Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Добрынский, Существование двумерных топологически перемешивающих аттракторов у некоторых кусочно линейных отображений плоскости, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 6, 53–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/im220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 04:24:53

УДК 517.9

В. А. Добрынский

Существование двумерных топологически перемешивающих аттракторов у некоторых кусочно линейных отображений плоскости

Доказано существование двумерных топологически перемешивающих аттракторов у эндоморфизмов плоскости, образованных путем сцепления двух одинаковых одномерных унимодальных кусочно линейных отображений.

Библиография: 4 наименования.

Одним из наиболее изученных классов одномерных систем является семейство кусочно линейных отображений вида $\tau \rightarrow 1 - a|\tau|$. Это связано с тем, что, обладая по сути дела столь же сложной динамикой, как и гладкие отображения, кусочно линейные намного проще и легче поддаются изучению аналитическими методами. Сказанное в еще большей мере справедливо для многомерных динамических систем. А учитывая, как мало известно о свойствах даже двумерных кусочно линейных отображений, вполне понятен тот интерес, который они вызывают.

В последнее время в литературе широко обсуждаются эффекты, возникающие при сцеплении ряда идентичных одномерных отображений.

Пусть $f_a: \tau \rightarrow f_a(\tau)$ — однопараметрическое семейство отображений прямой $\mathbb{R}^1$ в себя. Сцепление пары таких отображений может быть произведено различными способами. Чаще всего рассматриваются отображения вида

$$(x, y) \rightarrow (f_a(x) + \zeta(f_a(y) - f_a(x)), f_a(y) + \zeta(f_a(x) - f_a(y))), \quad (1)$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2[1], [2]$. Очевидно, они обладают свойством симметрии (относительно замен $x \rightarrow y, y \rightarrow x$), вследствие чего при любых значениях параметров a и ζ имеют одномерное инвариантное многообразие в виде главной диагонали $x = y$, на которой они совпадают с f_a . Ниже исследуются отображения (1) с $f_a(\tau) = 1 - a|\tau|$, т.е. рассматривается двухпараметрическое семейство кусочно линейных эндоморфизмов плоскости вида

$$\Phi: (x, y) \rightarrow (1 - a(1 - \zeta)|x| - a\zeta|y|, 1 - a(1 - \zeta)|y| - a\zeta|x|), \quad (2)$$

где a и ζ — параметры такие, что $0 < a < 2$ и $0 < \zeta < 1$. Толчком для изучения свойств этого класса отображений послужили статьи [1], [2], в которых представлен ряд результатов численного анализа свойств двух семейств кусочно линейных отображений (из которых семейство, рассматриваемое в [1], такое же, как (2), а рассматриваемое в [2] совпадает с Φ после соответствующей линейной замены координат). В частности, в обеих работах выдвинуто предположение о существовании значений параметров таких, что соответствующие им отображения имеют

двумерные хаотические аттракторы. Кроме того, в [1] сформулирована дополнительно гипотеза о топологической транзитивности аттракторов и плотности периодических точек на них.

Основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Для произвольного $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ существует $\zeta_a \in (0, \frac{a-1}{2a})$ такое, что для любых $\zeta \in (0, \zeta_a)$ отображение Φ имеет хаотический странный аттрактор Λ , представляющий собой четырехугольник (ромбoid, стороны которого образованы парами отрезков двух первых образов критического множества отображения Φ), на котором Φ является топологически перемешивающим отображением.*

Другими словами, в пространстве параметров есть такая область, что для каждого набора параметров из этой области для отображения Φ в фазовом пространстве существует область U такая, что $\Phi(\text{Cl } U) \subset \text{Int } U$, $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(U) = \Lambda$ и для любого конечного покрытия Λ окрестностями V_i , $i = \overline{1, N}$, открытыми в Λ , найдется натуральное M такое, что $\Phi^p(V_i) \cap V_j \neq \emptyset$ для произвольных $i, j \in \{1, \dots, N\}$ и $p \geq M$. Здесь и далее $\text{Cl } U$ и $\text{Int } U$ обозначают замыкание и внутренность множества U соответственно.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ и $\zeta \in (0, \zeta_a)$, то Λ – топологически транзитивное множество, на котором плотны периодические точки.*

