}s - \beta I(d_{a_1}s), \quad (2.15)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а s – унитарный эндоморфизм. Очевидно, введенное нами отношение не будет транзитивным, поэтому, строго говоря, это не эквиваленция.

Из второй формулы (2.14) видно, что на пространстве $\bar{\partial}$ -операторов соотношения $\mathcal{G}$ -эквивалентности и $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ -полуэквивалентности в точности совпадают, поэтому можно говорить о “совпадении” факторов:

$$\mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}} \cong \bar{D}/\mathcal{G}, \quad (2.16)$$

если только удастся правильно определить первый из них.

Определение возможно в следующем простейшем модельном примере, раскрывающем мотивы введения такой полуэквиваленции.

ПРИМЕР. Рассмотрим на комплексном многообразии X тривиальное линейное расслоение L с естественной эрмитовой структурой на нем. Тогда пространство $\mathcal{A}_h = \{d_a = d + i\omega_a, \omega_a \in \Gamma(T^*X)\}$, и две связности $\mathcal{G}_h$ -эквивалентны, если только их разность имеет вид

$$a_0 - a_1 = i df,$$

где f – вещественная функция на X .

Рассмотрим подпространство $\mathcal{A}^{1,1}$ $\mathcal{A}_h$ -связностей, задающих голоморфную структуру на L , т.е. таких $a \in \mathcal{A}_h$, что $F_a^{0,2} = 0$. Очевидно, что это подпространство устроено следующим образом:

$$a \in \mathcal{A}^{1,1} \equiv d_a = d + i(df + I(dg)), \quad (2.17)$$

где I – оператор комплексной структуры.

Таким образом, если мы хотим получить конечное факторпространство голоморфных структур на L , необходимо ввести новое отношение на $\mathcal{A}^{1,1}$, а именно отношение $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ -полуэквивалентности. Результатом факторизации, проводимой в два шага: сначала обычным образом по действию $\mathcal{G}_h$, потом по “чисто мнимому” действию $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ (т.е. по отношению $a_1 \equiv a_2$, если $a_1 - a_2 = i(I(dg))$), будет единственная точка.

Завершая рассмотрение этого простого примера, найдем “объемлющее пространство” найденной точки – фактор $\mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$.

Отождествив $\mathcal{A}_h \equiv \Omega^{0,1}$, действием $\mathcal{G}$ получаем $\Omega^{0,1}/\text{Im } \bar{\partial}$; в результате нам хватило отношения полуэквивалентности только на факторизацию пространства решений уравнения $F_a^{0,2} = 0$, но при этом все пространство связностей не обладает никакой подходящей математической структурой.

Введенное выше отношение $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ -эквивалентности не отвечает какому-либо действию на E : комплексифицировав алгебру Ли, не всегда можно комплексифицировать группу.

Вернемся теперь к связностям и полусвязностям на расслоении E .

Фиксация комплексной ориентации позволяет определить “период” любого целочисленного класса четырехмерных когомологий таким же образом, что и на эллиптической кривой или на КЗ-поверхности. Если $\sigma \in H^4(X, \mathbb{Z})$ – целочисленный класс, то *периодом* естественно назвать

$$\int_{\sigma^*} \theta = \int_X \sigma \wedge \theta,$$

где $\sigma^* \in H_4(X, \mathbb{Z})$ – двойственный по Пуанкаре класс.

Возвращаясь к эквивалентности (2.10), (2.11), воспользуемся теперь аппаратом Черна–Вейля, связывающим однородные полиномы от кривизн связностей с характеристическими классами расслоений.

Введение эрмитовой метрики на E позволяет во всех рассуждениях заменить операторы Коши–Римана на “полные” эрмитовы связности. Квадрат $\bar{\partial}_a \cdot \bar{\partial}_a$ представится просто как $F_a^{0,2}$ – антиголоморфная часть формы кривизны эрмитовой связности.

Тогда выражение $-\frac{1}{4\pi^2} \text{Tr}(F_a^{0,2} \wedge F_a^{0,2})$ представляет класс комплексных когомологий

$$[c_1^2(E) - 2c_2(E)] \Big|_{H^{0,4}} = c \cdot \bar{\theta},$$

где c – константа.

