Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Козко, Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 6, 125–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/im223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:46:44

УДК 517.518.86

А. И. Козко

Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой

В работе рассматриваются неравенства Бернштейна–Джексона–Никольского для дробных производных в случае несимметричной нормы. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, \infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\sup_{\substack{t_n \in \tau_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|D^\alpha t_n\|_{q_1, q_2}}{\|t_n\|_{p_1, p_2}} \asymp I_\alpha n^{\alpha + \psi_1(p_1, p_2, q_1, q_2)} + n^{\alpha + \psi_2(p_1, p_2, q_1, q_2)},$$

где

$$I_\alpha = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1, \\ 1, & \alpha \geq 1, \end{cases}$$

а функции ψ_1, ψ_2 найдены в явном виде. Асимптотика понимается как асимптотика по n при фиксированных $\alpha, p_1, p_2, q_1, q_2$.

Библиография: 30 наименований.

1. Введение. Пусть $n \in \mathbb{N}$ – натуральное число, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ – тор. Множество всех тригонометрических полиномов

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

будем обозначать $\mathcal{T}_n$, а множество всех тригонометрических полиномов с нулевым средним (т.е. $a_0 = 0$) будем обозначать $\mathcal{T}_n^0$. Рассмотрим пространства $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < \infty$, с нормой (в случае $0 < p < 1$ это квазинорма)

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty(\mathbb{T})$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|,$$

$L_0(\mathbb{T})$ с нормой

$$\|f\|_0 = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |f(t)| dt \right\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00378) и РФФИ по поддержке ведущих научных школ (96-15-96073).

Последнее определение оправдано тем, что если функция $f(t)$ ограничена на $\mathbb{T}$ и $\ln |f(\cdot)| \in L_1(\mathbb{T})$, то при $p \rightarrow 0$ (см., например, [15, п. 6.7]) $\|f(\cdot)\|_p \rightarrow \|f(\cdot)\|_0$. Мы будем писать $f \asymp g$, если существуют две положительные константы $C_1, C_2 > 0$, не зависящие от n , и существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $C_1|f(n)| \leq |g(n)| \leq C_2|f(n)|$ справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Для тригонометрического полинома

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

рассмотрим оператор дробного дифференцирования D^α :

$$D^\alpha t_n(x) = \sum_{k=1}^n k^\alpha \left\{ a_k \cos \left(kx + \frac{\alpha\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right\}, \quad (1.1)$$

D^α – дробная производная по Вейлю (см. [1]). Заметим, что в случае натурального α имеем $D^\alpha t_n(x) = t_n^{(\alpha)}(x)$, т.е. $D^\alpha t_n$ – обычная производная порядка α .

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Введем обозначения

$$C_n(\alpha, p, q) = \sup_{\substack{t_n \in \mathcal{T}_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|D^\alpha t_n\|_q}{\|t_n\|_p}. \quad (1.2)$$

Многими авторами изучалось поведение константы $C_n(\alpha, p, q)$; отметим некоторые из них. Первым был результат С. Н. Бернштейна [2]: $C_n(1, \infty, \infty) \leq 2n$, затем с уточнениями Ландау и Рисса (см. [3, т. 2, гл. 10]) было получено

$$C_n(1, p, p) = n, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (1.3)$$

В. В. Арестов (см. [4], [5], [17]) с помощью комплексных переменных распространил оценку (1.3) на $0 \leq p \leq \infty$. Джексон (см. [6]) получил

$$C_n(0, p, \infty) \asymp n^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (1.4)$$

Независимо от Джексона С. М. Никольский (см. [7]) получил

$$C_n(0, p, q) \asymp n^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty. \quad (1.5)$$

Также величина (1.2) изучалась и для дробных производных: Сайвин (см. [8]) установил

$$C_n(\alpha, \infty, \infty) \leq C_\alpha n^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.6)$$

где $C_\alpha = \frac{7}{\alpha} + O(\alpha)$, $\alpha \rightarrow 0$. Огивецкий (см. [9]) перенес этот результат на пространства $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, показав, что

$$C_n(\alpha, p, p) \leq C_\alpha n^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (1.7)$$

где константа C_α та же, что и в (1.6). Заметим, что оценку (1.7) можно было бы тривиально получить из (1.6) с помощью метода Стейна (см. [27] или [4]). Неравенства (1.6) и (1.7) становятся грубыми при $\alpha \rightarrow 0$, так как $C_\alpha \rightarrow \infty$. С.П. Гейсберг (см. [10], [11]) с помощью интегрального представления

$$D^\alpha t_n(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1) \sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{t_n(x) - t_n(x-\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где Γ – гамма-функция, установил, что

$$1 \leq C_n(\alpha, p, p) \leq 2, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (1.8)$$

Положим $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$. Пусть $\|f\|_{p,q} = \|f^+\|_p + \|f^-\|_q$, где $p, q \in (0, \infty]$. Будем писать $f \in L_{p,q}$, если $f^+ \in L_p(\mathbb{T})$ и $f^- \in L_q(\mathbb{T})$. Неотрицательный функционал $\|\cdot\|_{p,q}: L_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\|f\|_{p,q} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ п.в., $0 < p, q \leq \infty$;
- 2) $\|\alpha f\|_{p,q} = \alpha \|f\|_{p,q}$, $f \in L_{p,q}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < p, q \leq \infty$;
- 3) $\|f+g\|_{p,q} \leq \|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}$, $f, g \in L_{p,q}$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

Мы будем называть этот функционал *несимметричной нормой*. Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\sup_{\substack{t_n \in \mathcal{T}_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|D^\alpha t_n\|_{q_1, q_2}}{\|t_n\|_{p_1, p_2}} \asymp I_\alpha n^{\alpha + \psi_1(p_1, p_2, q_1, q_2)} + n^{\alpha + \psi_2(p_1, p_2, q_1, q_2)}, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(p_1, p_2, q_1, q_2) &= \max_{1 \leq i, j \leq 2} \left\{ \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_j} \right)_+ \right\}, \\ \psi_2(p_1, p_2, q_1, q_2) &= \max \left\{ \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)_+ \max \left(1, \frac{2+1/p_2}{2+1/p_1} \right), \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right)_+ \max \left(1, \frac{2+1/p_1}{2+1/p_2} \right) \right\}, \\ I_\alpha &= \begin{cases} \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1, \\ 1, & \alpha \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Асимптотика в (1.9) понимается как асимптотика по n при фиксированных $\alpha, p_1, p_2, q_1, q_2$.