В дальнейшем мы ограничимся изучением Φ , соответствующих значениям a и ζ из интервалов $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ и $(0, \frac{a-1}{2a})$. При таких a и ζ оба собственных числа дифференциала $D\Phi$ (там, где он существует) по модулю больше 1, а отображение Φ имеет пару неподвижных точек

$$\left(\frac{1}{1+a}, \frac{1}{1+a}\right), \quad \left(\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a}\right)$$

и пару периодических периода 2 точек

$$\left(\frac{1+a(1-2\zeta)}{1+aa(1-2\zeta)}, \frac{1-a(1-2\zeta)}{1+aa(1-2\zeta)}\right), \quad \left(\frac{1-a(1-2\zeta)}{1+aa(1-2\zeta)}, \frac{1+a(1-2\zeta)}{1+aa(1-2\zeta)}\right).$$

Обозначим $K_\Phi = K_x \cup K_y$, где $K_x = \{(x, y): x = 0\}$, $K_y = \{(x, y): y = 0\}$, критическое множество отображения Φ . (Напомним, что *критическим* для отображения Ψ называется множество точек, в которых якобиан $D\Psi$ обращается в нуль или же вообще не существует [3], [4].) Поскольку $\Phi: (t, 0) \rightarrow (1 - a(1 - \zeta)|t|, 1 - a\zeta|t|)$ и $\Phi: (0, t) \rightarrow (1 - a\zeta|t|, 1 - a(1 - \zeta)|t|)$, то

$$\begin{aligned} \Phi(\{(x, y): y = 0\}) &= \left\{(x, y): y = 1 + \frac{\zeta}{1-\zeta}(x-1), x \leq 1\right\}, \\ \Phi(\{(x, y): x = 0\}) &= \left\{(x, y): y = 1 + \frac{1-\zeta}{\zeta}(x-1), x \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Объединение этих множеств дает $\Phi(K_\Phi)$. Нетрудно показать, что

$$\Phi(\mathbb{R}^2) = \left\{(x, y): 1 + \frac{1-\zeta}{\zeta}(x-1) \leq y \leq 1 + \frac{\zeta}{1-\zeta}(x-1), x \leq 1\right\}.$$

Обозначим $O = (0, 0)$ начало координат и рассмотрим ромб $BDEF$, где $B = (1, 1)$, $D = (1 - 2\zeta, -1 + 2\zeta)$, $E = (-1, -1)$, $F = (-1 + 2\zeta, 1 - 2\zeta)$. Оси координат делят ромб на четыре части. Обозначим $A = \left(0, 1 - \frac{\zeta}{1-\zeta}\right)$, $C = \left(1 - \frac{\zeta}{1-\zeta}, 0\right)$, $H = \left(0, -1 + \frac{\zeta}{1-\zeta}\right)$, $G = \left(-1 + \frac{\zeta}{1-\zeta}, 0\right)$ точки пересечения осей координат со сторонами ромба и рассмотрим образы четырехугольников $OABC$, $OCDH$, $OH EG$ и $AOGF$. Так как Φ – диффеоморфизм каждого из четырехугольников на его образ, достаточно найти координаты образов их вершин. Находим:

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= B = (1, 1), & \Phi(A) &= \Phi(H) = \left(1 - a\zeta + \frac{a\zeta^2}{1-\zeta}, 1 - a + 2a\zeta\right), \\ \Phi(B) &= \Phi(E) = (1 - a, 1 - a), & \Phi(C) &= \Phi(G) = \left(1 - a + 2a\zeta, 1 - a\zeta + \frac{a\zeta^2}{1-\zeta}\right), \\ \Phi(D) &= \Phi(F) = (1 - a(1 - 2\zeta), 1 - a(1 - 2\zeta)).\end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi(OABC) = \Phi(OH EG) \supset \Phi(OCDH) = \Phi(AOGF)$. Как следствие, получается, что $\Phi(BDEF) = \Phi(OABC)$. При этом поскольку $A, C \in K_\Phi$, то $\Phi(A), \Phi(C) \in \Phi(K_\Phi)$. А так как $-1 + 2\zeta < 1 - a + 2a\zeta < 1$ при $1 < a < 2$, $0 < \zeta < \frac{a-1}{2a}$, то $\Phi(A) \in BD$, а $\Phi(C) \in BF$. Следовательно, $\Phi(OABC) \subset BDEF$. Причем при достаточно малых ζ точки $\Phi(A)$ и $\Phi(C)$ находятся в малых окрестностях точек D и F соответственно.

