Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Кочубей, Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p -адическими квадратичными формами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 6, 103–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/im222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:07:38

УДК 517.95

А. Н. Кочубей

Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p -адическими квадратичными формами

Строятся и исследуются фундаментальные решения, соответствующие некоторым классам псевдодифференциальных операторов с символами вида $|h(\xi)|_p^\alpha$, $\alpha > 0$, где $h(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, – невырожденная p -адическая квадратичная форма.

Библиография: 28 наименований.

§ 1. Введение

Появление в квантовой механике и квантовой теории поля p -адических моделей (см. [1]–[3] и указанную там литературу) привело к значительной активизации исследований в области p -адического анализа, в том числе в теории обобщенных функций, в изучении различных классов операторов в функциональных пространствах над p -адическим полем Q_p и над $Q_p^n = Q_p \times \dots \times Q_p$ (n раз). Ниже будут рассматриваться операторы в пространствах комплекснозначных функций на Q_p^n ; случаю Q_p -значных функций посвящена монография [2].

Поскольку Q_p вполне несвязно, комплекснозначную функцию $u(x)$, $x \in Q_p$, нельзя дифференцировать. Поэтому естественно рассмотреть псевдодифференциальные операторы. Простейший пример – оператор дробного дифференцирования, введенный В. С. Владимировым [4]:

$$(D^\alpha z)(x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [|\xi|_p^\alpha F_{y \rightarrow \xi} z], \quad \alpha > 0, \quad (1.1)$$

где F – преобразование Фурье,

$$F_{y \rightarrow \xi} z = \int_{Q_p} \chi_p(y\xi) z(y) dy,$$

$$F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \zeta = \int_{Q_p} \chi_p(-x\xi) \zeta(\xi) d\xi,$$

χ_p – канонический аддитивный характер на Q_p , dx – мера Хаара на аддитивной группе Q_p , нормированная условием

$$\int_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Выражение (1.1) имеет смысл для функции z , принадлежащей пространству основных функций $\mathcal{D}(Q_p)$, состоящему из локально постоянных функций с компактными носителями (см. [1]): если $z \in \mathcal{D}(Q_p)$, то $Fz \in \mathcal{D}(Q_p)$ и $D^\alpha z \in L_2(Q_p)$. С другой стороны, D^α может быть представлен в виде гиперсингулярного интегрального оператора:

$$(D^\alpha z)(x) = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{Q_p} |y|_p^{-\alpha-1} [z(x-y) - z(x)] dy, \quad (1.2)$$

$z \in \mathcal{D}(Q_p)$. Правая часть (1.2) имеет смысл для более широкого класса функций, например для всех локально постоянных функций z таких, что $|z(x)| \leq C(|x|_p^\nu + 1)$, $0 \leq \nu < \alpha$.

Фундаментальное решение уравнения

$$D^\alpha z = f \quad (1.3)$$

найдено в [4]:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} |x|_p^{\alpha-1}, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \frac{1 - p}{p \log p} \log |x|_p, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Если $f \in \mathcal{D}(Q_p)$, то $z = E * f$ локально постоянна, $|z(x)| \leq C(|x|_p^{\alpha-1} + 1)$, и функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению (1.3), где D^α понимается в смысле (1.2).

Отметим, что непосредственному определению обобщенного решения $z \in \mathcal{D}'(Q_p)$ уравнения (1.1) препятствует то обстоятельство, что для функции $\varphi \in \mathcal{D}(Q_p)$ функция $D^\alpha \varphi$ может не принадлежать $\mathcal{D}(Q_p)$ (поскольку функция $\xi \mapsto |\xi|_p$ не является локально постоянной). В многомерных задачах ситуация еще сложнее. Например, известно [1], что уравнение $D_t^1 z - D_x^2 z = f(x, t)$, $x, t \in Q_p$, не имеет фундаментального решения из $\mathcal{D}'(Q_p^2)$.

В настоящей работе рассматриваются многомерные псевдодифференциальные операторы вида

$$(Az)(x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [|h(\xi)|_p^\alpha F_{y \rightarrow \xi} z], \quad x \in Q_p^n, \quad (1.5)$$

где $h(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in Q_p^n$, – квадратичная форма с p -адическими коэффициентами, $\alpha > 0$,

$$F_{y \rightarrow \xi} z = \int_{Q_p^n} \chi(y_1 \xi_1 + \dots + y_n \xi_n) z(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \\ F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \zeta = \int_{Q_p^n} \chi(-x_1 \chi_1 - \dots - x_n \xi_n) \zeta(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Будем предполагать, что $p \neq 2$.

Очевидная аналогия подсказывает три класса операторов (1.5). *Эллиптическими* операторами естественно называть те, для которых $h(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ (см. также [5]). В отличие от классической ситуации, эллиптические операторы над Q_p^n существуют только при $n \leq 4$ и допускают полную классификацию (см. [6], [7]). Для каждого из них строится гиперсингулярное интегральное представление и фундаментальное решение. Применяемая для этой цели методика состоит в сведении задачи к случаю одномерных псевдодифференциальных операторов над локальными полями (расширениями Q_p ; в случае $n = 4$ удобнее использовать некоммутативное тело кватернионов над Q_p). Этот подход уже применялся ранее [8] при исследовании функции Грина оператора A , рассматриваемого как самосопряженный оператор в $L_2(Q_p)$; последняя задача связана с намеченной в [9] перспективой построения p -адического аналога евклидовой квантовой теории поля.

Операторы (1.5) с $h(\xi) = \xi_1^2 - g(\xi_2, \dots, \xi_n)$, $g(\xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$, если $(\xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$, можно назвать *гиперболическими*. Простейший случай $n = 2$ легко сводится к одномерному. Случай, когда $n > 2$, сложнее, поскольку решение может быть обобщенным, а действие оператора A в $\mathcal{D}'(Q_p^n)$ не определено. Обозначим

$$C = \{\xi \in Q_p^n : \xi_1^2 = g(\xi_2, \dots, \xi_n)\},$$

$$\mathcal{D}_C(Q_p^n) = \{\varphi \in \mathcal{D}(Q_p^n) : \tilde{\varphi}(\xi) = 0, \quad \xi \in C\}$$

(здесь и ниже вместо $F\varphi$ часто используется обозначение $\tilde{\varphi}$). Тогда $A : \mathcal{D}'_C(Q_p^n) \rightarrow \mathcal{D}'_C(Q_p^n)$, и нетрудно построить фундаментальное решение $E \in \mathcal{D}'_C(Q_p^n)$, дающее решение $u = E * f$ уравнения $Au = f$ с $f \in \mathcal{D}_C(Q_p^n)$ (см. [10] по поводу дальнейшего развития этого подхода, применимого не только к гиперболическим операторам). Оказывается, что в гиперболическом случае для любого α , кроме двух исключительных значений, фундаментальное решение E можно продолжить до обобщенной функции из $\mathcal{D}'(Q_p^n)$.

“Параболический” случай, когда $h(\xi) = \xi_1 - g(\xi_2, \dots, \xi_n)$ и g – невырожденная квадратичная форма, уже изучен в [11]. В этом случае свойства фундаментальных решений подобны случаю классического нестационарного уравнения Шрёдингера. В самом деле, оказалось [11], что уравнению $Au = 0$ с таким A удовлетворяет свободная волновая функция p -адической квантовой механики, развитой в [1], [3], [9]. Подлинно “параболический” характер имеют уравнения с вещественной переменной и p -адическими пространственными переменными, изученные в [12].

