Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Трофимов, Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. I, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 6, 159–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:23:08

УДК 512.542+512.544.42

В. И. Трофимов

Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. I

Статья является первой частью работы, в которой завершается описание конечных стабилизаторов вершин связных графов с проективными подорбитами, и, как следствие, – стабилизаторов вершин связных конечных графов в транзитивных на 2-дугах группах автоморфизмов. В этой части завершается рассмотрение случая транзитивного на 3-дугах действия группы.

Библиография: 19 наименований.

Введение

В [1] анонсирован положительный ответ на вопрос об ограниченности порядков стабилизаторов вершин конечных связных графов с проективными подорбитами произвольной фиксированной размерности (над заданным полем). В настоящей работе завершается начатое в [2], [3] доказательство этого результата. Более того, фактически будет получено описание указанных стабилизаторов. Тем самым по существу будет завершено описание стабилизаторов вершин связных конечных графов в транзитивных на 2-дугах группах их автоморфизмов. Об этом и других возможных приложениях и обобщениях полученных результатов см. далее в настоящем введении.

Работа состоит из четырех частей (ч. I–ч. IV). Настоящая статья является ее первой частью.

Используемая в работе терминология совпадает с терминологией работы [3]. Поднеориентированным графом всюду далее понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер. Для неориентированного графа Γ через $V(\Gamma)$, $E(\Gamma)$, $\text{Aut } \Gamma$ обозначаются соответственно его множество вершин, множество ребер и группа автоморфизмов. Для $x \in V(\Gamma)$ и $G \leq \text{Aut } \Gamma$ полагаем

$$\Gamma(x) = \{y \in V(\Gamma) \mid [x, y] \in E(\Gamma)\}$$

– окрестность x в Γ ,

$$G(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

– стабилизатор x в G . Через $G(x)^{\Gamma(x)}$ обозначается ограничение $G(x)$ на $\Gamma(x)$. В случае связного графа Γ на $V(\Gamma)$ определена естественная метрика, обозначаемая через $d_\Gamma(\cdot, \cdot)$ или $d(\cdot, \cdot)$. Для $i \in \mathbb{N}$ при этом полагаем

$$\Gamma_i(x) = \{y \in V(\Gamma) \mid d(x, y) \leq i\}$$

Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 93-01-01529), МНФ (грант NMC000) и совместно МНФ и правительства РФ (грант NMC 300).

– шар радиуса i с центром x ,

$$G_i(x) = \{g \in G \mid g(y) = y \text{ для всех } y \in \Gamma_i(x)\}$$

– поэлементный стабилизатор $\Gamma_i(x)$ в G . Более общо, если $x, y, \dots \in V(\Gamma)$, то

$$G_i(x, y, \dots) := G_i(x) \cap G_i(y) \cap \dots$$

l-дугой, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, графа Γ называется такая последовательность $(x_0, \dots, x_l)$ его вершин, что $x_{i+1} \in \Gamma(x_i)$ для всех $0 \leq i < l$ и $x_{i-1} \neq x_{i+1}$ для всех $0 < i < l$.

Нас интересует строение группы $G(x)$ при следующем условии.

ОСНОВНОЕ УСЛОВИЕ. Γ – неориентированный связный граф, G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ , $x \in V(\Gamma)$, группа $G(x)$ конечна, группа $G(x)^{\Gamma(x)}$ содержит нормальную подгруппу, подстановочно изоморфную группе $\text{PSL}_n(q)$, где $n \geq 2$ и q – степень простого числа p , в естественном дважды транзитивном представлении степени $1 + q + \dots + q^{n-1}$ на точках проективного пространства $\text{PG}_{n-1}(q)$.