Обратим внимание на то, что ромбоид $\Phi(OABC)$ образован парами отрезков, принадлежащих $\Phi(K_\Phi)$ и $\Phi^2(K_\Phi)$. Ниже мы покажем, что $\Phi(OABC)$ и есть то самое множество Λ , о котором упоминается в формулировке теоремы.

ЛЕММА 1. *Для произвольных $a \in (1, 2)$ и $\zeta \in (0, \frac{a-1}{2a})$ существует область $U \subset \mathbb{R}^2$ такая, что $U \supset BDEF$, $\Phi(\text{Cl } U) \subset \text{Int } U$ и $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(\text{Cl } U) \subset BDEF$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая U в виде γ -окрестности ромба $BDEF$, где $\gamma = \gamma(a, \zeta) > 0$ – достаточно малая величина, нетрудно убедиться в том, что $\Phi(\text{Cl } U) \subset \text{Int } U$. Это означает также, что $\Phi^j(\text{Cl } U) \subset \Phi^{j-1}(\text{Cl } U)$ для любого натурального j . Более того, вычисление нескольких последовательных итераций $\text{Cl } U$ показывает, что существует натуральное N такое, что $\Phi^N(\text{Cl } U) \subset BDEF$.

Рассмотрим отображения, обратные к Φ . Имеется четыре таких отображения. Именно:

$$\begin{aligned}\Phi_{(1)}^{-1}: (x, y) &\rightarrow (g(x, y), h(x, y)), & \Phi_{(2)}^{-1}: (x, y) &\rightarrow (g(x, y), -h(x, y)), \\ \Phi_{(3)}^{-1}: (x, y) &\rightarrow (-g(x, y), -h(x, y)), & \Phi_{(4)}^{-1}: (x, y) &\rightarrow (-g(x, y), h(x, y)),\end{aligned}$$

где

$$g(x, y) = \frac{1}{a} - \frac{(1-\zeta)x}{a(1-2\zeta)} + \frac{\zeta y}{a(1-2\zeta)}, \quad h(x, y) = \frac{1}{a} - \frac{(1-\zeta)y}{a(1-2\zeta)} + \frac{\zeta x}{a(1-2\zeta)}.$$

Все это линейные сжатия. Определены они на $\Phi(\mathbb{R}^2)$ и отображают его на разные квадранты $\mathbb{R}^2$. Точнее,

$$\begin{aligned}\Phi_{(1)}^{-1}(\Phi(\mathbb{R}^2)) &= Q_1, & \Phi_{(2)}^{-1}(\Phi(\mathbb{R}^2)) &= Q_2, \\ \Phi_{(3)}^{-1}(\Phi(\mathbb{R}^2)) &= Q_3, & \Phi_{(4)}^{-1}(\Phi(\mathbb{R}^2)) &= Q_4,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &:= \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}, & Q_2 &:= \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 0\}, \\ Q_3 &:= \{(x, y) : x \leq 0, y \leq 0\}, & Q_4 &:= \{(x, y) : x \leq 0, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

Очевидно также, что $\Phi_{(1)}^{-1}(\Phi(OABC)) = OABC$, $\Phi_{(2)}^{-1}(\Phi(OC DH)) = OC DH$, $\Phi_{(3)}^{-1}(\Phi(OABC)) = OHEG$ и $\Phi_{(4)}^{-1}(\Phi(OC DH)) = AOGF$.

Введем обозначение $\tilde{K}_\Phi = K_\Phi \cap \Phi(BDEF)$. Действие $\Phi_{(j)}^{-1}$, $j = \overline{1, 4}$, преобразует разбиение ромбоида $\Phi(BDEF)$ на части множеством $\tilde{K}_\Phi$ в разбиения на части четырехугольников $OABC$, $OC DH$, $OHEG$, $AOGF$ множествами $\Phi_{(j)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi)$, $j = \overline{1, 4}$, – прообразами множества $\tilde{K}_\Phi$. (Заметим кстати, что $\bigcup_{i=1}^4 \Phi_{(i)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi)$ – не что иное, как подмножество множества точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, координаты которых удовлетворяют одному из соотношений $1 - a(1 - \zeta)|x| - a\zeta|y| = 0$ или $1 - a(1 - \zeta)|y| - a\zeta|x| = 0$.) В результате получается новое разбиение ромбоида $\Phi(BDEF)$ множествами $\tilde{K}_\Phi$, $\bigcup_{i=1}^4 \Phi_{(i)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi)$. Повторяя указанную операцию еще раз, мы построим разбиение ромбоида $\Phi(BDEF)$ множествами $\tilde{K}_\Phi$, $\bigcup_{i=1}^4 \Phi_{(i)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi)$ и $\bigcup_{j=1}^4 \bigcup_{i=1}^4 \Phi_{(j)}^{-1}(\Phi_{(i)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi))$, и т.д. Согласно описанной выше процедуре построенное на m -м шаге разбиение является измельчением разбиения, построенного на $(m - 1)$ -м шаге. При этом множествами-делителями всякий раз являются подмножества m -х прообразов критического множества. Разбиения, получаемые таким образом, являются согласованными в том смысле, что под действием Φ границы их элементов переходят друг в друга, а сами элементы разбиения m -го порядка действием $\Phi_{(i)}^{-1}$ преобразуются в один или несколько (до четырех) элементов разбиения $(m + 1)$ -го порядка. Обозначим $\{\xi_m\}$ разбиение m -го порядка, а ξ_m , $\text{diam}(\xi_m)$ и $\text{mes}(\xi_m)$ – произвольный элемент разбиения, его диаметр и площадь.