§ 2. Эллиптические уравнения

2.1. Одномерные псевдодифференциальные операторы над локальным полем. Пусть K – полное несвязное неметрическое локально компактное поле, снабженное ультраметрическим нормализованным абсолютным значением $\|\cdot\|$ (по поводу основных сведений о локальных полях см. [13]–[15]). Обозначим

$$O = \{x \in K : \|x\| \leq 1\}, \quad P = \{x \in K : \|x\| < 1\}.$$

Кольцо O называется *кольцом целых* поля K , P – *простой идеал* в O . Поле вычетов O/P состоит из $q < \infty$ элементов. Идеал P содержит такой элемент β , что $P = \beta O$, $\|\beta\| = q^{-1}$. Абсолютная величина $\|x\|$ принимает значения q^N , $N \in \mathbb{Z}$. Каждый элемент $x \in K$ можно представить в виде $x = \beta^{-N} u_x$, где $\|x\| = q^N$, $\|u_x\| = 1$.

Нормируем меру Хаара dx на аддитивной группе K , полагая, что мера O равна 1. Преобразование Фурье на K определяется так же, как для $K = \mathbb{Q}_p$; следует интегрировать по K и использовать аддитивный характер χ ранга нуль ($\chi(x) = 1$, если $x \in O$, и $\chi(a) \neq 1$ для некоторого $a \in K$ с $\|a\| = q$) вместо χ_p . Иногда будет употребляться запись $\tilde{\psi}$ вместо $F\psi$. Эти же обозначения будут использоваться для преобразования Фурье обобщенных функций (по поводу обобщенных функций над локальными полями см. [14], [16]).

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$\mathfrak{A} = F^{-1} a F, \quad (2.1)$$

где символ a имеет вид

$$a(\xi) = \|\xi\|^\nu \varphi(u_\xi), \quad \xi \in K, \quad (2.2)$$

$\nu > 0$, φ – непрерывная строго положительная функция на группе единиц $U = O \setminus P = \{u \in K : \|u\| = 1\}$. Пусть $\mathcal{D}(K)$ – пространство основных функций, состоящее из локально постоянных функций с компактными носителями (иногда оно обозначается $\mathcal{S}(K)$, чтобы подчеркнуть его инвариантность относительно преобразования Фурье). Тогда $\mathfrak{A} : \mathcal{D}(K) \rightarrow L_2(K)$.

Далее будет предполагаться, что φ удовлетворяет следующему условию локального постоянства: существует такое натуральное число m , что из неравенства $\|v\| \leq q^{-m}$ следует равенство

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) \quad \text{для всех } u \in U. \quad (2.3)$$

Из (2.3) вытекает (см. [8]), что φ – конечная линейная комбинация характеров мультипликативной группы U :

$$\varphi(u) = \sum_{j=0}^m \sum_{l=1}^{L_j} c_{jl} \theta_{jl}(u), \quad u \in U,$$

где $c_{jl} \in \mathbb{C}$, θ_{jl} – характер ранга j (см. [14], [16]); количество таких характеров, обозначаемое L_j , равно единице для $j = 0$, $q - 2$ для $j = 1$ и $q^{j-2}(q - 1)^2$ для $j \geq 2$ [16].

В [16] доказано, что

$$(\mathfrak{A}z)(x) = \int_K \|y\|^{-\nu-1} \Omega(u_y) [z(x - y) - z(x)] dy, \quad (2.4)$$

где

$$\Omega(u) = \sum_{j=0}^m \sum_{l=1}^{L_j} c_{jl} [\Gamma(q^\nu, \overline{\theta_{jl}})]^{-1} \overline{\theta_{jl}(u)}, \quad u \in U,$$

и Γ – гамма-функция, связанная с полем K (см. [14], [16]; мы следуем обозначениям из [14]).

Правая часть гиперсингулярного интегрального представления (2.4) оператора $\mathfrak{A}$ имеет смысл для всех локально постоянных функций $z(x)$, удовлетворяющих условию

$$|z(x)| \leq C(1 + |x|_p^\mu), \quad 0 \leq \mu < \nu. \quad (2.5)$$

Назовем локально постоянную функцию $z(x)$ *обобщенным решением* уравнения

$$\mathfrak{A}z = f, \quad f \in \mathcal{D}(K), \quad (2.6)$$

если z удовлетворяет (2.5) и (2.6), где $\mathfrak{A}$ понимается в смысле (2.4).

Построим фундаментальное решение E для уравнения (2.6). В данном случае E будет обычной функцией, непрерывной при $x \neq 0$ и такой, что $z = E * f$ – обобщенное решение (2.6).

Поскольку φ строго положительна, φ^{-1} обладает свойством, аналогичным (2.3). Следовательно,

$$[\varphi(u)]^{-1} = \sum_{j=0}^m \sum_{l=1}^{L_j} c'_{jl} \theta_{jl}(u), \quad u \in U,$$

для некоторых $c'_{jl} \in \mathbb{C}$. Из (2.1) и (2.2) видно, что $(FE)(\xi)$ формально совпадает с $\|\xi\|^{-\nu} [\varphi(u_\xi)]^{-1}$. В следующем предположении дана регуляризация обратного преобразования Фурье.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Функция

$$E(x) = \|x\|^{\nu-1} \sum_{j=0}^m \sum_{l=1}^{L_j} c'_{jl} [\Gamma(q^{-\nu}, \overline{\theta_{jl}})]^{-1} \overline{\theta_{jl}(u_x)}, \quad \nu \neq 1,$$

или

$$E(x) = -c_{01} \frac{q-1}{q \log q} \log \|x\| + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{L_j} c'_{jl} [\Gamma(q^{-1}, \overline{\theta_{jl}})]^{-1} \overline{\theta_{jl}(u_x)}, \quad \nu = 1,$$

является фундаментальным решением для уравнения (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $z = E * f$ — локально постоянная функция,

$$|z(x)| \leq \begin{cases} C(\|x\|^{\max(\nu-1,0)} + 1), & \text{если } \nu \neq 1, \\ C \log(2 + \|x\|), & \text{если } \nu = 1. \end{cases}$$

Здесь и ниже буквой C обозначаются различные положительные постоянные. Далее будет рассматриваться случай $\nu = 1$; случай $\nu \neq 1$ проще и может быть исследован аналогично.

Замечая из (2.4), что функция $\mathfrak{A}z$ локально постоянна, мы можем интерпретировать ее как обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(K)$ и рассмотреть ее преобразование Фурье. Если $\psi \in \mathcal{D}(K)$, то

$$\langle F\mathfrak{A}z, \psi \rangle = \langle \mathfrak{A}z, \tilde{\psi} \rangle = \int_K \|y\|^{-2} \Omega(u_y) dy \int_K [z(x-y) - z(x)] \tilde{\psi}(x) dx.$$

Обозначив $\psi_y(t) = \chi(yt)\psi(t)$, получим

$$\int_K [z(x-y) - z(x)] \tilde{\psi}(x) dx = \langle \tilde{z}, \psi_y - \psi \rangle = \langle \tilde{E}, \tilde{f}(\psi_y - \psi) \rangle.$$

Обобщенную функцию $\tilde{E}$ можно вычислить, пользуясь формулами из [1], [16]:

$$\tilde{E}(\xi) = c_{01} [\mathcal{P}\|\xi\|^{-1} + q^{-1}\delta(\xi)] + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{L_j} c_{jl} \|\xi\|^{-1} \theta_{jl}(u_\xi),$$

где

$$\langle \mathcal{P}\|\xi\|^{-1}, \psi \rangle = \int_{\|\xi\| \leq 1} [\psi(\xi) - \psi(0)] \|\xi\|^{-1} d\xi + \int_{\|\xi\| > 1} \|\xi\|^{-1} \psi(\xi) d\xi.$$

Поскольку функция $\tilde{f}(\psi_y - \psi)$ равна нулю вблизи нуля, находим

$$\langle \tilde{E}, \tilde{f}(\psi_y - \psi) \rangle = \int_K \|\xi\|^{-1} [\varphi(u_\xi)]^{-1} \tilde{f}(\xi) [\chi(y\xi) - 1] \psi(\xi) d\xi.$$

Вводя обозначения

$$R_l(\xi) = \begin{cases} \|\xi\|^{-1} [\varphi(u_\xi)]^{-1} \tilde{f}(\xi) \psi(\xi) & \text{при } \|\xi\| > q^l, \\ 0 & \text{при } \|\xi\| \leq q^l, \end{cases}$$

$$I_l(y) = \int_{\|\xi\| \leq q^l} \|\xi\|^{-1} [\varphi(u_\xi)]^{-1} \tilde{f}(\xi) [\chi(y\xi) - 1] \psi(\xi) d\xi,$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle F\mathfrak{A}z, \psi \rangle &= \int_K \|y\|^{-2} \Omega(u_y) [\tilde{R}_l(y) - \tilde{R}_l(0)] dy \\ &\quad + \int_K \|y\|^{-2} \Omega(u_y) I_l(y) dy \end{aligned} \quad (2.7)$$

для любого $l \in \mathbb{Z}$.

