Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Бабенко, Точное неравенство Джексона–Стечкина для L^2 -приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 6, 27–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 05:51:03

УДК 517.518.837

А. Г. Бабенко

Точное неравенство Джексона–Стечкина для L^2 -приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах

Пусть $L^2_{\alpha,\beta}$ – гильбертово пространство действительных функций на отрезке $[0, \pi]$ со скалярным произведением

$$(F, G) = \int_0^\pi F(x)G(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1,$$

и нормой $\|F\| = (F, F)^{1/2}$. В работе доказано, что в случае $\alpha > \beta \geq -1/2$ справедливо точное неравенство Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(F) \leq \omega_r(F, 2x_n^{\alpha,\beta}), \quad F \in L^2_{\alpha,\beta},$$

$$n \geq \max \left\{ 2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right\} \quad \text{при } \beta > -\frac{1}{2}, \quad n \geq 1 \quad \text{при } \beta = -\frac{1}{2},$$

между наилучшим приближением функции F косинус-полиномами порядка $n-1$ и ее обобщенным модулем непрерывности (вещественного) порядка $r \geq 1$. Здесь $x_n^{\alpha,\beta}$ – первый положительный нуль косинус-полинома Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos x)$.

Отсюда выводятся аналогичные неравенства для среднеквадратичных приближений функций многих переменных, заданных на проективных пространствах.

Библиография: 49 наименований.

Введение

В этой работе доказано точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 на отрезке с весом Якоби и, как следствие, получены родственные неравенства для функций многих переменных, заданных на проективных пространствах. Указанный результат для приближений на отрезке, в основном, был анонсирован ранее автором в [2].

Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и $R_k = R_k^{\alpha,\beta}$ – алгебраические многочлены Якоби порядка $k = 0, 1, 2, \dots$, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-z)^\alpha(1+z)^\beta$ (см. [3, гл. IV]),

$$\int_{-1}^1 R_k(z)R_l(z)(1-z)^\alpha(1+z)^\beta dz = 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS – International Association for the Promotion of Cooperation with Scientists from the Independent States of the Former Soviet Union, грант INTAS-94-4070.

и нормированные условием $R_k(1) = 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Как известно (см. [4, с. 75]), они удовлетворяют рекуррентному соотношению при $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{2(k + \alpha + 1)(k + \alpha + \beta + 1)}{(2k + \alpha + \beta + 1)(2k + \alpha + \beta + 2)} R_{k+1}(z) \\ &= \left(z + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta + 2)} \right) R_k(z) \\ & \quad - \frac{2k(k + \beta)}{(2k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta + 1)} R_{k-1}(z), \\ & R_0(z) = 1, \quad R_1(z) = \frac{\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)z}{2(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Ясно, что система косинус-полиномов Якоби

$$\phi_k(x) = \phi_k^{\alpha, \beta}(x) = R_k^{\alpha, \beta}(\cos x), \quad \phi_k(0) = 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (0.1)$$

является ортогональной на отрезке $[0, \pi]$ с весом $\left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1}$,

$$\int_0^\pi \phi_k(x) \phi_l(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx = 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Приведем известные примеры таких полиномов (см. [3, с. 72, (4.1.7), (4.1.8)]):

$$\begin{aligned} \phi_k^{-1/2, -1/2}(x) &= \cos kx, & \phi_k^{1/2, 1/2}(x) &= \frac{\sin(k+1)x}{(k+1)\sin x}, \\ \phi_k^{1/2, -1/2}(x) &= \frac{\sin \frac{2k+1}{2}x}{(2k+1)\sin \frac{x}{2}}, & \phi_k^{-1/2, 1/2}(x) &= \frac{\cos \frac{2k+1}{2}x}{\cos \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Косинус-полиномы Якоби обладают следующими замечательными свойствами (см. [3, с. 71, (4.1.5)]): при любых $\alpha > -1$, $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\phi_k^{\alpha, -1/2}(x) = \phi_{2k}^{\alpha, \alpha}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \phi_k^{\alpha, 1/2}(x) = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \phi_{2k+1}^{\alpha, \alpha}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (0.2)$$

Обозначим через $L^2 = L_{\alpha, \beta}^2$ пространство вещественных измеримых четных 2π -периодических функций вида $F(x) = f(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$, со скалярным произведением

$$(F, G) = \int_0^\pi F(x) G(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx$$

и нормой $\|F\| = (F, F)^{1/2}$. Наилучшим приближением функции $F \in L^2$ пространством

$$C_{n-1} = \left\{ G : G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx, \quad a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

косинус-полиномов порядка $n - 1$ называется величина

$$E_{n-1}(F) = \min\{\|F - G\| : G \in C_{n-1}\}. \quad (0.3)$$

Для оценки сверху этой величины нам понадобится важное обобщение понятия сдвига (см. [5]) произвольной функции $F \in L^2$, основанное на ее разложении в ряд Фурье по косинус-полиномам Якоби

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu} \phi_{\nu}(x), \quad F_{\nu} = \frac{(F, \phi_{\nu})}{(\phi_{\nu}, \phi_{\nu})}. \quad (0.4)$$

А именно, *оператором (обобщенного) сдвига с шагом $t \in \mathbb{R}$* называется линейный оператор T_t , который действует на функции $F \in L^2$ вида (0.4) по закону

$$T_t F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu} \phi_{\nu}(t) \phi_{\nu}(x). \quad (0.5)$$

Поскольку $\phi_0(t) = 1$, то, как нетрудно заметить, оператор сдвига (с любым фиксированным шагом $t \in \mathbb{R}$) переводит постоянные функции в себя, например $T_t 1 = 1$. Кроме того, известно (см. [3, с. 175, (7.32.2)]), что в случае

$$\alpha \geq \beta > -1, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2} \quad (0.6)$$

косинус-полиномы Якоби $\phi_k = \phi_k^{\alpha, \beta}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\phi_k(t)| = \phi_k(0) = 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (0.7)$$

Следовательно, в этом случае норма оператора T_t (как оператора из L^2 в L^2) равна единице. Поэтому применима схема Грюнвальда–Летникова [6], [7] (см. также [8, § 20], [9], [10]) построения соответствующего разностного оператора (вещественного) порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbb{R}$

$$\Delta_t^r = (I - T_t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} T_t^k, \quad (0.8)$$

где I – тождественный оператор, $\binom{a}{0} = 1$, $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$, $k = 1, 2, \dots$, – биномиальные коэффициенты. *Модулем непрерывности порядка $r > 0$ функции $F \in L^2$* называется следующая функция переменного $\tau > 0$:

$$\omega_r(F, \tau) = \sup\{\|\Delta_t^r F\| : |t| \leq \tau\}. \quad (0.9)$$

Следующая взаимосвязь между модулями непрерывности различных порядков получается путем повторения рассуждений, содержащихся в работах [11, лемма 2]

и [9, с. 130, неравенство (1.8) и его обоснование]. Пусть $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $\tau > 0$. Тогда для любой функции $F \in L^2_{\alpha,\beta}$ выполняется неравенство

$$\omega_q(F, \tau) \leq 2^{(q-r)/2} \omega_r(F, \tau), \quad 0 < r < q. \quad (0.10)$$

Так же, как и в ультрасферическом случае ($\alpha = \beta \geq -1/2$, см. [9]), из определений (0.8), (0.5), (0.9) и равенства Парсеваля следует, что для каждой функции $F \in L^2_{\alpha,\beta}$ вида (0.4) справедливы соотношения

$$\|\Delta_t^r F\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 \{1 - \phi_k(t)\}^r, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r > 0; \quad (0.11)$$

$$\begin{aligned} \omega_r(F, \tau) &\leq \omega_r(F, \pi), \quad 0 < \tau \leq \pi; \\ \omega_r(F, \tau) &= \omega_r(F, \pi), \quad \tau \geq \pi, \quad r > 0. \end{aligned} \quad (0.12)$$

Зафиксируем числа α, β , удовлетворяющие условиям (0.6), а также числа $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим классическую задачу о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2 = L^2_{\alpha,\beta}$

$$E_{n-1}(F) \leq \mathcal{K} \omega_r(F, \tau), \quad F \in L^2, \quad (0.13)$$

т.е. задачу о вычислении величины

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(F)}{\omega_r(F, \tau)} : F \in L^2, F \not\equiv \text{const} \right\}. \quad (0.14)$$

Величину (0.14) мы будем иногда называть *константой Джексона–Стечкина*. Эта задача имеет большую историю, информация о качественной картине в этой области (вопросы ограниченности констант) содержится в работах [12] и [10]. Соответствующие исторические сведения, касающиеся точных результатов, можно найти в работе автора [1]. Ниже мы перечислим лишь те из них, которые имеют непосредственное отношение к теме исследований данной статьи. Хотя некоторые авторы приводимых ниже результатов применяли иные модули непрерывности, но при доказательстве они переходили к задачам, которые возникают и в данной работе. Учитывая это обстоятельство, мы сформулируем указанные результаты в обозначениях, принятых здесь.