ЛЕММА 2. Для произвольного $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ существует $\zeta_a \in (0, \frac{a-1}{2a})$ такое, что для любых $\zeta \in (0, \zeta_a)$ соотношение $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi^{-j}((0, 0))\right) \cap \xi_m \neq \emptyset$, где $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi^{-j}((0, 0))$ – множество всех прообразов точки $(0, 0)$, выполняется для любого натурального m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ_m – произвольный элемент разбиения $\{\xi_m\}$. В каждом из квадрантов ромба $BDEF$ отображение Φ растягивает элементы $\{\xi_m\}$ линейно по обоим направлениям. Поэтому, учитывая, что модули собственных чисел $D\Phi$ в $OABC$ и $OHEG$ равны соответственно a и $a(1 - 2\zeta)$, а в $OC DH$ и $AOGF$ равны $a\sqrt{1 - 2\zeta}$, находим, что под действием Φ площади увеличиваются в $a^2(1 - 2\zeta)$ раз, т.е. $\text{mes}(\Phi(\xi_m)) = a^2(1 - 2\zeta) \text{mes}(\xi_m)$. Так как при $\zeta = 0$ $a^2(1 - 2\zeta) = a^2 > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 > 2,6$ для $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < a < 2$, то для каждого $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ существует $\zeta_a \in (0, \frac{a-1}{2a})$ такое, что $a^2(1 - 2\zeta) > 2,2$ для всех $\zeta \in (0, \zeta_a)$. Следовательно, $\text{mes}(\Phi(\xi_m)) > 2,2 \text{mes}(\xi_m)$.

Рассмотрим $\Phi(\xi_m)$. Возможны следующие три случая:

- а) $\text{Int } \Phi(\xi_m) \cap K_\Phi = \emptyset$;
- б) $\text{Int } \Phi(\xi_m) \cap K_\Phi \neq \emptyset$, но либо $\text{Int } \Phi(\xi_m) \cap K_x = \emptyset$, либо же $\text{Int } \Phi(\xi_m) \cap K_y = \emptyset$;

в) $\text{Int } \Phi(\xi_m) \cap K_x \neq \emptyset$ и $\text{Int } \Phi(\xi_m) \cap K_y \neq \emptyset$.

Если имеет место а), то $\Phi(\xi_m)$ лежит в одном из квадрантов $BDEF$ и, следовательно, $\text{mes}(\Phi^2(\xi_m)) > 2,2 \text{mes}(\Phi(\xi_m))$. Предположим теперь, что справедливо б). Для определенности пусть $\text{Int } \Phi(\xi_m) \cap K_y = \emptyset$. Тогда K_Φ делит $\Phi(\xi_m)$ на две части. Выбирая из них по площади большую (любую, если они равны), видим, что $\text{mes}(\Phi^2(\xi_m)) > 1,1 \text{mes}(\Phi(\xi_m))$. Таким образом, получается, что если $\Phi^j(\xi_m)$ таковы, что для каждого $j = 1, 2, 3, \dots$ выполняется а) или б), то $\text{mes}(\Phi^j(\xi_m)) > 1,1^j \text{mes}(\xi_m)$, и, значит, $\text{mes}(\Phi^j(\xi_m))$ неограниченно растет. Последнее невозможно, следовательно, существует натуральное J такое, что справедливо предположение в). Но в таком случае очевидно, что либо $\text{Int } \Phi^J(\xi_m) \cap \{(x, y): y = x\} \neq \emptyset$, либо $\text{Int } \Phi^J(\xi_m) \cap \{(x, y): y = -x\} \neq \emptyset$. Так как $\Phi(\{(x, y): y = -x\}) \subset \{(x, y): y = x\}$, последнее означает, что $L \stackrel{\text{df}}{=} \text{Int } \Phi^{J+1}(\xi_m) \cap \{(x, y): y = x\} \neq \emptyset$. Тогда, повторяя рассуждения, излагаемые в доказательстве леммы 3, нетрудно убедиться в том, что существует натуральное N такое, что $\Phi^N(L) \supset BD$, и, значит, $\Phi^{J+N+1}(\xi_m) \ni (0, 0)$.