Это дает нам первую константу, а другим численным инвариантом можно считать квадрат

$$\begin{aligned} & [c_1^2(E) - 2c_2(E)]^{4,0} \cdot [c_1^2(E) - 2c_2(E)]^{0,4} \\ &= \frac{1}{2} (c_1^2(E) - 2c_2(E))^2 - [(c_1^2(E) - 2c_2(E))^{2,2}]^2. \end{aligned}$$

Теперь мы можем переходить к исследованию разложения $*_{\mathbb{C}}$.

§ 3. Два уравнения $SU(4)$ -инстантона. Выбор фазы

Построенный выше оператор $*_{\mathbb{C}}$, как уже указывалось, определяет разложение $\Omega^{0,2}(E)$ на собственные подпространства $\Omega^{0,2}(E)_{\pm}$. Тогда на $\bar{D}(E)$ рассмотрим следующее уравнение:

$$\bar{\partial} \cdot \bar{\partial}|_{\Omega^{0,2}(E)_+} = 0,$$

или, если мы отождествили $\bar{\partial}$ -оператор с эрмитовой связностью,

$$(F_a^{0,2})_+ = 0. \quad (*)$$

Последнее является непосредственным обобщением уравнения антиавтодуальности в вещественной теории и называется *уравнением $SU(4)$ -инстантона относительно комплексной ориентации θ* . Так же, как и в классической теории Дональдсона, оно калибровочно инвариантно (но уже относительно комплексифицированной группы). Так же, как и в классической теории, линеаризация этого уравнения на орбитах калибровочной группы представляется некоторым эллиптическим комплексом.

Действительно, из определения калибровочной эквивалентности операторов Коши–Римана следует, что срез $\bar{D}(E)$ вблизи орбиты $\bar{\partial}_a$ изображается решениями уравнения кулоновской калибровки

$$\bar{\partial}_a^*(\delta a) = 0, \quad (3.1)$$

где $*$ – сопряжение, задаваемое фиксированной метрикой. Тогда комплекс

$$\Omega^{0,0}(\text{End } E) \xrightarrow{\bar{\partial}_a} \Omega^{0,1}(\text{End } E) \xrightarrow{\bar{\partial}_a^+} \Omega^{0,2}(\text{End } E)_+ \xrightarrow{\bar{\partial}_a} \Omega^{0,3}(\text{End } E) \quad (3.2)$$

точен во втором члене, и пространство его когомологий

$$H^1 = \ker \bar{\partial}_a^+ / \text{Im } \bar{\partial}_a = \ker(\bar{\partial}_a^+ \oplus \bar{\partial}_a^*) \quad (3.3)$$

моделирует касательное расслоение к многообразию решений уравнения (*) по модулю калибровочной эквивалентности.

Выбранная для отождествления метрика $||_h$ на E позволяет переписать уравнение (*) в виде

$$\mathrm{Tr}(F_a^{0,2} \wedge F_a^{0,2}) = |F_a^{0,2}|^2 \cdot \bar{\theta}. \quad (**)$$

По аналогии с классическим случаем мы можем рассмотреть аналогичные уравнения антиинстантонов

$$\bar{\partial} \cdot \bar{\partial}|_{\Omega^{0,2}(E)_-} = 0,$$

или

$$(F_a^{0,2})_- = 0. \quad (*')$$

Как и в классическом случае, уравнения (*) переходят в уравнения (*') при смене знака комплексной ориентации:

$$\theta \rightarrow -\theta.$$

Однако на сей раз ситуация более богатая: мы можем менять не только знак, но и фазу комплексной ориентации:

$$\theta \rightarrow -q \cdot \theta, \quad q = e^{i \cdot \tau}. \quad (3.4)$$

Таким образом, мы имеем непрерывное семейство уравнений вида (*), индексы линеаризаций которых сохраняются. Это и отличает комплексную ситуацию от вещественной (см. замечание после формулы (0.17)).

С другой стороны, очевидно, что решение, инстантонное относительно двух разных (“неколлинеарных”) ориентаций, определяет голоморфную структуру на E . Далее, выбор комплексной ориентации определяет фазу любого 4-коцикла (т.е. любой замкнутой 4-формы) следующим образом. Выражение $\mathrm{Tr}(F_a \wedge F_a)$ является замкнутой вещественной формой, представляющей класс $k(E) \in H^4(X, \mathbb{R})$. Таким образом, выбор комплексной ориентации θ определяет фазу целочисленного класса когомологий $\frac{1}{4\pi^2}k(E)$:

$$\tau_\theta(E) = \arg\left(\frac{1}{4\pi^2}k(E) \cdot \theta\right), \quad (3.5)$$

и E допускает полуголоморфную связность, только если эта фаза равна нулю.

