Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Абрашкин, Одно теоретико-групповое свойство фильтрации ветвления, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 6, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/im218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 04:21:36

УДК 512.7

В. А. Абрашкин

Одно теоретико-групповое свойство фильтрации ветвления

Пусть $\Gamma(p)$ – группа Галуа максимального p -расширения полного дискретно нормированного поля с совершенным полем вычетов характеристики $p > 0$. В работе доказано, что если $v_0 > -1$ и $\Gamma(p)^{(v_0)}$ – подгруппа ветвления группы $\Gamma(p)$ в верхней нумерации, то произвольная конечно порожденная замкнутая, но не открытая подгруппа фактора $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ является свободной про- p -группой. В частности, этот фактор не имеет кручения и нетривиальных коммутирующих элементов.

Библиография: 9 наименований.

§ 1. Утверждение основной теоремы

Пусть K – полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов k характеристики $p > 0$. Выберем сепарабельное замыкание K_{sep} поля K и обозначим через $K(p)$ максимальное p -расширение поля K в K_{sep} .

Если $\Gamma = \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$ и $\{\Gamma^{(v)}\}_{v \geq 0}$ – фильтрация ветвления группы Γ в верхней нумерации (см. [7, гл. III]), то имеется индуцированная фильтрация $\{\Gamma(p)^{(v)}\}_{v \geq 0}$ группы $\Gamma(p) = \text{Gal}(K(p)/K)$. Отметим, что $\Gamma(p)^{(v)} = \Gamma(p)^{(1)} = I(p)$ – подгруппа инерции группы $\Gamma(p)$ для $-1 < v \leq 1$.

Возьмем действительное число $v_0 > -1$ и рассмотрим замкнутую подгруппу H группы $\Gamma(p)$ такую, что $H \supset \Gamma(p)^{(v_0)}$. Если $\tilde{H} = H/\Gamma(p)^{(v_0)}$, то $\tilde{H}$ – замкнутая подгруппа группы $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$. Мы используем обозначение $d(\tilde{H}) = \text{rk}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(\tilde{H}/\tilde{H}^p[\tilde{H}, \tilde{H}])$ для минимального числа топологических образующих про- p -группы $\tilde{H}$.

Если $-1 < v_0 \leq 1$, то $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ является свободной про- p -группой, так как она совпадает с группой Галуа максимального p -расширения поля вычетов k . Таким образом, в этом случае $\tilde{H}$ является свободной про- p -группой.

Предположим, что $v_0 > 1$ и $\tilde{H}$ – открытая подгруппа в $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$. Тогда H является открытой подгруппой в $\Gamma(p)$, $K_H := K(p)^H$ – конечное расширение поля K , $H = \Gamma_{K_H}(p)$ – группа Галуа максимального p -расширения $K(p)$ поля K_H над K_H и $\Gamma(p)^{(v_0)} = \Gamma_{K_H}(p)^{(v_0H)}$ для $v_0H = \psi_{K_H/K}(v_0)$, где $\psi_{K_H/K}$ – обратная функция Эрбрана для расширения K_H/K . Таким образом, в этом случае изучение группы $\tilde{H}$ сводится к изучению группы $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$. Эта группа очень далека от того, чтобы быть свободной про- p -группой: если k – конечное поле, то она имеет бесконечное число соотношений (см. [5]); в то же время она имеет конечное число образующих.

Работа написана при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 97-01-00934)

В настоящей работе рассматривается почти противоположная ситуация. Основной результат может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА. *Если $v_0 > -1$ и $\tilde{H}$ – конечно порожденная замкнутая, но не открытая подгруппа про- p -группы $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$, то $\tilde{H}$ является свободной про- p -группой.*

Как уже было отмечено ранее, для $v_0 \leq 1$ утверждение теоремы справедливо, так как в этом случае группа $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ сама является свободной про- p -группой. Таким образом, при доказательстве (см. § 2, 3) сформулированного выше результата мы можем считать, что $v_0 > 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. а) *Если $v_0 > 1$ и k – бесконечное поле, то любая конечно порожденная замкнутая про- p -подгруппа $\tilde{H}$ группы $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ является свободной про- p -группой.*

б) *Произвольная конечно порожденная про- p -подгруппа в группе*

$$I(p)/\Gamma(p)^{(v_0)},$$

где $v_0 > 1$, является свободной про- p -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) вытекает из нашей теоремы, потому что в данном случае любая открытая подгруппа в группе $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ имеет бесконечно много образующих и, следовательно, $\tilde{H}$ не является открытой. Утверждение б) получается как частный случай утверждения а), если поле K заменить на p -адическое пополнение $\widehat{K(p)}_{\text{nr}}$ его максимального неразветвленного p -расширения.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для $v_0 > -1$ группа $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ не имеет кручения и нетривиальных коммутирующих элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $v_0 > 1$. Тогда для произвольной открытой подгруппы $\tilde{H} \subset \Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ мы имеем $d(\tilde{H}) \geq 2$. Следовательно, если $\tilde{H}$ замкнута в $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ и $d(\tilde{H}) = 1$, то $\tilde{H}$ про- p -свободна. Очевидно, это эквивалентно отсутствию кручения.

Существование нетривиальных коммутирующих элементов означает существование замкнутой коммутативной подгруппы $\tilde{H} \subset \Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ такой, что $d(\tilde{H}) = 2$. Из нашей теоремы тогда вытекает, что $\tilde{H}$ является открытой подгруппой, поэтому мы можем с самого начала считать, что $\tilde{H} = \Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$, где по-прежнему $v_0 > 1$ (см. ниже предложение 1, в)). Тогда $d(\tilde{H}) = 2$, если и только если $k \simeq \mathbb{F}_p$ и $1 < v_0 \leq 2$. Рассмотрим множество $\tilde{H}^p = \{h^p \mid h \in \tilde{H}\}$. Тогда $\tilde{H}^p$ – коммутативная подгруппа в $\tilde{H}$ (так как $\tilde{H}$ коммутативна), $(\tilde{H} : \tilde{H}^p) = p^2$ и $d(\tilde{H}^p) = 2$ (так как $\tilde{H}$ не имеет кручения). Следовательно, $\tilde{H}^p = \Gamma_{K_1}(p)/\Gamma_{K_1}(p)^{(v_1)}$, где K_1 – расширение поля K степени p^2 и $v_1 = \psi_{K_1/K}(v_0) > 1$. Легко видеть, что $[k_1 : \mathbb{F}_p] = p$, где k_1 – поле вычетов поля K_1 . Это дает $2 = d(\tilde{H}^p) \geq 1 + p$. Противоречие. Следствие доказано.

Из только что доказанного следствия вытекает, что при любом $v_0 > -1$:

а) если $\tau \notin \Gamma(p)^{(v_0)}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ $\tau^{p^n} \notin \Gamma(p)^{(v_0)}$;

б) если $\tau_1, \tau_2 \notin \Gamma(p)^{(v_0)}$, но коммутатор (τ_1, τ_2) принадлежит $\Gamma(p)^{(v_0)}$, то для некоторого $a \in \mathbb{Z}_p$ мы имеем либо $\tau_1 = \tau_2^a$, либо $\tau_2 = \tau_1^a$ по модулю $\Gamma(p)^{(v_0)}$.

Эти свойства означают, что фильтрация ветвления не имеет никакого отношения к p -центральной фильтрации группы $\Gamma(p)$. Указание на существование этого феномена может быть найдено в работе Е. Маусса [6]. По сути дела наша теорема означает, что группа $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$ не имеет “простых” соотношений, т.е. она не имеет соотношений, которые могут быть выражены через элементы собственного подмножества некоторого минимального множества образующих группы $\Gamma(p)/\Gamma(p)^{(v_0)}$. Заметим, что в случае, когда основное поле K имеет характеристику p , эти соотношения по модулю подгруппы коммутаторов порядка $\geq p$ были описаны в терминах образующих группы $\Gamma(p)$ в работах [1]–[3].

Пусть $I = \bigcup_{v>0} \Gamma^{(v)}$ – подгруппа высшего ветвления в Γ . Следующий аналог нашей теоремы выполняется для фильтрации ветвления всей группы Галуа Γ .

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если $v_0 > 0$ и группа $\tilde{H} \subset I/\Gamma^{(v_0)}$ является конечно порожденной про- p -группой, то $\tilde{H}$ – про- p -свободная группа (в частности, $I/\Gamma^{(v_0)}$ не имеет кручения и нетривиальных коммутирующих элементов).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_{tr} – максимальное слабо разветвленное расширение поля K в K_{sep} . Тогда $K_{\text{tr}} = \varinjlim_{\alpha \in \mathcal{A}} K_{\alpha}$, где $\{K_{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ – множество всех конечных слабо разветвленных расширений Галуа поля K в K_{sep} . Мы условимся снабжать использованные выше обозначения нижним индексом α , если они относятся к полю K_{α} , взятому вместо поля K . Очевидно, семейство групп $\{I_{\alpha}(p) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ составляет проективную систему, индуцированную проективной системой групп Галуа Γ_{α} , $\alpha \in \mathcal{A}$, а также

$$I = \varprojlim_{\alpha \in \mathcal{A}} I_{\alpha}(p).$$

Используя простейшие свойства фильтрации ветвления, легко видеть, что имеется естественная проективная система групп $\{\Gamma_{\alpha}(p)^{(e_{\alpha} v_0)} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, где $e_{\alpha} = e(K_{\alpha}/K)$ – относительный индекс ветвления расширения K_{α}/K , и мы имеем

$$\Gamma^{(v_0)} = \varprojlim_{\alpha \in \mathcal{A}} \Gamma_{\alpha}(p)^{(e_{\alpha} v_0)}.$$

Следовательно,

$$\tilde{H} \subset \varprojlim_{\alpha \in \mathcal{A}} I_{\alpha}(p)/\Gamma_{\alpha}(p)^{(e_{\alpha} v_0)}.$$

Если pr_{α} – проекция этого предела на его компоненту с индексом α , то $\tilde{H}_{\alpha} := \text{pr}_{\alpha}(\tilde{H})$ является про- p -свободной группой согласно следствию 1, б). Очевидно, существует индекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такой, что $d(\tilde{H}) = d(\tilde{H}_{\alpha_0})$, следовательно, $\text{pr}_{\alpha_0}|_{\tilde{H}}$ – изоморфизм и $\tilde{H}$ – свободная про- p -группа. Следствие доказано.

§ 2. Доказательство теоремы

2.1. Пусть $\{K_{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ – семейство всех конечных расширений Галуа поля K в $K(p)$. Множество $\mathcal{A}$ является фильтрованным множеством (для $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ отношение $\alpha_1 \geq \alpha_2$ означает, что $K_{\alpha_1} \supset K_{\alpha_2}$) и $\Gamma(p) = \varprojlim_{\alpha \in \mathcal{A}} \Gamma_{\alpha}$, где $\Gamma_{\alpha} = \text{Gal}(K_{\alpha}/K)$ для $\alpha \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим башню расширений $K \subset K_\alpha^H \subset K_\alpha^{(v_0)} \subset K_\alpha$, где $\alpha \in \mathcal{A}$ и $K_\alpha^{(v_0)}$ – подполе поля K_α , неподвижное относительно группы $\Gamma^{(v_0)}$. Тогда $\tilde{H} = \varprojlim_{\alpha \in \mathcal{A}} \tilde{H}_\alpha$, где $\tilde{H}_\alpha = \text{Gal}(K_\alpha^{(v_0)}/K_\alpha^H)$.

