Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, Критерий полиномиальности роста многообразий супералгебр Ли, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 5, 103–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/im217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 05:05:56

УДК 512.8

М. В. Зайцев, С. П. Мищенко

Критерий полиномиальности роста многообразий супералгебр Ли

В статье получено описание многообразий супералгебр Ли над полем нулевой характеристики, функция роста которых асимптотически ограничена полиномом некоторой степени.

Библиография: 14 наименований.

§1. Введение

В статье изучается рост многообразий супералгебр Ли над полем нулевой характеристики. Напомним необходимые определения. Пусть F – свободная неассоциативная алгебра, порожденная счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ над полем Φ , $\text{char } \Phi = 0$, а $\mathbf{V}$ – некоторое многообразие Φ -алгебр. Тогда совокупность тождеств $\mathbf{V}$ образует идеал I в F . Обозначим через P_n подпространство полилинейных элементов от $x_1, \dots, x_n$ в F . Положим

$$\gamma_n(\mathbf{V}) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap I}.$$

Последовательность $(\gamma_n(\mathbf{V}))$, $n = 1, 2, \dots$, является числовой характеристикой многообразия $\mathbf{V}$. Рост $\mathbf{V}$ называют *полиномиальным*, если $\gamma_n(\mathbf{V}) < n^k$ при достаточно больших n , и *экспоненциальным*, если $a^n < \gamma_n(\mathbf{V}) < b^n$ для некоторых $a, b > 1$ при больших n .

Если $\gamma_n(\mathbf{V})$ асимптотически больше a^n для любого заданного a , то $\mathbf{V}$ принято называть многообразием *сверхэкспоненциального* роста. Например, если $\mathbf{V}$ – многообразие всех ассоциативных Φ -алгебр Ли, то $\gamma_n(\mathbf{V}) = n!$ Если же $\mathbf{V}$ – многообразие всех алгебр Ли, то $\gamma_n(\mathbf{V}) = (n-1)!$ Хорошо известен результат А. Регева [1], согласно которому $\gamma_n(\mathbf{V}) < a^n$ для некоторого $a > 1$, если $\mathbf{V}$ – нетривиальное многообразие ассоциативных алгебр. В классе лиевских многообразий реализуются и сверхэкспоненциальные функции роста (см., например, [2], [3]). Однако общим для ассоциативного и лиевского случаев оказалось отсутствие многообразий промежуточного роста, т.е. таких, что функция $\gamma_n(\mathbf{V})$ растет быстрее любого полинома, но медленней любой экспоненты (см., например, [4], [5]). К настоящему времени многообразия полиномиального роста описаны и классифицированы как в ассоциативном случае [6], так и в лиевском [7], [8].

В данной статье изучается рост многообразий супералгебр Ли. Основным результатом является описание многообразий полиномиального роста на языке тождеств.

Работа частично поддержана грантом РФФИ, № 96-01-00146.

ТЕОРЕМА 1. *Многообразие $\mathbf{V}$ супералгебр Ли над полем нулевой характеристики имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- 1) $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c \mathbf{A}$;
- 2) *существует такое k , что любой полилинейный полином, содержащий не менее k четных и k нечетных переменных, тождественно равен нулю в $\mathbf{V}$;*
- 3) *в $\mathbf{V}$ для любого $r = 0, 1, \dots, c-1$ выполняются тождества вида*

$$\begin{aligned} (z_1 z_2 x_1 \dots x_N) t_1 \dots t_r (z_3 z_4 x_{N+1} \dots x_{2N}) &\equiv \\ &\equiv \sum_{\sigma} a_{\sigma}^r (z_1 z_2 x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(N)}) t_1 \dots t_r (z_3 z_4 x_{\sigma(N+1)} \dots x_{\sigma(2N)}), \end{aligned}$$

в котором сумма берется лишь по тем подстановкам $\sigma \in S_{2N}$, для которых $\sigma(\{1, \dots, N\}) \not\subseteq \{1, \dots, N\}$.

Показано также, что не существует многообразий супералгебр Ли, рост которых больше любого полинома, но меньше любой экспоненты.

ТЕОРЕМА 2. *В классе супералгебр Ли отсутствуют многообразия промежуточного роста.*

Договоримся об обозначениях. Через $\mathbf{N}_c$ мы будем обозначать многообразие, состоящее из супералгебр Ли L , для которых $L^{c+1} = 0$. При $c = 1$ мы получаем многообразие $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}$ всех абелевых супералгебр Ли. Для двух многообразий $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ через $\mathbf{UV}$ мы будем обозначать их произведение.

§2. Нильпотентность коммутанта супералгебр Ли с полиномиальным ростом тождеств

В супералгебрах Ли мы будем рассматривать как градуированные (или однородные) тождества, каждая переменная в которых должна быть либо из $\mathcal{L}_0$, либо из $\mathcal{L}_1$, так и неградуированные. Ясно, что неградуированное полилинейное тождество равносильно некоторой системе градуированных.

Мы будем опускать скобки в неассоциативных произведениях в случае их левонормированной расстановки. Все необходимые сведения о супералгебрах Ли можно найти, например, в [10].

Если $\mathbf{V}$ – многообразие Φ -супералгебр Ли, то можно рассмотреть еще одну числовую характеристику. Обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ свободную супералгебру Ли над Φ с тем же множеством X четных и множеством $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ нечетных порождающих. Обозначим через R неоднородную подалгебру в $\mathcal{L}$, порожденную элементами $z_i = x_i + y_i$, $i = 1, 2, \dots$, а через $\bar{P}_n$ – подпространство полилинейных полиномов от $z_1, \dots, z_n$ в R . Любое отображение $x_i \mapsto a_i \in L_0$, $y_i \mapsto b_i \in L_1$ со значениями в некоторой супералгебре Ли $L = L_0 \oplus L_1$ однозначно продолжается до гомоморфизма $R \rightarrow L$. Если L – свободная алгебра счетного ранга многообразия $\mathbf{V}$, то пересечение J ядер всех гомоморфизмов из R в L можно также интерпретировать как идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$ и рассматривать вместо $\gamma_n(\mathbf{V})$ коразмерности $\bar{P}_n \cap J$ в $\bar{P}_n$. Однако эти величины совпадают, поскольку для канонического эпиморфизма $\pi : F \rightarrow R$, где $\pi(x_i) = z_i$, выполняются равенства

$$\pi(P_n) = \bar{P}_n, \quad \pi(I) = J, \quad \pi^{-1}(J) = I.$$

Это замечание позволяет проводить вычисления как в свободной неассоциативной алгебре, так и в свободной супералгебре Ли.