В следующем параграфе будет доказано, что из нетривиальности фазы следует тривиальность множества решений уравнения (**).

Интересно, что похожие уравнения (*) и (**) в рамках калибровочной теории достаточно различны. Действительно, первое калибровочно-инвариантно относительно всей комплексной группы $\mathcal{G}$, в то время как второе не выдерживает действия полной группы. Первое, как и условие голоморфности, использует только (0,2)-часть формы кривизны, поэтому естественно рассматривать его на пространстве $\bar{D}(E)$, а второе – на $\mathcal{A}_h(E)$. Пространство решений первого факторизуется по действию полной комплексной группы $\mathcal{G}$, второго – только по действию максимальной компактной подгруппы $\mathcal{G}_h$, из чего с необходимостью требуется

дополнительное условие (стабильность) для получения конечномерного фактора. В качестве альтернативы может быть предложена факторизация по отношению $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ -полуэквивалентности. Короче говоря, первое – уравнение чистой полуголоморфности, второе – стабильной.

Естественно назвать *полуголоморфной связностью* решение уравнения (**), а *полуголоморфной структурой* – класс $\mathcal{G}$ -эквивалентных полусвязностей, удовлетворяющих (*). Обозначим множество классов $\mathcal{G}_h$ -эквивалентных полуголоморфных связностей $SH_{\theta}^h(E)$.

Необходимо отметить, что любая голоморфная связность на E по определению является полуголоморфной для произвольных h, θ .

§ 4. Лагранжиан

Эквивалентность уравнений (*), (**) в присутствии эрмитовой структуры на E и равенство (2.16) позволяют вывести необходимое условие существования полуголоморфных связностей на расслоении с классами Черна c_1, c_2 .

Достаточно очевидно, что функционал на пространстве связностей

$$T(a, \theta) = \int_X \text{Tr}(F_a \wedge F_a) \wedge \theta \quad (4.1)$$

постоянен: для любой связности $a \in \mathcal{A}_h(E)$ $T(a, \theta) = \text{const}$. Действительно, $[\text{Tr}(F_a \wedge F_a)] = k(E)$, и, значит, $T(a, \theta) = \text{const} = k(E) \cdot (c + i\bar{c})$.

Все наши наблюдения суммирует

ТЕОРЕМА. *Для существования полуголоморфной относительно θ связности на E необходимо, чтобы период класса $k(E)$ был вещественным. Если, кроме того, этот период равен нулю, то полуголоморфность совпадает с голоморфностью.*

Действительно, для произвольной связности $a \in \mathcal{A}_h(E)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_X \text{Tr}(F_a \wedge F_a) \wedge \theta &= \int_X \text{Tr}(F_a^+ + F_a^-)^2 \wedge \theta \\ &= \int_X \text{Tr}(F_a^+)^2 \wedge \theta + \int_X \text{Tr}(F_a^-)^2 \wedge \theta \\ &\quad + 2 \int_X \text{Tr}(F_a^+ \wedge F_a^-) \wedge \theta \\ &= \int_X (|F_a^+|^2 - |F_a^-|^2) d\mu + 2 \int_X \text{Tr}(F_a^+ \wedge F_a^-) \wedge \theta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последнее слагаемое чисто мнимо, в то время как первые два вещественны. Отсюда

$$\begin{aligned} k(E) \cdot c &= \int_X (|F_a^+|^2 - |F_a^-|^2) d\mu, \\ ik(E) \cdot \bar{c} &= 2 \int_X \text{Tr}(F_a^+ \wedge F_a^-) \wedge \theta, \end{aligned} \quad (4.3)$$

откуда следует утверждение теоремы.

Из полученных нами выражений видно, что полуголоморфные эрмитовы связности являются экстремумами функционала

$$\mathcal{L}(a) = \|F_a^{0,2}\|^2 \quad (4.4)$$

(так же, как и классические инстантоны). Действительно, если выбрать фазу таким образом, чтобы период θ относительно $k(E)$ был вещественным (а это всегда можно сделать), получаем

$$\begin{aligned} \|F_a^+\|^2 - \|F_a^-\|^2 &= k(E) \cdot c(\theta), \\ \|F_a^+\|^2 + \|F_a^-\|^2 &= \|F_a^{0,2}\|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Пусть, кроме того, фаза выбрана так, что этот период положителен. Тогда полуголоморфные связности являются минимумами функционала

$$\mathcal{L}_h(a) = \|F_a^{0,2}\|_h^2, \quad (4.6)$$

причем $a \in SH_\theta^h(E)$ равносильно тому, что

$$\|F_a^{0,2}\|^2 = -k(E) \cdot [\theta], \quad (4.7)$$

где $[\theta] \in H^{0,4}(X, \mathbb{C})$.