Заметим, что в случае $\alpha = 0$ мы получаем уже известный результат (см. [12]–[14])

$$\sup_{\substack{t_n \in \mathcal{T}_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|D^0 t_n\|_{q_1, q_2}}{\|t_n\|_{p_1, p_2}} \asymp n^{\psi_2(p_1, p_2, q_1, q_2)},$$

так как в этом случае $I_\alpha = 0$. Нетрудно заметить, что $\psi_1(p_1, p_2, q_1, q_2) \geq \psi_2(p_1, p_2, q_1, q_2)$ для любых $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $\alpha > 0$, т.е. достаточно показать, что

$$\sup_{\substack{t_n \in \mathcal{T}_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|D^\alpha t_n\|_{q_1, q_2}}{\|t_n\|_{p_1, p_2}} \asymp I_\alpha n^{\alpha + \psi_1(p_1, p_2, q_1, q_2)}, \quad \alpha > 0, \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty].$$

В качестве следствия из теоремы мы можем получить (см. также [30])

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in [1, +\infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\sup_{\substack{t_n \in \mathcal{T}_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|D^\alpha t_n\|_q}{\|t_n\|_p} \asymp n^{\alpha + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+}.$$

Для оценок снизу в (1.9) будут рассмотрены полиномы Фейера

$$F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx, \quad (1.11)$$

свойства которых будут исследованы в применении операции дробного дифференцирования.

В п. 2 устанавливаются оценки сверху для теоремы, и, наконец, в п. 3 мы приведем полиномы для теоремы, на которых достигается оценка снизу. Тем самым будет установлена справедливость теоремы.

2. Оценки сверху в теореме. Так как в случае $\alpha = 0$ оценки (1.9) уже известны (см. [12]–[14]), то мы будем рассматривать только случай $\alpha > 0$. Положим $p = \min\{p_1, p_2\}$, $q = \max\{q_1, q_2\}$, с помощью неравенства Гёльдера и Бернштейна (формула (1.8)) мы получаем

$$\begin{aligned} \|D^\alpha t_n\|_{q_1, q_2} &\leq C_1 \|D^\alpha t_n\|_{q, q} \leq C_2 \|D^\alpha t_n\|_q \\ &\leq 2C_2 n^{\alpha + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+} \|t_n\|_p \leq C_3 n^{\alpha + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+} \|t_n\|_{p, p} \\ &\leq C_4 n^{\alpha + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+} \|t_n\|_{p_1, p_2}, \quad 1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty, \end{aligned}$$

что и доказывает оценку сверху в (1.9).

3. Оценки снизу в теореме. Оценки снизу в теореме будут получены на полиномах Фейера (1.11). Отметим, что работы [18]–[24] и др. показывают, что многие вопросы теории гармонического анализа и теории приближений функций как одной, так и многих переменных тесно связаны с оценками норм в различных метриках ядер, подобных ядру Джексона.

Во многих этих работах оценки ядер получаются с помощью теоремы Литтлвуда–Пэли (см. [25, с. 65]), которая дает оценки лишь в норме $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$. Приведенный в данной статье метод позволяет получать оценки норм ядер типа Джексона в нормах $L_{p_1, p_2}(\mathbb{T})$, $1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty$ (в частности, в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$). Этот метод состоит в следующем: мы сначала устанавливаем оценки положительной и отрицательной составляющих в $L_\infty(\mathbb{T})$, а затем с помощью теорем сравнения и оценок сверху (1.9) мы получаем оценки норм ядер в $L_{p_1, p_2}(\mathbb{T})$, $1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty$. Заметим, что хоть данные оценки получены в одномерном случае, они без труда переносятся на случай многих переменных (см. [14]). Наибольшая трудность связана с тем, что требуется оценивать отдельно как положительную, так и отрицательную составляющие.

Нам часто далее будут встречаться следующие хорошо известные соотношения (см., например, [26, 2.635.1–2, с. 198]):

$$\begin{aligned} & \int (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \\ &= \frac{\sin((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2})}{(2-\alpha)\pi} (1-x) - \frac{\cos((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2})}{((2-\alpha)\pi)^2} + C, \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$I(\alpha) = \int_0^1 (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx = -\frac{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}{(2-\alpha)\pi}. \quad (3.1b)$$

Установим следующий факт:

ЛЕММА 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, F_n – ядро Фейера (1.11), $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда справедливо

$$\|(D^\alpha F_n)^+\|_\infty \asymp (n+1)^{\alpha+1}. \quad (3.2)$$

Для доказательства леммы 1 нам потребуется следующий вспомогательный факт.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $f_\alpha(x) = x^\alpha(1-x)$. Тогда

- a) $\max_{x \in [0,1]} f_\alpha(x) = f_\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$;
- b) $f_\alpha(x)$ возрастает на $\left[0, \frac{\alpha}{\alpha+1}\right]$;
- c) $f_\alpha(x)$ убывает на $\left[\frac{\alpha}{\alpha+1}, 1\right]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $f'_\alpha(x) = (\alpha - (\alpha+1)x)x^{\alpha-1} = (\alpha+1)x^{\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - x\right)$ сразу следуют все утверждения леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Из (1.8) сразу следует оценка сверху; действительно,

$$\|(D^\alpha F_n)^+\|_\infty \leq \|D^\alpha F_n\|_\infty \leq 2n^\alpha \|F_n\|_\infty = n^{\alpha+1} + n^\alpha.$$

Поэтому достаточно доказать оценку снизу. Рассмотрим четыре случая (в зависимости от того, в какую четверть попадет угол $\frac{\alpha\pi}{2}$):