Точную константу в неравенстве Джексона–Стечкина (0.13) в пространстве $L^2_{-1/2, -1/2}$ нашел Н.И. Черных в 1967 г. [13]:

$$\mathcal{K}_n^{-1/2, -1/2}(\tau, r) = \sqrt{\frac{2^r}{\binom{2r}{r}}}, \quad \tau \geq \frac{2\pi}{n}, \quad n > r, \quad r = 2, 3, \dots \quad (0.15)$$

Для случая $r = 1$ он получил [14], [15] более тонкое утверждение относительно поведения величины $\mathcal{K}_n^{-1/2, -1/2}(\tau, 1)$ по τ . Н.И. Черных нашел точку $\tau =$

$\tau_n^{-1/2, -1/2}(1) = \pi/n$, начиная с которой указанная величина выходит на свой глобальный минимум, равный единице:

$$\mathcal{K}_n^{-1/2, -1/2}(\tau, 1) = 1, \quad \tau \geq \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (0.16)$$

$$\mathcal{K}_n^{-1/2, -1/2}(\tau, 1) > 1, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (0.17)$$

Положим

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(r) = \min_{\tau > 0} \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r). \quad (0.18)$$

Используя определение (0.14) и свойство (0.12), легко заметить, что

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(r) = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\pi, r) = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r), \quad \tau \geq \pi. \quad (0.19)$$

Сейчас естественно ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. *Точкой Черныха в неравенстве Джексона–Стечкина (0.13) в пространстве $L^2_{\alpha, \beta}$ называется точная нижняя грань положительных значений $\tau > 0$, для которых величина $\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r)$ (как функция переменной τ) принимает свое минимальное значение $\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(r)$:*

$$\tau_n^{\alpha, \beta}(r) = \inf \{ \tau > 0 : \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(r) \}. \quad (0.20)$$

Следующий существенный шаг в этом направлении был сделан В. А. Юдиным [16], который получил точное неравенство Джексона (с первым модулем непрерывности) в пространстве $L^2(\mathbb{T}^m)$ функций на многомерном торе $\mathbb{T}^m$, $m \geq 2$. Ряд точных неравенств Джексона–Стечкина между наилучшим среднеквадратичным приближением функции (одной или нескольких переменных) и значением ее r -го модуля непрерывности в одной точке был получен в работах [17]–[24], [1], [25]–[27]. В частности, в работе автора [1, теоремы 2.1, 2.2, замечания 2.1–2.5] содержится результат (см. теорему 0.1 ниже), относящийся к ультрасферическому случаю задачи (0.14) о точной константе в неравенстве Джексона–Стечкина (0.13) в пространстве $L^2_{\alpha, \alpha}$, $\alpha \geq -1/2$, который тесно связан с аналогичной задачей в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ функций на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geq 2$.

При $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $x_n^{\alpha, \beta}$ первый положительный нуль косинус-полинома Якоби $\phi_n^{\alpha, \beta}$ (см. (0.1)):

$$x_n^{\alpha, \beta} = \min \{ x > 0 : \phi_n^{\alpha, \beta}(x) = 0 \}. \quad (0.21)$$

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть $n = 1, 2, \dots$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(А) при $\alpha \geq -1/2$ для каждой функции $F \in L^2_{\alpha, \alpha}$, $F \neq \text{const}$, справедливы неравенства

$$E_{n-1}(F) < \omega_r(F, 2x_n^{\alpha, \alpha}), \quad r \geq 1, \quad (0.22)$$

$$E_{n-1}(F) < 2^{(1-r)/2} \omega_r(F, 2x_n^{\alpha, \alpha}), \quad 0 < r < 1; \quad (0.23)$$

(В) при $\alpha > -1/2$ для любого $\tau \in (0, \pi)$ существует последовательность функций G_k , $k = 1, 2, \dots$, из $L^2_{\alpha, \alpha}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0;$$

(С) при $\alpha > -1/2$ существует последовательность функций G_k , $k = 1, 2, \dots$, из $L^2_{\alpha, \alpha}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k, \pi)} \geq 1, \quad 0 < r \leq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 0.1. 1) Пункт (В) теоремы 0.1 принадлежит В. В. Арестову, который на самом деле установил более общее утверждение [24, теорема 1], [1, лемма 4.2].

2) Для $\alpha = -1/2$, $r = 1$ утверждения теоремы 0.1 получены Н. И. Черных [14].

3) При $\alpha = -1/2$, $r > 1$ неравенство (0.22) доказано В. В. Шалаевым [22].

4) В случаях $\alpha = 0, 1/2$, $n \geq 1$, $r \geq 1$ В. Ю. Попов получил неравенство [24, (6.4), (6.6)]

$$E_{n-1}(F) < \omega_r \left(F, \frac{2\pi}{n+1} \right), \quad F \in L^2, \quad F \neq \text{const},$$

которое при $\alpha = 0$, $n = 1$, $r \geq 1$ и $\alpha = 1/2$, $n \geq 1$, $r \geq 1$ совпадает с неравенством (0.22), а при $\alpha = 0$, $n \geq 2$, $r \geq 1$ неравенство (0.22) уточняет указанный результат В. Ю. Попова, так как $2x_n^{0,0} < 2\pi/(n+1)$ (см. [3, с. 147, (6.6.4)]).

5) В силу известного свойства (0.10) модуля непрерывности первое неравенство в п. (А) влечет второе. В работе [1] содержится также иное доказательство неравенства (0.23).

ЗАМЕЧАНИЕ 0.2. Ниже (см. первое утверждение следствия 3.1) будет показано, что утверждение (В) теоремы 0.1 выполняется и при $\tau = \pi$ (а значит, и при любом $\tau > 0$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. Если $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то с помощью функции $\phi_n^{\alpha, \beta}(x)$ легко показать (см. (0.11), (2.1)), что при $0 < \tau < x_n^{\alpha, \beta}$ точная константа $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r)$ в неравенстве (0.13) будет строго больше единицы:

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) > 1, \quad 0 < \tau < x_n^{\alpha, \beta}.$$

Теорема 0.1, замечание 0.2 и предложение 0.1 позволяют локализовать точку Черныха (0.20) в неравенстве Джексона–Стечкина (0.13) в пространстве $L^2_{\alpha, \alpha}$ при $\alpha > -1/2$, $r \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 0.1. Пусть $\alpha > -1/2$. Тогда точная константа в неравенстве Джексона–Стечкина (0.13) в пространстве $L^2_{\alpha,\alpha}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r) &> 1, \quad 0 < \tau < x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N}; \\ \mathcal{K}_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r) &= 1, \quad \tau \geq 2x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r \geq 1, \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

и потому имеют место оценки

$$x_n^{\alpha,\alpha} \leq \tau_n^{\alpha,\alpha}(r) \leq 2x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

§ 1. Формулировка основного результата

В данной работе найдена точная константа $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве Джексона–Стечкина (0.13) в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$ при $\alpha > \beta \geq -1/2$, $r \geq 1$, $\tau \geq 2x_n^{\alpha,\beta}$, $n \geq \max\left\{2, 1 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right\}$ при $\beta > -1/2$ и $n \geq 1$ при $\beta = -1/2$ и локализована точка Черныха (0.20) в этом неравенстве. Приведена многомерная интерпретация этого результата на примере L^2 -приближений функций, заданных на проективных пространствах, а также дополнен результат В. В. Арестова об оценке снизу для константы Джексона–Стечкина на многомерной сфере.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\alpha > \beta \geq -1/2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(А) для каждого натурального $n \geq \max\left\{2, 1 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right\}$ и произвольной функции F из пространства $L^2_{\alpha,\beta}$ справедливы неравенства

$$E_{n-1}(F) \leq \omega_r(F, 2x_n^{\alpha,\beta}), \quad r \geq 1, \quad (1.1)$$

$$E_{n-1}(F) \leq 2^{(1-r)/2} \omega_r(F, 2x_n^{\alpha,\beta}), \quad 0 < r < 1; \quad (1.2)$$

(В) для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ и любого положительного числа $\tau > 0$ существует последовательность функций G_k , $k \in \mathbb{N}$, из $L^2_{\alpha,\beta}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пункты 1), 5) замечания 0.1 остаются в силе и для теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Ниже (см. следствие 3.1) будет показано, что при $\alpha > \beta = -1/2$ утверждение (А) теоремы 1.1 справедливо для любого натурального $n \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В случае $\alpha > \beta > -1/2$ утверждения теоремы 1.1 были анонсированы автором [2] в иной эквивалентной форме.