Отсылая за соответствующими мотивировками к [1] (см. также конец настоящего введения), отметим лишь, что из классификации конечных дважды транзитивных групп (см., например, [4]) и работ [5]–[7] вытекает справедливость следующего утверждения: если группа автоморфизмов G неориентированного связного графа Γ действует транзитивно на множестве его 2-дуг (что, очевидно, эквивалентно транзитивности G на $V(\Gamma)$ и дважды транзитивности действия $G(x)$ на $\Gamma(x)$ для $x \in V(\Gamma)$) и имеет конечный стабилизатор вершины, то Γ и G удовлетворяют основному условию или имеет место равенство $G_1(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$. В последнем случае выяснение строения $G(x)$ не представляет трудности: группа $G(x)^{\Gamma(x)}$ есть одна из конечных дважды транзитивных групп, и группа $G_1(x)$ точно действует на $\Gamma(y)$ как произвольная нормальная подгруппа группы $G(x, y)^{\Gamma(y)}$ (подстановочно изоморфной группе $G(x, y)^{\Gamma(x)}$), причем $C_{G(x)}(G_1(x))$ действует транзитивно на $\Gamma(x)$. Каждый из указанных случаев группы $G_1(x)$ может быть реализован с полным двудольным графом $K_{|\Gamma(x)|, |\Gamma(x)|}$ в качестве Γ .

В [1] анонсирован следующий результат, позволяющий определить строение группы $G(x)$ в случае, когда выполнено основное условие: если граф Γ и группа G удовлетворяют основному условию, то $G_2(x) = 1$ при $p > 3$, $G_3(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$ при $p = 3$, $G_5(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$ при $p = 2$. Доказательство этого результата состоит в рассмотрении следующих случаев (исчерпывающих все имеющиеся при выполнении основного условия возможности):

- (i) $n = 2$;
- (ii) $n \geq 3$ и G действует транзитивно на множестве 3-дуг Γ ;
- (iii) $n = 3$ и G действует интранзитивно на множестве 3-дуг Γ ;
- (iv) случай корреляции (см. [3, ч. I, с. 125]);
- (v) случай коллинеации (см. [3, ч. I, с. 125]).

В случае (i) при условии $G_1(x, y) \neq 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$ исчерпывающее описание группы $G(x)$ (из которого следуют равенства $G_2(x) = 1$ при $p > 3$, $G_3(x, y) = 1$

для $[x, y] \in E(\Gamma)$ при $p = 3$, $G_2(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$ при $p = 2$) содержится в [8].

Предположим, что $n \geq 3$. Если $G_2(x) = 1$, то выяснение строения группы $G(x)$ не представляет трудности. Соответствующий результат содержится в [9]. (Впрочем, рассуждения, используемые нами в [3] и настоящей работе для выяснения строения группы $G(x)$ в случае $G_2(x) \neq 1$, очевидным образом обобщаются на случай, когда $G_1(x, y) \neq 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$.) Оказывается, что если $G_1(x, y) \neq 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$, то элементарная p -группа $O_p(G(x)) = \langle G_1(x, z) \mid z \in \Gamma(x) \rangle$ в случае (ii) имеет порядок $q^{n(n-1)}$ (тензорное произведение дуального к естественному $SL_n(q)$ -модуля и естественного $SL_{n-1}(q)$ -модуля; ср. лемму 1.2 из доказательства предложения 1.1 настоящей статьи), в случае (iii) имеет порядок q^3 (естественный $SL_3(q)$ -модуль; ср. лемму 8, 2) из [3, ч. I, § 3]), в случае (iv) имеет порядок q^n (естественный $SL_n(q)$ -модуль; ср. лемму 3 из приложения к ч. II настоящей работы), наконец, в случае (v) имеет порядок $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (внешний квадрат дуального к естественному $SL_n(q)$ -модуля; ср. лемму 3 из ч. III настоящей работы). Примерами групп G , для которых реализуются перечисленные типы групп $G(x)$, являются соответственно группы $\text{Aut PSL}_{2n-1}(q)$, $\text{Aut PSL}_4(q)$, $\text{Aut PSL}_{n+1}(q)$, $\text{Aut } O_{2n}^+(q)$.

Таким образом, рассматриваемая задача определения строения $G(x)$ при выполнении основного условия сводится к определению строения $G(x)$ при условии $G_2(x) \neq 1$ (или доказательству равенства $G_2(x) = 1$) в случаях (ii)–(v).

В случае (ii) при $p > 3$ в [2] доказано равенство $G_2(x) = 1$. В случае (ii) при $p = 3$ в [3, ч. II] доказано равенство $G_3(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$, из которого, как отмечено в [3, ч. I, с. 126], может быть получено равенство $G_2(x) = 1$. Соответствующие рассуждения приводятся в приложении к настоящей статье. В случае (ii) при $p = 2$ и $n = 3$ согласно [3, ч. II, предложения 3.2, 3.3] справедливо равенство $G_5(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$. В предложении 1.1 настоящей статьи мы (с использованием этого равенства) завершаем рассмотрение случая (ii) при $p = 2$ и $n = 3$, выясняя строение группы $G(x)$ при условии $G_2(x) \neq 1$. Наконец, в случае (ii) при $p = 2$ и $n \geq 4$ справедлив следующий результат, доказательство которого составляет основную цель настоящей статьи (части I работы).