Если $\alpha \in \mathcal{A}$, то естественная проекция $\text{pr}_\alpha: \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}_\alpha$ является эпиморфизмом групп. Если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то связывающий морфизм

$$\text{pr}_{\alpha_1 \alpha_2}: \tilde{H}_{\alpha_1} \rightarrow \tilde{H}_{\alpha_2}$$

однозначно определен соотношением $\text{pr}_{\alpha_2} = \text{pr}_{\alpha_1} \circ \text{pr}_{\alpha_1 \alpha_2}$.

Рассмотрим свободную про- p -группу $\mathcal{G}$ вместе с заданным эпиморфным отображением про- p -групп

$$j: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{H}$$

таким, что индуцированный морфизм $\bar{j}: \mathcal{G}/\mathcal{G}^p[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rightarrow \tilde{H}/\tilde{H}^p[\tilde{H}, \tilde{H}]$ является изоморфизмом.

Пусть $\mathcal{G} = \varprojlim_{\beta \in \mathcal{B}} \mathcal{G}_\beta$, где $\{\mathcal{G}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ является проективной системой конечных p -групп, а все проекции $\text{pr}_\beta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\beta$ являются эпиморфизмами.

Морфизм про- p -групп j может быть задан с помощью следующего набора данных, состоящего из:

- (j1) отображения $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ такого, что $\iota(\alpha_1) \geq \iota(\alpha_2)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2$;
- (j2) эпиморфизмов групп $j_\alpha: \mathcal{G}_{\iota(\alpha)} \rightarrow \tilde{H}_\alpha$ для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$;
- (j3) набора коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\iota(\alpha_1)} & \xrightarrow{j_{\alpha_1}} & \tilde{H}_{\alpha_1} \\ \text{pr}_{\iota(\alpha_1)\iota(\alpha_2)} \downarrow & & \text{pr}_{\alpha_1 \alpha_2} \downarrow \\ \mathcal{G}_{\iota(\alpha_2)} & \xrightarrow{j_{\alpha_2}} & \tilde{H}_{\alpha_2} \end{array}$$

для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ таких, что $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

Если $\alpha \in \mathcal{A}$ и индекс $\beta \in \mathcal{B}$ таков, что $\beta \geq \iota(\alpha)$, то определим морфизм групп $j_{\beta\alpha} \in \text{Hom}(\mathcal{G}_\beta, \tilde{H}_\alpha)$ с помощью равенства $j_{\beta\alpha} = \text{pr}_{\beta\iota(\alpha)} \circ j_\alpha$. Тогда свойство (j3) может быть переформулировано следующим образом:

- (j3') если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ и индексы $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}$ таковы, что $\alpha_1 \geq \alpha_2$, $\beta_1 \geq \iota(\alpha_1)$, $\beta_2 \geq \iota(\alpha_2)$ и $\beta_1 \geq \beta_2$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\beta_1} & \xrightarrow{j_{\beta_1 \alpha_1}} & \tilde{H}_{\alpha_1} \\ \text{pr}_{\beta_1 \beta_2} \downarrow & & \text{pr}_{\alpha_1 \alpha_2} \downarrow \\ \mathcal{G}_{\beta_2} & \xrightarrow{j_{\beta_2 \alpha_2}} & \tilde{H}_{\alpha_2} \end{array}$$

является коммутативной.

2.2. Пусть $\mathcal{A}_1$ – подмножество в $\mathcal{A}$, состоящее из $\alpha \in \mathcal{A}$ таких, что

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(\tilde{H}_\alpha/\tilde{H}_\alpha^p[\tilde{H}_\alpha, \tilde{H}_\alpha]) = d(\tilde{H}),$$

т.е. проекция rg_α индуцирует изоморфизм

$$\overline{\mathrm{rg}}_\alpha: \tilde{H}/\tilde{H}^p[\tilde{H}, \tilde{H}] \longrightarrow \tilde{H}_\alpha/\tilde{H}_\alpha^p[\tilde{H}_\alpha, \tilde{H}_\alpha].$$

Очевидно, $\mathcal{A}_1$ является кофинальным подмножеством в $\mathcal{A}$.

Для $\alpha \in \mathcal{A}_1$ рассмотрим башню расширений из п. 2.1

$$K \subset K_\alpha^H \subset K_\alpha^{(v_0)} \subset K_\alpha.$$

Следующая лемма будет доказана в § 3 (мы используем обозначения из п. 2.1).

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Если $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и индекс $\beta \in \mathcal{B}$ таков, что $\beta \geq \iota(\alpha)$, то существуют конечные расширения $E_{\beta\alpha}$ над K_α^H и $F_{\beta\alpha}$ над $E'_{\beta\alpha} := E_{\beta\alpha} K_\alpha^{(v_0)}$ такие, что:

а) $E_{\beta\alpha} \subset K(p)^H$ и, следовательно, имеется естественный изоморфизм групп

$$f_{\beta\alpha}: \tilde{H}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Gal}(E'_{\beta\alpha}/E_{\beta\alpha});$$

б) $F_{\beta\alpha}$ является расширением Галуа над $E_{\beta\alpha}$ и существует изоморфизм групп $g_{\beta\alpha}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\beta & \xrightarrow{g_{\beta\alpha}} & \mathrm{Gal}(F_{\beta\alpha}/E_{\beta\alpha}) \\ j_{\beta\alpha} \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}_\alpha & \xrightarrow{f_{\beta\alpha}} & \mathrm{Gal}(E'_{\beta\alpha}/E_{\beta\alpha}) \end{array}$$

коммутативна (здесь правая вертикальная стрелка обозначает естественную проекцию);

в) $F_{\beta\alpha}$ содержится в подполе $K(p)^{(v_0)}$ поля $K(p)$, неподвижном относительно группы $\Gamma(p)^{(v_0)}$.

2.3. Для $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и индекса $\beta \in \mathcal{B}$ такого, что $\beta \geq \iota(\alpha)$, рассмотрим поля $E_{\beta\alpha}$, $E'_{\beta\alpha}$ и $F_{\beta\alpha}$ из предыдущей леммы. Обозначим через $D_{\beta\alpha}$ нормальное замыкание поля $F_{\beta\alpha}$ над K в $K(p)$. Тогда существует индекс $\gamma \in \mathcal{A}$ такой, что $K_\gamma = D_{\beta\alpha}$, и мы имеем следующую коммутативную диаграмму в категории конечных расширений поля K :

$$\begin{array}{ccccc} K_\alpha^H & \subset & K_\alpha^{(v_0)} & \subset & K_\alpha \\ \cap & & \cap & & \\ E_{\beta\alpha} & \subset & E'_{\beta\alpha} & \subset & F_{\beta\alpha} \\ \cap & & \cap & & \\ K_\gamma^H & \subset & K_\gamma^{(v_0)} & = & K_\gamma^{(v_0)} = K_\gamma = D_{\beta\alpha} \end{array}$$

Заметим, что $F_{\beta\alpha}$ – расширение Галуа над $E_{\beta\alpha}$, $E_{\beta\alpha} \subset K(p)^H$, $F_{\beta\alpha} \subset K(p)^{(v_0)}$ и, следовательно, имеется естественный гомоморфизм групп

$$h_{\beta\alpha}: \tilde{H} \longrightarrow \mathrm{Gal}(F_{\beta\alpha}/E_{\beta\alpha})$$

такой, что $h_{\beta\alpha} \circ g_{\beta\alpha}^{-1} \circ j_{\beta\alpha} = \text{pr}_\alpha$. Так как $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $\beta \geq \iota(\alpha)$, то минимальные количества образующих для групп $\tilde{H}$, $\tilde{H}_\alpha$ и $\mathcal{G}_\beta$ совпадают. Следовательно, $h_{\beta\alpha} \circ g_{\beta\alpha}^{-1}$ является эпиморфизмом, и мы получаем

$$h_{\beta\alpha}(\tilde{H}) = g_{\beta\alpha}(\mathcal{G}_\beta) = \text{Gal}(F_{\beta\alpha}/E_{\beta\alpha}).$$

Отсюда $F_{\beta\alpha}^H = E_{\beta\alpha}$ и, таким образом, поля $F_{\beta\alpha}$ и K_γ^H линейно разделены над $E_{\beta\alpha}$ и имеется эпиморфизм групп

$$h_{\gamma\beta\alpha}: \tilde{H}_\gamma \longrightarrow \text{Gal}(F_{\beta\alpha}/E_{\beta\alpha})$$

такой, что $h_{\beta\alpha} = \text{pr}_\gamma \circ h_{\gamma\beta\alpha}$. Пусть

$$i_{\gamma\beta\alpha} = h_{\gamma\beta\alpha} \circ g_{\beta\alpha}^{-1} \in \text{Hom}(\tilde{H}_\gamma, \mathcal{G}_\beta).$$

Тогда $i_{\gamma\beta\alpha}$ является эпиморфизмом и выполнено равенство

$$\text{pr}_{\gamma\alpha} = i_{\gamma\beta\alpha} \circ j_{\beta\alpha}.$$

2.4. Рассмотрим множество

$$\mathcal{C} = \{(\beta, \alpha) \in \mathcal{B} \times \mathcal{A}_1 \mid \alpha \in \mathcal{A}_1, \beta \geq \iota(\alpha)\}.$$

Очевидно, $\mathcal{C}$ является фильтрованным множеством.

Для $(\beta, \alpha) \in \mathcal{C}$ рассмотрим множество

$$I_{(\beta, \alpha)} = \{i \in \text{Hom}_{\text{cont}}(\tilde{H}, \mathcal{G}_\beta) \mid \text{pr}_\alpha = i \circ j_{\beta\alpha}\}.$$

Это множество является конечным (потому что $\tilde{H}$ конечно порождена) и непустым (согласно п. 2.3). Из свойства (j3') вытекает, что $\{I_{(\beta, \alpha)}\}_{(\beta, \alpha) \in \mathcal{C}}$ является проективной системой и, следовательно, ее проективный предел I является непустым множеством.

Возьмем $i \in I$. Для произвольного $\alpha \in \mathcal{A}_1$ множество

$$\mathcal{B}_\alpha = \{\beta \in \mathcal{B} \mid (\beta, \alpha) \in \mathcal{C}\} = \{\beta \in \mathcal{B} \mid \beta \geq \iota(\alpha)\}$$

является кофинальным в $\mathcal{B}$. Следовательно, для произвольного $\alpha \in \mathcal{A}_1$ набор

$$\{\text{pr}_{(\beta, \alpha)}(i) \mid \beta \in \mathcal{B}_\alpha\}$$

определяет морфизм про- p -групп $i_\alpha: \tilde{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ такой, что $\text{pr}_\alpha = i_\alpha \circ j \circ \text{pr}_\alpha$.

Из свойства (j3') вытекает, что i_α не зависит от индекса $\alpha \in \mathcal{A}_1$. Таким образом, $i = \varprojlim_{\alpha \in \mathcal{A}_1} i_\alpha \in \text{Hom}_{\text{cont}}(\tilde{H}, \mathcal{G})$, и мы имеем равенство $i \circ j = \text{id}_{\tilde{H}}$.

Очевидно, i инъективен. Но $\bar{i} = i \bmod \tilde{H}^p[\tilde{H}, \tilde{H}] = \bar{j}^{-1}$ является изоморфизмом. Таким образом, i сюръективен и $\tilde{H}$ является свободной про- p -группой (изоморфной $\mathcal{G}$). Теорема доказана.

§ 3. Доказательство основной леммы

Как уже было отмечено в § 1, мы можем считать, что $v_0 > 1$.

3.1. Предварительные сведения.

3.1.1. *Наибольшие числа ветвления.* Пусть L – полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов характеристики $p > 0$. Напомним некоторые общие факты из высшей теории ветвления (см. [7, гл. III]).