С помощью теоремы 1.1, замечания 1.2 и предложения 0.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $\alpha > \beta \geq -1/2$, $n \geq \max \left\{ 2, 1 + \frac{\alpha-\beta}{2} \right\}$, $\tau \geq 2x_n^{\alpha,\beta}$. Тогда для точной константы (0.14) и точки Черныха (0.20) в неравенстве Джексона–Стечкина (0.13) в пространстве $L_{\alpha,\beta}^2$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) &= 1, \quad r \geq 1; \\ 1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) &\leq 2^{(1-r)/2}, \quad 0 < r < 1; \\ x_n^{\alpha,\beta} &\leq \tau_n^{\alpha,\beta}(r) \leq 2x_n^{\alpha,\beta}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть $\alpha > -1/2$, $n \in \mathbb{N}$, $\tau \geq \min\{\pi, 2x_n^{\alpha,-1/2}\}$. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n^{\alpha,-1/2}(\tau, r) &= 1, \quad r \geq 1; \\ 1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha,-1/2}(\tau, r) &\leq 2^{(1-r)/2}, \quad 0 < r < 1; \\ x_n^{\alpha,-1/2} &\leq \tau_n^{\alpha,-1/2}(r) \leq \min\{\pi, 2x_n^{\alpha,-1/2}\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1.1 будет проведено поэтапно. Вначале мы покажем, как из результата В.В. Арестова [24, теорема 1], [1, лемма 4.2] и известных свойств полиномов Якоби следует оценка снизу для величины (0.14), а затем, применяя идеи, содержащиеся в работах [14], [13] и [16], по аналогии с тем, как это уже делалось в ультрасферическом случае в статье автора [1], построим вес (допустимую функцию в двойственной задаче), который даст нужную оценку сверху для искомой величины.

§ 2. Редукция к экстремальной задаче для полиномов Якоби. Оценка снизу

Пусть $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$. По стандартной схеме (см., например, [1]) с помощью равенства Парсеваля получаем, что для любой функции $F \in L_{\alpha,\beta}^2$ квадрат величины (0.3) ее наилучшего среднеквадратичного приближения косинус-полиномами порядка $n-1$ вычисляется по формуле

$$E_{n-1}^2(F) = \sum_{k=n}^{\infty} F_k^2, \quad F_k = \frac{(F, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}, \quad (2.1)$$

где $\phi_k = \phi_k^{\alpha,\beta}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – косинус-полиномы Якоби (0.1), а квадрат нормы ее разности порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству (0.11). Поэтому задача (0.14) сводится к следующей экстремальной задаче для косинус-полиномов Якоби. При фиксированных $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ найти наилучшую константу $K = K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \leq K \max_{|t| \leq \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Нетрудно показать, что

$$K_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) = \sup \left\{ \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k}{\max_{0 \leq t \leq \tau} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k(t)\}^r} : 0 < \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k < \infty, \rho_k \geq 0, k \geq n \right\}. \quad (2.3)$$

Обратим внимание читателя на то, что суммирование во всех суммах в (2.3) ведется по k , начиная с n , и это не опечатка. Очевидно также, что справедливо равенство

$$\{\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r)\}^2 = K_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) \quad (2.4)$$

при $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Задачу (2.3) можно преобразовать к виду

$$K_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) = \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k(t)\}^r \leq 1, t \in [0, \tau]; \rho_k \geq 0, k \geq n \right\}. \quad (2.5)$$

Видно, что (2.5) есть задача (бесконечномерного) линейного программирования. Такого рода задачи возникают и в других областях математики, например при исследовании границ упаковок некоторых метрических пространств по схеме Дельсарта (см. [28]–[30], [4], [31, гл. 9, 13, 14], [25]), оценок снизу мощности дизайнов (см. [32]), а также в теории чисел (см. [33], [34] и приведенную там библиографию).

Для оценки снизу величины (2.3) нам понадобится следующее утверждение, доказанное В.В. Арестовым [24, теорема 1], [1, лемма 4.2]. Ниже мы будем использовать стандартное обозначение $\|f\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ равномерной нормы непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f .

ЛЕММА 2.1 (В.В. Арестов). *Пусть на отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, задана система непрерывных функций ψ_k , $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) $\psi_k(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$;
- 2) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\psi_k\|_{C[0, \tau]} < \infty$;
- 3) для любого $\xi \in (0, \tau]$ выполняется неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \max_{t \in [\xi, \tau]} \psi_k(t) \right\} \leq 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется функция

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \psi_k(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = 1,$$

с неотрицательными коэффициентами $\rho_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что

$$F(t) \leq 1 + \varepsilon, \quad t \in [0, \tau].$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\alpha > \beta > -1$, $\alpha > -1/2$, $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для точной константы $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r)$ (см. (0.14)) в неравенстве Джексона–Стечкина (0.13) в пространстве $L_{\alpha, \beta}^2$ имеет место следующая оценка снизу:

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) \geq 1. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (0.18) и соотношения (0.19) вытекает, что неравенство (2.6) достаточно доказать при $\tau = \pi$. Известно (см. [3, § 7.32]), что при $\alpha > \beta > -1$, $\alpha > -1/2$ косинус-полиномы Якоби (0.1) $\phi_k = \phi_k^{\alpha, \beta}$ для произвольного фиксированного $\xi \in (0, \pi]$ равномерно стремятся к нулю на отрезке $[\xi, \pi]$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k\|_{C[\xi, \pi]} = 0.$$

Отсюда с учетом свойства (0.7) следует, что при каждом фиксированном $r > 0$ система функций

$$\psi_k(x) = \{1 - \phi_{n-1+k}(x)\}^r, \quad k \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет условиям леммы 2.1 при $\tau = \pi$. И значит, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется функция $F \in L_{\alpha, \beta}^2$ такая, что

$$\frac{E_n^2(F)}{\omega_r^2(F, \pi)} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} F_k^2}{\max_{0 \leq t \leq \pi} \sum_{k=n}^{\infty} F_k^2 \{1 - \phi_k(t)\}^r} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad F_k = \frac{(F, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}.$$

Это соотношение и определение (0.14) влекут (2.6). Следствие доказано.