- 1) $4m \leq \alpha \leq 4m+1$, $m \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) $4m+1 \leq \alpha \leq 4m+2$, $m \in \mathbb{Z}_+$;
- 3) $4m+2 \leq \alpha \leq 4m+3$, $m \in \mathbb{Z}_+$;
- 4) $4m+3 \leq \alpha \leq 4m+4$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

1) В этом случае $\frac{\alpha\pi}{2}$ по модулю 2π находится в первой четверти. Для точки $x_\alpha = \frac{4m-(\alpha+1)}{2(n+1)}\pi$ мы имеем

$$-\frac{\pi}{2} \leq kx_\alpha + 2\pi\left\{\frac{\alpha}{4}\right\} \leq \frac{\pi}{2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Поэтому в сумме

$$D^\alpha F_n(x_\alpha) = \sum_{k=1}^n k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

все члены положительны и, следовательно,

$$D^\alpha F_n(x_\alpha) \geq \frac{1}{2} \sum_{k \geq [n/2]}^{[3n/4]} k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) > \frac{1}{10} \sum_{k \geq [n/2]}^{[3n/4]} k^\alpha.$$

Поскольку в случае $\alpha = 0$ последняя сумма больше либо равна $C_1 n$, а при $\alpha \neq 0$ функция x^α монотонна, то (см., например, [16, отдел 2, гл. 2, п. 4, з. 30])

$$\sum_{k \geq [n/2]}^{[3n/4]} k^\alpha \asymp \int_{[n/2]}^{[3n/4]} x^\alpha dx \asymp n^{\alpha+1}. \quad (3.3)$$

Таким образом, утверждение леммы в случае 1) доказано.

2) В этом случае $\frac{\alpha\pi}{2}$ по модулю 2π находится во второй четверти, поэтому нельзя добиться того, чтобы за счет выбора точки $x_\alpha \in \mathbb{T}$ все члены в сумме $D^\alpha F_n(x_\alpha)$ были бы положительны. Однако и в этом случае оценка (3.2) имеет место, но доказывается это более сложно. Мы разобьем нашу сумму на четыре суммы: первая будет давать $O(n^\alpha)$, вторая, третья и четвертая будут с положительными членами, причем третья будет иметь порядок $O(n^{\alpha+1})$.

Мы будем (как и в первом случае) оценивать нашу сумму в точке $x_\alpha = \frac{4m-(\alpha+1)}{2(n+1)}\pi$, т.е. мы покажем, что и во втором случае точка x_α — точка порядкового максимума. Заметим, что x_α выбрано так, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq kx_\alpha + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \leq 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Из условия $\pi - 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} = \frac{4m-(\alpha+1)}{2(n+1)}\pi k + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\}$ мы найдем k и определим k_1 как целую часть от k , т.е.

$$k_1 = \left\lfloor \frac{2(n+1)(1 - 4\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\})}{4m - (\alpha + 1)} \right\rfloor, \quad (3.4)$$

т.е. k_1 выбрано так, что $kx_\alpha + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \in [\pi - 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\}, 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\}]$, $k = \overline{1, k_1}$, где последнее множество симметрично относительно точки $\frac{\pi}{2}$.

Из условия $0 = \frac{4m-(\alpha+1)}{2(n+1)}\pi k + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\}$ мы найдем k и определим k_2 как целую часть от k , т.е. положим

$$k_2 = \left\lfloor \frac{4(n+1)\left\{ \frac{\alpha}{4} \right\}}{(\alpha + 1) - 4m} \right\rfloor. \quad (3.5)$$

Заметим, что k_2 — это то натуральное число, до которого члены $k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$ возрастают (см. лемму 2). Действительно, лемму 2 можно применять, и это немедленно следует из

$$\frac{k_2}{n+1} \leq \frac{4\left\{ \frac{\alpha}{4} \right\}}{\alpha + 1 - 4m} = \frac{\alpha - 4m}{\alpha + 1 - 4m} \leq \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

Таким образом, из $1 \leq l_1 < l_2 \leq k_2$ следует

$$l_1^\alpha \left(1 - \frac{l_1}{n+1}\right) \leq l_2^\alpha \left(1 - \frac{l_2}{n+1}\right).$$

Из условия $-\frac{\pi}{4} = \frac{4m-(\alpha+1)}{2(n+1)}\pi k + 2\pi\{\frac{\alpha}{4}\}$ мы найдем k и определим k_3 как целую часть от k , т.е. положим

$$k_3 = \left[\frac{2(n+1)(\frac{1}{4} + 2\{\frac{\alpha}{4}\})}{(\alpha+1) - 4m} \right], \quad (3.6)$$

таким образом, если $k_2 \leq k \leq k_3$, то $\cos(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}) \geq \frac{1}{2}$.

Теперь оценим $D^\alpha F_n(x_\alpha)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} D^\alpha F_n(x_\alpha) &= \sum_{k=1}^n k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{k_1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} + \sum_{k=k_2+1}^{k_3} + \sum_{k=k_3+1}^n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из выбора k_1 (см. (3.4)) видно, что все члены во второй, третьей и четвертой суммах положительны; таким образом,

$$\sum_{k=k_1+1}^{k_2} + \sum_{k=k_3+1}^n \geq 0, \quad (3.8)$$

и, учитывая выбор k_2 (3.5) и k_3 (3.6),

$$\sum_{k=k_2+1}^{k_3} k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=k_2+1}^{k_3} k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \asymp n^{\alpha+1}. \quad (3.9)$$