Обобщенная функция $\|y\|^{-2}\Omega(u_y)$ (регуляризация функции с неинтегрируемой особенностью; см. [1], [16]) является преобразованием Фурье функции $\|\xi\|\varphi(u_\xi)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_K \|y\|^{-2}\Omega(u_y)[\tilde{R}_l(y) - \tilde{R}_l(0)] dy &= \int_K \|\xi\|\varphi(u_\xi)R_l(\xi) d\xi \\ &= \int_{\|\xi\| > q^l} \tilde{f}(\xi)\psi(\xi) d\xi \rightarrow \langle \tilde{f}, \psi \rangle, \quad l \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Здесь было использовано то, что $R_l \in \mathcal{D}(K)$.

Рассмотрим второй интеграл в (2.7). Для любого $y \in K$ $I_l(y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow -\infty$. Если $l \leq 0$, то $I_l(y) = 0$ при $\|y\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |I_l(y)| &\leq C \int_{\|y\|^{-1} \leq \|\xi\| \leq 1} \|\xi\|^{-1} d\xi \\ &= C \sum_{j=-\log_q \|y\|}^0 \int_{\|\xi\|=q^j} \|\xi\|^{-1} d\xi \leq C [\log_q \|y\| + 1] \end{aligned}$$

при $\|y\| > 1$. Из теоремы Лебега следует, что второе слагаемое в (2.7) стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$.

Итак,

$$\langle F\mathfrak{A}z, \psi \rangle = \langle \tilde{f}, \psi \rangle,$$

откуда $\mathfrak{A}z = f$. Предложение доказано.

Для оператора D_K^ν , соответствующего символу $a(\xi) = \|\xi\|^\nu$, получается

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1 - q^{-\nu}}{1 - q^{\nu-1}} \|x\|^{\nu-1}, & \text{если } \nu \neq 1, \\ \frac{1 - q}{q \log q} \log \|x\|, & \text{если } \nu = 1, \end{cases} \quad (2.8)$$

так же, как в случае $K = Q_p$ (см. (1.4)). Этот результат остается в силе и тогда, когда K – неметрическое вполне несвязное локально компактное некоммутативное тело. Все понятия и конструкции теории локальных полей, использованные для доказательства формулы (2.8), применимы и в этой ситуации (см. [17]–[19]). Формула (2.8) для тела кватернионов над Q_p будет использоваться ниже.

2.2. Координатное представление. Пусть K имеет характеристику нуль. Тогда K – расширение поля Q_p конечной степени n . Предположим, что $n \geq 2$. Характер ранга нуль аддитивной группы K можно задать формулой

$$\chi(x) = \chi_p(\text{Tr}(\beta^{-d}x)), \quad (2.9)$$

где $\text{Tr}: K \rightarrow Q_p$ – след в K над Q_p , d – показатель дифференты (см. [15]).

Рассмотрим билинейную форму

$$\rho(x, y) = \text{Tr}(xy\pi^{-d}), \quad x, y \in K, \quad (2.10)$$

со значениями в Q_p . Поскольку ρ симметрична и не вырождена, в поле K существует ρ -ортогональный базис $e_1, \dots, e_n$ над Q_p (см. [20]):

$$\rho(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j; \quad \rho(e_i, e_i) = \mu_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, $x_i, y_i \in Q_p$, то

$$\chi(xy) = \prod_{i=1}^n \chi_p(\mu_i x_i y_i).$$

Нормированную аддитивную меру Хаара на K можно представить в виде

$$dx = c_K dx_1 \dots dx_n, \quad (2.11)$$

где dx_j – нормированная аддитивная мера Хаара на Q_p ,

$$c_K^{-1} = \int_{\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq 1} dx_1 \dots dx_n.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ – псевдодифференциальный оператор (2.1). Рассмотрим псевдодифференциальный оператор B над Q_p , определенный соотношением

$$(Bg)(x_1, \dots, x_n) = (\mathfrak{A}f)(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n),$$

где $g \in \mathcal{D}(Q_p^n)$; $f \in \mathcal{D}(K)$ такова, что

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n), \quad x_j \in Q_p.$$

Легко видеть, что B – псевдодифференциальный оператор с символом

$$b(\xi_1, \dots, \xi_n) = c_K^2 \left(\prod_{j=1}^n |\mu_j|_p^{-1} \right) a \left(\sum_{k=1}^n \mu_k^{-1} \xi_k e_k \right). \quad (2.12)$$

Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ называется *базисом координатного представления* для оператора $\mathfrak{A}$. Ниже (как и в [8]) такой базис будет часто использоваться следующим образом. Учитывая то, что эллиптический оператор A над Q_p^n имеет вид (1.5), находим расширение K , базис координатного представления, символ $a(\xi)$, $\xi \in K$, вида (2.2) и матрицу T порядка n над Q_p такие, что

$$|h(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p^\alpha = b(T(\xi_1, \dots, \xi_n))$$

(мы не различаем вектор-строки и вектор-столбцы), где b имеет вид (2.12). Теперь $A = W_T^{-1}BW_T$, $(W_T g)(x) = g(T'x)$, $x \in Q_p^n$. Из гиперсингулярного интегрального представления (2.4) следует представление

$$(Ag)(x_1, \dots, x_n) = \int_K \|y\|^{-\nu-1} \Omega(u_y) [g(x_1 - (T'Y)_1, \dots, x_n - (T'Y)_n) - g(x_1, \dots, x_n)] dy, \quad (2.13)$$

где $Y = (y_1, \dots, y_n) \in Q_p^n$ определяется из разложения $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, $y \in K$. Связь между α и ν , а также способ выбора K и a будут конкретно указаны для различных n и тех или иных классов форм h .

Выражение (2.13) имеет смысл для локально постоянных функций $g(x_1, \dots, x_n)$, растущих на бесконечности не быстрее, чем $\max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p^{\nu-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Если $E(x)$ – фундаментальное решение для оператора $\mathfrak{A}$, построенное в предложении 2.1, то фундаментальное решение $G(x_1, \dots, x_n)$ для оператора A (понимаемое точно так же, как в п. 2.1) дается формулой

$$G(x_1, \dots, x_n) = |\det T|_p^{-1} E((T'^{-1}X)_1 e_1 + \dots + (T'^{-1}X)_n e_n), \quad (2.14)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$. Эта формула проверяется непосредственным вычислением.

Соотношения между операторами A и $\mathfrak{A}$, в том числе формула (2.14), остаются в силе, когда K – (некоммутативное) тело. Пусть, в частности, K – центральная алгебра с делением над Q_p , $\dim K = m^2$ (см. [15], [18]). В (2.9) и (2.10) нужно только заменить d на $m - 1$, а Tr – на приведенный след t . Гиперсингулярные представления (2.4) для общих символов (2.2) возможны только для коммутативных K . Однако все рассуждения, относящиеся к оператору D_K^α , справедливы и в случае некоммутативного тела.