§ 3. Неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L_{\alpha, -1/2}^2$

В этом параграфе с помощью следствия 2.1, первого равенства в (0.2), соотношений (2.3)–(2.5) и утверждения (А) теоремы 0.1 будет получено

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\alpha > -1/2$. Тогда имеют место следующие два утверждения:

1) при любых $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ для константы (0.14) Джексона–Стечкина в пространстве $L_{\alpha, -1/2}^2$ выполняются оценки

$$1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha, -1/2}(\tau, r) \leq \mathcal{K}_{2n}^{\alpha, \alpha}\left(\frac{\tau}{2}, r\right) \leq \mathcal{K}_{2n-1}^{\alpha, \alpha}\left(\frac{\tau}{2}, r\right);$$

2) при $n \in \mathbb{N}$, $\tau \geq \min\{\pi, 2x_n^{\alpha, -1/2}\}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} E_{n-1}(F) &\leq \omega_r(F, \tau), \quad F \in L_{\alpha, -1/2}^2, \quad r \geq 1; \\ E_{n-1}(F) &\leq 2^{(1-r)/2} \omega_r(F, \tau), \quad F \in L_{\alpha, -1/2}^2, \quad 0 < r < 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу первого равенства в (0.2) для величины (2.5) при $\alpha > \beta = -1/2$, $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha, -1/2}(\tau, r) &= \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k^{\alpha, -1/2}(t)\}^r \leq 1, t \in [0, \tau]; \rho_k \geq 0, k \geq n \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \left\{1 - \phi_{2k}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{t}{2}\right)\right\}^r \leq 1, t \in [0, \tau]; \rho_k \geq 0, k \geq n \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_{2k}^{\alpha, \alpha}(t)\}^r \leq 1, t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right]; \rho_k \geq 0, k \geq n \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{k=2n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=2n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k^{\alpha, \alpha}(t)\}^r \leq 1, t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right]; \rho_k \geq 0, k \geq 2n \right\} \\ &= K_{2n}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{\tau}{2}, r\right) \leq K_{2n-1}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{\tau}{2}, r\right), \end{aligned}$$

что вместе с равенством (2.4) и следствием 2.1 влечет первое утверждение данного следствия. Отсюда, принимая во внимание определение (0.14) и неравенство (0.22), получаем неравенства

$$1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha, -1/2}(\tau, r) \leq \mathcal{K}_{2n}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{\tau}{2}, r\right) \leq 1 \text{ при } r \geq 1, \frac{\tau}{2} \geq 2x_{2n}^{\alpha, \alpha} = x_n^{\alpha, -1/2}, n \in \mathbb{N},$$

которые вместе со вторым равенством в (0.19) и (0.10) завершают доказательство второго утверждения следствия.

§ 4. Двойственная задача

Большую роль при исследовании задачи (0.14) или эквивалентной ей задачи (2.3), (2.5) играет двойственная задача, которая для случая $\alpha = \beta = -1/2$ по существу успешно применена в 1967 г. Н.И. Черныхом [14], [13]. Соотношение двойственности для более общей, чем (2.3), задачи было явно сформулировано и обосновано в совместной работе В.В. Арестова и В.Ю. Попова [24, леммы 1, 2]; мы его приведем (для задачи (2.3)) в форме, близкой к той, которую использовал автор в [20, теорема 1] в случае $\alpha = \beta = -1/2$.

Именно, пусть $\tau > 0$, $V_0^+ = V_0^+[0, \tau]$ – множество ограниченных, неубывающих на отрезке $[0, \tau]$ функций $\mu \neq \text{const}$, непрерывных в нуле ($\mu(0) = \mu(+0)$). Такие функции $\mu \in V_0^+$ будем называть *весами*.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены условия

$$\alpha \geq \beta > -1, \quad \alpha \geq -1/2, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Тогда для величины (2.3) имеет место равенство

$$K_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) = \min \left\{ \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{\inf_{k \geq n} \int_0^\tau \{1 - \phi_k(t)\}^r d\mu(t)} : \mu \in V_0^+ \right\}. \quad (4.2)$$

Из этой леммы следует, что каждый вес $\mu \in V_0^+$ дает для величины (2.3), а следовательно (см. (2.4)), и для искомой величины (0.14) оценки сверху

$$K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) \leq \Phi(\mu), \quad \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) \leq \sqrt{\Phi(\mu)}, \quad (4.3)$$

где функционал $\Phi(\mu) = \Phi_n^{\alpha,\beta}(\mu, \tau, r)$ задается формулой

$$\Phi(\mu) = \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{\inf_{k \geq n} \int_0^\tau \{1 - \phi_k(t)\}^r d\mu(t)}. \quad (4.4)$$

Ниже (в § 6) при

$$\alpha > \beta > -\frac{1}{2}, \quad n \geq \max \left\{ 2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right\}, \quad \tau = 2x_n^{\alpha,\beta} \quad (4.5)$$

будет построен вес $\mu = \mu_\tau \in V_0^+[0, \tau]$, на котором значение функционала (4.4) равно единице: $\Phi(\mu_\tau) = 1$. И, значит (см. (4.3)), в этом случае мы получим оценку сверху для величины (0.14), совпадающую с оценкой снизу (2.6), т.е. найдем величину $\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = 1$ при выполнении условий (4.5). Для построения указанного веса нам понадобятся некоторые известные свойства обобщенного сдвига, вытекающие из его интегрального представления, которое в свою очередь следует из формулы умножения для полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha,\beta}$ при $\alpha > \beta > -1/2$, установленной Дж. Гаспером [35], [36], а затем доказанной в другой эквивалентной форме Т. Корнвиндером [37], [38] (см. также [39, (4.2), (5.4), (5.5)]). При этом, как отмечается в [37], в случае $\alpha > \beta = 0$ формула сложения (и, как следствие, формула умножения) для полиномов Якоби получена ранее Р. Л. Шапиро [40].

§ 5. Некоторые свойства обобщенного сдвига

В данном параграфе приводятся известные свойства обобщенного сдвига T_t (см. (0.5)), действующего в пространстве $L_{\alpha,\beta}^2$ при $\alpha > \beta > -1/2$. Отметим, что в ультрасферическом случае $\alpha = \beta > -1/2$ важные свойства этого сдвига были установлены в 1817 г. А. М. Лежандром (случай $\alpha = \beta = 0$) [41, с. 262, формула (x)] и в 1874 г. – Л. Гегенбауэром (случай $\alpha = \beta > -1/2$) [42, с. 402]). А именно, ими была доказана так называемая формула умножения для ультрасферических полиномов $\phi_k^{\alpha,\alpha}(x) = R_k^{\alpha,\alpha}(\cos x)$, $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} T_t \phi_k^{\alpha,\alpha}(x) &= \phi_k^{\alpha,\alpha}(t) \phi_k^{\alpha,\alpha}(x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \int_0^\pi R_k^{\alpha,\alpha}(\cos x \cos t + \sin x \sin t \cos \xi) (\sin \xi)^{2\alpha} d\xi; \end{aligned} \quad (5.1)$$

Почти сто лет спустя Дж. Гаспер получил аналог этого результата для косинус-полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha,\beta}$, $\alpha > \beta > -1/2$, $k \in \mathbb{Z}^+$, в следующей истокообразной форме [35], [36] (см. также [38, п. 5]):

$$\begin{aligned} T_t \phi_k^{\alpha,\beta}(2x) &= \phi_k^{\alpha,\beta}(2t) \phi_k^{\alpha,\beta}(2x) \\ &= \int_0^\pi \phi_k^{\alpha,\beta}(2\xi) \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(\sin t \sin x, \cos t \cos x, \cos \xi) (\cos \xi)^{2\beta+1} \sin \xi d\xi, \end{aligned} \quad (5.2)$$

здесь $0 < t, x < \pi/2$ и ядро $\mathcal{F}^{\alpha, \beta}$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha, \beta}(a, b, c) &= \frac{2\Gamma(\alpha + 1)a^{-2\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha - \beta)\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} \\ &\quad \times \int_0^\pi (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos v)_+^{\alpha - \beta - 1} (\sin v)^{2\beta} dv, \\ (x)_+^\lambda &= \begin{cases} x^\lambda, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Затем Т. Корнвиндер [37], [38] (см. также [39, ш. 4, 5]) нашел эквивалентное выражение формулы умножения для косинус-полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha, \beta}(x) = R_k^{\alpha, \beta}(\cos x)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, по форме, более близкой к формуле умножения Лежандра–Гегенбауэра (5.1):

$$\begin{aligned} T_t \phi_k^{\alpha, \beta}(x) &= \phi_k^{\alpha, \beta}(t) \phi_k^{\alpha, \beta}(x) \\ &= \frac{2\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha - \beta)\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^\pi R_k^{\alpha, \beta}(\cos \Psi) (1 - \rho^2)^{\alpha - \beta - 1} \rho^{2\beta + 1} (\sin \xi)^{2\beta} d\xi d\rho; \end{aligned} \quad (5.4)$$

здесь

$$\cos \Psi = \cos t \cos x + \rho \sin t \sin x \cos \xi + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos t)(1 - \cos x), \quad (5.5)$$

$t, x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha > \beta > -1/2$. Следовательно, в этом случае действие сдвига (0.5) на произвольную функцию $F(x) = f(\cos x) \in L_{\alpha, \beta}^2$ при $\alpha > \beta > -1/2$ выражается в следующей интегральной форме:

$$\begin{aligned} T_t F(x) &= \frac{2\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha - \beta)\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^\pi f(\cos \Psi) (1 - \rho^2)^{\alpha - \beta - 1} \rho^{2\beta + 1} (\sin \xi)^{2\beta} d\xi d\rho, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $t, x \in \mathbb{R}$ и $\cos \Psi$ вычисляется по формуле (5.5). Другое эквивалентное истокобразное представление этого сдвига получается с помощью ядра (5.3) в формуле умножения (5.2) [38, п. 5], [39, п. 4].