Последнее соотношение доказывается аналогично (3.3). Теперь оценим первую сумму в (3.7):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_1} k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) &\geq \sum_{[k_1/2]+1}^{k_1} \left\{ k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \right. \\ &\quad \times \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + (k_1 - k)^\alpha \left(1 - \frac{k_1 - k}{n+1}\right) \\ &\quad \left. \times \cos\left((k_1 - k)x_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\} - n^\alpha. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь мы вычли n^α потому, что при четных k_1 в (3.10) будет пропущен член $[k_1/2]^\alpha (1 - \frac{[k_1/2]}{n+1}) \cos([k_1/2]x_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2})$, который мы оценили как $\geq -n^\alpha$. Покажем, что

$$\cos\left((k_1 - k)x_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \geq -\cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) - \frac{6\pi}{n+1}. \quad (3.11)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \left| \cos\left((k_1 - k)x_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right| \\ &= 2 \left| \cos\left(\frac{k_1}{2}x_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1 - 2k)x_\alpha}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \cos\left(\frac{k_1}{2}x_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

Из определения k_1 (см. (3.4)) имеем

$$\frac{\pi}{2} + \frac{x_\alpha}{2} \leq \frac{k_1 x_\alpha}{2} + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{x_\alpha}{2},$$

и мы можем продолжить

$$\begin{aligned} & \left| \cos\left((k_1 - k)x_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right| \leq 2 \cos\left(\frac{x_\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \sin \frac{-x_\alpha}{2} \leq \frac{(\alpha + 1) - 4m}{n + 1} 2\pi \leq \frac{6\pi}{n + 1}, \end{aligned}$$

откуда и следует (3.11). Теперь продолжим выкладку (3.10):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k_1} k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ & \geq \sum_{k=[k_1/2]+1}^{k_1} \left\{ \left(k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) - (k_1 - k)^\alpha \left(1 - \frac{k_1 - k}{n+1}\right) \right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{6\pi}{n+1} (k_1 - k)^\alpha \left(1 - \frac{k_1 - k}{n+1}\right) \right\} - n^\alpha \\ & \geq -\frac{6\pi}{n+1} \sum_{k=[k_1/2]+1}^{k_1} (k_1 - k)^\alpha - n^\alpha \geq -C_1 n^\alpha. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь мы использовали выбор k_2 (см. комментарий к (3.5)), а также выбор k_1 (см. (3.4)):

$$\left(k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) - (k_1 - k)^\alpha \left(1 - \frac{k_1 - k}{n+1}\right) \right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \geq 0$$

для $k = [k_1/2] + 1, \dots, k_2$, а также использовали

$$\sum_{k=[k_1/2]+1}^{k_1} (k_1 - k)^\alpha = \sum_{k=1}^{k_1 - [k_1/2] - 1} k^\alpha \asymp n^{\alpha+1}.$$

Теперь, соединяя оценки (3.8), (3.9), (3.12), мы получаем, что во втором случае ($4m + 1 \leq \alpha \leq 4m + 2$, $m \in \mathbb{Z}_+$)

$$D^\alpha F_n(x_\alpha) \asymp n^{\alpha+1}, \quad x_\alpha = \frac{4m - (\alpha + 1)}{2(n + 1)}\pi,$$

т.е. мы показали, что в первом и во втором случаях x_α является точкой порядкового максимума.

3) Рассмотрим случай, когда $4m + 2 \leq \alpha \leq 4m + 3$, $m \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае (и еще в четвертом) точкой порядкового максимума будет точка $\tilde{x}_\alpha = \frac{\alpha-4m}{2(n+1)}\pi$. В третьем случае в точке $\tilde{x}_\alpha$ приводятся рассуждения, полностью аналогичные второму случаю. Угол $\frac{\alpha\pi}{2}$ лежит в третьей четверти, и легко видеть, что

$$2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \leq k\tilde{x}_\alpha + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \leq 2\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Выбрав

$$k_1 = \left[\frac{(3 - 4\{\frac{\alpha}{4}\})2(n+1)}{\alpha - 4m} \right], \quad k_2 = \left[\frac{(2 - 2\{\frac{\alpha}{4}\})2(n+1)}{\alpha - 4m} \right],$$

$$k_3 = \left[\frac{(2 + \frac{1}{4} - 2\{\frac{\alpha}{4}\})2(n+1)}{\alpha - 4m} \right].$$

Проведем аналогично случаю 2) все выкладки, в результате которых получим

$$D^\alpha F_n(\tilde{x}_\alpha) \asymp n^{\alpha+1}, \quad 4m + 2 \leq \alpha \leq 4m + 3, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

4) Рассмотрим последний случай, когда $4m + 3 \leq \alpha \leq 4m + 4$, $m \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае $\frac{\alpha\pi}{2}$ попадает в последнюю (четвертую) четверть, и мы имеем для $\tilde{x}_\alpha = \frac{\alpha-4m}{2(n+1)}\pi$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi \leq k\tilde{x}_\alpha + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi, \quad k = 1, \dots, n,$$

откуда все члены суммы $D^\alpha F_n(\tilde{x}_\alpha)$ положительны, и аналогично случаю 1) доказывается, что $D^\alpha F_n(\tilde{x}_\alpha) \asymp n^{\alpha+1}$. Лемма 1 доказана.

Введем следующую вспомогательную функцию для $\alpha \in [0, 1]$:

$$F(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx. \quad (3.13)$$

Нам понадобится вспомогательный результат о свойствах функции $F(\alpha)$.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha \in [0, 1]$. Тогда справедливо:

- 1) $F(0) = 0$;
- 2) $F(\alpha) < 0$, $\alpha \in (0, 1]$.