ТЕОРЕМА. Пусть Γ и G удовлетворяют основному условию, причем группа G действует транзитивно на множестве 3-дуг графа Γ , $p = 2$ и $n \geq 4$. Тогда $G_2(x) = 1$.

Таким образом, в настоящей статье завершается рассмотрение случая (ii).

В случае (iii) при $p > 3$ в [2] доказано равенство $G_2(x) = 1$. В случае (iii) при $p = 3$ строение группы $G(x)$ при условии $G_2(x) \neq 1$ определено в [3, ч. I, теорема 1]. Наконец, в случае (iii) при $p = 2$ строение группы $G(x)$ при условии $G_2(x) \neq 1$ выяснено (в контексте исследования амальгам групп лиевского типа ранга 2 над полем характеристики 2) в [10]. Отметим, что в настоящее время результаты, относящиеся к случаю (iii), и большая часть результатов, относящихся к случаю (ii) при $n = 3$, могут быть выведены из результатов работы [11].

В случае (iv) при $p > 3$ в [2] доказано равенство $G_2(x) = 1$. Согласно [3,

ч. I, теорема 3] в случае (iv) при $p = 3$ имеет место равенство $G_3(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$, а в случае (iv) при $p = 2$ – равенство $G_2(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$. С использованием последних равенств в приложении к ч. II настоящей работы мы завершаем рассмотрение случая (iv), доказывая при $p = 3$ равенство $G_2(x) = 1$ (справедливость которого отмечена в [3, ч. I, с. 126]) и выясняя при $p = 2$ строение группы $G(x)$ в случае $G_2(x) \neq 1$.

В случае (v) при $p > 3$ в [2] доказано равенство $G_2(x) = 1$. Согласно [3, ч. I, теорема 2] в случае (v) при $p = 3$ также имеет место равенство $G_2(x) = 1$. Кроме того, согласно [3, ч. I, § 4, замечание 2] равенство $G_2(x) = 1$ справедливо в случае (v) при $q > p = 2$. Наконец, случаю (v) при $q = 2$ посвящены чч. II–IV настоящей работы (см. следующие публикации): в ч. II определяется строение $G(x)$ при $n = 4$, в ч. III определяется строение $G(x)$ при $n = 5$, в ч. IV доказывается справедливость равенства $G_2(x) = 1$ при $n \geq 6$.

Перечисленные результаты решают задачу описания групп $G(x)$, удовлетворяющих основному условию. Теорема из [1] является их непосредственным следствием.

Мы не будем приводить здесь формулировки теорем из чч. II–IV настоящей работы, а суммируем полученные результаты в виде табл. 1, строки которой перечисляют все имеющиеся возможности при выполнении основного условия и $G_2(x) \neq 1$. В каждой строке после указания случая, в котором реализуется соответствующая возможность, в столбце с номером 1 указан порядок группы $O_p(G(x))/G_2(x)$ (заметим, что $G_2(x) \leq G_1(x, y) \leq O_p(G(x))$ для $y \in \Gamma(x)$ согласно [5, (2.3)]), а в столбцах с номерами $i > 1$ – порядки групп $G_i(x)/G_{i+1}(x)$, вплоть до наименьшего i со свойством $G_i(x)/G_{i+1}(x) = 1$ (т.е. со свойством $G_i(x) = 1$). Все факторгруппы $O_p(G(x))/G_2(x)$ и все неединичные факторгруппы $G_i(x)/G_{i+1}(x)$ при $i > 1$ являются элементарными p -группами и главными факторами групп $G(x)$. (Мы ограничиваемся здесь указанием их порядков, хотя доказывается много большее. В частности, во всех случаях определяется $\mathbb{F}_q G(x)/O_p(G(x))$ -модульная структура этих факторов. Используя полученные результаты, не составляет труда определить строение групп $O_p(G(x))$ с точностью до изоморфизма.) В последнем столбце указывается пример группы G , для которой реализуется соответствующая возможность. При этом используются обозначения из [12]. Кроме того, в группе $(\text{PSL}_{n+1}(2) \times \text{PSL}_{n+1}(2)) \rtimes \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ подгруппа $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ – элементарная 2-группа, σ_1 меняет местами множители, σ_2 индуцирует на каждом из них контраградиентный автоморфизм.