2.3. Фундаментальные решения для эллиптических операторов.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если*

$$h(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0 \quad \text{при} \quad |\xi_1|_p + \dots + |\xi_n|_p \neq 0, \quad (2.15)$$

то для оператора A существует фундаментальное решение $G(x_1, \dots, x_n)$, непрерывное при $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ и имеющее не более чем степенной рост на бесконечности. Если $f \in \mathcal{D}(Q_p^n)$, то функция $z = G * f$ удовлетворяет уравнению $Az = f$, где A понимается как гиперсингулярный интегральный оператор (2.13).

Доказательство, приведенное ниже, содержит явные конструкции G для всех возможных квадратичных форм, удовлетворяющих условию эллиптичности (2.15). При этом указывается также явный вид соответствующих гиперсингулярных интегральных представлений (2.13).

2.4. Бинарные формы. Пусть $h(\xi_1, \xi_2)$ удовлетворяет (2.15). Тогда с точностью до линейного изоморфизма

$$h(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 - \tau \xi_2^2,$$

где $\tau \in Q_p$ не является квадратом в Q_p [6], [7]. Чтобы получить все неэквивалентные формы, нужно взять полный набор представителей τ классов из Q_p^*/Q_p^{*2} (здесь Q_p^* – мультипликативная группа поля Q_p , а Q_p^{*2} – подгруппа всех квадратов):

$$\tau = \varepsilon, \quad |\varepsilon|_p = 1; \quad \tau = p; \quad \tau = \varepsilon p.$$

В каждом из трех случаев положим $K = Q_p(\sqrt{\tau})$. Абсолютная величина элемента $x = x_1 + \sqrt{\tau}x_2 \in K$ равна

$$\|x\| = |x_1^2 - \tau x_2^2|_p$$

(отметим, что здесь используется нормализованная абсолютная величина [13]).

Оператор умножения на $x = x_1 + \sqrt{\tau}x_2$ представляется матрицей $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2\tau & x_1 \end{pmatrix}$ относительно базиса $\{1, \sqrt{\tau}\}$. Следовательно, $\text{Tr } x = 2x_1$.

Рассмотрим отдельно каждый из возможных случаев.

Пусть $\tau = \varepsilon$. Тогда K не разветвлено над Q_p [21], откуда $q = p^2$, $d = 0$. В качестве базиса координатного представления можно взять $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{\varepsilon}$. Нетрудно подсчитать [8], что $c = 1$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2\varepsilon$, $|\mu_1|_p = |\mu_2|_p = 1$. Полагая $\nu = \alpha$, $\mathfrak{A} = D_K^\alpha$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$, получаем гиперсингулярное интегральное представление

$$\begin{aligned} (Ag)(x_1, x_2) &= \frac{1 - p^{2\alpha}}{1 - p^{-2\alpha-2}} \int_{Q_p^2} |y_1^2 - \varepsilon y_2^2|_p^{-\alpha-1} \\ &\quad \times [g(x_1 - 2y_1, x_2 - 2\varepsilon y_2) - g(x_1, x_2)] dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Фундаментальное решение имеет вид

$$G(x_1, x_2) = E\left(\frac{x_1}{2} + \sqrt{\varepsilon} \frac{x_2}{2\varepsilon}\right), \quad x_1, x_2 \in Q_p,$$

где

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1 - p^{-2\alpha}}{1 - p^{2(\alpha-1)}} \|x\|^{\alpha-1}, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \frac{1 - p^2}{2p^2 \log p} \log \|x\|, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

для всех $x \in K$, $x \neq 0$.

Пусть $\tau = p$. Тогда K – вполне разветвленное расширение Q_p [21], $q = p$, $d = 1$. Можно положить $\beta = \sqrt{p}$ и взять

$$e_1 = 1 - \sqrt{p}, \quad e_2 = 1 + \sqrt{p}$$

в качестве базиса координатного представления. Тогда [8] $c = 1$, $\mu_1 = -4$, $\mu_2 = 4$, $|\mu_1|_p = |\mu_2|_p = 1$. Как и выше, $\nu = \alpha$, $\mathfrak{A} = D_K^\alpha$. В данном случае

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(Ag)(x_1, x_2) = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{Q_p^2} |(y_1 + y_2)^2 - p(y_2 - y_1)^2|_p^{-\alpha-1} \\ \times \left[g\left(x_1 - \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}, x_2 - \frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2}\right) - g(x_1, x_2) \right] dy_1 dy_2.$$

Выражение для фундаментального решения имеет вид

$$G(x_1, x_2) = E((x_1 + x_2)(1 - \sqrt{p}) + (x_2 - x_1)(1 + \sqrt{p})) = E(2x_2 - 2x_1\sqrt{p}),$$

где

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \|x\|^{\alpha-1}, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \frac{1 - p}{p \log p} \log \|x\|, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

$x \in K$, $x \neq 0$.

Третий случай ($\tau = \varepsilon p$) практически не отличается от второго.

2.5. Тернарные формы. Если квадратичная форма $h(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ удовлетворяет (2.15), то с точностью до линейного изоморфизма [6]

$$h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = p\varepsilon_1\xi_1^2 + \varepsilon_2\xi_2^2 + \varepsilon_3\xi_3^2, \quad (2.16)$$

где $|\varepsilon_1|_p = |\varepsilon_2|_p = |\varepsilon_3|_p = 1$, $\varepsilon_2\xi_2^2 + \varepsilon_3\xi_3^2 \neq 0$, если $|\xi_2|_p + |\xi_3|_p \neq 0$. Поэтому достаточно рассмотреть формы вида (2.16).

Пусть K – неразветвленное расширение Q_p степени 3. Его поле вычетов $\mathbb{F}_q = O/P$, состоящее из $q = p^3$ элементов, является расширением простого конечного поля $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ ($\mathbb{Z}_p$ и $p\mathbb{Z}_p$ – соответственно кольцо целых и простой идеал поля Q_p). Пусть λ – примитивный элемент поля $\mathbb{F}_q$ (по поводу конечных полей см. [22]). Тогда элементы $1, \lambda, \lambda^2$ образуют базис в $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$. Пусть $\{f_1, f_2, f_3\}$ – канонический базис в K над Q_p , соответствующий базису $\{1, \lambda, \lambda^2\}$; это означает [8], что f_1, f_2 и f_3 – произвольные представители классов вычетов $1, \lambda$ и λ^2 соответственно (конечно, такая конструкция возможна только для неразветвленного расширения; см. [6]). Для абсолютной величины в K имеется простое выражение в терминах коэффициентов разложения по каноническому базису (см. [23] или [8]): если $x \in K$, $x = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3$, то $\|x\| = [\max\{|\eta_1|_p, |\eta_2|_p, |\eta_3|_p\}]^3$.