Интересно, что в выражение (4.6) для функционала $\mathcal{L}(a)$ не входит θ , что позволяет по-иному ввести понятие класса эквивалентных полуголоморфных связностей как минимума этого функционала.

ЗАМЕЧАНИЕ. В данном определении минимумом считается только абсолютный минимум, значение функционала в котором не зависит от выбранной метрики.

Как уже указывалось выше, пространство классов $\mathcal{G}_h$ -эквивалентных полуголоморфных связностей $SH_h(E)$ не является конечномерным.

Для получения конечномерных объектов возможны два пути.

Первый путь предполагает определение $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ -полуэквивалентности на пространстве эрмитовых связностей. При этом необходимо сначала факторизовать по обычной вещественной $\mathcal{G}_h$ -эквивалентности, после этого в малых окрестностях орбит факторизовать по чисто мнимой эквивалентности. При этом необходимо определять преобразования переклейки, что задает 1-коцикл на $\mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h$ со значениями в $\mathcal{G}_h$. С другой стороны, расслоив одно факторпространство над другим:

$$p: \mathcal{B}_h = \mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h \xrightarrow{\mathcal{G}_h} \overline{\mathcal{D}}/\mathcal{G}, \quad (4.8)$$

заметим, что “факторизация” по отношению $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ -полуэквивалентности соответствует выбору сечения s_h этого расслоения. Нули такого сечения задают область неопределенности факторизации, которая имеет в общем случае коразмерность, равную $\dim \mathcal{G}_h = \frac{1}{2} \dim \mathcal{G}$. Отсюда следует, что в общем случае, если

$$\dim \mathcal{G} > 2 \vee \dim SH, \quad (4.9)$$

где SH – пространство модулей полуголоморфных структур, возможно профакторизовать пространство полуголоморфных связностей по отношению $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ -полуэквивалентности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Еще раз отметим, что при этом факторизация объемлющего пространства $\mathcal{B}_h$ не определена.

Второй путь – ввести условие стабильности. Таким условием для уравнения $SU(4)$ -инстантона может служить (так же, как и ранее, в вещественном случае) условие

$$F_a \cdot \omega = 0, \quad (4.10)$$

где ω – келерова форма (см. [1]). Это условие когомологическое и поэтому универсальное. Оно обеспечивает “минимальность” центра кривизны и конечномерность модулей.

Нетрудно видеть, что для произвольной связности $a \in \mathcal{A}_h(E)$ из условия (4.10) следует

$$\mathrm{Tr}(F_a^{1,1} \wedge F_a^{1,1}) \wedge \omega \wedge \omega = -|F_a^{1,1}|^2 d\mu. \quad (4.11)$$

Далее, из соотношения

$$\mathrm{Tr}(F_a^{2,0} \wedge F_a^{0,2}) \wedge \omega \wedge \omega = \mathrm{Tr}(F_a^{2,0} \wedge \overline{F_a^{2,0}}) \wedge \omega \wedge \omega$$

следует

$$\mathrm{Tr}(F_a \wedge F_a) \wedge \omega \wedge \omega = -|F_a^{1,1}|^2 d\mu - 2|F_a^{2,0}|^2 d\mu = -|F_a|^2 d\mu,$$

но, с другой стороны, это выражение после интегрирования должно равняться $\mathrm{const} = k(E) \cdot [\omega]^2$, т.е. если $k(E) \cdot [\omega]^2 \geq 0$, необходимо выбирать иное условие стабильности.

Более того, в последнем равенстве в случае, если a – решение уравнения $SU(4)$ -инстантона, известна норма $(0,2)$ -компоненты формы кривизны, которая должна быть равна $k(E) \cdot c$. Следовательно, запрет на существование ω -стабильных $\mathbb{C}$ -автодуальных связностей необходимо уточнить.