Получим сначала ряд необходимых условий полиномиальности роста.

ЛЕММА 1. Пусть для многообразия $\mathbf{V}$ супералгебр Ли над полем Φ существует такое натуральное n , что $\gamma_{n+1}(\mathbf{V}) < 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Кроме того, пусть $(\text{ad } z)^m \equiv 0$ – тождество многообразия $\mathbf{V}$ для нечетной переменной y . Тогда для некоторого s выполняется включение $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c \mathbf{A}$.

Квадратные скобки означают целую часть числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H_r^{(k)} = \langle \delta_1, \dots, \delta_r \rangle$ – абелева подгруппа симметрической группы S_{2k} , порожденная транспозициями $\delta_i = (2i-1, 2i)$, $i = 1, \dots, r$. Будем считать, что группа $H_k^{(k)}$, где $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, естественным образом вложена в S_n .

Рассмотрим элементы супералгебры L вида

$$z_0 z_{\sigma(1)} z_{\sigma(2)} \cdots z_{\sigma(n)}, \quad \sigma \in H_k^{(k)}.$$

Так как порядок группы $H_k^{(k)}$ равен 2^k , а $\gamma_{n+1}(\mathbf{V}) < 2^k$, то существуют некоторые коэффициенты a_σ , не все равные нулю и такие, что соотношение

$$\sum_{\sigma \in H_k^{(k)}} a_\sigma z_0 z_{\sigma(1)} z_{\sigma(2)} \cdots z_{\sigma(n)} = 0 \quad (1)$$

является неградуированным тождеством многообразия $\mathbf{V}$. Без ограничения общности можно считать, что число n является четным. Если это не так, мы просто перейдем к рассмотрению следствия на единицу большей степени.

Если для некоторого σ $a_\sigma \neq -a_{\sigma\delta_k}$, то из (1) получаем нетривиальное следствие:

$$\sum_{\sigma \in H_{k-1}^{(k)}} a'_\sigma z_0 z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(2k-2)} t t = 0,$$

линеаризация которого по переменной t имеет вид

$$\sum_{\sigma \in H_{k-1}^{(k)}} a'_\sigma z_0 z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(2k-2)} (z_{2k} z_{2k-1} + z_{2k-1} z_{2k}) = 0.$$

Если же для всех $\sigma \in H_k^{(k)}$ $a_\sigma = -a_{\sigma\delta_k}$, то тождество (1) можно переписать так:

$$\sum_{\sigma \in H_{k-1}^{(k)}} a_\sigma z_0 z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(2k-2)} (z_{2k} z_{2k-1} - z_{2k-1} z_{2k}) = 0.$$

Продолжив этот процесс для δ_i , $i = k-1, \dots, 1$, получим, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество

$$z_0 (Z_2 Z_1 + c_1 Z_1 Z_2) (Z_4 Z_3 + c_2 Z_3 Z_4) \cdots (Z_{2k} Z_{2k-1} + c_k Z_{2k-1} Z_{2k}) = 0,$$

в котором числа $c_1, \dots, c_k$ равны 1 или -1 , а $Z_i = \text{ad } z_i$.

Доказательство проведем индукцией по числу k . Пусть вместо переменной z_0 стоит левонормированное произведение коммутаторов, которое обозначим через T . С каждым шагом индукции число скобок будет уменьшаться, а число сомножителей произведения T расти.

Итак, пусть в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено следующее тождество:

$$Tz_1z_2D = aTz_2z_1D, \quad (2)$$

в котором число a равно 1 или -1 , T является левонормированным произведением коммутаторов, а $D = (Z_4Z_3 + c_2Z_3Z_4) \dots (Z_{2k}Z_{2k-1} + c_kZ_{2k-1}Z_{2k})$.

При получении следствий из тождества (2) можно подставлять любые элементы вместо переменных z_1 и z_2 , а также подставить вместо T произведение Tz . Поясним последнее утверждение. Тождество

$$Tz z_1 z_2 D = a T z z_2 z_1 D \quad (3)$$

является следствием тождества (2), так как переменной z можно продифференцировать произведение T , получив сумму произведений такого же количества коммутаторов. Таким образом, все слагаемые будут следствиями тождества (2).

Для осуществления индуктивного перехода достаточно получить следствие вида $T_1 D = 0$, где T_1 – левонормированное произведение коммутаторов.

В силу тождества (3) из шести элементов, получаемых перестановкой переменных z_1, z_2, z_3 , остаются три. Переобозначим их:

$$s_1 = Tz_1z_3z_2D, \quad s_2 = Tz_2z_3z_1D, \quad s_3 = Tz_3z_2z_1D.$$

Будем дополнительно считать, что α, β, γ – четности переменных z_1, z_2, z_3 соответственно. Тогда из тождества (2) подстановкой коммутатора вместо одной переменной и переобозначением переменных получим систему линейных уравнений относительно введенных переменных:

$$\begin{aligned} ((-1)^{\beta\gamma} - a)s_1 - (-1)^{\beta\gamma}s_2 + s_3 &= 0, \\ -(-1)^{\alpha\gamma}s_1 + ((-1)^{\alpha\gamma} - a)s_2 + as_3 &= 0, \\ s_1 - (-1)^{\alpha\beta}s_2 + ((-1)^{\alpha\beta} - a)s_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда в тождестве (2) коэффициент a равен 1. Перебирая все возможные варианты четностей переменных z_1, z_2, z_3 в системе (4), получаем равенство $s_2 = s_3$. Следовательно, в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено неградуированное тождество $Tz_2z_1zD = Tz_1z_2zD$. Увеличивая “хвост” и повторяя процедуру, получаем, что в многообразии для любой перестановки p выполнено тождество

$$Tz_{p(1)} \dots z_{p(s)} D = Tz_1 \dots z_s D. \quad (5)$$

Рассмотрим элемент

$$T(z_{11}z_{12}) \dots (z_{k1}z_{k2}) D. \quad (6)$$

Докажем, что при достаточно большом значении числа k он равен нулю тождественно.