Интерпретация оператора A , связанного с формой (2.16), как координатного представления псевдодифференциального оператора над K найдена в [16]. Рассмотрим следующую функцию φ на группе единиц U поля K . Пусть $u \in U$, $u = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3$. Тогда $\max_{1 \leq j \leq 3} |\eta_j|_p = 1$. Положим

$$\varphi(u) = \begin{cases} p^{-\alpha}, & \text{если } |\eta_1|_p = 1, \quad |\eta_2|_p < 1, \quad |\eta_3|_p < 1, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Оператор $\mathfrak{A}$ – это по определению псевдодифференциальный оператор над K с символом

$$a(\xi) = \|\xi\|^{2\alpha/3} \varphi(u_\xi), \quad \xi \in K.$$

Если $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис координатного представления, то матрица T , фигурирующая в соотношениях между $\mathfrak{A}$ и A , равна $M\Theta'$, где $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, а матрица $\Theta = (\theta_{ij})$ преобразует базисы:

$$f_i = \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Разлагая φ по характерам θ_{jl} группы U и вычисляя соответствующие Γ -функции (см. п. 2.1), приходим к формуле

$$\Omega(u) = \frac{1 - p^{2\alpha}}{1 - p^{-2\alpha-1}} \left(1 - \frac{p^{-\alpha} - 1}{p^2 + p + 1} \right) + (p^{-\alpha} - 1)p^{2\alpha} [S + (p^2 + p + 1)^{-1}], \quad (2.17)$$

где

$$S = \begin{cases} p - 1, & \text{если } \text{tr}(\lambda^N) = 0, \\ -1, & \text{если } \text{tr}(\lambda^N) \neq 0, \end{cases}$$

а N определяется из представления $u = f_2^N y$, $\|1 - y\| < 1$, $0 \leq N \leq q - 2$; tr – след из $\mathbb{F}_q$ в $\mathbb{F}_p$.

Отметим, что вычисление $\Omega(u)$ в доказательстве теоремы 3 из статьи [8] содержит неточность, приводящую к выражению, отличному от (2.17), хотя общий ход рассуждений в [8] верен; следует только учесть различия в выражениях для Γ -функций характеров θ_{jl} при $j = 0$ и $j \geq 1$ [14]. Отметим также, что в [8] требовалось только доказать неравенство $\Omega(u) < 0$, так что сама теорема 3 из [8] верна.

Практически те же вычисления вместе с предложением 2.1 приводят к формуле для фундаментального решения $E(x)$, соответствующего оператору $\mathfrak{A}$. Если $\alpha \neq 3/2$, то

$$E(x) = \|x\|^{2\alpha/3-1} \rho(u_x), \quad x \in K,$$

где для $u_x = f_2^N y$, $\|1 - y\| < 1$,

$$\rho(u_x) = \left(1 - \frac{1 - p^\alpha}{p^2 + p + 1} \right) \frac{1 - p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha-3}} + \frac{(p^\alpha - 1)p^{-2\alpha+3}}{p^2 + p + 1},$$

если $\text{tr}(\lambda_N) = 0$, и

$$\rho(u_x) = \left(1 - \frac{1 - p^\alpha}{p^2 + p + 1} \right) \frac{1 - p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha-3}} - \frac{(p^\alpha - 1)(p + 1)p^{-2\alpha+1}}{p^2 + p + 1},$$

если $\text{tr}(\lambda_N) \neq 0$. Если $\alpha = 3/2$, то

$$E(x) = \frac{(p + 2)(1 - p)}{3p^2 \log p} \log \|x\| + \frac{(p - 1)}{p^3(p^2 + p + 1)} \rho_1(u_x),$$

$$\rho_1(u_x) = \begin{cases} p^3 & \text{при } \text{tr}(\lambda_N) = 0, \\ -p(p + 1) & \text{при } \text{tr}(\lambda_N) \neq 0. \end{cases}$$

Как и ранее, фундаментальное решение G для оператора A дается формулой (2.14). Однако на этот раз выражение для G не вполне явное, так как нет явного вида матрицы T . Ниже предлагается еще один подход, приводящий (при одном, возможно, несущественном, дополнительном предположении) к явному виду G .

Нам потребуются некоторые понятия, относящиеся к базисам в расширениях конечных полей. Точнее, будут рассматриваться базисы в $\mathbb{F}_q$, $q = p^3$, над $\mathbb{F}_p$. Базис $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ называется *автодуальным*, если

$$\mathrm{tr}(\lambda_i \lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

он называется *нормальным*, если $\lambda_2 = \lambda_1^p$, $\lambda_3 = \lambda_1^{p^2}$, и *примитивным*, если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – примитивные элементы поля $\mathbb{F}_q$.

Для любого p поле $\mathbb{F}_q$ обладает нормальным автодуальным базисом [24] и нормальным примитивным базисом [25]. Базис в $\mathbb{F}_q$, являющийся одновременно автодуальным, нормальным и примитивным, существует, например, если $p = 3$ или $p = 5$. Это вытекает из явного вида полиномов [26], корни которых задают автодуальный нормальный базис, и приведенной в [22] таблицы примитивных полиномов. Представляется вероятным, что автодуальный нормальный примитивный базис существует при любом p .

Предположим теперь, что $\mathbb{F}_q$ обладает автодуальным нормальным примитивным базисом $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ над $\mathbb{F}_p$. Как и ранее, через K будет обозначаться неразветвленное расширение Q_p степени 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Поле K обладает базисом координатного представления $\{e_1, e_2, e_3\}$, являющимся каноническим базисом; классы $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ элементов e_j в $\mathbb{F}_q = O/P$ образуют базис в $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из автодуальности базиса $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ и теоремы 90 Гильберта следует существование таких ненулевых элементов $\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{23} \in \mathbb{F}_q$, что

$$\lambda_1 \lambda_2 = \zeta_{12}^p - \zeta_{12}, \quad \lambda_1 \lambda_3 = \zeta_{13}^p - \zeta_{13}, \quad \lambda_2 \lambda_3 = \zeta_{23}^p - \zeta_{23}. \quad (2.18)$$

Группа единиц U содержит такой элемент u_0 , что $u_0^{q-1} = 1$ и множество $M = \{u_0, u_0^2, \dots, u_0^{q-1}\}$ – полный набор представителей классов вычетов из O/P . Пусть $s_{12}, s_{13}, s_{23} \in M$ – представители соответственно классов $\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{23}$. Тогда $s_{ij}^p = \sigma_K(s_{ij})$, где σ_K – автоморфизм Фробениуса [15].

Пусть $e_1^0, e_2^0, e_3^0 \in U$ – произвольные представители классов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Из тождеств (2.18) следует, что

$$e_i^0 e_j^0 - (s_{ij}^p - s_{ij}) \equiv 0 \pmod{P}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (2.19)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$e_i e_j - (s_{ij}^p - s_{ij}) = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \quad (2.20)$$

относительно $e_1, e_2, e_3 \in K$. Определитель соответствующей матрицы Якоби равен $-2e_1e_2e_3$; при $e_j = e_j^0$ он является обратимым элементом кольца O (так как $p \neq 2$). Из леммы Гензеля для системы уравнений (см. [17]) вытекает существование решения $\{e_j\}$ системы (2.20) с $e_j - e_j^0 \in P$, $j = 1, 2, 3$. Поскольку $s_{ij}^p = \sigma_K(s_{ij})$, имеем

$$\mathrm{Tr}(e_1e_2) = \mathrm{Tr}(e_1e_3) = \mathrm{Tr}(e_2e_3) = 0.$$

С другой стороны, $\hat{e}_j = \lambda_j$, $j = 1, 2, 3$. Предложение доказано.