Заметим также, что

$$F(\alpha) = I(\alpha) + \alpha \int_0^1 (1-x) \ln x \cos 2\pi x dx + o(\alpha)$$

при $\alpha \rightarrow 0$ (напомним, что $I(\alpha)$ определена в (3.1b)), что говорит о поведении функции в окрестности нуля, но для наших целей достаточно первых двух свойств функции $F(\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы следует из (3.1b), так как $F(\alpha) = I(\alpha)$ при $\alpha = 0$. Таким образом, достаточно установить справедливость последнего пункта леммы. Рассмотрим два случая: $\alpha \in (0, \frac{1}{4}]$ и $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1]$. Пусть сначала $\alpha \in (0, \frac{1}{4}]$; тогда

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^1 (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \\ &\quad + \int_0^1 (x^\alpha - 1)(1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \\ &= I(\alpha) + \int_0^1 (x^\alpha - 1)(1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Положим $\alpha_1 = \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}$, $\alpha_4 = \frac{3-\alpha}{2(2-\alpha)}$. Учитывая, что $x^\alpha - 1 \leq 0$ при $x \in [0, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, имеем

$$\begin{aligned} \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) &\leq 0, \quad x \in [\alpha_1, \alpha_4], \\ \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) &\geq 0, \quad x \in [0, 1] \setminus [\alpha_1, \alpha_4]; \end{aligned}$$

продолжим:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &< I(\alpha) + \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} (x^\alpha - 1)(1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \\ &\leq I(\alpha) + (1 - \alpha_1^\alpha) \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} (-1)(1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Согласно (3.1a)

$$(-1) \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx = \frac{1 - \alpha_4}{(2-\alpha)\pi} + \frac{1 - \alpha_1}{(2-\alpha)\pi} = \frac{1}{(2-\alpha)\pi}.$$

Теперь мы имеем

$$F(\alpha) < \frac{(1 - \alpha_1^\alpha) - \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{(2-\alpha)\pi}. \quad (3.14)$$

Покажем, что при $\alpha \in (0, 1/4)$ оценка (3.14) обеспечит нам $F(\alpha) < 0$. Воспользуемся известным фактом, что e^{-x} при положительных x и $\sin x$ при любом вещественном x образуют обертывающие ряды (см. [16, т. 1, с. 47, отдел 1, гл. 4, п. 1, з. 141, 142]), т.е., в частности, справедливо

$$\begin{aligned} e^{-x} &\geq 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}, \quad x \geq 0, \\ \sin x &\geq \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Покажем, что $(1 - \alpha_1^\alpha) < \sin \frac{\alpha\pi}{2}$ для $\alpha \in (0, 1/4)$. Итак,

$$(1 - \alpha_1^\alpha) \leq \alpha \ln \frac{1}{\alpha_1} - \frac{(\alpha \ln \frac{1}{\alpha_1})^2}{2!} + \frac{(\alpha \ln \frac{1}{\alpha_1})^3}{3!},$$

$$\sin \frac{\alpha\pi}{2} \geq \frac{\alpha\pi}{2} - \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}.$$

Поскольку $(\frac{1}{\alpha_1})' = \left(\frac{2(2-\alpha)}{1-\alpha}\right)' = \frac{2}{(1-\alpha)^2}$, т.е. функция $\ln \frac{1}{\alpha_1}$ возрастающая, выбираем $\tilde{\alpha}$ из условия $\ln \frac{1}{\alpha_1} = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\frac{2(2-\alpha)}{1-\alpha} = e^{\pi/2}$, откуда $\tilde{\alpha} = \frac{e^{\pi/2}-4}{e^{\pi/2}-2} = 0.2883 \dots > \frac{1}{4}$. Для всех $0 < \alpha \leq \tilde{\alpha}$ имеем

$$(1 - \alpha_1^\alpha) \leq \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{(\alpha \ln \frac{1}{\alpha_1})^2}{2!} + \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!},$$

$$\sin \frac{\alpha\pi}{2} \geq \frac{\alpha\pi}{2} - \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}.$$

Покажем, что

$$\frac{\alpha\pi}{2} - \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} \geq \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{(\alpha \ln \frac{1}{\alpha_1})^2}{2!} + \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}, \quad \alpha \in (0, \tilde{\alpha}), \quad (3.15)$$

откуда будет следовать $F(\alpha) < 0$ для $\alpha \in (0, \frac{1}{4}]$. Так как $\ln \frac{1}{\alpha_1}$ возрастающая, то $\ln \frac{1}{\alpha_1} \geq \ln 4$, и, следовательно, при $\alpha \in (0, \tilde{\alpha})$

$$\frac{(\ln \frac{1}{\alpha_1})^2}{2} \frac{3 \cdot 2^3}{\pi^3} \geq \frac{(\ln 4)^2 \cdot 3 \cdot 4}{\pi^3} > \frac{12}{\pi^3} > \frac{12}{(3.2)^3} = \frac{12}{32.768} > \frac{12}{33} = \frac{4}{11} > \frac{4}{12} = \frac{1}{3} > \alpha.$$

Продолжим:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha\pi}{2} - \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} - \left(\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{(\alpha \ln \frac{1}{\alpha_1})^2}{2!} + \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}\right) \\ &= \frac{(\alpha \ln \frac{1}{\alpha_1})^2}{2!} - \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3} = \frac{\alpha^2 n^3}{2^3 \cdot 3} \left(\frac{\ln^2(1/\alpha_1)}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2^3}{\pi^3} - \alpha\right) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом (3.15) доказано, а следовательно, мы доказали, что из $\alpha \in (0, 1/4]$ следует $F(\alpha) < 0$.

Пусть теперь $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1]$; покажем, что и в этом случае $F(\alpha) < 0$. Положим

$$\alpha_1 = \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2-\alpha}, \quad \alpha_4 = \frac{3-\alpha}{2(2-\alpha)},$$

т.е. α_i выбрано так, что функция $\cos((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2})$ принимает в точках $x = \alpha_i$ соответственно значения $0, -1, -\cos \frac{\alpha\pi}{2}, 0$. Далее оценим интеграл

$$F(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx = \int_0^{\alpha_2} + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} + \int_{\alpha_3}^1. \quad (3.16)$$

Покажем, что каждый из этих трех интегралов не больше нуля, а второй интеграл строго меньше нуля. Действительно,

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} x^\alpha (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx < 0,$$