Если есть хотя бы одна четная переменная, то сначала раскроем все скобки, кроме коммутатора с этой переменной. Раскрывая этот коммутатор, получим нуль

в силу тождества (5). Пусть теперь все переменные нечетные. Соотношение (5) выполняется при всех s , в том числе при $s = m$, для которого $(\text{ad } z)^m = 0$ для нечетных z . Линеаризуя тождество $T(\text{ad } z)^m D = 0$ и учитывая (5), получаем $Tz_1 \cdots z_m D = 0$. Раскрывая все коммутаторные скобки в (6) от переменных z_{ij} , мы получаем нуль при $k > \frac{m}{2}$.

Осталось рассмотреть случай, когда в тождестве (2) выполняется равенство $a = -1$. Перебирая все возможные варианты четностей переменных системы (4), получаем, что в нашем многообразии выполнена серия градуированных тождеств $Tz_3 z_2 z_1 D = b Tz_2 z_3 z_1 D$, где коэффициент b зависит от четностей переменных z_1, z_2, z_3 . Более того, если две или три переменные из z_1, z_2, z_3 являются четными, то коэффициент b равен нулю, т.е. выполнены такие градуированные тождества:

$$Tz_3 z_2 z_1 D = 0. \quad (7)$$

Докажем, что следствием выписанных градуированных тождеств и тождества (2) является неградуированное тождество

$$T(z_1 z_2)(z_3 z_4) D = 0.$$

Если в одной из скобок обе переменные нечетные, то, переставляя этот коммутатор вправо и раскрывая его, получим нуль в силу тождества (3). Пусть один из коммутаторов составлен из двух четных переменных; тогда получим нуль в силу серии градуированных тождеств (7). Осталось рассмотреть случай, когда каждый из коммутаторов составлен из одной четной и одной нечетной переменной. Обозначим четные переменные через x , а нечетные – через y . Тогда верна такая цепочка равенств:

$$T(y_4 x_3)(x_1 y_2) D = (1 - b) T y_4 x_3 (x_1 y_2) D = 0.$$

Последнее равенство получено как следствие серии тождеств (7), так как переменной y_4 можно продифференцировать произведение коммутаторов T , получив сумму произведений коммутаторов. Мы уже применяли этот прием при выводе тождества (3) из тождества (2). Итак, в рассматриваемом случае, когда в тождестве (2) коэффициент a равен -1 , в многообразии $\mathbf{V}$ элемент (6) уже при $k = 2$ тождественно равен нулю.

Таким образом, в обоих случаях элемент (6) является тождественно нулевым, т.е. в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество необходимого вида $T_1 D = 0$, где $T_1 = T(z_{11} z_{12}) \cdots (z_{k1} z_{k2})$.

Доказательство возможности индуктивного шага завершено. Лемма 1 полностью доказана.

Обозначим через $H = H_0 \oplus H_1$ четырехмерную супералгебру Ли с базисом a, b, u, v и таблицей умножения $ab = 0, uv = 0, au = v, av = u, bu = u, bv = v, a^2 = 2b, b^2 = u^2 = v^2 = 0$, в которой $H_0 = \langle b, v \rangle, H_1 = \langle a, u \rangle$. Очевидно, что $(\text{ad } b)^n$ – ненулевое отображение на H при любом n , поэтому в H не выполняется тождество $(\text{ad } z)^n \equiv 0$ для нечетной переменной z ни при каком n .

ЛЕММА 2. *Для многообразия супералгебр Ли $\mathbf{V}$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) ни для какого n в $\mathbf{V}$ не выполняется тождество вида $(\text{ad } y)^n \equiv 0, y \in \mathcal{L}_1$;
- 2) $\mathbf{V}$ содержит супералгебру H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что второе условие влечет первое. Пусть теперь тождество $(\operatorname{ad} y)^n \equiv 0$ не выполняется в $\mathbf{V}$ для нечетной переменной y . Обозначим через M свободную $\mathbf{V}$ -алгебру с одним четным порождающим x и двумя нечетными y_1 и y_2 . Тогда $(\operatorname{ad} y_1)^n \neq 0$. Поскольку в свободной супералгебре Ли $\mathcal{L}$ нет элементов степени 1 по x_1 и степени n по y_1 , лежащих в $(\mathcal{L}^3)^2$, то в факторалгебре $L = M/(M^3)^2 = L_0 \oplus L_1$ также не выполняется тождество $(\operatorname{ad} y)^n \equiv 0$, и $L \in \mathbf{V} \cap \mathbf{AN}_2$. Так как у L лишь один нечетный порождающий, то $L_0^2 \subset L^3$, следовательно,

$$[L, L_0^2, L_0^2] = 0. \quad (8)$$

Из соотношения (8) и включения $L \in \mathbf{AN}_2$ следует, что супералгебра L представима и поэтому вложима в декартово произведение некоторого семейства супералгебр L_α , размерности которых ограничены некоторой общей константой N (см. [11, гл. 6] или [12]). При этом все L_α являются гомоморфными образами L и поэтому лежат в $\mathbf{V}$. Отсюда следует, что в L найдется идеал J конечной коразмерности, лежащий в L^3 , для которого $\operatorname{ad} y_1$ действует на L^3/J ненильпотентно.

Обозначим через $T = T_0 \oplus T_1$ конечномерный L -модуль L^3/J и через ϕ – ненильпотентный оператор $(\operatorname{ad} y_1)^2$ на T . Предположим сначала, что поле Φ алгебраически замкнуто. Тогда существует ненулевой элемент c из T_0 , для которого $\phi(c) = \lambda c$ и $\lambda \neq 0$. Положим $y = \lambda^{-\frac{1}{2}} y_1$ и рассмотрим подалгебру B в полупрямом произведении $T \rtimes L = P$, порожденную y и c . Несложным упражнением является доказательство того, что $P \in \mathbf{V}$. Пусть $d = yc$, $e = \frac{1}{2}y^2$. Тогда $B = \langle e, y, c, d \rangle$, $B_0 = \langle e, c \rangle$, $B_1 = \langle y, d \rangle$. Элементы y, c, e и d перемножаются следующим образом: $ye = 0$, $dc = 0$, $yd = c$, $yc = d$, $ed = d$, $ec = c$, $y^2 = 2e$, $e^2 = c^2 = d^2 = 0$. Элементы y, e, c, d линейно независимы, поскольку $y, c \in T_0$, $e, d \in T_1$. Следовательно, B изоморфна H , и для алгебраически замкнутого поля лемма доказана. Если же Φ незамкнуто, то достаточно присоединить к нему один из характеристических корней оператора ϕ , расширить алгебру $T \rtimes L = P$ и взять в ней аналогичную четырехмерную подалгебру. Лемма 2 доказана.