Если E/L – конечное расширение Галуа, $\Gamma_{E/L} = \text{Gal}(E/L)$ и O_E является кольцом нормирования поля E , то для любого $x > -1$ имеется подгруппа ветвления

$$\Gamma_{E/L, x} = \{ \tau \in \Gamma_{E/L} \mid v_E(\tau a - a) \geq x + 1 \quad \forall a \in O_E \},$$

где v_E – показатель поля E такой, что $v_E(E^*) = \mathbb{Z}$. Таким образом, мы получаем фильтрацию ветвления $\{\Gamma_{E/L, x}\}_{x \geq 0}$ группы $\Gamma_{E/L}$ в нижней нумерации. Эта фильтрация является убывающей левонепрерывной фильтрацией нормальных подгрупп; для $-1 < x \leq 0$ группа $\Gamma_{E/L, x}$ является подгруппой инерции группы $\Gamma_{E/L}$, а для $0 < x \leq 1$ группа $\Gamma_{E/L, x}$ является подгруппой высшего ветвления группы $\Gamma_{E/L}$.

Функция Эрбрана расширения E/L определяется для всех $x \geq 0$ с помощью выражения

$$\varphi_{E/L}(x) = \int_0^x (\Gamma_{E/L, 0} : \Gamma_{E/L, t})^{-1} dt.$$

Для $-1 < x < 0$ мы полагаем $\varphi_{E/L}(x) = x$ по определению. Тогда $\varphi_{E/L}(x)$ является возрастающей кусочно линейной функцией, $\varphi_{E/L}(0) = 0$ и для достаточно больших x выполнено $\varphi'(x) = e(E/L)^{-1}$, где $e(E/L)$ – индекс ветвления расширения E/L .

Положим $\Gamma_{E/L}^{(v)} = \Gamma_{E/L, x}$, если $x > -1$ и $v = \varphi_{E/L}(x)$. Это дает фильтрацию ветвления группы $\Gamma_{E/L}$ в верхней нумерации. Если E_1 – расширение Галуа над L и $E \subset E_1$, то естественная проекция $\Gamma_{E_1/L} \rightarrow \Gamma_{E/L}$ индуцирует для любого $v \geq 0$ эпиморфизм групп $\Gamma_{E_1/L}^{(v)} \rightarrow \Gamma_{E/L}^{(v)}$. Взяв проективный предел по отношению к этим эпиморфизмам, мы получаем фильтрацию ветвления $\{\Gamma_L^{(v)}\}_{v \geq 0}$ группы $\Gamma_L = \text{Gal}(L_{\text{sep}}/L)$ в верхней нумерации.

Функция Эрбрана удовлетворяет свойству композиции:

если E/L и E_1/L – конечные расширения Галуа такие, что $E \subset E_1$, то для произвольного $x > -1$ выполнено равенство

$$\varphi_{E_1/L}(x) = \varphi_{E/L}(\varphi_{E_1/E}(x)).$$

Определение функции Эрбрана $\varphi_{E/L}$ может быть однозначно распространено на класс всех конечных сепарабельных расширений E/L при условии, что свойство композиции будет выполнено для произвольных башен конечных расширений $L \subset E \subset E_1$ (см. [4]).

Пусть $\psi_{E/L}$ – обратная функция для $\varphi_{E/L}$. Эта функция также является возрастающей кусочно линейной функцией, удовлетворяющей свойству композиции:

если $L \subset E \subset E_1$ – башня конечных расширений, то для произвольного $x > -1$ имеет место равенство

$$\psi_{E_1/L}(x) = \psi_{E_1/E}(\psi_{E/L}(x)).$$

Если E/L – конечное расширение такое, что $e(E/L) > 1$, то множество угловых точек графика функции $\varphi_{E/L}(x)$ непусто, и мы будем обозначать через $(x(E/L), v(E/L))$ координаты последней угловой точки. Если $e(E/L) = 1$, то положим $(x(E/L), v(E/L)) = (-1, -1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $L \subset E \subset E_1$ – башня конечных расширений, то:

- а) группа $\Gamma_L^{(v)}$, где $v > -1$, действует тривиально на E , если и только если $v > v(E/L)$;
- б) $v(E_1/L) = \max\{v(E/L), \varphi_{E/L}(v(E_1/E))\}$;
- в) если $v \geq v(E/L)$, то $\Gamma_L^{(v)} = \Gamma_E^{(\psi_{E/L}(v))}$.

Свойство а) вытекает непосредственно из определений, свойство б) следует из свойства композиции. Чтобы доказать в), рассмотрим произвольное конечное расширение Галуа E_2 над L такое, что $E_2 \supset E$. Достаточно проверить, что

$$\Gamma_{E_2/L}^{(v)} = \Gamma_{E_2/E}^{(\psi_{E/L}(v))}.$$

Для любого $x \geq 0$ равенство $\Gamma_{E_2/E} \cap \Gamma_{E_2/L,x} = \Gamma_{E_2/E,x}$ вытекает непосредственно из определения нижней нумерации фильтрации ветвления. Возьмем $x = \psi_{E_2/L}(v)$, тогда $\Gamma_{E_2/L,x} \subset \Gamma_{E_2/E}$ (см. п. а)) и, следовательно, $\Gamma_{E_2/L,x} = \Gamma_{E_2/E,x}$. Осталось только заметить, что по свойству композиции мы имеем $\varphi_{E_2/E}(x) = \psi_{E/L}(v)$, т.е. $\Gamma_{E_2/E,x} = \Gamma_{E_2/E}^{(\psi_{E/L}(v))}$. Предложение доказано.

Заметим, что если E содержится в максимальном p -расширении $L(p)$ поля L , то либо $v(E/L) \geq 1$, либо E/L – неразветвленное расширение. Таким образом, если $\Gamma_L(p) = \text{Gal}(L(p)/L)$, то для $-1 < v \leq 1$ группа $\Gamma_L(p)^{(v)} = \Gamma_L(p)^{(1)}$ является подгруппой инерции группы Галуа $\Gamma_L(p)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть E и L_1 – конечные расширения поля L в $L(p)$. Тогда

$$\varphi_{E/L}(v(L_1E/E)) \leq v(L_1/L).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[E : L] = p^{n_E}$ и $[L_1 : L] = p^{n_1}$, где $n_E, n_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Случаи $n_E = 0$ или $n_1 = 0$ могут быть легко рассмотрены, таким образом, можно считать, что $n_E, n_1 \in \mathbb{N}$. Пусть $v_E = v(E/L)$ и $v_1 = v(L_1/L)$.

Допустим, что $n_E = n_1 = 1$. Очевидно, $v(L_1E/L) = \max\{v_E, v_1\}$.

Если $v_1 \geq v_E$, то согласно предложению 1, б)

$$v_1 = v(L_1E/L) = \max\{v_E, \varphi_{E/L}(v(L_1E/E))\},$$

следовательно, $v_1 \geq \varphi_{E/L}(v(L_1E/E))$, и мы получаем формулу из нашего предложения.

Рассмотрим случай $v_1 < v_E$. Из равенства $\varphi_{L_1 E/L} = \varphi_{L_1 E/E} \circ \varphi_{E/L}$ следует, что значения функции $\varphi_{L_1 E/L}$ в ее угловых точках равны $\varphi_{E/L}(v(L_1 E/L))$ и v_E . А из равенства $\varphi_{L_1 E/L} = \varphi_{L_1 E/L_1} \circ \varphi_{L_1/L}$ следует, что значения этой функции в ее угловых точках равны v_1 и $\varphi_{L_1/L}(v(L_1 E/L_1))$. Теперь из неравенства $v_1 < v_E$ следует $v_1 = \varphi_{E/L}(v(L_1 E/E))$. Таким образом, случай $n_E = n_1 = 1$ полностью рассмотрен.

Пусть $n_1 = 1$ и $n_E > 1$. В этом случае существует поле E' такое, что $L \subsetneq E' \subsetneq E$. По индукции можно считать, что наше предположение доказано для троек полей (E', L_1, L) и $(E, E', L_1 E')$. Тогда

$$\varphi_{E/L}(v(L_1 E/E)) = \varphi_{E'/L}(\varphi_{E/E'}(v(L_1 E/E))) \leq \varphi_{E'/L}(v(L_1 E'/E')) \leq v(L_1/L),$$

и случай $n_1 = 1$ и $n_E > 1$ рассмотрен.

Допустим, что $n_1 > 1$ и n_E – произвольное натуральное число. Рассмотрим поле L_2 такое, что $L \subsetneq L_2 \subsetneq L_1$. По индукции можно считать, что наше предположение доказано для троек (E, L_2, L) и (E, L_1, L_2) . Применяя свойство композиции функции Эрбрана и предположение 1, мы получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{E/L}(v(L_1 E/E)) &= \max\{\varphi_{E/L}(v(L_2 E/E)), \varphi_{L_2 E/E}(v(L_1 E/L_2 E))\} \\ &\leq \max\{v(L_2/L), \varphi_{L_2/L}(v(L_1/L_2))\} = v(L_1/L). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

3.1.2. Одно свойство функтора поля норм. Напомним основные свойства функтора поля норм (см. [8]).

Пусть E – полное дискретно нормированное поле характеристики нуль с совершенным полем вычетов k характеристики $p > 0$ и абсолютным индексом ветвления $e(E)$. Выберем алгебраическое замыкание $\bar{E}$ поля E , униформизирующий элемент $\pi \in E$ и последовательность $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ элементов из поля $\bar{E}$ такую, что $\pi_0 = \pi$ и $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ для всех $n \geq 0$.

Если $E_n = E(\pi_n)$ для $n \geq 0$ и $\tilde{E} = \varinjlim E_n$, то $\tilde{E}$ – арифметически проконечное расширение поля E . Рассмотрим его поле норм $\mathcal{X}_E(\tilde{E}) = \mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{E}$ является полным дискретно нормированным полем характеристики p , а его поле вычетов может быть канонически отождествлено с k .

Если $\tilde{L}$ – конечное расширение поля $\tilde{E}$ в $\bar{E}$, то $\tilde{L}$ – арифметически проконечное расширение поля E и его поле норм $\mathcal{X}_E(\tilde{L})$ является конечным сепарабельным расширением поля $\mathcal{E}$. Соответствие $\tilde{L} \mapsto \mathcal{X}_E(\tilde{L})$ индуцирует эквивалентность категории алгебраических расширений поля $\tilde{E}$ и категории сепарабельных расширений его поля норм $\mathcal{E}$. Следовательно, можно взять в качестве сепарабельного замыкания поля $\mathcal{E}$ поле $\mathcal{E}_{\text{sep}} = \mathcal{X}_E(\bar{E})$ и получить следующее отождествление:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{E}} := \text{Gal}(\mathcal{E}_{\text{sep}}/\mathcal{E}) = \text{Gal}(\bar{E}/\tilde{E}) \subset \Gamma_E = \text{Gal}(\bar{E}/E).$$

Бесконечное расширение $\tilde{E}/E$ имеет функцию Эрбрана

$$\varphi_{\tilde{E}/E} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1),$$

где

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leq x \leq e^*(E_n), \\ e^*(E_n) + (x - e^*(E_n))/p & \text{для } x \geq e^*(E_n), \end{cases}$$

и $e^*(E_n) = p^n e^*(E)$ для $e^*(E) = pe(E)/(p-1)$. Определенное выше отождествление $\mathcal{G}_{\mathcal{E}} \subset \Gamma_E$ совместимо с фильтрациями ветвления: для любого $v > -1$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{E}}^{(v)} = \mathcal{G}_{\mathcal{E}} \cap \Gamma_E^{(\varphi_{\tilde{E}/E}^{(v)})}.$$

Можно проверить, что $\mathcal{G}_{\mathcal{E}} \Gamma_E^{(e^*(E))} = \Gamma_E$ и, следовательно, вложение $\mathcal{G}_{\mathcal{E}} \subset \Gamma_E$ индуцирует изоморфизм

$$\mathcal{G}_{\mathcal{E}} / \mathcal{G}_{\mathcal{E}}^{(e^*(E))} \simeq \Gamma_E / \Gamma_E^{(e^*(E))}.$$

Это дает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если L – конечное расширение поля E и $\tilde{L} = L\tilde{E}$, то соответствие*

$$L \mapsto \tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{E}}(L) := \mathcal{X}_E(\tilde{L})$$

индуцирует эквивалентность категории конечных алгебраических расширений L/E таких, что $v(L/E) < e^(E)$, и категории конечных сепарабельных расширений $\mathcal{L}/\mathcal{E}$ таких, что $v(\mathcal{L}/\mathcal{E}) < e^*(E)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $[L : E] < \infty$, $v(L/E) < e^*(E)$ и $\mathcal{L} = \mathcal{X}_{\tilde{E}}(L)$, то мы имеем равенство функций Эрбрана $\varphi_{L/E} = \varphi_{\mathcal{L}/\mathcal{E}}$.