так как вся подынтегральная функция строго меньше нуля. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_2} x^\alpha (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx &= \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &\leq \alpha_1^\alpha \int_0^{\alpha_1} (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \\ &\quad + \alpha_1^\alpha \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \\ &= \alpha_1^\alpha \int_0^{\alpha_2} (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \stackrel{(3.1a)}{=} \alpha_1^\alpha \left[\frac{1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{(2-\alpha)^2\pi^2} - \frac{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}{(2-\alpha)\pi} \right] \\ &= \frac{\alpha_1^\alpha}{(2-\alpha)\pi} \left[\frac{1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{(2-\alpha)\pi} - \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Теперь для того, чтобы показать, что данный интеграл меньше нуля, достаточно доказать, что $\sin \frac{\alpha\pi}{2} > \frac{1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{(2-\alpha)\pi}$, $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1]$. Для этого рассмотрим функцию $u(x) = \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{(2-x)\pi}$ на отрезке $[\frac{1}{4}, 1]$. Покажем, что функция $u(x)$ возрастающая на этом отрезке. Действительно,

$$u'(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{(2-x)^2\pi} \geq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} = \frac{\pi^2 - 4}{4\pi} > 0, \quad x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right],$$

т.е. проверено, что $u(x)$ — возрастающая функция. С помощью дифференцирования также легко установить следующее элементарное неравенство: $\operatorname{tg} x \geq x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Поэтому для $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1]$ справедливо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{4} - \frac{1}{(2-\alpha)\pi} &\geq \frac{\alpha\pi}{4} - \frac{1}{(2-\alpha)\pi} = u(\alpha) \geq u\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{16} - \frac{4}{7\pi} = \frac{7\pi^2 - 64}{16 \cdot 7\pi} \\ &> \frac{7 \cdot (3.1)^2 - 64}{16 \cdot 7\pi} = \frac{3.27}{16 \cdot 7\pi} > 0. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{4} > \frac{1}{(2-\alpha)\pi}$ для $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1]$. Теперь, домножая обе части неравенства на $2 \cos^2 \frac{\alpha\pi}{4}$, получаем

$$2 \sin \frac{\alpha\pi}{4} \cos \frac{\alpha\pi}{4} > \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha\pi}{4}}{(2-\alpha)\pi}, \quad \alpha \in \left[\frac{1}{4}, 1\right],$$

откуда и следует, что $\sin \frac{\alpha\pi}{2} > \frac{1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{(2-\alpha)\pi}$, $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1]$. Таким образом, мы установили, что и первый интеграл в (3.16) меньше нуля.

Рассмотрим последний интеграл из (3.16). Из леммы 2 следует, что функция $x^\alpha(1-x)$ убывает на $[\frac{\alpha}{\alpha+1}, 1]$. Покажем, что $\alpha_3 > \frac{\alpha}{\alpha+1}$. Действительно, $\frac{1}{2-\alpha} -$

$\frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{(2-\alpha)(1+\alpha)} > 0$ для $\alpha \in (0, 2)$, так как $\alpha^2 - \alpha + 1$ всегда больше нуля (дискриминант есть отрицательное число). Таким образом, на отрезке $x \in [\alpha_3, 1]$ функция $x^\alpha(1-x)$ убывает, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_3}^1 x^\alpha(1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx &= \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} + \int_{\alpha_4}^1 \\ &\leq \alpha_4^\alpha(1-\alpha_4) \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \\ &\quad + \alpha_4^\alpha(1-\alpha_4) \int_{\alpha_4}^1 \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx \\ &= \alpha_4^\alpha(1-\alpha_4) \int_{\alpha_3}^1 \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) &\leq 0, \quad x \in [\alpha_3, \alpha_4], \\ \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) &\geq 0, \quad x \in [\alpha_4, 1]. \end{aligned}$$

Поясним последнее равенство. Если положить

$$h_\alpha(x) = \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad g_\alpha(x) = h_\alpha(x + \alpha_4),$$

то, учитывая, что α_4 – середина отрезка $[\alpha_3, 1]$, и то, что $h_\alpha(\alpha_4) = 0$, $h_\alpha(\alpha_4 + x) = -h_\alpha(\alpha_4 - x)$, т.е. $g_\alpha(0) = 0$, $g_\alpha(x)$ – нечетная функция, получаем

$$\int_{\alpha_3}^1 h_\alpha(x) dx = \int_{-(1-\alpha_4)}^{1-\alpha_4} g_\alpha(x) dx = 0,$$

так как интеграл по симметричному отрезку от нечетной функции равен нулю.

Итак, мы доказали, что и в случае $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1]$ имеем $F(\alpha) < 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, F_n – ядро Фейёра (см. (1.11)). Тогда:

$$1) \quad \|(D^0 F_n)^-\|_\infty = \frac{1}{2} \asymp n^0; \quad (3.17)$$

$$2) \quad \|(D^\alpha F_n)^-\|_\infty = n^{\alpha+1}, \quad \alpha > 0. \quad (3.18)$$

Напомним, что асимптотика понимается по n при фиксированном α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (3.17) общеизвестна (см., например, [28, с. 41]). Рассмотрим случай $\alpha > 0$. Оценка сверху сразу следует из (1.8), так как

$$\|(D^\alpha F_n)^-\|_\infty \leq \|D^\alpha F_n\|_\infty \leq 2n^\alpha \|F_n\|_\infty = n^{\alpha+1} + n^\alpha.$$

Поэтому достаточно доказать оценку снизу. Случай $\alpha > 0$ разобьем на несколько подслучаев:

- 1) $0 < \alpha \leq 1$;
- 2) $4m \leq \alpha \leq 4m + 2$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq \alpha \leq 2$;
- 3) $4m - 2 \leq \alpha \leq 4m$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\alpha \in (0, 1]$. Тогда (см. [16, т. 1, с. 59, отдел 2, гл. 1, п. 2, з. 9]), если $f(x)$ – функция с ограниченным изменением в интервале $[0, 1]$, имеем

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\text{Var}_{[0,1]} f}{n}.$$

Используя последнее неравенство, мы можем написать

$$\begin{aligned} D^\alpha F_n\left(\frac{2-\alpha}{n+1}\pi\right) &= \sum_{k=1}^n k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos\left(\frac{(2-\alpha)\pi x}{n+1} + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ &= (n+1)^{\alpha+1} \int_0^1 x^\alpha (1-x) \cos\left((2-\alpha)\pi x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx + O(n^\alpha) \\ &= (n+1)^{\alpha+1} F(\alpha) + O(n^\alpha). \end{aligned}$$

И поскольку из леммы 3 следует, что $F(\alpha) < 0$ при $\alpha > 0$, то отсюда немедленно следует оценка (3.18) в случае $\alpha \in (0, 1]$.