Из построения базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ и того факта, что K не разветвлено над Q_p , получаем

$$|\mathrm{Tr}(e_j^2)|_p = 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Построим теперь оператор $\mathfrak{A}$ так же, как это делалось выше, но взяв базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ вместо $\{f_1, f_2, f_3\}$. В этом случае T – единичная матрица, так что

$$G(x_1, x_2, x_3) = E(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3). \quad (2.21)$$

Поскольку λ_1 – примитивный элемент $\mathbb{F}_q$, каждый элемент $u \in U$ единственным образом представим в виде

$$u = e_1^N y, \quad 0 \leq N \leq q-2, \quad \|1 - y\| < 1. \quad (2.22)$$

Занумеруем характеры θ_{1l} так, чтобы

$$\theta_{1l}(u) = \exp\left(\frac{2\pi i l N}{q-1}\right), \quad 1 \leq l \leq q-2.$$

Повторяя рассуждения из [8], найдем выражения для коэффициентов c_{jl}, c'_{jl} (используются обозначения из п. 2.1). Имеем $m = 1$,

$$c_{01} = 1 + \frac{p^{-\alpha} - 1}{p^2 + p + 1},$$

$$c_{1l} = \frac{p^{-\alpha} - 1}{p^2 + p + 1} \exp\left(-\frac{2\pi i \omega}{p^2 + p + 1}\right),$$

если $l = \omega(p-1)$, $\omega = 1, \dots, p(p+1)$, и $c_{1l} = 0$ для остальных значений $l \leq q-2$;

$$c'_{01} = 1 + \frac{p^\alpha - 1}{p^2 + p + 1},$$

$$c'_{1l} = \frac{p^\alpha - 1}{p^2 + p + 1} \exp\left(-\frac{2\pi i \omega}{p^2 + p + 1}\right),$$

если $l = \omega(p-1)$, $\omega = 1, \dots, p(p+1)$, и $c'_{1l} = 0$ для остальных значений $l \leq q-2$.

Вычислим для данной ситуации функции Ω и E , исходя из формул п. 2.1 с $\nu = 2\alpha/3$.

Пусть $\alpha \neq 3/2$. Пользуясь тождествами [14], [16]

$$\Gamma(q^{-2\alpha/3}, 1) = \frac{1 - q^{2\alpha/3-1}}{1 - q^{-2\alpha/3}},$$

$$[\Gamma(q^{-2\alpha/3}, \theta_{1, \nu(p-1)})]^{-1} = \overline{\Gamma(q^{-1+2\alpha/3}, \theta_{1, \nu(p-1)})}$$

и очевидным тождеством

$$\overline{\theta_{1, \nu(p-1)}} = \theta_{1, (p^2+p+1-\nu)(p-1)}, \quad 1 \leq \nu \leq p^2 + p,$$

после замены индекса суммирования получаем

$$E(x) = \|x\|^{2\alpha/3-1} \left[\left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p^2 + p + 1} \right) \frac{1 - p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha-3}} + \frac{p^\alpha - 1}{p^2 + p + 1} \right. \\ \left. \times \sum_{\nu=1}^{p(p+1)} \overline{\Gamma(q^{-1+2\alpha/3}, \theta_{1, \nu(p-1)})} \exp \left(\frac{2\pi i \nu}{p^2 + p + 1} \right) \theta_{1, \nu(p-1)}(u_x) \right].$$

Известно [14], [16], что

$$\Gamma(q^{-1+2\alpha/3}, \theta_{1, l}) = q^{1-2\alpha/3} \int_{\|y\|=1} \chi(p^{-1}y) \theta_{1, l}(y) dy.$$

Этот интеграл равен сумме интегралов по множествам

$$\{y = e_1^m z, \quad \|1 - z\| < 1\}, \quad 0 \leq m \leq q - 2.$$

Мера каждого из них равна $(1 - q^{-1})(q - 1)^{-1} = q^{-1}$ в силу инвариантности меры. Поэтому

$$\Gamma(q^{-1+2\alpha/3}, \theta_{1, l}) = q^{-2\alpha/3} \sum_{m=0}^{q-2} \chi(p^{-1}e_1^m) \exp \left(\frac{2\pi i l m}{q - 1} \right).$$

Записывая u_x в форме (2.22), находим

$$E(x) = \|x\|^{2\alpha/3-1} \left[\left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p^2 + p + 1} \right) \frac{1 - p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha-3}} \right. \\ \left. + \frac{p^{-2\alpha}(p^\alpha - 1)}{p^2 + p + 1} \sum_{m=0}^{q-2} \sum_{\nu=1}^{p(p+1)} \chi(-p^{-1}e_1^m) \right. \\ \left. \times \exp \left(\frac{2\pi i \nu(N - m + 1)}{p^2 + p + 1} \right) \right]. \quad (2.23)$$

Известные свойства тригонометрических сумм [22] приводят к тождествам

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{p(p+1)} \exp\left(\frac{2\pi i \nu(N-m+1)}{p^2+p+1}\right) \\ &= \begin{cases} p^2+p+1, & \text{если } N-m+1 = j(p^2+p+1), \quad j \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ & \sum_{m=0}^{q-2} \chi(-p^{-1}e_1^m) = -1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{q-2} \sum_{\nu=1}^{p(p+1)} \chi(-p^{-1}e_1^m) \exp\left(\frac{2\pi i \nu(N-m+1)}{p^2+p+1}\right) \\ &= (p^2+p+1) \sum_{j=0}^{p-2} \chi(-p^{-1}e_1^{N+1-j(p^2+p+1)}) + 1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Обозначим через Σ выражение в левой части (2.24). Поскольку K – неразветвленное расширение Q_p , можно получить характер ранга нуль, полагая

$$\chi(x) = \chi_p(\text{Tr}(x)).$$

Класс элемента $\text{Tr}(x)$, $x \in O$, в $\mathbb{F}_p$ совпадает с $\text{tr}(\hat{x})$, где $\hat{x}$ – класс x в $\mathbb{F}_q$ (см. [15]). Выражение $\chi_p(-p^{-1}\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{Z}_p$, определяет нетривиальный аддитивный характер X на конечном поле $\mathbb{F}_p$. Пусть $\delta = \lambda_1^{p^2+p+1}$. Элементы $0, 1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{p-2}$ образуют подполе в $\mathbb{F}_q$, совпадающее с $\mathbb{F}_p$. Следовательно,

$$\chi(-p^{-1}e_1^{N+1-j(p^2+p+1)}) = X(\delta^{-j} \text{tr}(\lambda_1^{N+1})),$$

откуда

$$\Sigma = \begin{cases} p^3, & \text{если } \text{tr}(\lambda_1^{N+1}) = 0, \\ -p^2 - p, & \text{если } \text{tr}(\lambda_1^{N+1}) \neq 0. \end{cases}$$

Подставляя это в (2.23), находим

$$E(x) = \|x\|^{2\alpha/3-1} r(x), \quad (2.25)$$

где

$$r(x) = \left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p^2 + p + 1}\right) \frac{1 - p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha-3}} + \frac{p^{3-2\alpha}(p^\alpha - 1)}{p^2 + p + 1},$$

если $\text{tr}(\lambda_1^{N+1}) = 0$, или

$$r(x) = \left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p^2 + p + 1}\right) \frac{1 - p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha-3}} - \frac{p^{1-2\alpha}(p^\alpha - 1)(p + 1)}{p^2 + p + 1},$$

если $\text{tr}(\lambda_1^{N+1}) \neq 0$.

Аналогично при $\alpha = 3/2$ имеем

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{(p+2)(1-p)}{3p^2 \log p} \log \|x\| + \frac{p^{-3}(p-1)}{p^2+p+1} r_1(x), \\ r_1(x) &= \begin{cases} p^3, & \text{если } \text{tr}(\lambda_1^{N+1}) = 0, \\ -p(p+1), & \text{если } \text{tr}(\lambda_1^{N+1}) \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

В обоих случаях подобные рассуждения дают также следующее выражение для Ω :

$$\Omega(u) = \left(1 + \frac{p^{-\alpha} - 1}{p^2 + p + 1}\right) \frac{1 - p^{2\alpha}}{1 - p^{-2\alpha-3}} + \frac{p^{2\alpha+3}(p^{-\alpha} - 1)}{p^2 + p + 1},$$

если $\text{tr}(\lambda_1^{N+1}) = 0$, или

$$\Omega(u) = \left(1 + \frac{p^{-\alpha} - 1}{p^2 + p + 1}\right) \frac{1 - p^{2\alpha}}{1 - p^{-2\alpha-3}} - \frac{p^{2\alpha+1}(p^{-\alpha} - 1)(p+1)}{p^2 + p + 1},$$

если $\text{tr}(\lambda_1^{N+1}) \neq 0$. Как и раньше, N связано с $u \in U$ формулой (2.22).