3.1.3. Одно применение теории Артина–Шрейера. Пусть K_1 – полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов k_1 характеристики $p > 0$. Выберем максимальное p -расширение $K_1(p)$ поля K_1 и обозначим через $F(K_1)$ категорию конечных расширений поля K_1 в $K_1(p)$ (если $L_1, L_2 \in F(K_1)$ и $L_1 \subset L_2$, то $\text{Hom}_{F(K_1)}(L_1, L_2)$ содержит только один элемент – вложение поля L_1 в L_2 ; если $L_1 \not\subset L_2$, то $\text{Hom}_{F(K_1)}(L_1, L_2) = \emptyset$).

Условимся использовать обозначение $e(K_1)$ для абсолютного индекса ветвления поля K_1 , если оно имеет характеристику нуль, и положим $e(K_1) = \infty$, если $\text{char } K_1 = p$. В обоих случаях мы положим $e^*(K_1) = pe(K_1)/(p-1)$.

Пусть $v_1, v'_1 \in \mathbb{R}$ таковы, что $1 \leq v'_1 < v_1 \leq e^*(K_1)$. Рассмотрим $\mathbb{F}_p$ -линейное пространство

$$V(k_1, v'_1, v_1) = \bigoplus_{a \in [v'_1, v_1)_p} (k_1)_a,$$

где $[v'_1, v_1)_p = \{n \in \mathbb{N} \mid v'_1 \leq n < v_1, (n, p) = 1\}$.

Обозначим через $S(k_1, v'_1, v_1)$ категорию конечномерных линейных подпространств в $V(k_1, v'_1, v_1)$ (здесь также для любых двух объектов V_1 и V_2 этой категории имеем $\text{Hom}_{S(k_1, v'_1, v_1)}(V_1, V_2) = \emptyset$, если $V_1 \not\subset V_2$, в противном случае множество $\text{Hom}_{S(k_1, v'_1, v_1)}(V_1, V_2)$ состоит лишь из одного элемента – вложения $V_1 \subset V_2$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существует вполне строгий функтор*

$$\mathcal{F}: S(k_1, v'_1, v_1) \longrightarrow F(K_1)$$

такой, что для произвольного $L \in S(k_1, v'_1, v_1)$ выполнены следующие свойства:

- а) $\mathcal{F}(L)$ – конечное расширение Галуа поля K_1 и существует естественное отождествление $\text{Gal}(\mathcal{F}(L)/K_1) = \widehat{L} := \text{Hom}(L, \mathbb{F}_p)$;
- б) если $L \neq 0$, то $v'_1 \leq v(\mathcal{F}(L)/K_1) < v_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $\text{char } K_1 = p$.

Если σ – морфизм Фробениуса и $\Gamma_{K_1}(p) = \text{Gal}(K_1(p)/K_1)$, то теория Артина–Шрейера дает естественное отождествление

$$K_1/(\sigma - \text{id})K_1 = \text{Hom}(\Gamma_{K_1}(p), \mathbb{F}_p).$$

Выберем униформизирующий элемент t_1 поля K_1 и рассмотрим отождествление векторного пространства $V(k_1, v'_1, v_1)$ с линейным подпространством в $K_1/(\sigma - \text{id})K_1$, индуцированное соответствием

$$\{\alpha_a\}_{a \in [v'_1, v_1)_p} \mapsto \left(\sum_{a \in [v'_1, v_1)_p} \alpha_a t_1^{-a} \right) \pmod{(\sigma - \text{id})K_1}.$$

Если $L \in S(k_1, v'_1, v_1)$ является $\mathbb{F}_p$ -линейным подпространством в $V(k_1, v'_1, v_1)$, то мы полагаем $\mathcal{F}(L) = K_1(p)^{H(L)}$, где

$$H(L) = \bigcap_{l \in L} \text{Ker } l \subset \Gamma_{K_1}(p),$$

и элементы $l \in L$ рассматриваются как элементы группы $\text{Hom}(\Gamma_{K_1}(p), \mathbb{F}_p)$ посредством отождествлений

$$V(k_1, v'_1, v_1) \subset K_1/(\sigma - \text{id})K_1 = \text{Hom}(\Gamma_{K_1}(p), \mathbb{F}_p).$$

Легко видеть, что соответствие $L \mapsto \mathcal{F}(L)$ определяет функтор, который удовлетворяет требованиям нашего предложения. Заметим, что этот функтор зависит лишь от выбора униформизирующего элемента t_1 в поле K_1 .

Если $\text{char } K_1 = 0$, то мы выбираем униформизирующий элемент $\pi_0 \in K_1$, последовательность $\pi_n \in K_{1\text{sep}} \supset K_1(p)$ такую, что $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, и строим функтор $\widetilde{\mathcal{X}}_{\widetilde{K}_1}$ из п. 3.1.2. Если t_1 – униформизирующий элемент поля $\mathcal{K}_1 = \widetilde{\mathcal{X}}_{\widetilde{K}_1}(K_1)$, соответствующий последовательности $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}'$ – построенный выше функтор для поля $\mathcal{K}_1$ и его униформизирующего элемента t_1 , а $\widetilde{\mathcal{X}}_{\widetilde{K}_1}$ – функтор из п. 3.1.2, то функтор $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \circ \widetilde{\mathcal{X}}_{\widetilde{K}_1}^{-1}$ удовлетворяет требованиям нашего предложения. Предложение доказано.

Мы применяем доказанное выше предложение в следующей ситуации.

Допустим, что $1 < v_1 \leq e^*(K_1)$, H_1 – замкнутая подгруппа в $\Gamma_{K_1}(p)$, содержащая подгруппу $\Gamma_{K_1}(p)^{(v_1)}$, $\widetilde{H}_1 = H_1/\Gamma_{K_1}(p)^{(v_1)}$ и $d(\widetilde{H}_1)$ – минимальное число топологических образующих группы $\widetilde{H}_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $1 \leq v'_1 < v_1 (\leq e^*(K_1))$ и $\dim_{\mathbb{F}_p} V(k_1, v'_1, v_1) > d(\tilde{H}_1)$, то существует расширение K_2 поля K_1 степени p такое, что $K_2 \subset K_1(p)^{H_1}$ и $v(K_2/K_1) \geq v'_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях из предложения 4 рассмотрим поле $E_1 = \mathcal{F}(L)$, где $L \in S(k_1, v'_1, v_1)$ таково, что $\dim_{\mathbb{F}_p} L > d(\tilde{H}_1)$. Тогда $v'_1 \leq v(E_1/K_1) < v_1$. Таким образом, если

$$f : \Gamma_{K_1}(p) \longrightarrow \text{Gal}(E_1/K_1) = \hat{L}$$

– естественная проекция, то $\Gamma_{K_1}(p)^{(v_1)} \subset \text{Ker } f$ и $d(f(H_1)) \leq d(\tilde{H}_1)$. Следовательно, $f(H_1)$ – собственная подгруппа в группе $\hat{L}$, и поэтому в $E_1^{f(H_1)} = E_1 \cap K_1(p)^{H_1}$ существует расширение K_2 поля K_1 такое, что $[K_2 : K_1] = p$. Очевидно, что $v(K_2/K_1) \geq v'_1$. Предложение доказано.

3.2. Поле $K_{\alpha 1}$. Как и ранее, для $\alpha \in \mathcal{A}_1$ рассмотрим башню расширений

$$K \subset K_{\alpha}^H \subset K_{\alpha}^{(v_0)} \subset K_{\alpha}.$$

Обозначим через $C(\tilde{H})$ положительное действительное число такое, что для произвольного $r > 0$ интервал $(r, r + C(\tilde{H}))$ содержит по меньшей мере $d(\tilde{H}) + 1$ взаимно простых с p натуральных чисел.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Существует конечное расширение $K_{\alpha 1}$ поля K_{α}^H в $K(p)^H$ такое, что

$$\min\{\psi_{K_{\alpha 1}/K}(v_0), e^*(K_{\alpha 1})\} > C(\tilde{H}) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО содержится в пп. 3.2.1–3.2.3.

3.2.1. Докажем сначала, что существует бесконечная башня полей

$$K_{\alpha}^H = K_{\alpha 0, 0} \subset K_{\alpha 0, 1} \subset \cdots \subset K_{\alpha 0, n} \subset \cdots$$

такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется равенство $[K_{\alpha 0, n} : K_{\alpha 0, n-1}] = p$ и включение $K_{\alpha 0, n} \subset K(p)^H$.

Действительно, пусть $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, и допустим, что мы уже построили такие поля $K_{\alpha 0, n}$ для $n \leq n_0$. Так как $K_{\alpha 0, n_0} \subset K(p)^H$, мы имеем вложение $H \subset \Gamma_{n_0} = \text{Gal}(K(p)/K_{\alpha 0, n_0})$. Из того, что $[K_{\alpha 0, n_0} : K] < \infty$ и H не является открытой подгруппой группы $\Gamma(p)$, вытекает, что $H \neq \Gamma_{n_0}$ и, следовательно, $H_{n_0} := H\Gamma_{n_0}^p[\Gamma_{n_0}, \Gamma_{n_0}] \subsetneq \Gamma_{n_0}$. Пусть $E_{n_0} = K(p)^{H_{n_0}}$. Тогда E_{n_0} является нетривиальным абелевым расширением поля $K_{\alpha 0, n_0}$ в $K(p)^H$. Очевидно, существует поле $K_{\alpha 0, n_0+1}$ такое, что $K_{\alpha 0, n_0} \subset K_{\alpha 0, n_0+1} \subset E_{n_0}$ и $[K_{\alpha 0, n_0+1} : K_{\alpha 0, n_0}] = p$.

3.2.2. Мы собираемся показать здесь, что башня полей $K_{\alpha 0, n}$, $n \geq 0$, из п. 3.2.1 может быть выбрана таким образом, чтобы для почти всех $n \in \mathbb{N}$ поле $K_{\alpha 0, n}$ было вполне разветвлено над $K_{\alpha 0, n-1}$.

Обозначим через $K'_{\alpha 0, n}$, $n \geq 0$, башню полей из п. 3.2.1. Если эта башня не удовлетворяет сформулированному выше условию, то существует $n_0 \geq 0$ такое, что поле вычетов k_1 поля $K'_{\alpha 0, n_0}$ содержит более $p^{d(\tilde{H})}$ элементов (напомним, что $d(\tilde{H})$ – минимальное число топологических образующих про- p -группы $\tilde{H} = H/\Gamma(p)^{(v_0)}$).