ЛЕММА 3. Для любых $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ и $\zeta \in (0, \frac{a-1}{2a})$ разбиения $\{\xi_m\}$ ромбоида $\Phi(OABC)$ на части таковы, что для каждого натурального m найдется другое натуральное число $M = M(m)$ такое, что для любого $\xi_m \in \{\xi_m\}$ выполняется соотношение $\Phi^M(\xi_m) = \Phi(OABC)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое m и рассмотрим разбиение $\{\xi_m\}$ множества $\Phi(OABC)$. В силу леммы 2 для произвольного $\xi_m \in \{\xi_m\}$ существует $k = k(\xi_m)$ такое, что $(0, 0) \in \text{Int}(\Phi^k(\xi_m))$. Но $\Phi: (0, 0) \rightarrow (1, 1)$ и $\tilde{K}_\Phi \rightarrow \Phi(\tilde{K}_\Phi)$, а потому найдется $\gamma > 0$ такое, что множество $\Delta := U_\gamma((1, 1)) \cap OABC$, где $U_\gamma((1, 1))$ — γ -окрестность точки $(1, 1)$ в $\mathbb{R}^2$, принадлежит $\Phi^{k+1}(\xi_m)$. Посмотрим, как с ростом j изменяются размеры $\Phi^j(\Delta)$. Обозначим $L = OB \cap \Delta$, и пусть $s(L)$ — длина L . Покажем, что существует натуральное J такое, что $\Phi^J(L) = B\Phi(B)$.

Очевидно, $\Phi^j(L) \subset BE$ для любого $j = 1, 2, 3, \dots$. При этом на каждом шаге возникает следующая альтернатива:

(а) $(0, 0) \cap \text{Int}(\Phi^{j-1}(L)) = \emptyset$,

либо

(б) $(0, 0) \cap \text{Int}(\Phi^{j-1}(L)) \neq \emptyset$ и точка $(0, 0)$ делит $\Phi^{j-1}(L)$ на две части.

Если имеет место (а), то $s(\Phi^j(L)) = as(\Phi^{j-1}(L))$, т.е. при каждой итерации длина отрезка увеличивается в a раз. Рассмотрим (б). Пусть $\tilde{L}$ — большая (любая, если они одинаковые) часть отрезка $\Phi^{j-1}(L)$. Рассмотрим $\Phi(\tilde{L})$. Так как $\Phi(0) = B$, то B является одним из концов отрезка $\Phi(\tilde{L})$. Если $(0, 0) \in \Phi(\tilde{L})$, то $\Phi^2(\tilde{L}) = B\Phi(B)$. Предположим обратное, т.е. что $(0, 0) \cap \Phi(\tilde{L}) = \emptyset$ и для $\Phi(\tilde{L})$ выполняется (а). Тогда

$$s(\Phi^2(\tilde{L})) = as(\Phi(\tilde{L})) = a^2s(L) > \frac{1}{2}a^2s(\Phi^{j-1}(L)).$$

При этом одним из концов отрезка $\Phi^2(\tilde{L})$ является точка $\Phi(B)$. Допустим, что $\Phi(B)$ лежит левее и ниже точек $\Phi^{-1}(0)$, т.е. $\Phi^2(B) \in O\Phi(B)$. Это действительно так, когда a такие, что $1-a \leq -\frac{1}{a}$ и, в частности, при $a \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тогда если $(0, 0) \in$

$\Phi^2(\tilde{L})$, то $\Phi^3(\tilde{L}) = OB$ и $\Phi^4(\tilde{L}) = B\Phi(B)$. Если же все-таки $(0, 0) \cap \Phi^2(\tilde{L}) = \emptyset$, то для $\Phi^2(\tilde{L})$ выполняется (а) и $s(\Phi^3(\tilde{L})) = a^3 s(\tilde{L}) > 0$, $5a^3 s(\Phi^{j-1}(L))$.