Необходимо сказать, что указанным выше результатам Дж. Гаспера и Т. Корнвиндера, как отмечается в работе [37], предшествовал результат Р. Л. Шапиро [40] (1968 г.) о формуле сложения для полиномов Якоби, из которого следует (5.6) при $\alpha > \beta = 0$.

Приведем несколько свойств сдвига, вытекающих из его интегрального представления. Эти свойства нам потребуются в следующем параграфе.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\alpha > \beta > -1/2$, $0 \leq \tau \leq \pi/2$, функция $F(x) = f(\cos x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$ и $F(x) = 0$, $x \in [\tau, \pi]$. Тогда функция $G(x) = T_\tau F(x)$ является непрерывной при всех $x \in \mathbb{R}$ и $G(x) = 0$, $x \in [2\tau, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность функции G легко следует из интегрального представления (5.6), (5.5) оператора сдвига. По условию леммы имеем

$$f(u) = 0, \quad u \in [-1, \cos \tau].$$

В силу интегрального представления (5.6), (5.5) сдвига для доказательства леммы достаточно показать, что функция

$$A(x, \tau, \rho, \xi) = \cos \Psi = \cos \tau \cos x + \rho \sin \tau \sin x \cos \xi + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos \tau)(1 - \cos x)$$

удовлетворяет неравенствам

$$-1 \leq A(x, \tau, \rho, \xi) \leq \cos \tau, \quad (5.7)$$

если выполнены условия

$$0 < \tau \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \quad 2\tau \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (5.8)$$

Вначале докажем первое неравенство в (5.7). Ясно, что из (5.8) следует, что $\sin \tau \sin x \geq 0$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} A(x, \tau, \rho, \xi) &\geq A(x, \tau, \rho, \pi) = A_1(x, \tau, \rho) \\ &= \cos \tau \cos x - \rho \sin \tau \sin x + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos \tau)(1 - \cos x). \end{aligned}$$

Заметим, что функция $A_1(x, \tau, \rho)$ по третьей переменной ρ является параболой, причем ее глобальный минимум по этому аргументу достигается в точке

$$\rho^* = \frac{\sin \tau \sin x}{(1 - \cos \tau)(1 - \cos x)},$$

т.е.

$$A_1(x, \tau, \rho) \geq A_1(x, \tau, \rho^*) = -1,$$

и, значит, первое неравенство в (5.7) доказано.

Перейдем к доказательству второго неравенства в (5.7). Условия (5.8) влекут неравенство

$$\begin{aligned} A(x, \tau, \rho, \xi) &\leq A(x, \tau, \rho, 0) = A_2(x, \tau, \rho) \\ &= \cos \tau \cos x + \rho \sin \tau \sin x + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos \tau)(1 - \cos x), \end{aligned}$$

а также

$$A_2(x, \tau, \rho) \leq \max\{A_2(x, \tau, 0), A_2(x, \tau, 1)\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} A_2(x, \tau, 0) &= \cos \tau \cos x - \frac{1}{2}(1 - \cos \tau)(1 - \cos x) \\ &= \frac{1}{2}\{(1 + \cos \tau) \cos x - 1 + \cos \tau\} \leq \cos \tau; \\ A_2(x, \tau, 1) &= \cos \tau \cos x + \sin \tau \sin x = \cos(x - \tau) \leq \cos \tau. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В [35] содержится следующее определение свертки двух функций F, G из $L^2_{\alpha, \beta}$ (а на самом деле – и для функций из $L^1_{\alpha, \beta}$), которое можно записать в виде

$$(F * G)(t) = \int_0^\pi \{T_x F(t)\} G(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx. \quad (5.9)$$

Кроме того, в указанной работе приведено свойство коммутативности этой операции:

$$(F * G)(t) = (G * F)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.10)$$

Поскольку $T_x F(t) = T_t F(x)$ для любых $x, t \in \mathbb{R}$, то равенство (5.10) означает самосопряженность оператора сдвига, т.е. справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\alpha > \beta > -1/2$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любых двух функций $F, G \in L^2_{\alpha, \beta}$ выполняется равенство

$$(T_t F, G) = (F, T_t G). \quad (5.11)$$

§ 6. Оценка сверху

В данном параграфе будет построен вес $\mu \in V_0^+[0, \tau]$, на котором при выполнении условий (4.5) достигается минимум в двойственной задаче (4.2).

Рассмотрим следующее множество функций:

$$\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta} = \left\{ F(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \phi_k^{\alpha, \beta}(x) : F(0) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k = 1, \rho_k \geq 0, k \geq n \right\}, \quad (6.1)$$

где $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $n \in \mathbb{N}$, $\phi_k^{\alpha, \beta}$ – косинус-полином Якоби (0.1). Это множество является выпуклым подмножеством пространства $C[0, \pi]$ непрерывных на $[0, \pi]$ функций. Так же, как и в ультрасферическом случае [1, п. 4], введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Положительное число $\sigma = \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta})$ назовем *точкой Черныха для множества $\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}$* , если одновременно выполняются следующие два условия:

(а) для любой функции $F \in \mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}$ найдется точка $x^* \in (0, \sigma)$, в которой $F(x^*) < 0$;

(b) для любого $\delta \in (0, \sigma)$ найдутся функция $F_\delta \in \mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $F_\delta(x) \geq \varepsilon$ при всех $x \in [0, \delta]$.

Результаты Н. И. Черныха [14], [15] (см. (0.16), (0.17)) эквивалентны равенству

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{-1/2, -1/2}) = \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В. Ю. Попов [17, теорема 3] получил результат, из которого вытекает неравенство

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \alpha}) \leq \frac{2\pi}{n+1}, \quad \alpha = 0, \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В работе автора [1, лемма 4.1] получены оценки

$$\tau_n^{\alpha, \alpha} \leq \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \alpha}) \leq 2\tau_n^{\alpha, \alpha}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

С помощью функции $\phi_n^{\alpha, \beta}$ легко доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *При $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место оценка снизу*

$$x_n^{\alpha, \beta} \leq \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}), \quad (6.2)$$

где $x_n^{\alpha, \beta}$ есть первый положительный нуль косинус-полинома Якоби $\phi_n^{\alpha, \beta}$ (см. (0.21)).