Для $0 \leq n \leq n_0$ положим $K_{\alpha 0, n} = K'_{\alpha 0, n}$. Пусть $n_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таково, что $n_1 \geq n_0$, и допустим, что мы уже построили для $n_0 < n \leq n_1$ поля $K_{\alpha 0, n}$ такие, что для $0 < n \leq n_1$ выполнено $[K_{\alpha 0, n} : K_{\alpha 0, n-1}] = p$, $K_{\alpha 0, n} \subset K(p)^H$ и для $n_0 < n \leq n_1$ $v(K_{\alpha 0, n}/K_{\alpha 0, n-1}) \geq 1$ (т.е. $K_{\alpha 0, n}$ вполне разветвлено над $K_{\alpha 0, n-1}$).

Пусть $K_1 = K_{\alpha 0, n_1}$, $v_1 = \min\{\psi_{K_1/K}(v_0), e^*(K_1)\}$ и $H_1 = H\Gamma_1^{(v_1)}$, где $\Gamma_1 = \text{Gal}(K(p)/K_1)$. Заметим, что k_1 – поле вычетов поля K_1 , $v_1 > 1$ и

$$\dim_{\mathbb{F}_p} V(k_1, 1, v_1) \geq \dim_{\mathbb{F}_p} k_1 > d(\tilde{H})$$

(см. обозначения п. 3.1.3). Так как $K_1 \subset K(p)^H$ и $H \supset \Gamma(p)^{(v_0)}$, мы имеем $v(K_1/K) < v_0$ и, следовательно, $\Gamma(p)^{(v_0)} = \Gamma_1^{(\psi_{K_1/K}(v_0))}$ (см. предложение 1). Так как $v_1 \leq \psi_{K_1/K}(v_0)$, мы имеем $\Gamma_1^{(\psi_{K_1/K}(v_0))} \subset \Gamma_1^{(v_1)}$ и, следовательно, существует естественный эпиморфизм групп

$$\tilde{H} = H/\Gamma(p)^{(v_0)} \longrightarrow H/H \cap \Gamma_1^{(v_1)} = H_1/\Gamma_1^{(v_1)} := \tilde{H}_1.$$

Отсюда $d(\tilde{H}) \geq d(\tilde{H}_1)$. Таким образом, можно применить предложение 5, чтобы получить расширение полей K_2/K_1 относительной степени p такое, что $K_2 \subset K(p)^{H_1}$ и $v(K_2/K_1) \geq 1$. Так как $H_1 \supset H$, можно взять $K_{\alpha 0, n_1+1} = K_2$.

3.2.3. Как было показано выше, мы можем рассмотреть башню полей $K_{\alpha 0, n}$, $n \geq 0$, из п. 3.2.1 такую, что множество $\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid v(K_{\alpha 0, n+1}/K_{\alpha 0, n}) \geq 1\}$ бесконечно. Очевидно, из свойств $\psi_{K_{\alpha 0, n}/K}(v_0) \rightarrow +\infty$ и $e^*(K_{\alpha 0, n}) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ будет следовать утверждение нашего предложения.

Заметим сначала, что если $v_n^* := v(K_{\alpha 0, n+1}/K_{\alpha 0, n}) < 1$, то $v_n^* = -1$, т.е. $K_{\alpha 0, n+1}$ не разветвлено над $K_{\alpha 0, n}$. В этом случае мы имеем $\psi_{K_{\alpha 0, n+1}/K} = \psi_{K_{\alpha 0, n}/K}$ и $e^*(K_{\alpha 0, n+1}) = e^*(K_{\alpha 0, n})$. Если $v_n^* \geq 1$, то из свойства композиции функции Эрбрана получаем

$$\psi_{K_{\alpha 0, n+1}/K}(x) = \begin{cases} \psi_{K_{\alpha 0, n}/K}(x), & \text{если } \psi_{K_{\alpha 0, n}/K}(x) < v_n^*, \\ v_n^* + p(\psi_{K_{\alpha 0, n}/K}(x) - v_n^*), & \text{если } \psi_{K_{\alpha 0, n}/K}(x) \geq v_n^*, \end{cases}$$

и $e^*(K_{\alpha 0, n+1}) = pe^*(K_{\alpha 0, n})$.

Свойство $e^*(K_{\alpha 0, n}) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ является очевидным.

Для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ согласно предложению 1, б) мы имеем

$$\varphi_{K_{\alpha 0, n}/K}(v_n^*) \leq v(K_{\alpha 0, n+1}/K) < v_0.$$

Следовательно, $v_n^* < \psi_{K_{\alpha 0, n}/K}(v_0)$. Итак, если мы положим $\psi_n = \psi_{K_{\alpha 0, n}/K}(v_0)$, то

$$\psi_{n+1} = \begin{cases} \psi_n, & \text{если } v_n^* = -1, \\ v_n^* + p(\psi_n - v_n^*), & \text{если } v_n^* \geq 1. \end{cases}$$

Заметим, что во втором случае мы имеем $v_n^* \in \mathbb{N}$, $v_n^* < \psi_n$ и $\psi_{n+1} > \psi_n$.

Рассмотрим строго возрастающую последовательность $\{\psi_m^*\}_{m \in \mathbb{N}}$, состоящую из всех элементов множества $\{\psi_n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Из конструкции башни полей $K_{\alpha 0, n}$, $n \geq 0$ (см. п. 3.2.2), вытекает, что эта последовательность является бесконечной, и нам достаточно проверить, что $\psi_m^* \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Для $x \in \mathbb{R}$ положим $\{\{x\}\} = \min\{x - n \mid n \in \mathbb{Z}, n < x\}$. Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ мы имеем равенство

$$\psi_{m+1}^* - \psi_m^* = (p-1)(\psi_m^* - v_{n(m)}^*),$$

где $n(m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таково, что $\psi_m^* = \psi_{n(m)}^*$ и $\psi_{m+1}^* = \psi_{n(m)+1}^*$. Следовательно, $\psi_{m+1}^* - \psi_m^* \geq (p-1)\{\{\psi_m^*\}\}$ и $\psi_{m+1}^* \equiv p\psi_m^* \pmod{\mathbb{Z}}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Итак,

$$\psi_m^* \geq (p-1) \sum_{1 \leq n < m} \{\{\psi_n^*\}\} = (p-1) \sum_{1 \leq n < m} \{\{p^{n-1}\psi_1^*\}\} \rightarrow \infty$$

при $m \rightarrow \infty$. Предложение доказано.

3.3. Поля $K_{\alpha 1, n}$ и $L_{\alpha 1, n}$, $n \geq 0$.

3.3.1. Рассмотрим поле $K_{\alpha 1}$ из предложения 6. Пусть

$$\begin{aligned} v'_0 &= \varphi_{K_{\alpha 1}/K}(\psi_{K_{\alpha 1}/K}(v_0) - 1), \\ v_0^* &= \max\{v'_0, v(K_{\alpha}^{(v_0)}/K), v(K_{\alpha 1}/K)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $v_0^* < v_0$ и $\psi_{K_{\alpha 1}/K}(v_0^*) > C(\tilde{H})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Существует башня полей*

$$K_{\alpha 1, 0} := K_{\alpha 1} \subset K_{\alpha 1, 1} \subset \cdots \subset K_{\alpha 1, n} \subset \cdots$$

такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено:

- а) $[K_{\alpha 1, n} : K_{\alpha 1, n-1}] = p$ и $K_{\alpha 1, n} \subset K(p)^H$;
- б) если $v^{(n)} = v(K_{\alpha 1, n}/K_{\alpha 1, n-1})$ и $A_n = \min\{\psi_{K_{\alpha 1, n-1}/K}(v_0^*), e^*(K_{\alpha 1, n-1})\}$, то $v^{(n)} \in (A_n - C(\tilde{H}), A_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по n . Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, и допустим, что такие поля построены для $0 \leq n < n_0$. Заметим, что для всех $0 < n \leq n_0$ мы имеем $A_n \geq A_1 > C(\tilde{H})$ и, следовательно, интервал $(A_n - C(\tilde{H}), A_n)$ содержит по меньшей мере $d(\tilde{H}) + 1$ натуральных чисел, взаимно простых с p .

Положим $K_1 = K_{\alpha 1, n_0-1}$ и $H_1 = H\Gamma_1^{(A_{n_0})}$, где $\Gamma_1 = \text{Gal}(K(p)/K_1)$. Если k_1 – поле вычетов поля K_1 , $v_1 = A_{n_0}$ и $v'_1 = [A_{n_0} - C(\tilde{H})] + 1$, то $v'_1 \geq 1$ и $\dim_{\mathbb{F}_p} V(k_1, v'_1, v_1) > d(\tilde{H})$. Как и в п. 3.2.2, мы получаем теперь, что $v(K_1/K) < v_0$, $\Gamma(p)^{(v_0)} = \Gamma_1^{(\psi_{K_1/K}(v_0))} \subset \Gamma_1^{(A_{n_0})}$ (так как $A_{n_0} \leq \psi_{K_{\alpha 1, n_0-1}/K}(v_0)$), имеется естественный эпиморфизм групп

$$\tilde{H} = H/\Gamma(p)^{(v_0)} \longrightarrow H/H \cap \Gamma_1^{(A_{n_0})} = H_1/\Gamma_1^{(A_{n_0})} := \tilde{H}_1$$

и, следовательно, $d(\tilde{H}) \geq d(\tilde{H}_1)$.

Итак, предложение 5 дает существование расширения K_2/K_1 такого, что $[K_2 : K_1] = p$, $A_{n_0} > v(K_2/K_1) \geq v'_1 > A_{n_0} - C(\tilde{H})$ и $K_2 \subset K(p)^{H_1} \subset K(p)^H$.

Очевидно, мы можем взять $K_2 = K_{\alpha 1, n_0}$. Предложение доказано.

3.3.2. Рассмотрим башню полей $K_{\alpha 1, n}$, $n \geq 0$, из предложения 7. Положим $L_{\alpha 1, n} = K_{\alpha}^{(v_0)} K_{\alpha 1, n}$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Так как $K(p)^H$ и $K_{\alpha}^{(v_0)}$ линейно разделены над K_{α}^H , мы имеем для всех $n \geq 0$ естественный изоморфизм

$$\tilde{H}_{\alpha} = \text{Gal}(K_{\alpha}^{(v_0)}/K_{\alpha}^H) \simeq \text{Gal}(L_{\alpha 1, n}/K_{\alpha 1, n}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если v_0^* – действительное число из п. 3.3.1, то для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполнено неравенство $v(L_{\alpha 1, n}/K) \leq v_0^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$v(L_{\alpha 1, n}/K) = \max\{v(K_{\alpha}^{(v_0)}/K), v(K_{\alpha 1, n}/K)\},$$

то достаточно доказать, что $v(K_{\alpha 1, n}/K) \leq v_0^*$.

Мы можем считать по индукции, что $v(K_{\alpha 1, n-1}/K) \leq v_0^*$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$v(K_{\alpha 1, n}/K) = \max\{v(K_{\alpha 1, n-1}/K), \varphi_{K_{\alpha 1, n-1}/K}(v^{(n)})\},$$

где $v^{(n)} = v(K_{\alpha 1, n}/K_{\alpha 1, n-1}) < A_n \leq \psi_{K_{\alpha 1, n-1}/K}(v_0^*)$, и, следовательно,

$$\varphi_{K_{\alpha 1, n-1}/K}(v^{(n)}) < v_0^*.$$

Предложение доказано.