Заметим, что в случаях 2) и 3) оценки снизу получаются с использованием аналогичных рассуждений таких, как и в лемме 1, и с использованием леммы 2.

Рассмотрим случай 2). Покажем, что точка $x_\alpha = \frac{4m+3-\alpha}{2(n+1)}\pi$ является точкой порядкового минимума. Случай 2) разобьем, как и в лемме 1, на еще два:

- а) $4m \leq \alpha \leq 4m + 1$, $m \in \mathbb{N}$;
- б) $4m + 1 \leq \alpha \leq 4m + 2$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

В случае б) оценки тривиальны, так как все слагаемые суммы $D^\alpha F_n(x_\alpha)$ отрицательны. Действительно, при $k = \overline{1, n}$

$$\frac{\pi}{2} \leq kx_\alpha + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \leq \frac{3\pi}{2},$$

и потому доказательство проводится аналогично случаю 1) из леммы 1.

В случае а) мы имеем для $k = \overline{1, n}$

$$2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \leq kx_\alpha + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} \leq \frac{3\pi}{2}$$

и $\frac{\alpha\pi}{2}$ попадает в первую четверть. Из условия $\pi - 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\} = \frac{4m+3-\alpha}{2(n+1)}\pi k + 2\pi \left\{ \frac{\alpha}{4} \right\}$ мы найдем k и определим k_1 как целую часть от k , т.е.

$$k_1 = \left\lfloor \frac{2(n+1)(1 - 4\left\{ \frac{\alpha}{4} \right\})}{4m + 3 - \alpha} \right\rfloor. \quad (3.19)$$

Таким образом, k_1 выбрано так, что $kx_\alpha + 2\pi\left\{\frac{\alpha}{4}\right\} \in [2\pi\left\{\frac{\alpha}{4}\right\}, \pi - 2\pi\left\{\frac{\alpha}{4}\right\}]$ для всех $k = 1, \dots, k_1$. Из условия $\pi = \frac{4m+3-\alpha}{2(n+1)}\pi k + 2\pi\left\{\frac{\alpha}{4}\right\}$ мы найдем k и определим k_2 как целую часть от k , т.е.

$$k_2 = \left\lfloor \frac{2(n+1)(1 - 2\left\{\frac{\alpha}{4}\right\})}{4m+3-\alpha} \right\rfloor. \quad (3.20)$$

И наконец, из условия $\frac{5\pi}{4} = \frac{4m+3-\alpha}{2(n+1)}\pi k + \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \bmod 2\pi$ мы найдем k и определим k_3 как целую часть от k , т.е.

$$k_3 = \left\lfloor \frac{2(n+1)(\frac{5}{4} - 2\left\{\frac{\alpha}{4}\right\})}{4m+3-\alpha} \right\rfloor. \quad (3.21)$$

Таким образом, в случае $k_2 \leq k \leq k_3$ мы имеем $-\cos(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}) \geq \frac{1}{2}$. Теперь разбиваем сумму $-D^\alpha F(x_\alpha)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} -D^\alpha F(x_\alpha) &= -\sum_{k=1}^n k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ &= \left(-\sum_{k=1}^{k_1}\right) + \left(-\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\right) + \left(-\sum_{k=k_2+1}^{k_3}\right) + \left(-\sum_{k=k_3+1}^n\right). \end{aligned}$$

Из выбора k_i , $i = \overline{1, 3}$, видно, что вторая, третья и четвертая суммы положительны, так как все члены больше нуля, причем третья сумма дает нужный порядок, т.е. справедливо (см. (3.21))

$$\begin{aligned} &\sum_{k=k_2+1}^{k_3} k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \left(-\cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=k_2+1}^{k_3} k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \asymp (n+1)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

И аналогично (3.10)–(3.12) показывается, что

$$-\sum_{k=1}^{k_1} k^\alpha \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos\left(kx_\alpha + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \geq -C_1 n^\alpha,$$

откуда, учитывая предыдущие соотношения, окончательно получаем

$$-D^\alpha F_n(x_\alpha) \asymp (n+1)^{\alpha+1}.$$

Случай 2) полностью разобран.

Рассмотрим случай 3); разобьем его тоже на два:

- а) $4m - 2 \leq \alpha \leq 4m - 1$, $m \in \mathbb{N}$;
- б) $4m - 1 \leq \alpha \leq 4m$, $m \in \mathbb{N}$.

Покажем, что в этом случае порядковый минимум достигается в точке $\tilde{x}_\alpha = \frac{4m-3-\alpha}{2(n+1)}\pi$. В случае а) точка $\frac{\alpha\pi}{2}$ попадает в третью четверть и все члены суммы $D^\alpha F_n(\tilde{x}_\alpha)$ отрицательны, так как

$$\frac{\pi}{2} \leq k\tilde{x}_\alpha + 2\pi\left\{\frac{\alpha}{4}\right\} \leq \frac{3\pi}{2}, \quad k = \overline{1, n},$$

и опять тривиальная выкладка (аналогичная выкладке из случая 1) леммы 1) приводит к нужной оценке.

Случай б) аналогичен случаю 2), а). В этом случае точка $\frac{\alpha\pi}{2}$ находится в четвертой четверти и легко видеть, что справедливо

$$\frac{\pi}{2} \leq k\tilde{x}_\alpha + 2\pi\left\{\frac{\alpha}{4}\right\} \leq 2\pi\left\{\frac{\alpha}{4}\right\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Выбрав

$$k_1 = \left\lfloor \frac{2(n+1)(3-4\{\frac{\alpha}{4}\})}{4m-3-\alpha} \right\rfloor, \quad k_2 = \left\lfloor \frac{2(n+1)(1-2\{\frac{\alpha}{4}\})}{4m-3-\alpha} \right\rfloor,$$

$$k_3 = \left\lfloor \frac{2(n+1)(\frac{3}{4}-2\{\frac{\alpha}{4}\})}{4m-3-\alpha} \right\rfloor,$$

проведем выкладки, полностью аналогичные случаю 2), а), в результате которых получаем

$$-D^\alpha F_n(\tilde{x}_\alpha) \asymp (n+1)^\alpha, \quad 4m-1 \leq \alpha \leq 4m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма доказана.