В дальнейшем нам потребуются известные оценки для $x_n^{\alpha, \beta}$ (см. [3, §6.2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *При $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $n \geq \max\left\{2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right\}$ выполняются неравенства*

$$0 < x_n^{\alpha, \beta} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Основным результатом данного параграфа является

ЛЕММА 6.1. *Пусть $\alpha > \beta > -1/2$, $n \geq \max\left\{2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right\}$. Тогда справедлива оценка сверху*

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}) \leq 2x_n^{\alpha, \beta}. \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем проводить так же, как это сделано в ультрасферическом случае [1, лемма 4.1], внося естественные изменения. Для краткости положим $x_n = x_n^{\alpha, \beta}$, $\phi_k = \phi_k^{\alpha, \beta}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $\psi = \psi_n^{\alpha, \beta}$ есть четная 2π -периодическая функция, непрерывная на всей действительной оси $\mathbb{R}$, которую достаточно задать на отрезке $[0, \pi]$:

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi_n(x), & 0 \leq x \leq x_n, \\ 0, & x_n < x \leq \pi. \end{cases} \quad (6.4)$$

Определим четную 2π -периодическую функцию v , задав ее на отрезке $[0, \pi]$ формулой

$$v(x) = \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} T_{x_n} \psi(x), \quad x \in [0, \pi], \quad (6.5)$$

где T_t есть оператор (обобщенного) сдвига с шагом t (см. (0.5), (5.6)). Из определения (6.4), предложения 6.2, леммы 5.1 и формулы (5.6) следует, что

$$v(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad v(x) \neq 0; \quad v(x) = 0, \quad x \in [2x_n^{\alpha, \beta}, \pi]. \quad (6.6)$$

Используя самосопряженность оператора сдвига (см. лемму 5.2), найдем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^{2x_n} v(x) \phi_k(x) dx = \int_0^\pi v(x) \phi_k(x) dx = (T_{x_n} \mathcal{V}, \phi_k) = (\mathcal{V}, T_{x_n} \phi_k) \\ &= \phi_k(x_n) (\mathcal{V}, \phi_k) = \phi_k(x_n) \int_0^{x_n} \phi_n(x) \phi_k(x) \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{2\beta+1} dx \\ &= \phi_k(x_n) \int_0^{x_n} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где

$$\varphi_k(x) = \phi_k(x) \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{\alpha+1/2} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{\beta+1/2}, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (6.8)$$

Функции φ_k удовлетворяют дифференциальному уравнению (см. [3, с. 79, § 4.24])

$$\varphi_k''(x) - q(x) \varphi_k(x) = - \left(k + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2 \varphi_k(x), \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (6.9)$$

где

$$q(x) = \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{4 \left(\sin \frac{x}{2} \right)^2} + \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{4 \left(\cos \frac{x}{2} \right)^2}.$$

Рассмотрим выражение

$$c_k = \left\{ \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2 - \left(k + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2 \right\} \int_0^{x_n} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx. \quad (6.10)$$

С помощью уравнения (6.9) получаем

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^{x_n} \{ \varphi_k''(x) \varphi_n(x) - \varphi_k(x) \varphi_n''(x) \} dx \\ &= \{ \varphi_k'(x) \varphi_n(x) - \varphi_k(x) \varphi_n'(x) \} \Big|_0^{x_n} = -\varphi_k(x_n) \varphi_n'(x_n) \\ &= -\phi_k(x_n) \phi_n'(x_n) \left(\sin \frac{x_n}{2} \right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x_n}{2} \right)^{2\beta+1}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Из (6.7)–(6.11) видно, что

$$a_n = 0, \quad a_k \leq 0 \quad \text{при} \quad k > n, \quad a_k \geq 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.12)$$

так как $\phi'_n(x_n) < 0$, и при $k \neq n$ имеем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{c_k}{\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\phi_k^2(x_n)\phi'_n(x_n) \left(\sin \frac{x_n}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x_n}{2}\right)^{2\beta+1}}{\left(k + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Учитывая свойства (6.6) и (6.12), получаем, что для каждой функции $F(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \phi_k(x)$ из множества $\mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}$ (см. (6.1)) выполняется соотношение

$$\int_0^{2x_n} F(x)v(x) dx = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \int_0^{2x_n} \phi_k(x)v(x) dx = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k a_k \leq 0,$$

и, значит, найдется точка $x^* \in (0, 2x_n)$, в которой $F(x^*) < 0$. Отсюда следует (6.3). Лемма доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 1.1

Следствие 3.1 влечет утверждения теоремы 1.1 при $\alpha > \beta = -1/2$. Пусть теперь $\alpha > \beta > -1/2$. В этом случае п. (В) теоремы 1.1 содержится в следствии 2.1. В силу неравенства $1 - ru \leq (1 - u)^r$ при $|u| \leq 1$, $r \geq 1$ и соотношений (2.3)–(2.5) для доказательства неравенства (1.1) достаточно доказать неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k < \max_{0 \leq t \leq 2x_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - r\phi_k(t)\}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k = 1, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.1)$$

Ряд в правой части (7.1) можно представить в виде

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - r\phi_k(t)\} = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k - rF(t),$$

где $F \in \mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}$ (см. (6.1)). В силу (6.3) и определения 6.2 найдется точка $x^* \in (0, 2x_n^{\alpha,\beta})$, в которой $F(x^*) < 0$, что эквивалентно (7.1).

Утверждение (1.2) доказывается аналогично с помощью неравенства $2^{r-1}(1 - u) \leq (1 - u)^r$ при $0 < r < 1$, $|u| \leq 1$. Теорема 1.1 доказана.

Как уже отмечалось выше, неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L_{\alpha,\beta}^2$ при $\alpha = \beta = (m - 3)/2$, $m = 2, 3, \dots$ тесно связано с аналогичным неравенством в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ комплексных функций, заданных на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. В случае, когда α, β различные, указанное неравенство связано с аналогичным неравенством в пространстве L^2 комплексных функций, заданных на проективных пространствах $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{R})$ (при $\alpha = (m - 3)/2$, $\beta = -1/2$, $m \geq 3$) и $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ (при $\alpha = m - 2$, $\beta = 0$, $m \geq 3$) над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ вещественных и комплексных чисел соответственно.

§ 8. Неравенство Джексона–Стечкина в L^2 на сфере и проективных пространствах

Прямые теоремы теории приближения функций многих переменных, в том числе заданных на таких классических многообразиях, как сфера, тор, евклидово и проективное пространства, изучались с начала этого века и до сих пор являются объектом интенсивных исследований. Некоторые исторические сведения по неравенствам Джексона–Стечкина на сфере и проективных пространствах содержатся в работах [43]–[45], [9], [1], [46].

Начнем со сферы. Здесь будет дополнен результат В.В. Арестова [1, утверждение (В) теоремы 2.2] об оценке снизу константы Джексона–Стечкина на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$, $m \geq 3$. При этом мы будем использовать в основном обозначения и известные факты из гармонического анализа, применявшиеся в [1].

Итак, пусть $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$, $m \geq 2$, есть пространство комплексных функций, заданных на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^m$, со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi \quad (8.1)$$

и нормой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Здесь $|\mathbb{S}^{m-1}| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$ – площадь сферы $\mathbb{S}^{m-1}$. *Многочленом степени не выше n называется функция*

$$p(x) = \sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq n, \quad \alpha_k \in \mathbb{Z}_+,$$

с комплексными коэффициентами $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$. Множество сужений таких многочленов на $\mathbb{S}^{m-1}$ обозначим через $P_n = P_{n, m}$. *Наилучшим приближением функции $f \in L^2$ пространством P_n называется величина*

$$E_n(f) = \min\{\|f - p\| : p \in P_n\}.$$

Сдвигом с шагом $t \in \mathbb{R}$ называется (см., например, [44, формулы (1.1), (1.19)]) оператор M_t , действующий из $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ в $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ по правилу

$$M_t f(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}_{\pi/2}^{m-2}(x)} f(x \cos t + \xi \sin t) d\xi; \quad (8.2)$$

здесь $x \in \mathbb{S}^{m-1}$ и интеграл берется по сфере $\mathbb{S}_{\pi/2}^{m-2}(x) = \{\xi \in \mathbb{S}^{m-1} : x \cdot \xi = \cos \frac{\pi}{2} = 0\}$, где $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_m \xi_m$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_m)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ из $\mathbb{R}^m$. При $t \in (0, \pi)$ этот оператор можно представить в виде

$$M_t f(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|(\sin t)^{m-2}} \int_{\mathbb{S}_t^{m-2}(x)} f(\xi) d\xi, \quad (8.3)$$

где $\mathbb{S}_t^{m-2}(x) = \{\xi \in \mathbb{S}^{m-1} : x \cdot \xi = \cos t\}$. Разностным оператором порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbb{R}$ называется оператор [9]

$$\Delta_t^r = (I - M_t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} M_t^k,$$

где I – тождественный оператор. Соответствующим модулем непрерывности порядка $r > 0$ функции $f \in L_2(\mathbb{S}^{m-1})$ является следующая функция переменного $\tau > 0$:

$$\omega_r(f, \tau) = \sup\{\|\Delta_t^r f\| : 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Обозначим через $\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbb{S}^{m-1})}$, $\tau > 0$, $r > 0$, $m = 2, 3, \dots$, точную константу $\mathcal{K}$ в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$,

$$E_{n-1}(f) \leq \mathcal{K} \omega_r(f, \tau), \quad f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1}),$$