3.3.3. В использованных выше обозначениях мы имеем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если $v_n = v(L_{\alpha 1, n}/K_{\alpha 1, n})$ и $e_n = e(K_{\alpha 1, n}/K_{\alpha}^H)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n/e_n) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2 мы имеем

$$v(L_{\alpha 1, n}/K_{\alpha 1, n}) \leq \psi_{K_{\alpha 1, n}/K_{\alpha 1, 0}}(v(L_{\alpha 1, 0}/K_{\alpha 1, 0})),$$

а согласно предложению 1, б) имеет место неравенство

$$\varphi_{K_{\alpha 1, 0}/K}(v(L_{\alpha 1, 0}/K_{\alpha 1, 0})) \leq v(L_{\alpha 1, 0}/K) \leq v_0^*.$$

Следовательно, $v(L_{\alpha 1, n}/K_{\alpha 1, n}) \leq \psi_n := \psi_{K_{\alpha 1, n}/K}(v_0^*)$, и достаточно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n/e_n) = 0$.

Докажем сначала, что существует $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такое, что $\psi_{n_0} < e^*(K_{\alpha 1, n_0})$.

Если такого n_0 нет, то для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ должно быть выполнено $\psi_n \geq e^*(K_{\alpha 1, n}) = p^n e^*(K_{\alpha 1, 0})$ и $A_{n+1} = e^*(K_{\alpha 1, n})$. Следовательно,

$$\psi_{n+1} = \psi_{K_{\alpha 1, n+1}/K_{\alpha 1, n}}(\psi_n) = v^{(n+1)} + p(\psi_n - v^{(n+1)}),$$

так как $\psi_n \geq e^*(K_{\alpha 1, n})$ и $v^{(n+1)} < A_{n+1}$. Используя неравенство $v^{(n+1)} > A_{n+1} - C(\tilde{H})$, получаем для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &\leq p^{n+1}\psi_0 - (p^{n+1} - p^n)(e^*(K_{\alpha 1, 0}) - C(\tilde{H})) - (p-1)(e^*(K_{\alpha 1, n}) - C(\tilde{H})) \\ &= p^{n+1}(\psi_0 + C(\tilde{H})(1 - p^{-n-1}) - (n+1)e^*(K_{\alpha 1, 0})(1 - p^{-1})). \end{aligned}$$

Противоречие, так как правая часть этого равенства стремится к $-\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таково, что $\psi_{n_0} < e^*(K_{\alpha 1, n_0})$. Тогда для всех $n \geq n_0$ мы имеем также $\psi_n < e^*(K_{\alpha 1, n})$, так как для любого n выполнено

$$\psi_{n+1} = \max\{\psi_n, v^{(n+1)} + p(\psi_n - v^{(n+1)})\} \leq p\psi_n.$$

В частности, для всех $n \geq n_0$ мы имеем $\psi_n = A_{n+1}$.

Докажем, что для произвольного $n \geq n_0$

$$\psi_{n+1} - \psi_n < (p-1)C(\tilde{H}). \quad (1)$$

Действительно, если $\psi_n \leq v^{(n+1)}$, то

$$\psi_{n+1} = \psi_{K_{\alpha 1, n+1}/K_{\alpha 1, n}}(\psi_n) = \psi_n,$$

и неравенство (1) выполнено. Если $\psi_n > v^{(n+1)}$, то

$$\psi_{n+1} = v^{(n+1)} + p(\psi_n - v^{(n+1)}).$$

Но $\psi_n = A_{n+1}$, $v^{(n+1)} > A_{n+1} - C(\tilde{H})$ и

$$\psi_{n+1} - \psi_n = (p-1)(\psi_n - v^{(n+1)}) < (p-1)C(\tilde{H}).$$

Неравенство (1) доказано.

Следовательно, для любого $n \geq n_0$ мы имеем

$$\psi_{n_0} \leq \psi_n < (p-1)C(\tilde{H})(n - n_0) + \psi_{n_0},$$

и так как $e_n = p^{n-n_0}e_{n_0}$, это влечет, очевидно, $\psi_n/e_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Предложение доказано.

3.4. Поля $K_{\alpha 2, n}$ и $L_{\alpha 2, n}$, $n \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Существует башня конечных расширений поля K_α^H в $K(p)^H$ относительной степени p*

$$K_{\alpha 2, 0} \subset K_{\alpha 2, 1} \subset \cdots \subset K_{\alpha 2, n} \subset \cdots$$

такая, что если для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ мы положим $L_{\alpha 2, n} = K_{\alpha 2, n}K_\alpha^{(v_0)}$, $v_{\alpha 2, n} = v(L_{\alpha 2, n}/K)$, $v_{\alpha, n} = v(L_{\alpha 2, n}/K_{\alpha 2, n})$, $v^{(n+1)} = v(K_{\alpha 2, n+1}/K_{\alpha 2, n})$ и $e_{\alpha 2, n} = e(K_{\alpha 2, n}/K)$, то

$$v_{\alpha 2, n} + \frac{p}{(p-1)e_{\alpha 2, n}} \left(\frac{v_{\alpha, n}}{p-1} + C(\tilde{H}) + 1 \right) < v_0, \quad (2)$$

$$\frac{v_{\alpha, n}}{e_{\alpha 2, 0}} + \frac{(p-1)(C(\tilde{H}) + 1)}{pe_{\alpha 2, 0}} \leq 1, \quad (3)$$

$$\frac{pv_{\alpha, n}}{p-1} + 1 \leq v^{(n+1)} < \frac{pv_{\alpha, n}}{p-1} + C(\tilde{H}) + 1. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим башню полей $K_{\alpha 1, n}$, $n \geq 0$, из п. 3.3.1. Предложения из пп. 3.3.2 и 3.3.3 влекут существование достаточно большого $N_1 \in \mathbb{N}$ такого, что если $K_{\alpha 2, 0} := K_{\alpha 1, N_1}$, то свойства (2) и (3) выполнены для $n = 0$.

Используем индукцию по $n \geq 0$. Допустим, что поля $K_{\alpha 2, n}$ построены для всех $n \leq N$, где $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

ЛЕММА 1. *Имеем*

$$\varphi_{K_{\alpha 2, N}/K} \left(\frac{pv_{\alpha, N}}{p-1} + C(\tilde{H}) + 1 \right) + \frac{1}{(p-1)e_{\alpha 2, N}} \left(\frac{v_{\alpha, N}}{p-1} + C(\tilde{H}) + 1 \right) < v_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \max\{x(K_{\alpha 2, N}/K), v_{\alpha, N}\}$; тогда $\varphi_{K_{\alpha 2, N}/K}(x) = v_{\alpha 2, N}$ (см. предложение 1, б)).

Если $pv_{\alpha, N}/(p-1) + C(\tilde{H}) + 1 \leq x$, то

$$\varphi_{K_{\alpha 2, N}/K} \left(\frac{pv_{\alpha, N}}{p-1} + C(\tilde{H}) + 1 \right) \leq \varphi_{K_{\alpha 2, N}/K}(x) = v_{\alpha 2, N}.$$

Если $pv_{\alpha, N}/(p-1) + C(\tilde{H}) + 1 > x$, то

$$\varphi_{K_{\alpha 2, N}/K} \left(\frac{pv_{\alpha, N}}{p-1} + C(\tilde{H}) + 1 \right) = \varphi_{K_{\alpha 2, N}/K}(x) + \frac{pv_{\alpha, N}/(p-1) + C(\tilde{H}) + 1 - x}{e_{\alpha 2, N}}$$

$$\begin{aligned} & \text{(мы используем, что если } x > x(K_{\alpha 2, N}/K), \text{ то } \varphi'_{K_{\alpha 2, N}/K}(x) = e_{\alpha 2, N}^{-1}) \\ & \leq v_{\alpha 2, N} + \frac{1}{e_{\alpha 2, N}} \left(\frac{v_{\alpha, N}}{p-1} + C(\tilde{H}) + 1 \right) \end{aligned}$$

(это следует из неравенства $x \geq v_{\alpha, N}$).

В обоих случаях неравенство из утверждения леммы вытекает из свойства (2) для $n = N$. Лемма доказана.

Пусть $K_{\alpha 2, N} = K_1$, $\Gamma_1 = \text{Gal}(K(p)/K_1)$ и $v_1 = pv_{\alpha, N}/(p-1) + C(\tilde{H}) + 1$. Заметим, что свойство (3) при $n = N$ дает $v_1 \leq e^*(K_{\alpha 2, 0}) \leq e^*(K_{\alpha 2, N})$. Так как благодаря свойству (2) выполнено $v(K_1/K) = v_{\alpha 2, N} < v_0$, мы можем применить предложение 1, в) и неравенство $\varphi_{K_1/K}(v_1) < v_0$ (см. лемму 1), чтобы получить

$$\Gamma(p)^{(v_0)} = \Gamma_1^{(\psi_{K_1/K}(v_0))} \subset \Gamma_1^{(v_1)}.$$

Следовательно, если $H_1 = H\Gamma_1^{(v_1)}$, то имеется естественный эпиморфизм групп

$$\tilde{H} = H/\Gamma(p)^{(v_0)} \longrightarrow H/H \cap \Gamma_1^{(v_1)} = H_1/\Gamma_1^{(v_1)} := \tilde{H}_1,$$

и, следовательно, $d(\tilde{H}_1) \leq d(\tilde{H})$.

Теперь мы можем применить предложение 5 с выбранными выше K_1 , v_1 , H_1 и $v'_1 = pv_{\alpha, N}/(p-1) + 1$, чтобы получить расширение K_2 степени p над K_1 такое, что $K_2 \subset K(p)^{H_1} \subset K(p)^H$ и $v'_1 \leq v(K_2/K_1) < v_1$. Если мы положим $K_2 = K_{\alpha 2, N+1}$, то условие (4) удовлетворяется при $n = N$.

Согласно предложению 2 мы имеем неравенство

$$v_{\alpha, N+1} \leq \psi_{K_2/K_1}(v_{\alpha, N}).$$

Но $\psi_{K_2/K_1}(v_{\alpha, N}) = v_{\alpha, N}$, так как $v_{\alpha, N} < pv_{\alpha, N}/(p-1) + 1 \leq v(K_2/K_1)$. Следовательно, $v_{\alpha, N+1} \leq v_{\alpha, N}$, и условие (3) выполнено при $n = N+1$.

Так как $v(K_2/K_1) = v^{(N+1)} \geq pv_{\alpha, N}/(p-1) + 1 \geq 1$, мы имеем $e_{\alpha 2, N+1} = pe_{\alpha 2, N}$. Согласно построению поля $K_{\alpha 2, N+1}$ и свойству б) предложения 1 мы имеем

$$v_{\alpha 2, N+1} = \max\{v_{\alpha 2, N}, \varphi_{K_{\alpha 2, N}/K}(v^{(N+1)})\}.$$

Следовательно, свойство (2) для $n = N+1$ вытекает из неравенства доказанной выше леммы. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для любого $\alpha \in \mathcal{A}_1$ в категории конечных расширений поля K существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} K_{\alpha}^H & \subset & K_{\alpha 2, 0} & \subset & \cdots & \subset & K_{\alpha 2, n} & \subset & \cdots \\ \cap & & \cap & & & & \cap & & \\ K_{\alpha}^{(v_0)} & \subset & L_{\alpha 2, 0} & \subset & \cdots & \subset & L_{\alpha 2, n} & \subset & \cdots \end{array}$$

такая, что для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполнены следующие свойства:

а) $K_{\alpha 2, n} \subset K(p)^H$, $L_{\alpha 2, n} = K_{\alpha}^{(v_0)} K_{\alpha 2, n}$ и естественное отображение

$$\text{Gal}(L_{\alpha 2, n}/K_{\alpha 2, n}) \longrightarrow \tilde{H}_{\alpha} = \text{Gal}(K_{\alpha}^{(v_0)}/K_{\alpha}^H)$$

является изоморфизмом;

б) $[K_{\alpha 2, n+1} : K_{\alpha 2, n}] = p$ и $v^{(n+1)} := v(K_{\alpha 2, n+1}/K_{\alpha 2, n}) > pv_{\alpha, n}/(p-1)$, где $v_{\alpha, n} = v(L_{\alpha 2, n}/K_{\alpha 2, n})$;

в) $v(L_{\alpha 2, n}/K_{\alpha 2, 0}) < e^*(K_{\alpha 2, 0})$;

г) $v^{(n+1)} \leq v^{(N^*)}$ для некоторого $N^* \in \mathbb{N}$ и $\varphi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(v^{(N^*)}) < v_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим башню полей $K_{\alpha 2, n}$, $n \geq 0$, из предложения 10. Очевидно, утверждения а) и б) выполнены для этой башни.