Для доказательства основных результатов статьи нам потребуются оценки роста многообразия $\operatorname{var} H$.

ЛЕММА 3. Для любой константы $\alpha < \frac{2}{3}$ выполняются неравенства $2^{\alpha n} \leq \gamma_n(\operatorname{var} H) \leq n^2 2^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим сначала нижнюю оценку роста. Пусть $z_0, z_1, z_2, \dots, x_1, x_2, \dots$ – переменные из свободной неассоциативной алгебры F . Построим семейство полилинейных полиномов $f_0, f_1, \dots$ из F , положив $f_0 = z_0$, $f_1 = z_1((x_1 f_0) x_2), \dots, f_k = f_k(z_0, \dots, z_k, x_1, \dots, x_{2k}) = z_k((x_{2k-1} f_{k-1}) x_{2k})$. Обозначим через $D = D(k)$ таблицу Юнга, состоящую из двух строк длины k , в первой строке которой стоят числа $1, 3, \dots, 2k-1$, а во второй числа $2, 4, \dots, 2k$. Если $e_D = \sum (-1)^q p q$ – соответствующий таблице D элемент группового кольца группы подстановок S_{2k} , то $e_D \circ f_k = g_k = g_k(z_0, z_1, \dots, z_k, x_1, \dots, x_{2k})$ – полилинейный полином степени $3k+1$ в F . Он равен сумме

$$g_k = g_k^1 + \dots + g_k^N,$$

в которой $N = 2^k (k!)^2$, а каждый g_k^i – одночлен вида $(-1)^q p q \circ f_k$, где q принадлежит подгруппе в S_{2k} , порожденной транспозициями $(1, 2), \dots, (2k-1, 2k)$, а $p \in S(A) \times S(B)$, $A = \{1, 3, \dots, 2k-1\}$, $B = \{2, 4, \dots, 2k\}$.

Вычислим значение $g_k^i = (-1)^q pq \circ f_k$ в алгебре H на элементах $z_0 = u$, $z_1 = \dots = z_k = a$, $x_1 = a, x_2 = b, \dots, x_{2k-1} = a, x_{2k} = b$. Это значение равно

$$(-1)^q (-1)^q f_k(u, \underbrace{a, \dots, a}_k, a, b, a, b, \dots, a, b) = (-1)^k u.$$

Следовательно,

$$g_k(u, a, \dots, a, a, b, \dots, a, b) = (-1)^k 2^k (k!)^2 \neq 0,$$

т.е. $g_k = g_k(z_0, \dots, z_k, x_1, \dots, x_{2k})$ не является тождеством алгебры H . Действуя на переменные $x_1, \dots, x_{2k}$ элементами симметрической группы S_{2k} , мы получим в полилинейной компоненте P_{3k+1} алгебры F подпространство размерности не меньше, чем размерность левого идеала Re_D в групповом кольце $R = \Phi S_{2k}$. Хорошо известно (см., например, [13]), что

$$\dim Re_D = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}. \quad (9)$$

Используя формулу Стирлинга, легко показать, что величина (9) при больших k превосходит $\frac{A}{\sqrt{k}} 2^{2k}$, где A – некоторая константа. Поскольку степень полинома g_k равна $3k+1$, то $k = \frac{n-1}{3}$. Отсюда получается оценка $\gamma_n(\text{var } H) > 2^{\alpha n}$ для любого $\alpha < \frac{2}{3}$, и первая часть леммы доказана.

Чтобы получить верхнюю оценку роста, рассмотрим свободную неассоциативную алгебру $\tilde{F} = \tilde{F}_0 \oplus \tilde{F}_1$ с $\mathbf{Z}_2$ -градуировкой, которая порождена элементами $x_1^0, x_2^0, \dots \in \tilde{F}_0$, $x_1^1, x_2^1, \dots \in \tilde{F}_1$. Можно считать, что F вложена в $\tilde{F}$, если положить $x_i = x_i^0 + x_i^1$. Пусть теперь P_n – пространство полилинейных многочленов от $x_1, \dots, x_n$ в F , а $P_n(t)$ – пространство полилинейных многочленов от $x_1^{t_1}, \dots, x_n^{t_n}$ в $\tilde{F}$, где $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{Z}_2^n$. Тогда

$$P_n \subset \sum_{t \in \mathbf{Z}_2^n} P_n(t),$$

и если I – идеал тождеств алгебры H в F , то

$$\frac{P_n + I}{I} \subset \sum_{t \in \mathbf{Z}_2^n} \frac{P_n(t) + I}{I},$$

следовательно,

$$\gamma_n(\text{var } H) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap I} \leq \sum_{t \in \mathbf{Z}_2^n} \dim \frac{P_n(t)}{P_n(t) \cap I}. \quad (10)$$

Количество слагаемых в правой части (10) равно 2^n . Поэтому достаточно показать, что

$$\dim \frac{P_n(t)}{P_n(t) \cap I} \leq n^2$$

при любом $t \in \mathbf{Z}_2^n$.

Элементы из $P_n(t) \cap I$ являются градуированными тождествами алгебры L . Рассмотрим $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{Z}_2^n$ и все полилинейные полиномы от $x_1^{t_1}, \dots, x_n^{t_n}$ в $\tilde{F}$. Отметим, что для любых однородных элементов $c_1, \dots, c_5$ из H выполняется равенство

$$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 = c_1 c_2 c_3 c_5 c_4. \quad (11)$$

Из (11) и определяющих тождеств супералгебры Ли следует, что любой полилинейный полином от $x_1^{t_1}, \dots, x_n^{t_n}$ по модулю I равен линейной комбинации произведений

$$x_1^{t_1} x_i^{t_i} x_j^{t_j} X_{ij}, \quad (12)$$

где через X_{ij} сокращенно обозначено последовательное умножение справа на все оставшиеся $x_k^{t_k}$ в порядке возрастания индекса k . Количество элементов (12) равно n^2 , поэтому размерность $P_n(t)$ по модулю I не выше n^2 , и лемма 3 доказана.

Из лемм 1, 2 и 3 вытекает включение $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c \mathbf{A}$ для любого многообразия супералгебр Ли полиномиального роста.