Формулы (2.21), (2.25), (2.26) для фундаментального решения станут яснее, если выразить условие $\text{tr}(\lambda_1^{N+1}) = 0$ на $x \in K$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, $x_j \in Q_p$, в терминах коэффициентов x_j .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $u_x = e_1^N y$, $\|1 - y\| < 1$. Равенство $\text{tr}(\lambda_1^{N+1}) = 0$ эквивалентно неравенству

$$|x_1|_p < \max\{|x_2|_p, |x_3|_p\}. \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $N = p$ или $N = p^2$, то $\text{tr}(\lambda_1^{N+1}) = 0$, поскольку базис $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ автодуальный, $\lambda_2 = \lambda_1^p$, $\lambda_3 = \lambda_1^{p^2}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{N} = \ker \text{tr} \subset \mathbb{F}_q$, являющееся векторным подпространством в $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$. Очевидно, $\dim \mathfrak{N} \leq 2$. С другой стороны, векторы $\lambda_1^{p+1} \in \mathfrak{N}$ и $\lambda_1^{p^2+1} \in \mathfrak{N}$ линейно независимы над $\mathbb{F}_p$, иначе было бы $\lambda_1^{p^2-p} \in \mathbb{F}_p$, что противоречит описанию $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ как множества элементов $\lambda_1^{\nu(p^2+p+1)}$, $\nu = 0, 1, \dots, p-2$.

Следовательно, множество $\{x \in K: \text{tr}(\lambda_1^{N+1}) = 0\}$ состоит из тех x , для которых

$$\lambda_1^{N+1} = \sigma_1 \lambda_1 \lambda_2 + \sigma_2 \lambda_1 \lambda_3, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{F}_p.$$

Это эквивалентно сравнению

$$u_x \equiv s_2 e_2 + s_3 e_3 \pmod{P},$$

где $s_2, s_3 \in Q_p$, $\max\{|s_2|_p, |s_3|_p\} = 1$. Отсюда

$$x = p^{-m}(s_2 e_2 + s_3 e_3) + x', \quad \|x\| = q^m, \quad \|x'\| < q^m$$

(для неразветвленного расширения $\beta = p$). Это равенство означает, что коэффициенты разложения $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ удовлетворяют неравенству (2.27). Предложение доказано.

2.6. Кватернарные формы. Известно (см. [7]), что квадратичная форма $h(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, удовлетворяющая условию эллиптичности (2.15), единственна с точностью до линейного изоморфизма. Такая форма представима в виде

$$h(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \xi_1^2 - s\xi_2^2 - \sigma\xi_3^2 + s\sigma\xi_4^2,$$

где $s, \sigma \in Q_p$, и символ Гильберта $(s, \sigma) = -1$. В частности, можно взять $\sigma = p$, $s \in \mathbb{Z}$ – квадратичный невычет $\pmod{p}$.

Пусть $K = \left(\frac{s, p}{Q_p}\right)$ – тело кватернионов над Q_p с базисом $1, i, j, k$ и таблицей умножения

$$\begin{aligned} i^2 = s, \quad j^2 = p, \quad ij = -ji = k, \quad k^2 = -sp, \\ ik = -ki = js, \quad jk = -kj = -ip. \end{aligned}$$

K является центральной алгеброй с делением над Q_p и с нормализованной абсолютной величиной

$$\|x\| = |h(x_1, x_2, x_3, x_4)|_p^2, \quad x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k.$$

В данном случае $q = p^2$, $\beta = j$. Приведенный след $t: K \rightarrow Q_p$ равен $t(x) = 2x_1$.

Базис координатного представления был найден в [8]:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 - j), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 + j), \quad e_3 = \frac{1}{2s}(i - k), \quad e_4 = \frac{1}{2}(i + k).$$

Согласно [8] $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = -s^{-1}$, $\mu_4 = s$, $c = 1$. Полагая $\mathfrak{A} = D_K^{\alpha/2}$,

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 & s \end{pmatrix}, \quad |\det T|_p = 1$$

(см. [8]), получаем гиперсингулярное интегральное представление оператора A с $\Omega(u) \equiv \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-2}}$. Фундаментальное решение записывается в виде

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= E \left(\frac{x_3 - x_1}{2} e_1 + \frac{x_1 + x_3}{2} e_2 + \frac{x_4 - x_2}{2} e_3 + \frac{x_2 + x_4}{2} e_4 \right), \\ E(x) &= \begin{cases} \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-2}} \|x\|^{\alpha/2-1}, & \text{если } \alpha \neq 2, \\ \frac{1-p^2}{2p^2 \log p} \log \|x\|, & \text{если } \alpha = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что функция Грина, изучавшаяся в [8], фактически является фундаментальным решением, связанным с псевдодифференциальным оператором с символом $|h(\xi)|^\alpha + \lambda$, $\lambda > 0$. Пользуясь случаем, отметим опечатку в [8], относящуюся к случаю кватернарных форм: коэффициент в асимптотике функции Грина (последняя формула в [8]) должен быть равен $\frac{p^{\alpha+2}(p^\alpha-1)}{p^{\alpha+2}-1} \lambda^{-2}$.

Поскольку квадратичных форм с $n \geq 5$, удовлетворяющих (2.15), не существует [6], [7], приведенные результаты завершают доказательство теоремы 2.1.

§ 3. Гиперболические уравнения

3.1. Уравнения с одной пространственной переменной. Рассмотрим уравнение $Az = f$, где A – псевдодифференциальный оператор (1.5) с $n = 2$, $h(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2$, $\alpha > 0$. Как и в случае вещественного волнового уравнения, этот оператор можно преобразовать (очевидной заменой переменных) в произведение двух одномерных операторов типа D^α . Получаются гиперсингулярное интегральное представление

$$(Au)(x, t) = \left(\frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}} \right)^2 \int_{Q_p^2} |y\theta|_p^{-\alpha-1} [u(x - y - \theta, t - y + \theta) - \\ - u(x - \theta, t + \theta) - u(x - y, t - y) + u(x, t)] dy d\theta$$

и формулы для фундаментального решения (понимаемого так же, как в эллиптическом случае)

$$G(x, t) = \left(\frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \right)^2 |x + t|_p^{\alpha-1} |x - t|_p^{\alpha-1},$$

если $\alpha \neq 1$, или

$$G(x, t) = \left(\frac{p-1}{p \log p} \right)^2 (\log |x + t|_p) \log |x - t|_p,$$

если $\alpha = 1$.

3.2. Уравнения с несколькими пространственными переменными. Рассмотрим уравнение $Az = f$, где A – псевдодифференциальный оператор (1.5) с $h(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1^2 - g(\xi_2, \dots, \xi_n)$,

$$g(\xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0, \quad \text{если} \quad (\xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0. \quad (3.1)$$

Обозначим через P_α символ $|h(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p^\alpha$. Квадратичные формы g , удовлетворяющие (3.1), существуют только при $n \leq 5$. Ниже предполагается, что $n \geq 3$. Посредством замены переменных можно представить g как сумму квадратов с ненулевыми коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$.

Функциональное пространство $\mathcal{D}_C(Q_p^n)$ (см. введение) является замкнутым подпространством в $\mathcal{D}(Q_p^n)$. Преобразование Фурье, вообще говоря, выводит из $\mathcal{D}_C(Q_p^n)$. Однако для оператора $A = F^{-1}P_\alpha F$ имеет место обратное.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Оператор A непрерывно действует в $\mathcal{D}_C(Q_p^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_C(Q_p^n)$. Тогда $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(Q_p^n)$. Предположим, что

$$\begin{aligned} \text{supp } \tilde{\varphi} &\subset \{\xi \in Q_p^n : \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|_p \leq p^N\}, \\ \tilde{\varphi}(\xi + \xi') &= \tilde{\varphi}(\xi), \quad \text{если } \max_{1 \leq j \leq n} |\xi'_j|_p \leq p^l, \end{aligned}$$

$N, l \in \mathbb{Z}$. Можно считать, что $N \geq 0$, $l \leq N - 1$.