Для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ мы имеем

$$\begin{aligned} v^{(n+1)} &= v(K_{\alpha 2, n+1}/K_{\alpha 2, n}) < pv_{\alpha, n}/(p-1) + C(\tilde{H}) + 1 \\ &\leq pe_{\alpha 2, 0}/(p-1) \leq e^*(K_{\alpha 2, 0}). \end{aligned}$$

Из предложения 1, б) вытекает

$$v(K_{\alpha 2, n}/K_{\alpha 2, 0}) \leq \max\{v^{(m)} \mid 1 \leq m \leq n\} < e^*(K_{\alpha 2, 0}).$$

Так как $v(L_{\alpha 2, 0}/K_{\alpha 2, 0}) = v_{\alpha, 0} < pv_{\alpha, 0}/(p-1) + C(\tilde{H}) + 1 < e^*(K_{\alpha 2, 0})$ и $L_{\alpha 2, n} = L_{\alpha 2, 0} K_{\alpha 2, n}$, мы получаем утверждение в).

Так как все $v^{(n)}$ являются натуральными числами, не превосходящими $pe_{\alpha 2, 0}/(p-1)$, множество $\{v^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет максимальный элемент $v^{(N^*)}$, где $N^* \in \mathbb{N}$. Согласно предложению 1, б) мы имеем также

$$\varphi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(v^{(N^*)}) \leq v(K_{\alpha 2, N^*}/K) \leq v_{\alpha 2, N^*} < v_0.$$

Предложение доказано.

3.5. В этом пункте мы докажем одно вспомогательное предложение в случае $\text{char } K = p$.

Как и ранее, $K \subset K_1 \subset L_1$ является башней конечных расширений в $K(p)$, причем $v_1 = v(L_1/K_1) \geq 1$. Рассмотрим расширение K_2 степени p над K_1 в $K(p)$ такое, что $v^* = v(K_2/K_1) > pv_1/(p-1)$.

Очевидно, K_2 является расширением Галуа над K_1 и $K_2 \cap L_1 = K_1$. Следовательно, K_2 и L_1 линейно разделены над K_1 , и если $L_2 = L_1 K_2$, то $[L_2 : K_2] = [L_1 : K_1]$. В действительности мы имеем следующее более сильное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *В использованных выше обозначениях и предположениях существуют изоморфизмы полей $f: K_1 \rightarrow K_2$ и $g: L_1 \rightarrow L_2$ такие, что $g|_{K_1} = f$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого подполя E в K_{sep} условимся обозначать через O_E его кольцо нормирования.

ЛЕММА 2. *Существуют униформизирующие элементы t_1 в K_1 и t_2 в K_2 такие, что*

$$t_1 \equiv t_2^p \pmod{t_2^{p+v^*(p-1)} O_{K_2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если k_1 – поле вычетов поля K_1 и t – униформизирующий элемент поля K_1 , то $K_1 = k_1((t))$. Согласно теории Артина–Шрейера $K_2 = K_1(T)$, где $T^p - T = a \in K_1$, $a = \alpha t^{-v^*} + \sum_{m < v^*} \alpha_m t^{-m}$, $\alpha \in k_1^*$ и все $\alpha_m \in k_1$. Заметим, что v^* взаимно просто с p .

Положим $\alpha_1 = \sigma^{-1}(\alpha^{-1})$ (где σ – морфизм Фробениуса) и $\alpha_1 T = T_1$; тогда

$$T_1^p (1 - \alpha_1^{\sigma-1} T_1^{1-p}) = t^{-v^*} \varepsilon, \quad (5)$$

где $\varepsilon \in k_1[[t]]$ – главная единица.

Очевидно, существует униформизирующий элемент t_0 поля K_1 такой, что $t^{-v^*} \varepsilon = t_0^{-v^*}$. Теперь соотношение (5) влечет $T_1 = t_2^{-v^*}$, где t_2 – униформизирующий элемент поля K_2 . Поэтому оно может быть переписано в виде

$$t_2^p (1 - \alpha_1^{\sigma-1} t_2^{v^*(p-1)})^{-1/v^*} = \beta t_0,$$

где $\beta \in k_1$ таково, что $\beta^{v^*} = 1$. Если $t_1 = \beta t_0$, то t_1 – униформизирующий элемент поля K_1 и $t_2^p \equiv t_1 \pmod{t_2^{p+v^*(p-1)}}$. Лемма доказана.

Пусть

$$P = P(X) = X^r + \sum_{1 \leq i \leq r} a_i X^{r-i} \in O_{K_1}[X]$$

– характеристический многочлен для некоторого $\theta_1 \in O_{L_1}$ такого, что $O_{L_1} = O_{K_1}[\theta_1]$. Обозначим через v_{K_1} продолжение показателя поля K_1 на K_{sep} .

Доказательство следующего утверждения может быть найдено в [4].

ЛЕММА 3. *Если $y \in K_{\text{sep}}$ таков, что $v_{K_1}(P(y)) > 1 + v_1$, то существует $\theta \in K_{\text{sep}}$ такое, что $P(\theta) = 0$, и для любого $\theta' \in K_{\text{sep}}$ такого, что $P(\theta') = 0$, выполнено неравенство*

$$v_{K_1}(y - \theta) > v_{K_1}(y - \theta').$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\tau \in \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K_1) \subset \Gamma$ и $\tau y = y$, то $\tau\theta = \theta$. Следовательно, $\theta \in K_1(y)$.

Используем униформизирующие элементы t_1 и t_2 из леммы 2 для отождествлений $K_1 = k_1((t_1))$ и $K_2 = k_1((t_2))$ и определим изоморфизм $f: K_1 \rightarrow K_2$ с помощью следующих условий: $f(t_1) = t_2$ и $f|_{k_1} = \sigma^{-1}$, где σ – морфизм Фробениуса.

Рассмотрим расширение $\tilde{L}_2$ поля K_2 в $K(p)$, порожденное некоторым корнем θ_2 многочлена

$$f_*P = X^r + \sum_{1 \leq i \leq r} f(a_i)X^{r-i} \in O_{K_2}[X].$$

Из равенства

$$P(\theta_2^p) = P(\theta_2^p) - \sigma((f_*P)(\theta_2)) = \sum_{1 \leq i \leq r} (a_i(t_1) - a_i(t_2^p))\theta_2^{p(r-i)}$$

и леммы 2 следует

$$v_{K_1}(P(\theta_2^p)) \geq \frac{1}{p}(p + v^*(p-1)) > 1 + v_1.$$

Теперь из леммы 3 вытекает существование $\theta \in K_1(\theta_2^p) \subset \tilde{L}_2$ такого, что $P(\theta) = 0$. Очевидно, можно считать, что корень θ_2 многочлена $f_*(P)$ был выбран так, что $\theta = \theta_1$. Отсюда $L_1 \subset \tilde{L}_2$, и, сравнивая степени, мы получаем, что $L_2 = L_1K_2 = \tilde{L}_2$. Очевидно, соответствие $\theta_1 \mapsto \theta_2$ дает продолжение изоморфизма f до изоморфизма $g: L_1 \rightarrow L_2$. Предложение доказано.

3.6. Поля $\mathcal{K}_{\alpha n}$ и $\mathcal{L}_{\alpha n}$, $n \geq 0$. Пусть $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $K_{\alpha 2, n}, L_{\alpha 2, n}$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, – конечные расширения из предложения 11.

Допустим сначала, что $\text{char } K = 0$. В этом случае применим к полю $K_{\alpha 2, 0}$ конструкцию из п. 3.1.2. Мы получим его бесконечное расширение $\tilde{K}_{\alpha 2, 0}$ в K_{sep} , полное дискретно нормированное поле $\mathcal{K}_{\alpha 0} = \mathcal{K}_{K_{\alpha 2, 0}}(\tilde{K}_{\alpha 2, 0})$ характеристики p и эквивалентность $\tilde{\mathcal{X}}_0 := \tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{K}_{\alpha 2, 0}}$ категории конечных алгебраических расширений $L/K_{\alpha 2, 0}$ таких, что $v(L/K_{\alpha 2, 0}) < e^*(K_{\alpha 2, 0})$, и категории конечных сепарабельных расширений $\mathcal{L}/\mathcal{K}_{\alpha 2, 0}$ таких, что $v(\mathcal{L}/\mathcal{K}_{\alpha 0}) < e^*(K_{\alpha 2, 0})$.

Если $\tilde{\mathcal{X}}_0(K_{\alpha 2, n}) = \mathcal{K}_{\alpha n}$ и $\tilde{\mathcal{X}}_0(L_{\alpha 2, n}) = \mathcal{L}_{\alpha n}$ для $n \geq 0$, то мы получаем коммутативную диаграмму полных дискретно нормированных полей характеристики p и их вложений

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{K}_{\alpha 0} & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{K}_{\alpha n} & \subset & \cdots \\ \cap & & & & \cap & & \\ \mathcal{L}_{\alpha 0} & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{L}_{\alpha n} & \subset & \cdots, \end{array}$$

где для любого $n \geq 0$ использовано обозначение $\mathcal{L}_{\alpha n} = \mathcal{L}_{\alpha 0}\mathcal{K}_{\alpha n}$. Заметим, что функтор $\tilde{\mathcal{X}}_0$ индуцирует отождествления $\text{Gal}(\mathcal{L}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha n}) = \text{Gal}(L_{\alpha 2, n}/K_{\alpha 2, n})$. Так как эквивалентность $\tilde{\mathcal{X}}_0$ совместима с фильтрациями ветвления, мы имеем также для $n \geq 1$

$$v(\mathcal{K}_{\alpha, n}/\mathcal{K}_{\alpha, n-1}) = v^{(n)} > pv_{\alpha, n-1}/(p-1),$$

где $v_{\alpha,n-1} = v(\mathcal{L}_{\alpha,n-1}/\mathcal{K}_{\alpha,n-1})$.

В случае $\text{char } K = p$ мы получаем такой же результат, взяв в качестве функтора $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ тождественный функтор (т.е. полагая $\mathcal{K}_{\alpha n} = K_{\alpha 2,n}$ и $\mathcal{L}_{\alpha n} = L_{\alpha 2,n}$ для всех $n \geq 0$).