т.е. положим

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbb{S}^{m-1})} = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f, \tau)} : f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1}), f \neq \text{const} \right\}, \quad (8.4)$$

$n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\tau > 0$, $r > 0$. Хорошо известно, что пространство $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ разлагается в ортогональную прямую сумму:

$$L^2(\mathbb{S}^{m-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus H_k,$$

конечномерных подпространств $H_k = H_{k,m}$, $\dim H_k = \frac{2k+m-2}{m-2} \binom{k+m-3}{k}$, сферических гармоник степени k (см., например, [4]). Напомним, что *сферической гармоникой степени k* называют сужение на сферу $\mathbb{S}^{m-1}$ однородного гармонического многочлена степени k ,

$$q(x) = \sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}, \quad \sum_{l=1}^m \alpha_l = k, \quad \alpha_l \in \mathbb{Z}^+, \quad \Delta q = 0,$$

где $\Delta = \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ есть оператор Лапласа. Оператор ортогонального проектирования $Y_k : L^2(\mathbb{S}^{m-1}) \rightarrow H_k$ имеет вид

$$Y_k f(x) = \frac{\dim H_k}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} R_k^{\alpha, \alpha}(x \cdot \xi) f(\xi) d\xi, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Иными словами, каждая функция $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ единственным образом разлагается в ряд Фурье по сферическим гармоникам, сходящийся к ней в $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k f(x). \quad (8.5)$$

Действие оператора сдвига M_t с шагом $t \in \mathbb{R}$ на функцию $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ выражается формулой

$$M_t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{\alpha, \alpha}(\cos t) Y_k f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^{\alpha, \alpha}(t) Y_k f(x), \quad \alpha = \frac{m-3}{2}.$$

Отсюда с помощью равенства Парсеваля получаются следующие известные соотношения:

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k f\|^2, \\ \|\Delta_t^r f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \{1 - \phi_k^{\alpha, \alpha}(t)\}^r \|Y_k f\|^2, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому задача (8.4) сводится к задаче (2.3) при $\alpha = \beta = \frac{m-3}{2}$, т.е. с учетом равенства (2.4) имеем

$$\mathcal{K}_n^2(\tau, r)_{L^2(\mathbb{S}^{m-1})} = K_n^{\alpha, \alpha}(\tau, r) = \{\mathcal{K}_n^{\alpha, \alpha}(\tau, r)\}^2, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \quad (8.6)$$

для $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\tau > 0$, $r > 0$.

Теперь с помощью первого утверждения следствия 3.1 мы можем сформулировать отмеченное выше дополнение к результату В. В. Арестова об оценке снизу константы Джексона–Стечкина на сфере. А именно, в п. (В) теоремы 2.2 из работы [1] условие $\tau \in (0, \pi)$ можно ослабить, заменив его на условие $\tau > 0$. Тем самым упрощается формулировка упомянутой теоремы.

ТЕОРЕМА 8.1. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняются утверждения:*

(А) *при $m = 2, 3, \dots$, $\alpha = \frac{m-3}{2}$ для каждой функции $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1})$, $f \not\equiv \text{const}$, выполняется неравенство*

$$E_{n-1}(f) < \max\{1, 2^{(1-r)/2}\} \omega_r(f, 2x_n^{\alpha, \alpha}), \quad r > 0;$$

(В) *при $m = 3, 4, \dots$, $\tau > 0$ существует последовательность функций g_k , $k \in \mathbb{N}$, из $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ такая, что*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(g_k)}{\omega_r(g_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. В силу равенств (8.6) и определения (0.14) все предложения, сформулированные в замечании 0.1, естественным образом переносятся и на теорему 8.1.

Перейдем к задаче о точном неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{P}^{m-1})$ комплексных функций, заданных на вещественном проективном пространстве $\mathbb{P}^{m-1} = \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{R})$, $m = 3, 4, \dots$. Как хорошо известно (см. [29], [4]), пространство $L^2(\mathbb{P}^{m-1})$ можно отождествить с подпространством всех четных функций f из пространства $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$, т.е. можно считать, что

$$L^2(\mathbb{P}^{m-1}) = \{f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1}) : f(x) = f(-x), x \in \mathbb{S}^{m-1}\}.$$

Поскольку для четной функции $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ разложение (8.4) в ряд Фурье содержит сферические гармоники лишь четной степени:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{2k} f(x),$$

то для функции $f \in L^2(\mathbb{P}^{m-1})$ величиной ее наилучшего приближения порядка $n-1$ естественно назвать следующее число:

$$E_{n-1}(f) = \min \left\{ \|f - g\| : g \in \sum_{k=0}^{n-1} H_{2k} \right\}.$$

В качестве оператора сдвига с шагом $t \in \mathbb{R}$ возьмем сужение оператора M_t , определенного формулой (8.2), на $L^2(\mathbb{P}^{m-1})$. Поэтому понятие модуля непрерывности порядка $r > 0$ функции f из $L^2(\mathbb{P}^{m-1})$ остается прежним. Задача о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbb{P}^{m-1})}$ в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{P}^{m-1})$

$$E_{n-1}(f) \leq \mathcal{K} \omega_r(f, \tau), \quad f \in L^2(\mathbb{P}^{m-1}), \quad (8.7)$$

совпадает с задачей

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbb{P}^{m-1})} = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f, \tau)} : f \in L^2(\mathbb{P}^{m-1}), f \neq \text{const} \right\}. \quad (8.8)$$

Эта задача по указанной выше схеме сводится к задаче о точной константе $K = \tilde{K}_n^{\alpha, \alpha}(\tau, r)$, $\alpha = \frac{m-3}{2}$ в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \leq K \max_{0 \leq t \leq \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_{2k}^{\alpha, \alpha}(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq 1,$$

или, что то же самое (см. первое равенство в (0.2)), в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \leq K \max_{0 \leq t \leq 2\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k^{\alpha, -1/2}(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq 1.$$

Отсюда и из (2.2) следует соотношение

$$\mathcal{K}_n^2(\tau, r)_{L^2(\mathbb{P}^{m-1})} = K_n^{\alpha, -1/2}(2\tau), \quad \alpha = \frac{m-3}{2},$$

при $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, $\tau > 0$, $r > 0$, которое в силу (2.4), (0.14) и следствия 1.2 влечет следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, $r > 0$, $\tau \geq \min\{\pi/2, x_n^{(m-3)/2, -1/2}\}$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{P}^{m-1})$ справедливо неравенство Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \max\{1, 2^{(1-r)/2}\} \omega_r(f, \tau),$$

причем оно является точным для произвольных фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $r \geq 1$.

Рассмотрим случай проективного пространства $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$, $m \geq 3$, над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть $\mathbb{S}^{m-1}(\mathbb{C}) = \{x \in \mathbb{C}^m : |x| = 1\}$ есть единичная сфера пространства $\mathbb{C}^m$; здесь $|x| = \sqrt{x \cdot x}$, $x \cdot y = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_m \bar{y}_m$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ из $\mathbb{C}^m$. Так же, как и выше, используя известную (см. [43], [29], [4]) интерпретацию $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ в терминах классов эквивалентностей на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}(\mathbb{C})$, пространство $L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}))$ можно отождествить с подпространством функций $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1}(\mathbb{C}))$, которые являются “четными” в следующем смысле: $f(x) = f(cx)$ при $x \in \mathbb{S}^{m-1}(\mathbb{C})$ и $c \in \mathbb{S}^0(\mathbb{C})$. То есть можно считать, что

$$L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})) = \{f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1}(\mathbb{C})) : f(x) = f(cx), c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}.$$

Пространство $L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}))$ разлагается в ортогональную прямую сумму (см. [4]):

$$L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus V_k,$$

конечномерных подпространств $V_k = V_{k,m}$, $\dim V_k = \binom{m+k-1}{k}^2 - \binom{m+k-2}{k-1}^2$, многочленов $q(x) = q(x_1, x_2, \dots, x_m, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ однородных степени k как относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$, так и относительно сопряженных переменных $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$, и гармонических в том смысле, что

$$\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 q}{\partial x_l \partial \bar{x}_l} = 0.$$