Докажем существование такого числа $\nu \in \mathbb{Z}$, зависящего только от N и l , что

$$\tilde{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0, \quad \text{если } |h(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p < p^\nu.$$

Достаточно рассмотреть $\xi_1, \dots, \xi_n$ с $\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|_p \leq p^N$. Обозначим $\eta_j = p^N \xi_j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $\eta_j \in \mathbb{Z}_p$. Если $|h(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p < p^\nu$, то

$$|h(\eta_1, \dots, \eta_n)|_p < p^{\nu+2N}.$$

Имеются две возможности: либо

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\eta_j|_p \leq p^{l-N},$$

так что $\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|_p \leq p^l$ и $\tilde{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \tilde{\varphi}(0, \dots, 0) = 0$, либо хотя бы для одного значения j $|\eta_j|_p \geq p^{l-N+1}$. Пусть, например, $|\eta_1|_p = p^k$, $l-N+1 \leq k \leq 0$.

При $\nu < 2k - 2N$ можно использовать вариант леммы Гензеля, доказанный Серром [7, гл. 2, теорема 1]. Согласно этому результату существуют такие $\eta_j^0 \in \mathbb{Z}_p$, $j = 1, \dots, n$, что

$$h(\eta_1^0, \dots, \eta_n^0) = 0, \quad \max |\eta_j^0 - \eta_j|_p \leq p^{-k+\nu+2N}.$$

Пусть $\xi_j^0 = p^{-N} \eta_j^0$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in C$,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j - \xi_j^0|_p \leq p^{N+\nu-k} \leq p^{2N+\nu-l-1}.$$

Если выбрать $\nu \leq 2l - 4N + 1$, то $\nu < 2k - 2N$ (условие применимости предыдущей конструкции),

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j - \xi_j^0|_p \leq p^l,$$

откуда $\tilde{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$.

Функция P_α локально постоянна в окрестности носителя $\tilde{\varphi}$. Отсюда следует включение $P_\alpha \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(Q_p^n)$. Таким образом, $A\varphi \in \mathcal{D}_C(Q_p^n)$. Непрерывность A вытекает из определения топологии в $\mathcal{D}_C(Q_p^n)$, индуцированной из $\mathcal{D}(Q_p^n)$. Предложение доказано.

Сопряженный оператор $A': \mathcal{D}'_C(Q_p^n) \rightarrow \mathcal{D}'_C(Q_p^n)$ является расширением оператора A . Заметим, что преобразование Фурье не определено на $\mathcal{D}'_C(Q_p^n)$, так как оно не сохраняет $\mathcal{D}_C(Q_p^n)$.

Свертка основных функций и обращение $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ корректно определены в $\mathcal{D}_C(Q_p^n)$. Стандартным образом определяется свертка обобщенной функции с основной. Ниже фундаментальное решение будет пониматься как решение $E \in \mathcal{D}'_C(Q_p^n)$ уравнения $A'E = \delta$. Если E – фундаментальное решение, $f \in \mathcal{D}_C(Q_p^n)$ – основная функция, то функция $z = E * f$, рассматриваемая как обобщенная функция из $\mathcal{D}'_C(Q_p^n)$, удовлетворяет уравнению $A'z = f$.

Для построения фундаментального решения $E \in \mathcal{D}'_C(Q_p^n)$ достаточно рассмотреть функцию

$$P_{-\alpha}(\xi_1, \dots, \xi_n) = |h(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p^{-\alpha}$$

как обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(Q_p^n \setminus C)$ и положить

$$E = FP_{-\alpha}, \quad (3.2)$$

где преобразование Фурье, действующее как изоморфизм из $\mathcal{D}_C(Q_p^n)$ на $\mathcal{D}(Q_p^n \setminus C)$, продолжено до действия $\mathcal{D}'(Q_p^n \setminus C) \rightarrow \mathcal{D}'_C(Q_p^n)$ (отметим, что функции h и P_λ четные, так что здесь можно не различать прямые и обратные преобразования).

Известно [27], [28], что функция P_λ , $\lambda \in (0, \infty)$, со значениями в $\mathcal{D}'(Q_p^n)$ допускает аналитическое продолжение до мероморфной функции, определенной на всей комплексной плоскости, с простыми полюсами в точках $-1 + \frac{2k\pi i}{\log p}$, $-\frac{n}{2} + \frac{k\pi i}{\log p}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Из сказанного вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq n/2$. Тогда фундаментальное решение (3.2) допускает продолжение до обобщенной функции из $\mathcal{D}'(Q_p^n)$.

Список литературы

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленев Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
2. Khrennikov A. Yu. p -adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer, 1994.
3. Ruelle P., Thiran E., Versteegen D., Weyers J. Quantum mechanics on p -adic fields // J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 12. P. 2854–2874.
4. Владимиров В. С. Обобщенные функции над полем p -адических чисел // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 17–53.
5. Haran S. Quantization and symbolic calculus over the p -adic numbers // Ann. Inst. Fourier. 1993. V. 43. № 4. P. 997–1053.
6. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
7. Серр Ж.-П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
8. Кочубей А. Н. О p -адических функциях Грина // ТМФ. 1993. Т. 96. № 1. С. 123–139.
9. Vladimirov V. S., Volovich I. V. p -adic quantum mechanics // Comm. Math. Phys. 1989. V. 123. № 4. P. 659–676.
10. Хренников А. Ю. Фундаментальные решения над полем p -адических чисел // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 3. С. 248–266.
11. Kochubei A. N. A Schrödinger type equation over the field of p -adic numbers // J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 8. P. 3420–3428.

12. Кочубей А. Н. Параболические уравнения над полем p -адических чисел // Изв. АН СССР. 1991. Т. 55. № 6. С. 1312–1330.
13. Алгебраическая теория чисел / Ред. Дж. Касселс и А. Фрелих. М.: Мир, 1969.
14. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.
15. Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.
16. Sally P. J., Taibleson M. H. Special functions on locally compact fields // Acta Math. 1966. V. 116. № 3–4. P. 279–309.
17. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
18. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
19. Saloff-Coste L. Opérateurs pseudo-différentiels sur certains groupes totalement discontinus // Studia Math. 1986. V. 83. № 3. P. 205–228.
20. Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.
21. Narkiewicz W. Elementary and analytic theory of algebraic numbers. Warszawa: PWN, 1974.
22. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988.
23. Taibleson M. H. The existence of natural field structures for finite dimensional vector spaces over local fields // Pacif. J. Math. 1976. V. 63. № 2. P. 545–551.
24. Lempel A., Weinberger M. J. Self-complementary normal bases in finite fields // SIAM J. Discr. Math. 1988. V. 1. P. 193–198.
25. Davenport H. Bases for finite fields // J. London Math. Soc. 1968. V. 43. № 1. P. 21–39.
26. Lempel A. Characterization and synthesis of self-complementary normal bases in finite fields // Linear Algebra Appl. 1988. V. 98. P. 331–346.
27. Ono T. Gauss transform and zeta-functions // Ann. Math. 1970. V. 91. № 2. P. 332–361.
28. Граев М. И., Прохорова Р. И. Однородные обобщенные функции в векторном пространстве над локальным неархимедовым полем, связанные с квадратичной формой // Функци. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 3. С. 70–71.

Институт математики
Национальной академии наук Украины

Поступило в редакцию
25.IV.1997