§3. Необходимые условия полиномиального роста многообразия

ЛЕММА 4. Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие супералгебр Ли, лежащее в $\mathbf{N}_c \mathbf{A}$, рост которого не превышает $2^{\frac{n}{2c}}$. Тогда существует такое N , что любой полилинейный полином $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$ от $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{L}_0, y_1, \dots, y_m \in \mathcal{L}_1$ равен нулю тождественно в $\mathbf{V}$, если $k, m \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем, что существует такое N_0 , что $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \equiv 0$ в $\mathbf{V}$, если $n = m + k \geq N_0$ и $k, m > \frac{2}{5}n$. Воспользуемся индукцией по c . Пусть $c = 1$. Рассмотрим относительно свободную алгебру $L = L_0 \oplus L_1$ многообразия $\mathbf{V}$ с четными образующими $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots$ и нечетными $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots$. Предположим, что наше предположение неверно. Тогда при любом n найдутся такие нечетные m и k , что $m, k > \frac{1}{3}n$ и полилинейный одночлен

$$A = z \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_k \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_m \quad (13)$$

не равен нулю в L , где $z = z_1 \dots z_t$ – произведение некоторых порождающих $\tilde{x}_i, \tilde{y}_j$, причем $t > 1$. Возьмем в свободной неассоциативной алгебре F левонормированный одночлен $f = x_{k+m+1} \dots x_n x_1 \dots x_k x_{k+1} \dots x_{m+k}$. Пусть, например, $k \leq m$. Рассмотрим таблицу Юнга D из $2k - 1$ клеток, состоящую из одной строки длины k и одного столбца высоты k . В строке стоят числа $1, \dots, k$, а в столбце числа $1, k+1, \dots, 2k-1$. Рассмотрим элемент группового кольца симметрической группы S_{2k-1}

$$e_D = \sum_{p \in G_r, q \in G_c} (-1)^q p q, \quad (14)$$

где G_c – подгруппа в S_{2k-1} , оставляющая на месте символы $2, \dots, k$, а G_r – подгруппа, оставляющая неподвижными $k+1, \dots, 2k-1$. Положим теперь $g = g(x_1, \dots, x_n) = e_D \circ f$ и покажем, что полином g не равен нулю тождественно в L . Запишем g в виде суммы одночленов $g = g_1 + \dots + g_s$ вида $(-1)^q p q \circ f$ и рассмотрим гомоморфизм ϕ из F в L , переводящий $x_1, \dots, x_k$ в $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$, $x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$ в $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m$, а $x_{k+m+1}, \dots, x_n$ в $z_1, \dots, z_t$. Пусть p, q – произвольные подстановки из G_c, G_r соответственно и $g' = (-1)^q p q \circ f$. Вычислим значение $\phi(g')$ в L .

Заметим, что элемент A из (13) симметричен по переменным $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ и кососимметричен по переменным $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m$ (поскольку $c = 1$). Поэтому если $q(1) = 1$, то $\phi(g') = A$. Пусть $q(1) \neq 1$. Тогда $q(k+j) = 1$ при некотором $1 \leq j \leq k-1$. Тогда

$$g' = (-1)^q x_{k+m+1} \dots x_n x_{q(1)} x_{p(2)} \dots x_{p(k)} x_{q(k+1)} \dots \\ \dots x_{q(k+j-1)} x_{p(1)} x_{q(k+j+1)} \dots x_{q(2k-1)}$$

и $\phi(g') = (-1)^{j-1} A$. Количество подстановок $q \in G_c$, для которых $q^{-1}(1) = k+j$, равно $(k-1)!$ и не зависит от $j = 1, \dots, k-1$. Поскольку число k можно считать нечетным, все слагаемые вида $\phi(g')$, у которых $q(1) \neq 1$, в сумме $\phi(g) = \phi(g_1) + \dots + \phi(g_s)$ сокращаются, поэтому $\phi(g) = k!(k-1)!A \neq 0$.

Мы доказали, что в L не выполняется тождество $g \equiv 0$, где $g = e_D \circ f$. Следовательно, коразмерность идеала тождеств многообразия $\mathbf{V}$ в P_n не меньше размерности левого идеала Re_D группового кольца $R = \Phi S_{2k-1}$, которая равна

$$\frac{(2k-1)!}{k!k!} = \tau(k)$$

(см. [13]). Используя формулу Стирлинга, легко получить оценку

$$\tau(k) > \frac{1}{\sqrt{k}} 2^{2k} > \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{\frac{2}{3}n} > 2^{\frac{n}{4}}$$

для достаточно больших $n \geq N_0$. Отсюда и следует, что при $c = 1$ любой одночлен степени $n \geq N_0$, содержащий не менее $\frac{2}{3}n$ четных и нечетных сомножителей одновременно, равен нулю в L .

Пусть теперь $c > 1$. По предположению индукции можно считать, что найдется N_0 , при котором для всех $n \geq N_0$ одночлен, содержащий не менее $\frac{2}{3}n$ четных и нечетных сомножителей, лежит в $(L^2)^c$. Для таких n рассмотрим одночлены из $(L^2)^c$, содержащие более $\frac{2}{3}n$ как четных, так и нечетных переменных. Если среди них есть ненулевой, то он представляет собой произведение c левонормированных скобок-одночленов, поэтому в одной из скобок будет более $\frac{2n}{5c}$ нечетных переменных и в одной – более $\frac{2n}{5c}$ четных. Если это одна и та же скобка, то она имеет вид $z_1 \dots z_t \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_k \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{k-1}$, где $\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_k \in L_0$, $\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{k-1} \in L_1$, k четно и $k > \frac{n}{3c}$. В этом случае, как и при $c = 1$, доказывается, что рост многообразия $\mathbf{V}$ не меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{k}} 2^{2k} > \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{\frac{2n}{3c}} > 2^{\frac{n}{4c}}$, что противоречит условию леммы.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда эти скобки различны. Для наглядности мы будем считать, что это две крайние справа скобки, т.е. ненулевой элемент из $(L^2)^c$ имеет вид

$$A_1 \dots A_{c-2}(z_1 \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_k)(z_2 \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{k-1}), \quad (15)$$