Таким образом, каждая функция $f \in L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}))$ единственным образом разлагается в следующий ряд Фурье, сходящийся к ней в $L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}))$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k f(x), \quad P_k f \in V_k.$$

Поэтому величина ее наилучшего приближения

$$E_{n-1}(f) = \inf \left\{ \|f - g\| : g \in \sum_{k=0}^{n-1} V_k \right\}$$

порядка $n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет равенству

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \|P_k f\|^2.$$

В работе [47, с. 101] (см. также [48, с. 100]) доказано, что оператор среднего значения (см. [49, гл.1, §4]) (аналог оператора M_t , см. (8.3)) для функций, заданных на компактных сильно однородных (или, что то же самое, двухточечно-однородных, или дважды однородных) метрических пространствах, выражается через зональные сферические функции. В частности, учитывая явное выражение зональных сферических функций на $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ (см. [37], [29], [4]) через многочлены Якоби $R_k^{m-2,0}$, получаем, что указанный оператор среднего значения в пространстве $L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}))$ эквивалентен следующему оператору обобщенного сдвига:

$$\mathcal{U}_t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{m-2,0}(\cos 2t) P_k f(x), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Далее, по аналогии с тем, как это уже делалось раньше, на основе обобщенного сдвига определяются разностный оператор порядка $r > 0$ с шагом $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и соответствующий модуль непрерывности функции $f \in L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}))$, который мы будем обозначать также через $\omega_r(f, t)$. Затем с помощью теоремы 1.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Пусть $m = 3, 4, \dots$, $n \geq \max\{2, \frac{m-2}{2}\}$, $r \geq 0$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}))$ справедливо неравенство Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \max\{1, 2^{(1-r)/2}\} \omega_r(f, x_n^{m-2,0}),$$

причем оно является точным для любых фиксированных $n \geq \max\{2, \frac{m-2}{2}\}$ и $r \geq 1$.

Из утверждений, содержащихся в работах [47], [48], [37], следует, что наряду с указанными выше тремя важными приложениями частных случаев теоремы 1.1, относящихся к неравенствам Джексона–Стечкина в пространствах $L^2_{(m-3)/2, (m-3)/2}$, $L^2_{(m-3)/2, -1/2}$, $L^2_{m-2,0}$, $m = 2, 3, \dots$, имеются по крайней мере еще два. А именно, к задачам о константах Джексона–Стечкина в пространствах $L^2_{2m-1,1}$, $m = 2, 3, \dots$, и $L^2_{7,3}$ сводятся соответственно аналогичные задачи в пространствах $L^2(\mathbb{P}^{4m}(\mathbb{H}))$, $m = 2, 3, \dots$, и $L^2(\mathbb{P}^{16}(\mathbf{Cay}))$. Здесь $\mathbb{P}^{4m}(\mathbb{H})$ есть проективное пространство над телом кватернионов $\mathbb{H} = \{x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k : x_\nu \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{P}^{16}(\mathbf{Cay})$ – проективная плоскость Кэли. Верхние индексы $4m$ и 16 обозначают вещественную размерность соответствующих многообразий.

Список литературы

1. Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №3. С. 333–355.
2. Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 с весом Якоби // Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева. Т. 1. М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 40–43.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
4. Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. Т. 40. М.: Наука, 1980. С. 44–110.
5. Löfström J., Peetre J. Approximation Theorems Connected with Generalized Translations // Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.

6. Grünwald A. K. Über “begrenzte” Derivationen und deren Anwendung // Z. angew. Math. und Phys. 1867. V. 12. P. 441–480.
7. Летников А. В. Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб. 1868. Т. 3. С. 1–68.
8. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
9. Рустамов Х. П. О приближении функций на сфере // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 127–148.
10. Рустамов Х. П. Модули гладкости высших порядков, связанные с разложением Фурье–Якоби, и приближение функций алгебраическими многочленами // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 5. С. 593–596.
11. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 1. С. 219–242.
12. Потапов М. К. О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ. 1983. № 4. С. 43–52.
13. Черныш Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
14. Черныш Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.
15. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces. Proc. Conf. Gdan'sk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
16. Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 309–315.
17. Попов В. Ю. О точных константах в неравенствах Джексона для наилучших сферических среднеквадратичных приближений // Изв. вузов. Математика. 1981. № 12. С. 67–78.
18. Попов В. Ю. Многомерные приближения в $L_2(T_m)$ // Теория функций и приближений. Труды 3-й Саратовской зимней Школы (27 января – 7 февраля 1986 г.) Межвузовский научный сборник. Ч. 3. Саратов: Саратовский университет, 1988. С. 22–25.
19. Попов В. Ю. Приближение на сфере в L_2 // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 793–797.
20. Бабенко А. Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 651–664.
21. Бабенко А. Г. О неравенстве Джексона в пространстве L^2 // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 4–14.
22. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 1. С. 125–129.
23. Шакенова М. Ж. О точном неравенстве между наилучшими приближениями и модулем гладкости положительного порядка в $L_p[0, 2\pi]^2$ // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики: Тез. докл. Алматы, 1993. С. 178–179.
24. Аrestov В. В., Попов В. Ю. Неравенство Джексона на сфере L_2 // Изв. вузов. Математика. 1995. № 8(399). С. 13–20.
25. Иванов В. И., Смирнов О. И. О теореме Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_2^n)$ // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 390–405.
26. Горбачев Д. В. Точные константы Джексона на группе $SU(2)$ // Алгебра и анализ: Тез. докл. школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б. М. Гагаева (16–22 июня 1997 г., г. Казань). Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С. 61–63.
27. Смирнов О. И. О константах Джексона в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_2^n)$ // Алгебра и анализ: Тез. докл. школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б. М. Гагаева (16–22 июня 1997 г., г. Казань). Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С. 199–200.
28. Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976.

29. Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И. О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14. № 1. С. 3–25.
30. Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. of Combinatorial Theory. Series A. 1979. V. 26. P. 210–214.
31. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
32. Юдин В. А. Нижние оценки для сферических дизайнов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 61. № 3. С. 213–223.
33. Стечкин С. Б. О нулях дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1970. Т. 8. № 4. С. 419–429.
34. Арестов В. В. Об экстремальных свойствах неотрицательных тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 50–70.
35. Gasper G. Positivity and the convolution structure for Jacobi series // Ann. of Math. 1971. V. 93. P. 112–118.
36. Gasper G. Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. of Math. 1972. V. 95. P. 261–280.
37. Koornwinder T. The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics // SIAM J. Appl. Math. 1973. V. 25. № 2. P. 236–246.
38. Koornwinder T. Jacobi polynomials, II. An analytic proof of the product formula // SIAM J. Math. Anal. 1974. V. 5. № 1. P. 125–137.
39. Gasper G., Trebels W. Multiplier criteria of Marcinkiewicz type for Jacobi expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 231. № 1. P. 117–132.
40. Шапиро Р. Л. Специальные функции, связанные с представлением группы $SU(n)$ класса I относительно $SU(n-1)((n-1) \geq 3)$ // Изв. вузов. Математика. 1968. Т. 4(71). С. 97–107.
41. Le Gendre A. M. Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures. Т. 2. Paris, 1817.
42. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
43. Ragozin D. L. Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces // Transactions of the Amer. Math. Soc. 1971. V. 162. P. 157–170.
44. Никольский С. М., Лизоркин П. И. Аппроксимация функций на сфере // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 3. С. 635–651.
45. Федоров В. М. Приближение функций на сфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1990. № 1. С. 15–23.
46. Платонов С. С. О теоремах джексоновского типа на компактном симметрическом пространстве ранга 1 // ДАН. 1997. Т. 353. № 4. С. 445–448.
47. Иванов В. И., Смирнов О. И. Константы Джексона в пространствах L_2 на метрических компактах // Изв. Тульского госуд. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1996. Т. 2. № 1. С. 93–118.
48. Иванов В. И. Константы Джексона в пространствах L_p на метрических компактах // Алгебра и анализ: Тез. докл. школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б. М. Гагаева (16–22 июня 1997 г., г. Казань). Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С. 98–101.
49. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН,
Екатеринбург, Россия

Поступило в редакцию
30.IX.1997