Имеет смысл отметить, что приведенный результат получен без использования классификации конечных простых групп.

Существенно проще оказывается вопрос о строении конечного стабилизатора вершины $G(x)$ (G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов неориентированного связного графа Γ) в случае, когда группа $G(x)^{\Gamma(x)}$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу $\text{PSL}_n(q)$, действующую естественным образом на k -мерных, $0 < k < n - 2$, подпространствах пространства $\text{PG}_{n-1}(q)$, т.е. на любом ином классе сопряженных максимальных параболических подгрупп (см. [13], [14], где показано, что $G_2(x) = 1$ при $(n, k) \neq (5, 1)$). Знание строения $G(x)$ в случае действия группы $\text{PSL}_n(q) \cong G(x)^{\Gamma(x)}$ на произвольном классе максимальных

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	
(i), $p = 2$	q^2	q	1				$\text{Aut PSp}_4(q)$
(i), $p = 3$	q^2	q^2	q	1			$\text{Aut } G_2(q)$
(ii), $p = 2, n = 3$	q^6	q^6	q^3	q^3	q^2	1	$\text{Aut } F_4(q)$
(iii), $q = 2$	2^3	2	1				$\text{Aut } M_{22}$
(iii), $q = 3$	3^3	3^3	1				$\text{Aut } Fi_{22}$
(iv), $q = 2$	2^n	2	1				$(\text{PSL}_{n+1}(2)) \times \text{PSL}_{n+1}(2) \rtimes \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$
(v), $q = 2, n = 4$	2^6	2^4	2	1			Co_2
(v), $q = 2, n = 4$	2^6	2^4	2^4	1			J_4
(v), $q = 2, n = 5$	2^{10}	2^{10}	2^5	2^5	1		B

параболических подгрупп может быть использовано (посредством рассмотрения подходящих аналогов подграфов $\Gamma_Z, \Gamma_{Z, Z'}$ из [3]) для исследования $G(x)$ в случае действия $\text{PSL}_n(q) \lesssim G(x)^{\Gamma(x)}$ на произвольном классе параболических подгрупп, т.е. на флагах произвольного фиксированного типа пространства $\text{PG}_{n-1}(q)$. Последняя задача в случае четного q имеет непосредственное отношение к известной нерешенной задаче выталкивания для групп $\text{PSL}_n(q)$, $n > 3$, и даже может рассматриваться как одна из версий последней. Планируется посвятить затронутым вопросам одну из последующих работ.

Для теории конечных групп интерес представляет также вопрос о строении стабилизатора вершины $G(x)$ в случае, когда в основном условии вместо вершинной транзитивности G требуется лишь, чтобы наряду с группой $G(x)^{\Gamma(x)}$ группа $G(y)^{\Gamma(y)}$ для $y \in \Gamma(x)$ также содержала нормальную подгруппу $\text{PSL}_n(q)$ в естественном подстановочном представлении. Не имея возможности входить здесь в детали, отметим лишь, что соответствующим образом модифицированный метод исследования стабилизаторов вершин из [2], [3] и настоящей работы может быть использован и в этом случае при $n \geq 3$. (При $n = 2$ сформулированный вопрос рассмотрен в [8].) Представляется, что добавляющиеся здесь трудности связаны скорее с необходимостью рассмотрения существенно большего числа возможностей, чем с какой-то конкретной из них. Отметим, впрочем, что в настоящей работе мы не стремились сколько-нибудь ограничивать себя в использовании условия вершинной транзитивности группы G .

В связи с тем, что в настоящей работе имеются многочисленные ссылки на [3], обратим внимание на [15], где дан список допущенных в [3] опечаток.

§ 1. Обозначения и предварительные результаты

В настоящей работе используются обозначения из [3]. Напомним некоторые из них.

Пусть Γ – неориентированный граф и $G \leq \text{Aut } \Gamma$. Тогда для $x, y, \dots \in V(\Gamma)$ и $X, Y, \dots \subseteq V(\Gamma)$ через $G(x, y, \dots, X, Y, \dots)$ обозначается стабилизатор в группе G вершин $x, y, \dots$ и множеств $X, Y, \dots$.