Если $a^3 > 2$, то $s(\Phi^3(\tilde{L})) > 2s(\tilde{L})$, а $s(\Phi^{j+2}(L)) > 2s(\Phi^{j-1}(L))$. Как следствие получается, что если для $\Phi^{j+2}(L)$ выполняется условие (б) и $\hat{L}$ – большая часть его, то $s(\hat{L}) > 0$, $5a^3 s(\tilde{L}) > s(\tilde{L})$ при $a > \sqrt[3]{2}$. А поскольку $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \sqrt[3]{2}$, то каждая итерация отображения Φ^3 либо увеличивает длины отрезков не менее, чем в $0,5 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ раз, либо же порождает отрезок, который накрывает $B\Phi(B)$. Если выбрать i так, что $0,5^i \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3i} s(\tilde{L}) > s(B\Phi(B))$, то тогда отрезок $\Phi^{3i}(\tilde{L})$, очевидно, накрывает отрезок $B\Phi(B)$. Полагая $J = 3i + j$, получаем, $\Phi^J(L) = B\Phi(B)$.

Из симметрии $\Phi^J(\Delta)$ относительно $B\Phi(B)$ вытекает существование $\omega > 0$ такого, что $\Phi(OABC) \cap U_\omega(B\Phi(B)) \subset \Phi^J(\Delta)$ ($U_\omega(B\Phi(B))$ – ω -окрестность отрезка $B\Phi(B)$ в $\mathbb{R}^2$). Покажем, что существует натуральное M такое, что $\Phi^M(\Phi(OABC) \cap U_\omega(B\Phi(B))) \supset \Phi(OABC)$. Рассмотрим прообразы $\Phi_{(1)}^{-p}(OABC)$. Так как $\Phi_{(1)}^{-p}((0, 0)) \in \text{Int}(OB)$ и $\Phi_{(1)}^{-1}$ – сжатие, то существует точка $S \in \text{Int}(OB)$, к которой при $p \rightarrow \infty$ стягиваются множества $\Phi_{(1)}^{-p}(OABC)$. А потому найдется натуральное P такое, что $\Phi_{(1)}^{-P}(OABC) \subset U_\omega(B\Phi(B))$. Отсюда вытекает, что $\Phi^P(U_\omega(B\Phi(B))) \supset OABC$ и $\Phi^{P+1}(U_\omega(B\Phi(B))) \supset \Phi(OABC)$. Полагая $M = J + P + 1$, имеем $\Phi^M(\xi_m) = \Phi(OABC)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратим внимание на то, что при доказательстве леммы 3 мы попутно доказали следующее утверждение: если $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$, то f_a – топологически перемешивающее отображение на $[f_a^2(0), f_a(0)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Ввиду $\Phi(BDEF) = \Phi(OABC)$ из леммы 1 вытекает, что существует окрестность U такая, что $\Phi(\text{Cl } U) \subset \text{Int}(U)$ и $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(U) = \Phi(OABC)$. Пусть $\{V_i\}_{i=1}^N$ – произвольное покрытие $\Phi(OABC)$ открытыми в $\mathbb{R}^2$ дисками и r_i – диаметр i -го диска. Обозначим $r = \min\{r_i\}$ и выберем натуральное $m = m(r)$ так, чтобы $\text{diam}(\xi_m) < \frac{r}{10}$. Согласно лемме 3 существует $M = M(m)$ такое, что $\Phi^M(\xi_m) = \Phi(OABC)$. Следовательно, $\Phi^M(V_i) = \Phi(OABC)$ для каждого i . Последнее означает, что $\Phi^p(V_i) \cap V_j \neq \emptyset$ для любых $i, j \in \{1, \dots, N\}$ и $p \geq M$.

Список литературы

1. *Pikovsky A. S., Grassberger P.* Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // J. Phys. A. Math. Gen. 1991. V. 24. P. 4587–4597.
2. *Losson J., Mackey M.* Coupling induced statistical cycling in two diffusively coupled maps // Physica D. 1994. V. 72. P. 324–342.
3. *Добрынский В. А.* Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 4. С. 442–445.
4. *Добрынский В. А.* Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 669–680.

Киев, Украина

Поступило в редакцию
28.X.1997