В этих обозначениях предложение 12 дает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Для $n \geq 0$ существуют изоморфизмы полей $i_n: \mathcal{K}_{\alpha 0} \rightarrow \mathcal{K}_{\alpha n}$ и $j_n: \mathcal{L}_{\alpha 0} \rightarrow \mathcal{L}_{\alpha n}$ такие, что $j_n|_{\mathcal{K}_{\alpha 0}} = i_n$, т.е. j_n является продолжением i_n .*

3.7. Используем обозначения из п. 3.6. Если $\alpha \in \mathcal{A}_1$, то обозначим через $\tilde{f}_{\alpha 0}$ композицию отождествлений

$$\tilde{H}_{\alpha} \rightarrow \text{Gal}(L_{\alpha 2,0}/K_{\alpha 2,0}) \rightarrow \text{Gal}(\mathcal{L}_{\alpha 0}/\mathcal{K}_{\alpha 0}),$$

где первый морфизм возникает из отождествления предложения 11, а), а второе отождествление индуцировано функтором $\widetilde{\mathcal{X}}_0$.

Так как группа Галуа максимального p -расширения поля $\mathcal{K}_{\alpha 0}$ является про- p -свободной и $d(\mathcal{G}_{\beta}) = d(\tilde{H}_{\alpha})$ (действительно, $d(\tilde{H}) = d(\mathcal{G}) \geq d(\mathcal{G}_{\beta}) \geq d(\tilde{H}_{\alpha}) = d(\tilde{H})$), то существуют расширение Галуа $\mathcal{F}_{\beta \alpha 0}$ поля $\mathcal{K}_{\alpha 0}$ такое, что $\mathcal{F}_{\beta \alpha 0} \supset \mathcal{L}_{\alpha 0}$, и изоморфизм групп $\tilde{g}_{\beta \alpha 0}$, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\beta} & \xrightarrow{\tilde{g}_{\beta \alpha 0}} & \text{Gal}(\mathcal{F}_{\beta \alpha 0}/\mathcal{K}_{\alpha 0}) \\ j_{\beta \alpha} \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}_{\alpha} & \xrightarrow{\tilde{f}_{\alpha 0}} & \text{Gal}(\mathcal{L}_{\alpha 0}/\mathcal{K}_{\alpha 0}) \end{array} \quad (*_0)$$

будет коммутативной (правая вертикальная стрелка этой диаграммы является естественной проекцией).

Для $n \geq 0$ рассмотрим продолжение изоморфизма $j_n: \mathcal{L}_{\alpha 0} \rightarrow \mathcal{L}_{\alpha n}$ из п. 3.6 до изоморфизма сепарабельных замыканий

$$\bar{j}_n: \widetilde{\mathcal{X}}_0(\bar{K}) = \mathcal{K}_{\alpha 0, \text{sep}} \rightarrow \mathcal{K}_{\alpha n, \text{sep}} = \mathcal{K}_{\alpha 0, \text{sep}}$$

и положим $\mathcal{F}_{\beta \alpha n} = \bar{j}_n(\mathcal{F}_{\beta \alpha 0})$. Тогда $\mathcal{F}_{\beta \alpha n} \supset \mathcal{L}_{\alpha n} \supset \mathcal{K}_{\alpha n}$ и $v(\mathcal{F}_{\beta \alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha n}) = v(\mathcal{F}_{\beta \alpha 0}/\mathcal{K}_{\alpha 0}) = v_{\beta \alpha 0}$ не зависит от n .

Для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ используем изоморфизмы $\bar{j}_n$ и диаграмму $(*_0)$ для конструкции коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\beta} & \xrightarrow{\tilde{g}_{\beta \alpha n}} & \text{Gal}(\mathcal{F}_{\beta \alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha n}) \\ j_{\beta \alpha} \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}_{\alpha} & \xrightarrow{\tilde{f}_{\alpha n}} & \text{Gal}(\mathcal{L}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha n}) \end{array} \quad (*_n)$$

(здесь правая вертикальная стрелка является естественной проекцией, а $\tilde{g}_{\beta \alpha n}$ и $\tilde{f}_{\alpha n}$ – изоморфизмами групп).

ЛЕММА 4. *Существует $N_1 \geq 0$ такое, что для любого $n \geq N_1$ выполнено неравенство*

$$v(\mathcal{F}_{\beta\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha 0}) < e^*(K_{\alpha 2,0}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n \geq 0$, то

$$v(\mathcal{F}_{\beta\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha 0}) = \max\{v(\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha 0}), \varphi_{\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha 0}}(v_{\beta\alpha 0})\}.$$

Очевидно (см. предложение 11),

$$v(\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha 0}) = v(K_{\alpha 2,n}/K_{\alpha 2,0}) \leq v(L_{\alpha 2,n}/K_{\alpha 2,0}) < e^*(K_{\alpha 2,0}).$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$, натурального числа $N^* \in \mathbb{N}$ из п. 3.4 и любого $x \geq 0$ мы имеем неравенство

$$\varphi_{\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha, n-1}}(x) \leq \varphi^*(x),$$

где

$$\varphi^*(x) = \varphi_{\mathcal{K}_{\alpha, N^*}/\mathcal{K}_{\alpha, N^*-1}}(x) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leq x \leq v^{(N^*)}, \\ v^{(N^*)} + (x - v^{(N^*)})/p & \text{для } x > v^{(N^*)}. \end{cases}$$

Из свойства композиции мы получаем, что $\varphi_{\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha, 0}}(v_{\beta\alpha 0}) \leq \varphi^{*(n)}(v_{\beta\alpha 0})$, где $\varphi^{*(n)}$ – n -я итерация функции φ^* . Легко видеть, что:

- 1) если $v_{\beta\alpha 0} \leq v^{(N^*)}$, то $\varphi^{*(n)}(v_{\beta\alpha 0}) \leq v^{(N^*)}$;
- 2) если $v_{\beta\alpha 0} > v^{(N^*)}$, то $\varphi^{*(n)}(v_{\beta\alpha 0}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v^{(N^*)}$.

Так как $v^{(N^*)} < e^*(K_{\alpha 2,0})$ (см. начало доказательства предложения 11), свойства 1) и 2) влекут существование $N_1 \in \mathbb{N}$ такого, что

$$\varphi^{*(n)}(v_{\beta\alpha 0}) < e^*(K_{\alpha 2,0})$$

для всех $n \geq N_1$. Лемма доказана.

3.8. Согласно лемме 4 можно применить обратную эквивалентность $\widetilde{\mathcal{K}}_0^{-1}$, чтобы получить для всех $n \geq N_1$ из диаграмм $(*_n)$ следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\beta} & \xrightarrow{g_{\beta\alpha n}} & \text{Gal}(F_{\beta\alpha n}/K_{\alpha 2,n}) \\ j_{\beta\alpha} \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{H}_{\alpha} & \xrightarrow{f_{\alpha n}} & \text{Gal}(L_{\alpha 2,n}/K_{\alpha 2,n}), \end{array} \quad (**_n)$$

где $\widetilde{\mathcal{K}}_0(F_{\beta\alpha n}) = \mathcal{F}_{\beta\alpha n}$, $f_{\alpha n}$ – естественное отождествление, $g_{\beta\alpha n}$ – изоморфизм групп, а вертикальная стрелка является естественной проекцией.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что в случае $\text{char } K = p$ мы имеем $\widetilde{\mathcal{K}}_0 = \text{id}$ и $e^*(K_{\alpha 2,0}) = +\infty$.

ЛЕММА 5. *Существует натуральное число $N_2 \geq N_1$ такое, что для всех $n \geq N_2$ выполнено неравенство*

$$v(F_{\beta\alpha n}/K) < v_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N_1^* = \max\{N_1, N^* - 1\}$. Если $n \geq N_1^*$, то

$$v(F_{\beta\alpha n}/K) = \max\left\{v(K_{\alpha 2, N_1^*}/K), \varphi_{K_{\alpha 2, N_1^*}/K}(v(F_{\beta\alpha n}/K_{\alpha 2, N_1^*}))\right\}.$$

По построению (см. п. 3.4) имеется неравенство $v(K_{\alpha 2, N_1^*}/K) < v_0$.

Согласно предложению 1, б) мы имеем

$$\begin{aligned} v(F_{\beta\alpha n}/K_{\alpha 2, N_1^*}) &= v(\mathcal{F}_{\beta\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha N_1^*}) \\ &= \max\left\{v(\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha N_1^*}), \varphi_{\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha N_1^*}}(v_{\beta\alpha 0})\right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для всех $n \geq N_1^*$ мы имеем $v(\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha N_1^*}) \leq v^{(N^*)}$. Как и в п. 3.7, мы получаем либо

$$\varphi_{\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha N_1^*}}(v_{\beta\alpha 0}) \leq v^{(N^*)}$$

для всех $n \geq N_1^*$, либо

$$\varphi_{\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha N_1^*}}(v_{\beta\alpha 0}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v^{(N^*)}.$$

Согласно предложению 11, г) мы имеем $v^{(N^*)} < \psi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(v_0)$, следовательно, существует $N_2 \geq N_1^*$ такое, что для любого $n \geq N_2$ выполнено неравенство

$$\varphi_{\mathcal{K}_{\alpha n}/\mathcal{K}_{\alpha N_1^*}}(v_{\beta\alpha 0}) < \psi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(v_0).$$

Следовательно, для $n \geq N_2$ имеются неравенства

$$v(F_{\beta\alpha n}/K_{\alpha 2, N_1^*}) < \psi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(v_0)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_{K_{\alpha 2, N_1^*}/K}(v(F_{\beta\alpha n}/K_{\alpha 2, N_1^*})) &< \varphi_{K_{\alpha 2, N_1^*}/K}(\psi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(v_0)) \\ &\leq \varphi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(\varphi_{K_{\alpha 2, N_1^*}/K_{\alpha 2, N^*-1}}(\psi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(v_0))) \\ &\leq \varphi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(\psi_{K_{\alpha 2, N^*-1}/K}(v_0)) = v_0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3.9. Заметим, наконец, что утверждение основной леммы выполнено для $E_{\beta\alpha} = K_{\alpha 2, N_2}$, $E'_{\beta\alpha} = L_{\alpha 2, N_2}$, $F_{\beta\alpha} = F_{\beta\alpha N_2}$ и диаграммы $(**_{N_2})$ из п. 3.8. Основная лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. Прямое доказательство утверждения следствия 2 из § 1 было получено Н. Гордеевым [9].

Список литературы

1. *Абрашкин В. А.* Фильтрация ветвления группы Галуа локального поля // Тр. С.-П. Матем. об-ва. 1995. Т. 3. С. 47–127.
2. *Абрашкин В. А.* Фильтрация ветвления группы Галуа локального поля. II // Тр. МИ РАН. 1995. Т. 208. С. 18–69.
3. *Abrashkin V. A.* Ramification filtration of the Galois group of a local field. III. Preprint / MPI 96-103.
4. *Deligne P.* Les corps locaux de caracterisque p , limites de corps locaux de caracterisque 0 // Representations des groupes reductifs sur un corps local. Travaux en Cours. Paris: Hermann, 1984. P. 120–157.
5. *Гордеев Н. Л.* Бесконечность числа соотношений в группе Галуа максимального p -расширения локального поля с ограниченным ветвлением // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. С. 592–607.
6. *Mauss E.* Relationen in Verzweigungsgruppen // J. reine ang. Math. 1973. V. 258. P. 23–50.
7. *Serre J.-P.* Corps locaux. Paris: Hermann, 1968.
8. *Wintenberger J.-P.* Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux; application // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. Ser. IV. 1983. V. 16. P. 59–89.
9. *Гордеев Н.* Группы ветвления бесконечных p -расширений локального поля // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1977. Т. 71. С. 96–132.

117966 Москва, ул. Губкина, 8, МИ РАН
E-mail: victor@abrvc.mian.su

Поступило в редакцию
5.I.1997