где $A_i, z_1, z_2 \in L^2$ и $k \geq \frac{2n}{5c}$. Возьмем в свободной неассоциативной алгебре одночлен

$$f = B_1 \dots B_{c-2}(d_1 x_1 \dots x_k)(d_2 x_{k+1} \dots x_{2k-1}),$$

у которого $B_1, \dots, B_{c-2}, d_1, d_2$ – левонормированные одночлены тех же степеней, что и $A_1, \dots, A_{c-2}, z_1, z_2$ соответственно. Снова возьмем элемент (14) и положим $g = e_D \circ f$. Как и прежде, в L должно выполняться тождество $g \equiv 0$, поскольку в противном случае рост многообразия $\mathbf{V}$ будет больше $2^{2k} \geq 2^{\frac{4n}{5c}}$. В частности, g должен принимать нулевое значение при гомоморфизме $\phi: F \rightarrow L$, для которого

$\phi(B_i) = A_i$, $i = 1, \dots, c-2$, $\phi(d_1) = z_1$, $\phi(d_2) = z_2$, $\phi(x_i) = \tilde{x}_i$, $\phi(x_{k+j}) = \tilde{y}_j$, $j = 1, \dots, k-1$. Однако равенство $\phi(g) = 0$ означает, что в L выполнено соотношение

$$\begin{aligned} A(z_1 \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_k)(z_2 \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{k-1}) = \\ = \sum \lambda_{ij} A(z_1 \tilde{y}_i \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_k)(z_2 \tilde{x}_j \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{k-1}), \end{aligned} \quad (16)$$

где $A = A_1 \dots A_{c-2}$. Отметим также, что для получения нижней экспоненциальной оценки на рост нам достаточно было считать, что $k \geq \frac{n}{6c}$ у элемента (14). Другими словами, соотношение (16) позволяет нам “перебрасывать” четные переменные в скобку с нечетными, если $k \geq \frac{n}{6c}$. В конце концов мы выражаем элемент (15) через произведения с левонормированных скобок, в одной из которых не менее $k = \frac{n}{6c}$ и четных и нечетных переменных одновременно. Но наличие такого ненулевого элемента в L гарантирует рост выше $\frac{1}{\sqrt{k}} 2^{2k} > 2^{\frac{n}{4c}}$, что противоречит условию леммы. Таким образом, мы доказали, что при достаточно больших $n \geq N_0$ любое произведение, в котором одновременно встречаются не менее $\frac{2}{5}n$ как четных, так и нечетных элементов, равно нулю в L .

Теперь мы индукцией по c докажем существование такого N , что $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \equiv 0$ в L при четных $x_1, \dots, x_k$ и нечетных $y_1, \dots, y_m$, если $m, k \geq N$. Если $c = 1$, то из доказанного выше следует, что при некотором N в $\mathbf{V}$ выполняется система тождеств

$$zx_1 \dots x_N y_1 \dots y_N \equiv 0, \quad (17)$$

в которой z равен $x_{N+1}x_{N+2}$, $y_{N+1}y_{N+2}$ либо $x_{N+1}y_{N+1}$. Очевидно, что любой полилинейный многочлен $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$ по модулю $(\mathcal{L}^2)^2$ является гомоморфным образом одного из элементов из левой части (17), если $k, m \geq N+2$, откуда следует утверждение леммы для $c = 1$.

Пусть теперь $c > 1$. Из индуктивных соображений можно считать, что существует такое N_0 , для которого в относительно свободной алгебре L многообразие $\mathbf{V}$ любой полилинейный полином от $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m$ лежит в $(L^2)^c$ при $k, m > N_0$. С другой стороны, как доказано выше, в $\mathbf{V}$ выполняется система полилинейных тождеств вида

$$z_1 \dots z_{i-1} (z_i x_1 \dots x_N y_1 \dots y_N) z_{i+1} \dots z_c \equiv 0, \quad (18)$$

$$z_1 \dots z_{i-1} (z_i x_1 \dots x_N) z_{i+1} \dots z_{j-1} (z_j y_1 \dots y_N) z_{j+1} \dots z_c \equiv 0, \quad (19)$$

в которых каждый z_r равен одному из произведений $x_\alpha x_\beta$, $x_\alpha y_\beta$ или $y_\alpha y_\beta$, а i и j изменяются от 1 до c . Очевидно, что любое полилинейное тождество $f = f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \equiv 0$ является следствием тождеств (18), (19), если $f \in (\mathcal{L}^2)^c$ и $k, m > (N+1)c$. Таким образом, любой элемент алгебры L , в котором число четных и нечетных переменных больше, чем N_0 и $(N+1)c$, равен нулю, и лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие супералгебр Ли, рост которого меньше, чем $2^{\frac{n}{2}}$. Тогда найдется такое N , что для любого $r = 0, 1, \dots, c-1$ в $\mathbf{V}$ выполняется тождество вида

$$\begin{aligned} (z_1 z_2 x_1 \dots x_N) t_1 \dots t_r (z_3 z_4 x_{N+1} \dots x_{2N}) \equiv \\ \equiv \sum_{\sigma, r} \alpha_\sigma^r (z_1 z_2 x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(N)}) t_1 \dots t_r (z_3 z_4 x_{\sigma(N+1)} \dots x_{\sigma(2N)}), \end{aligned} \quad (20)$$

в котором сумма берется лишь по тем подстановкам $\sigma \in S_{2N}$, для которых $\sigma(\{1, \dots, N\}) \not\subseteq \{1, \dots, N\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J – подмножество мощности N в $\{1, 2, \dots, 2N\}$, а $I = \{1, 2, \dots, 2N\} \setminus J$. Запишем элементы в I и J в порядке возрастания: $I = \{i_1, \dots, i_N\}$, $J = \{j_1, \dots, j_N\}$ и рассмотрим полилинейные одночлены в F вида

$$d_{r,J} = (z_1 z_2 x_{j_1} \dots x_{j_N}) t_1 \dots t_r (z_3 z_4 x_{i_1} \dots x_{i_N}).$$

Нетрудно заметить, что они линейно независимы в F , а их количество равно

$$h(N) = C_{2N}^N = \frac{2N!}{N!N!}.$$

Величина $h(N)$ растет быстрее $\frac{1}{\sqrt{N}} 2^{2N}$, и поскольку $n = \deg d_{r,J}$ и N связаны соотношением $2N + 4 \leq n \leq 2N + c + 3$, то асимптотически $h(N) > 2^{\frac{n}{2}}$. Следовательно, элементы $d_{r,J}$ линейно зависимы по модулю тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Равенство нулю их нетривиальной линейной комбинации и означает тождество вида (20) в $\mathbf{V}$. Лемма 5 доказана.