Предположим, что Γ и G удовлетворяют основному условию (см. введение). Тогда для $H \leq G$ и $z_1, z_2, \dots \in V(\Gamma)$ полагаем

$$H(z_1, z_2, \dots)^* = H(z_1, z_2, \dots) \cap G(z_1)^* \cap G(z_2)^* \cap \dots,$$

где $G(z_i)^*$ – наибольшая подгруппа группы $G(z_i)$, действующая на проективном пространстве $\Gamma(z_i) \cong \text{PG}_{n-1}(q)$ как подгруппа соответствующей группы $\text{PGL}_n(q)$.

Далее, предположим, что кроме того группа G действует транзитивно на множестве 3-дуг графа Γ и $n \geq 3$. Тогда (см. [3, ч. II, § 1]) для произвольной 2-дути (z_0, z_1, z_2) графа Γ определена коллинеация $\varphi_{(z_0, z_1, z_2)}$ проективного пространства $[z_0 : z_1]$ (точками которого являются прямые проективного пространства $\Gamma(z_0)$, содержащие z_1 , а пустое подпространство удобно отождествить с $\{z_1\}$) на проективное пространство $[z_2 : z_1]$, перестановочная с действием группы $G(z_0, z_1, z_2)$. При этом $\varphi_{(z_0, z_1, z_2)} = \varphi_{(z_2, z_1, z_0)}^{-1}$. В случае дерева Γ вместо $\varphi_{(z_0, z_1, z_2)}$ используется запись φ_{z_0, z_2} . Кроме того в последнем случае для $[z, z'] \in E(\Gamma)$ и подпространств Z, Z' проективных пространств $\Gamma(z), \Gamma(z')$ соответственно таких, что $z' \in Z, z \in Z'$, определен связный подграф (поддерево) $\Gamma_{Z, Z'}$ дерева Γ . Множество $V(\Gamma_{Z, Z'})$ его вершин есть наименьшее подмножество $V(\Gamma)$ со следующими свойствами: $Z \cup Z' \subseteq V(\Gamma_{Z, Z'})$; если (z_0, z_1, z_2) – 2-дуга Γ и Z_0 – подпространство $\Gamma(z_0)$, причем $z_0, z_1, z_2 \in V(\Gamma_{Z, Z'})$ и $Z_0 \subseteq V(\Gamma_{Z, Z'})$, то $\varphi_{z_0, z_2}(\langle Z_0, z_1 \rangle) \subseteq V(\Gamma_{Z, Z'})$. Для $H \leq G$ через $H^{\Gamma_{Z, Z'}}$ обозначается ограничение на $V(\Gamma_{Z, Z'})$ стабилизатора в H множества $V(\Gamma_{Z, Z'})$. Соответственно для элемента $h \in G$, стабилизирующего $V(\Gamma_{Z, Z'})$, через $h^{\Gamma_{Z, Z'}}$ обозначается его ограничение на $V(\Gamma_{Z, Z'})$. Заметим, что $H^{\Gamma_{Z, Z'}} \leq \text{Aut } \Gamma_{Z, Z'}$ и $h^{\Gamma_{Z, Z'}} \in \text{Aut } \Gamma_{Z, Z'}$. В случае $\dim Z = \dim Z' > 0$ граф $\Gamma_{Z, Z'}$ и группа $G^{\Gamma_{Z, Z'}}$ удовлетворяют основному условию (с $n = \dim Z + 1$ и прежним q), причем $G^{\Gamma_{Z, Z'}}$ действует транзитивно на множестве 3-дуг $\Gamma_{Z, Z'}$ (см. [3, ч. II, § 2]). В случае $\dim Z = \dim Z' > 1$ для произвольной 2-дути (z_0, z_1, z_2) графа $\Gamma_{Z, Z'}$ ограничение отображения φ_{z_0, z_2} на подпространства $\Gamma_{Z, Z'}(z_0)$ совпадает с соответствующим отображением, определенным по $\Gamma_{Z, Z'}$ и $G^{\Gamma_{Z, Z'}}$.

Перейдем к доказательству вспомогательных результатов, первый из которых представляет и самостоятельный интерес.