С помощью теорем сравнения (см. [29, с. 22] или [12, лемма 2] легко показать, что справедлива

ЛЕММА 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in \mathcal{T}_n$, $p \in [1, +\infty]$ и $\|t_n^+\|_\infty \asymp \|t_n^-\|_\infty$. Тогда справедливы неравенства

$$\|t_n^+\|_\infty \leq C_1(p) \cdot n^{\frac{1}{p}} \|t_n^+\|_p, \quad \|t_n^-\|_\infty \leq C_2(p) \cdot n^{\frac{1}{p}} \|t_n^-\|_p.$$

ЛЕММА 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, F_n – ядро Фейера (1.11), $p \in [1, +\infty]$. Тогда справедливы соотношения

$$\|(D^\alpha F_n)^+\|_p \asymp n^{\alpha+1-\frac{1}{p}}, \quad (3.22)$$

$$\|(D^\alpha F_n)^-\|_p \asymp n^{\alpha+1-\frac{1}{p}}. \quad (3.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки снизу немедленно следуют из лемм 1, 4 и 5 с учетом того, что $D^\alpha F_n \in \mathcal{T}_n$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Действительно, проверим, например, для $(D^\alpha F_n)^+$:

$$(n+1)^{\alpha+1} \asymp \|(D^\alpha F_n)^+\|_\infty \leq C_1(p) \cdot n^{\frac{1}{p}} \|(D^\alpha F_n)^+\|_p, \quad 1 \leq p \leq +\infty,$$

откуда и следуют оценки снизу в (3.22). Аналогично устанавливается оценка снизу в (3.23). Покажем справедливость оценок сверху с помощью (1.8) и известной оценки для ядра Фейера (см. [13, с. 182]):

$$\|F_n\|_p \asymp \begin{cases} n^{1-\frac{1}{p}}, & \frac{1}{2} < p \leq \infty, \\ \frac{\ln^2 n}{n}, & p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{n}, & 0 < p < \frac{1}{2}; \end{cases}$$

мы можем выписать для $p \in [1, +\infty]$

$$\max \left\{ \|(D^\alpha F_n)^-\|_p, \|(D^\alpha F_n)^+\|_p \right\} \leq \|D^\alpha F_n\|_p \leq 2n^\alpha \|F_n\|_p \asymp n^{\alpha+1-\frac{1}{p}},$$

откуда и следует справедливость оценок (3.22), (3.23). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из пунктов 2, 3 немедленно следует справедливость теоремы.

В заключение автор выражает благодарность Д. В. Малыхину, А. О. Ремизову и А. В. Тихонову за помощь при подготовке работы и С. В. Конягину, Н. Н. Пустовойтову, И. Г. Царькову за полезные замечания и советы.

Список литературы

1. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff der differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. V. 62. P. 296–302.
2. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Наука, 1965.
4. Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 3–22.
5. De Vore R., Lorentz G. Constructive approximation // A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. 1993. V. 303.
6. Jackson D. Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39. P. 889–906.
7. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
8. Civin P. Inequalities for trigonometric polynomials // Duke Math. 1941. № 8. P. 656–665.
9. Ogiewetzki I. I. Generalization of the inequality of Civin // Acta Math. Acad. Sci. hung. 1958. № 9. P. 133–135.
10. Гейсберг С. П. Аналоги неравенств С. Н. Бернштейна для дробной производной // Вопросы матем. и геом. моделир. Доклад на 25 науч. конфер. Ленингр. инженерно-строит. ин-та. 1967. С. 5–10.
11. Гейсберг С. П. Дробные производные ограниченных на оси функций // Изв. Вузов. Математика. 1968. Т. 78. № 11.
12. Козко А. И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 5. С. 687–699.

13. *Kozko A.I.* On Jackson–Nikolskii inequalities for trigonometric polynomials of degree n in spaces with assymetrial norms // East J. on Approximation. 1996. V. 2. № 2. P. 177–186.
14. *Козко А. И.* Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой // Матем. сб. 1998. Т. 189. №9. С. 85–106.
15. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж., Поллиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
16. *Поллиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.
17. *Арестов В. В.* О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // ДАН СССР. 1979. Т. 246. №6. С. 1289–1292.
18. *Бугров Я. С.* Конструктивная характеристика классов функций с доминирующей смешанной производной // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1974. СXXXI. С. 25–32.
19. *Никольская Н. С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // ДАН СССР. 1973. Т. 208. №6. С. 1282–1285.
20. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1986. Т. 178.
21. *Юдин А. А., Юдин В. А.* Дискретные теоремы вложения и константы Лебега // Матем. заметки. 1977. Т. 22. №3. С. 381–394.
22. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α -ядра Дирихле в смешанной норме // Матем. сб. 1982. Т. 117 (159). С. 32–43.
23. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки наименьших по выбору N гармоник норм производных ядер Дирихле и Фавара // Матем. сб. 1991. Т. 182. №4. С. 593–604.
24. *Майоров В. Е.* Неравенства Бернштейна–Никольского и оценки норм ядер Дирихле для тригонометрических полиномов по произвольным гармоникам // Матем. заметки. 1990. Т. 47. №7. С. 55–61.
25. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
26. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
27. *Stein E. M.* Functions of exponential type // Ann. Math. (2) 1957. V. 65. P. 582–592.
28. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 3. М.: Высшая школа, 1989.
29. *Стечкин С. Б.* Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. 1948. Т. 60. №9. С. 1511–1514.
30. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 14. М.: ВИНТИ, 1987.

Поступило в редакцию
17.VII.1997