Определение стабильности необходимо для построения численных инвариантов комплексно-ориентируемых многообразий. Но в отличие от вещественного случая, когда получение инвариантов гладких структур было существеннейшим вкладом в дело классификации четырехмерных римановых многообразий и послужило еще одним доводом в пользу того, что геометрия и топология в этой размерности не смыкаются, в вещественной размерности 8, на первый взгляд, никаких иных, кроме топологических, инвариантов и не должно быть. Этим (абсолютно поверхностным и не претендующим на истинность) соображением закончим обсуждение вопроса о стабильности.

В заключение приведем прямые вычисления, полезные для непосредственного исследования существования решений.

§ 5. Локальные вычисления

В настоящем параграфе мы приведем некоторые вычисления, определяющие локальную структуру разложения $\Omega^{0,2} = \Omega^+ \oplus \Omega^-$. Эти вычисления могут быть полезны при комплексном обобщении уравнений Зайберга–Виттена.

Пусть в некоторой малой окрестности выбран локальный базис кокасательного расслоения $\{dz_i, d\bar{z}_i\}$, согласованный с выбором фазы, т.е.

$$\theta = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4. \quad (5.1)$$

Такой выбор определен с точностью до действия $SU(4)$. Тогда, поскольку

$$\dim_{\mathbb{R}} \Omega^{0,2} = 12, \quad (5.2)$$

а $\pm$ -разложение вещественно, локальный $\mathbb{R}$ -базис первого прямого слагаемого Ω^+ может быть выбран таким:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= (d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 + d\bar{z}_3 \wedge d\bar{z}_4), & \bar{v}_1 &= i(d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 - d\bar{z}_3 \wedge d\bar{z}_4), \\ \bar{u}_2 &= (d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_3 - d\bar{z}_2 \wedge d\bar{z}_4), & \bar{v}_2 &= i(d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_3 + d\bar{z}_2 \wedge d\bar{z}_4), \\ \bar{u}_3 &= (d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_4 + d\bar{z}_2 \wedge d\bar{z}_3), & \bar{v}_3 &= i(d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_4 - d\bar{z}_2 \wedge d\bar{z}_3). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Локальный базис Ω^- получается из представленного выше домножением каждой строчки на i .

Таким образом, для произвольной формы $\alpha \in \Omega^{0,2}$, представимой в локальном базисе как

$$\alpha = \sum_{i < j} h_{ij} dz_i \wedge dz_j,$$

имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \alpha^+ &= \frac{1}{2}(\operatorname{Re} h_{12} + \operatorname{Re} h_{34})(d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 + d\bar{z}_3 \wedge d\bar{z}_4) \\ &\quad + \frac{i}{2}(\operatorname{Im} h_{12} - \operatorname{Im} h_{34})(d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 - d\bar{z}_3 \wedge d\bar{z}_4) + \dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha^- &= \frac{1}{2}(\operatorname{Re} h_{12} - \operatorname{Re} h_{34})(d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 - d\bar{z}_3 \wedge d\bar{z}_4) \\ &\quad + \frac{i}{2}(\operatorname{Im} h_{12} + \operatorname{Im} h_{34})(d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 + d\bar{z}_3 \wedge d\bar{z}_4) + \dots \end{aligned} \quad (5.4')$$

Из этого можно вывести локальное соотношение

$$\alpha^+ \wedge \alpha^- = i \operatorname{Im}(h_{12}h_{34} - h_{13}h_{24} + h_{14}h_{23})\bar{\theta}, \quad (5.5)$$

откуда

$$\operatorname{Re} \alpha^+ \wedge \alpha^- \theta = 0,$$

что, в частности, доказывает утверждение леммы.

Далее, в выбранном нами базисе минус-компонента произвольной формы $\alpha \in \Omega^{0,2}$ выглядит так:

$$\alpha^- = \frac{1}{2}[(\operatorname{Re} h_{12} - \operatorname{Re} h_{34}); (\operatorname{Im} h_{12} + \operatorname{Im} h_{34}); (\operatorname{Re} h_{13} + \operatorname{Re} h_{24}); (\operatorname{Im} h_{13} - \operatorname{Im} h_{24}); (\operatorname{Re} h_{14} - \operatorname{Re} h_{23}); (\operatorname{Im} h_{14} + \operatorname{Im} h_{23})], \quad (5.6)$$

откуда видно, что $\alpha \in \Omega^+$, если в любом согласованном с θ базисе

$$h_{12} = \bar{h}_{34}, \quad h_{13} = -\bar{h}_{24}, \quad h_{14} = \bar{h}_{23}. \quad (5.7)$$