§4. Доказательство основных результатов

Полученные нами необходимые условия оказываются и достаточными для полиномиальности роста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость условий 1), 2), 3) доказана в леммах 1–5. Пусть теперь $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c \mathbf{A}$ и выполнены условия 2) и 3). Докажем, что $\mathbf{V}$ – многообразие полиномиального роста. Заметим сначала, что, как и в лемме 2, для многообразия $\mathbf{V}$ верна оценка, аналогичная (10),

$$\gamma_n(\mathbf{V}) \leq \sum_{t \in \mathbf{Z}_2^n} \dim \frac{P_n(t)}{P_n(t) \cap I}, \quad (21)$$

в которой I – идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$ в алгебре F . Условие 2) означает, что в правой части (21) число ненулевых слагаемых не превышает числа

$$2 \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k-1} \right),$$

которое растет полиномиально с ростом n . Поэтому достаточно доказать, что число линейно независимых по модулю I полилинейных элементов в F от фиксированного числа $m < k$, например четных переменных и $(n - m)$ нечетных переменных, растет как полином от n .

Пусть сначала $c = 1$. Тогда по модулю тождеств $\mathbf{V}$ любой полилинейный полином от $x_1^0, \dots, x_m^0, x_1^1, \dots, x_{n-m}^1$ является линейной комбинацией левонормированных одночленов, начинающихся с произведения $x_i^p x_j^q$, p, q равны 0 или 1, а все остальные сомножители в них упорядочены по нижним индексам, причем сначала идут четные, а затем нечетные переменные. Количество таких одночленов растет не быстрее n^2 , поэтому при $c = 1$ теорема доказана.

При $c > 1$ воспользуемся индукцией по c . Это значит, что мы можем ограничиться подсчетом одночленов от $x_1^0, \dots, x_m^0, x_1^1, \dots, x_{n-m}^1$ вида $b_1 b_2 \dots b_c$, где b_i – левонормированное произведение переменных, в котором все четные переменные стоят в начале, и как четные, так и нечетные переменные упорядочены по возрастанию, начиная с третьей позиции. Перепишем тождество (20) как соотношение

$$(z_1 z_2 x_{N+1} \dots x_{2N}) t_1 \dots t_r (z_3 z_4 x_1 \dots x_N) \\ \equiv \sum \alpha_i t_0 (z_1 z_2 x_{i_1} \dots x_{i_N}) t_1 \dots t_r (z_3 z_4 x_{j_1} \dots x_{j_N}), \quad (22)$$

где в правой части стоит линейная комбинация одночленов, у которых один из индексов $i_1, \dots, i_N$ не больше N .

Поскольку $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c \mathbf{A}$, то в свободной супералгебре L многообразия $\mathbf{V}$ в силу (22) на однородных по градуировке переменных выполняется равенство

$$b_1 \dots b_{i-1} (b_i x_{N+1} \dots x_{2N}) b_{i+1} \dots b_{j-1} (b_j x_1 \dots x_N) \dots b_c \\ \equiv \sum \alpha_q b_1 \dots (b_i x_{i_1} \dots x_{i_N}) \dots (b_j x_{j_1} \dots x_{j_N}) \dots b_c \quad (23)$$

для любых $b_1, \dots, b_c \in L^2$ с теми же условиями на $i_1, \dots, i_N$, что и в (22). Отсюда следует, что по модулю тождеств многообразия $\mathbf{V}$ любой полилинейный полином от $x_1^0, \dots, x_m^0, x_1^1, \dots, x_{n-m}^1$, лежащий в $(\mathcal{L}^2)^c$, выражается через произведения $a_1 \dots a_c$, где каждый a_i – левонормированный одночлен вида

$$a_i = b_i x_{i_1}^1 \dots x_{i_s}^1, \quad (24)$$

b_i – одночлен степени не выше $m+2$, зависящий от некоторых из $x_1^0, \dots, x_m^0$ и не более чем двух x_j^1 . Последовательность $i_1, \dots, i_s$ в (24) упорядочена по возрастанию. Число произведений $a_1 \dots a_c$, у которых для всех одночленов a_i , кроме одного, выполняется условие $s \leq 2N$, растет с ростом n полиномиально.

Рассмотрим те одночлены $a_1 \dots a_c$, у которых

$$a_i = b_i x_{i_1}^1 \dots x_{i_s}^1, \quad a_j = b_j x_{j_1}^1 \dots x_{j_t}^1, \quad s, t > 2N, \quad i < j.$$

Из (23) следует, что можно ограничиться такими элементами, у которых $i_{s-N+1} < j_N$. Покажем, что это гарантирует полиномиальный рост. Рассмотрим для наглядности случай, когда все $a_1, \dots, a_c$ имеют большую степень. Тогда

$$a_1 \dots a_c = (b_1 x_{i_1}^1 \dots x_{i_s}^1) (b_2 x_{j_1}^1 \dots x_{j_t}^1) \dots (b_c x_{l_1}^1 \dots x_{l_q}^1)$$

и $s, t, \dots, q > 2N$. Строка индексов $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t, \dots, l_1, \dots, l_q$ должна удовлетворять условию

$$i_1 < \dots < i_{s-N+1} < j_N < \dots < j_{t-N+1} < \dots < l_N < \dots < l_q. \quad (25)$$

Количество строк из чисел $1, \dots, n$, удовлетворяющих условию (25), не превышает $t! C_n^t$, где $t = 2N(c-1)$, т.е. растет полиномиально с ростом n . Отсюда следует полиномиальность роста многообразия $\mathbf{V}$, и теорема 1 доказана полностью.

Напомним, что $\mathbf{V}$ называют многообразием *промежуточного роста*, если асимптотически $\gamma_n(\mathbf{V}) < a^n$ для любого $a > 1$ и $\gamma_n(\mathbf{V}) > n^k$ для любого целого k . Из теоремы 1 и полученных ранее оценок вытекает теорема 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если рост $\mathbf{V}$ меньше, чем $2^{\frac{n}{2}-1}$, то $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c \mathbf{A}$ по теореме 1 и лемме 2. Зафиксируем это число c . Если $\gamma_n(\mathbf{V}) < 2^{\frac{n}{4c}}$, то по леммам 3 и 4 многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет также условиям 2) и 3) теоремы 1, которая гарантирует полиномиальность роста $\mathbf{V}$, и теорема 2 доказана.

Последнее утверждение аналогично результату в обычных алгебрах Ли, однако в лиевском случае можно указать нижнюю оценку: если $\gamma_n(\mathbf{V}) < 2^n$, то $\mathbf{V}$ – многообразие полиномиального роста [5]. Для супералгебр Ли вопрос о существовании подобной оценки открыт.

Напомним еще одно определение. Об многообразии $\mathbf{V}$ говорят, что оно *почти полиномиального роста*, если рост последовательности $\gamma_n(\mathbf{V})$ строго больше полиномиального, но у любого собственного подмногообразия рост полиномиален. Пример такого многообразия дает $\text{var } H$, где H – четырехмерная супералгебра из леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\text{var } H$ – многообразие почти полиномиального роста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что рост многообразия $\mathbf{U} = \text{var } H$ экспоненциален, доказано в лемме 3. Пусть $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$, $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$. Тогда по лемме 1 в $\mathbf{V}$ выполняется тождество $(\text{ad } y)^n \equiv 0$ для нечетной переменной y . Линеаризуя соотношение

$$z_1 z_2 z_3 \underbrace{y \dots y}_m \equiv 0$$

и учитывая (11), получаем тождество

$$z_1 z_2 z_3 y_1 \dots y_m \equiv 0 \quad (26)$$

для нечетных $y_1, \dots, y_m$ и любых z_1, z_2, z_3 . Отсюда и из (11) следует включение $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c \mathbf{A}$ для достаточно большого c . Кроме того, из (11) и (26) следует, что любой одночлен, содержащий более $m + 3$ нечетных сомножителей, равен нулю. Поскольку $\mathbf{U} \subset \mathbf{A} \mathbf{N}_2$, то в $\mathbf{V}$ выполняется и система тождеств (20) уже при $N = 1$. Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены, и следствие 1 доказано.

Наряду с известными примерами многообразий алгебр Ли почти полиномиального роста (см. [9]) и $\text{var } H$, этим свойством обладает и многообразие $\mathbf{A}^2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Многообразие всех метабелевых супералгебр Ли имеет почти полиномиальный рост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку произведение $x_1 \dots x_m y_1 \dots y_m$ не равно нулю в свободной метабелевой супералгебре Ли, где $x_1, \dots, x_m$ – четные, а $y_1, \dots, y_m$ – нечетные переменные, многообразие $\mathbf{A}^2$ не удовлетворяет условиям теоремы, поэтому его функция роста не полиномиальна. Если же $\mathbf{V}$ – собственное подмногообразие в $\mathbf{A}^2$, то $\mathbf{V}$ мультиинильпотентно, т.е. существуют такие m и n , что любое произведение m четных и n нечетных элементов равно нулю (см. [14, теорема 4]). Это означает выполнение условия 2) из теоремы 2. Поскольку 1) и 3) для $\mathbf{V} \subset \mathbf{A}^2$ очевидны, то рост $\mathbf{V}$ полиномиален, и следствие 2 доказано.

В заключение отметим, что для градуированных алгебр возможен и другой подход к определению функции роста. Если $L = L_0 \oplus L_1 = \text{alg}\{x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots\}$ – свободная супералгебра счетного ранга некоторого многообразия $\mathbf{V}$, $x_i \in L_0$,

$y_i \in L_1$, то можно рассмотреть пространство $P_{m,k}(L)$ полилинейных полиномов от $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k$. Обозначим

$$P'_n(L) = \sum_{k=0}^n P_{k,n-k}(L)$$

и положим

$$\mu_n(\mathbf{V}) = \dim P'_n(L) = \sum_{k=0}^n \dim P_{k,n-k}(L).$$

Тогда последовательность $\{\mu_n(\mathbf{V})\}, n = 1, 2, \dots$, также характеризует многообразие $\mathbf{V}$, и ее можно взять в качестве другой функции роста, отличной от $\gamma_n(\mathbf{V})$. Именно этот рост рассматривался в работе [14]. То, что эти функции различны, показывает пример метабелева многообразия, поскольку $\mu_n(\mathbf{A}^2) = n^2 - 1$ (см. [14]), а $\gamma_n(\mathbf{A}^2)$ растет экспоненциально. Аналогичная ситуация и с $\mathbf{U} = \text{var } H$, поскольку $\gamma_n(\mathbf{U}) > 2^{\frac{n}{2}}$ по лемме 3, а $\mu_n(\mathbf{U}) \leq n^2$ в силу (11).

Список литературы

1. Regev A. Existence of identities in $A \otimes B$ // Israel J. Math. 1972. V. 11. P. 131–152.
2. Воличенко И. Б. О многообразии алгебр Ли AN_2 над полем характеристики нуль // ДАН БССР. 1981. Т. 26. №12. С. 1063–1066.
3. Петроградский В. М. О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли // Фундаментальная и прикл. математика. 1995. Т. 1. №6. С. 989–1007.
4. Drensky V., Regev A. Exact asymptotic behaviour of the codimensions of some P.I. algebras // Israel J. Math. 1996. V. 96. P. 231–242.
5. Мищенко С. П. Нижние оценки размерностей неприводимых представлений симметрических групп и показателей экспоненты многообразий алгебр Ли // Матем. сб. 1996. Т. 187. №1. С. 83–94.
6. Кемер А. Р. Шпехтовость T -идеалов с полиномиальным ростом коразмерностей // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. С. 54–69.
7. Бенедиктович И. И., Залесский А. Е. T -идеалы свободной алгебры Ли с полиномиальным ростом последовательности коразмерностей // Вести АН БССР. 1981. №3. С. 5–10.
8. Мищенко С. П. О многообразии полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль // Матем. заметки. 1986. Т. 40. №6. С. 713–721.
9. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // УМН. 1990. Т. 45. №6. С. 25–45.
10. Scheunert M. The Theory of Lie Superalgebras. An Introduction // Lect. Notes Math. V. 716. Springer-Verlag, 1979.
11. Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite-dimensional Lie superalgebras. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.
12. Зайцев М. В. Локально представимые многообразия супералгебр Ли // Матем. заметки. 1992. Т. 52. №5. С. 33–41.
13. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.
14. Бахтурин Ю. А., Дренски В. С. Тождества разрешимых цветных супералгебр Ли // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. №4. С. 403–418.

Поступило в редакцию
15.XII.1996