Заметим, что определение оператора $*_{\mathbb{C}}: \Omega^{0,2} \rightarrow \Omega^{0,2}$ естественно продолжается и на $\Omega^{2,0}$. Действительно, достаточно воспользоваться перестановочностью $*_{\mathbb{C}}$ и вещественной структуры Θ на $\Omega^{2,0} \oplus \Omega^{0,2}$, т.е. для любой формы $\alpha \in \Omega^{2,0}$ полагаем

$$*_{\mathbb{C}}(\alpha) = \Theta(*_{\mathbb{C}}(\Theta\alpha)). \quad (5.8)$$

Тогда очевидным образом определено и разложение на собственные пространства прямой суммы

$$\Omega^{2,0} \oplus \Omega^{0,2} = \Omega_+^2 \oplus \Omega_-^2, \quad (5.9)$$

причем это разложение вещественно и определяется разложением одной только вещественной части $(\Omega^{2,0} \oplus \Omega^{0,2})_{\mathbb{R}} \cong \Omega^{0,2}$.

Определим следующую структуру на $\Omega^{2,0} \oplus \Omega^{0,2}$. А именно, пусть в произвольном совместимом с θ базисе структура $\tilde{J}$ перестановочна с Θ и действует по праву

$$\begin{aligned} dz_1 \wedge dz_2 &\rightarrow d\bar{z}_3 \wedge d\bar{z}_4, \\ dz_1 \wedge dz_3 &\rightarrow -d\bar{z}_2 \wedge d\bar{z}_4, \\ dz_1 \wedge dz_4 &\rightarrow d\bar{z}_2 \wedge d\bar{z}_3, \end{aligned} \quad (5.10)$$

и $\tilde{J}^2 = \operatorname{id}$.

Тогда из локальных вычислений, приведенных выше, следует

УТВЕРЖДЕНИЕ. $\alpha \in \Omega^+ \subset \Omega^{0,2}$, если и только если $\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{J}(\operatorname{Re} \alpha) = \operatorname{Re} \alpha. \quad (5.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Безусловно, введенная нами структура $\tilde{J}$ зависит от выбора фазы и инвариантна только относительно действия $\operatorname{SU}(4)$.

Из всего сказанного следует, что пространство $\mathbb{C}$ -автодуальных форм изоморфно над $\mathbb{R}$ пересечению

$$\ker(I + \operatorname{id}) \cap \ker(\Theta - \operatorname{id}) \cap \ker(\tilde{J} - \operatorname{id}) \subset \Omega^2, \quad (5.12)$$

где Θ, I – вещественная и комплексная структуры соответственно.

Отметим, что структура $\tilde{J}$ определена в общем случае лишь локально так же, как в вещественном случае оператор Ходжа позволяет локально определить авто- и антиавтодуальность. Глобальные свойства оператора Ходжа диктуются топологией – числом положительных и отрицательных квадратов формы пересечения. Если $b_2^+ = 0$, то никакая метрика не сможет задать оператор $*$ с непустым автодуальным подпространством.

То же следует отметить и в нашем случае. Очевидно, что при $h^{0,2} = 0$ невозможно существование формы, автодуальной в новом, комплексном смысле.

С другой стороны, из вещественности разложения по действию комплексной звездочки $*_{\mathbb{C}}$ видно, что $b_{0,2}^+ = b_{0,2}^- = h^{2,0}$, и вариация разложения со сменой фазы описывается просто как умножение на $q^{1/2}$.

Соответствие, выведенное в утверждении, позволяет расширить рамки определения уравнения $SU(4)$ -инстантона. А именно, потребуем вместо комплексной ориентируемости многообразия X глобальной определенности структуры $\tilde{J}$ на комплексном многообразии X . Для этого достаточно существования глобальной 2-формы без нулей, инвариантной относительно $\tilde{J}$.

Заключение

Неожиданным образом новая задача дифференциальной геометрии спроецировалась в область интересов алгебраической геометрии. Согласно теореме 1 существование полуголоморфных связностей на расслоениях с классами Черна типа (n, n) влечет существование голоморфных структур, так как в этом случае голоморфность совпадает с полуголоморфностью.

Список литературы

1. *Donaldson S., Thomas R.* Gauge Theory in Higher Dimensions. Preprint 28. Oxford, 1996.
2. *Donaldson S., Kronheimer P.* The Geometry of Four-Manifolds. Oxford: Clarendon Press, 1990.

МИИТ
E-mail: Tyurin@tyurin.mian.su

Поступило в редакцию
17.VI.1997