Согласно [3, ч. II, предложения 3.2, 3.3] основное условие в случае транзитивного действия группы G на множестве 3-дуг графа Γ и $n = 3$ влечет $G_5(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$. В предложении 1.1 мы уточняем строение $G(x)$ в случае $p = 2$. При этом используется следующая терминология. Предположим

$$H_1 \times H_2 \leq G(x)/O_2(G(x)),$$

где $H_1 \cong \text{SL}_3(q)$, $H_2 \cong \text{SL}_2(q)$, q – степень 2. Заметим, что при этом подгруппы H_1, H_2 группы $G(x)/O_2(G(x))$ однозначно определены, действие H_1 на $\Gamma(x)$

поднимается до естественного действия H_1 на 3-мерном ассоциированном с $\Gamma(x)$ векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}_q$ (одномерными подпространствами V являются вершины $\Gamma(x)$), $H_2 \leq G_1(x)/O_2(G(x))$ и для $y \in \Gamma(x)$ действие H_2 на $[y : x]$ поднимается до естественного действия H_2 на 2-мерном ассоциированном с $[y : x]$ векторном пространстве W над полем $\mathbb{F}_q$. На V и W очевидным образом определены структуры естественных $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуля и $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуля соответственно. Кроме того, мы можем рассматривать V и W как $\mathbb{F}_q(H_1 \times H_2)$ -модули и как $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модули, предполагая, что действие H_2 на V и действие H_1 на W тривиальны. Эти $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модули мы будем называть для краткости *естественным $SL_3(q)$ -модулем* и *естественным $SL_2(q)$ -модулем* соответственно. На дуальном V векторном пространстве V^* также очевидным образом определены структура дуального к естественному $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуля и структуры $\mathbb{F}_q(H_1 \times H_2)$ -модуля и $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модуля. Последний $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модуль мы будем называть *дуальным к естественному $SL_3(q)$ -модулю*. Тензорное произведение $V \otimes_{\mathbb{F}_q} W$ (соответственно $V^* \otimes_{\mathbb{F}_q} W$), рассматриваемое как $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модуль, будем называть *тензорным произведением естественного (соответственно дуального к естественному) $SL_3(q)$ -модуля и естественного $SL_2(q)$ -модуля*. Если теперь K_1, K_2 – нормальные в $G(x)$ подгруппы группы $O_2(G(x))$, причем $[O_2(G(x)), K_1] \leq K_2$ и K_1/K_2 – элементарная 2-группа, то на K_1/K_2 естественным образом определена структура $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модуля, что позволяет использовать применительно к K_1/K_2 введенную терминологию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть Γ и G удовлетворяют основному условию (см. введение), причем группа G действует транзитивно на множестве 3-дуг графа Γ , $p = 2$ и $n = 3$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) $G_2(x) = 1$;
- 2) $G_5(x) \neq 1 = G_5(x, y)$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$, и, более того, имеют место утверждения:
 - 2а) $SL_3(q) \times SL_2(q) \preceq G(x)/O_2(G(x))$;
 - 2б) $[O_2(G(x)), O_2(G(x))] \leq G_2(x)$ и $O_2(G(x))/G_2(x)$ – тензорное произведение дуального к естественному $SL_3(q)$ -модуля и естественного $SL_2(q)$ -модуля;
 - 2в) $[O_2(G(x)), G_2(x)] \leq G_3(x)$ и $G_2(x)/G_3(x)$ – тензорное произведение естественного $SL_3(q)$ -модуля и естественного $SL_2(q)$ -модуля;
 - 2г) $[O_2(G(x)), G_3(x)] \leq G_4(x)$ и $G_3(x)/G_4(x)$ – естественный $SL_3(q)$ -модуль; если $h \in G_3(x) \setminus G_4(x)$, то найдется единственная вершина $x' \in \Gamma(x)$, для которой $h \in G_3(x, x')$, причем для произвольных вершин $y \in \Gamma(x) \setminus \{x'\}$, $y' \in \Gamma(y) \setminus \{x\}$ имеем $h \in G_1(y'')$ для всех $y'' \in \varphi_{x, y'}(\langle x', y \rangle)$ и $1 \neq h^{\Gamma(y'')} \in T_{y''}(y', \varphi_{y, y''}(\langle x, y' \rangle))$ для всех $y'' \in \Gamma(y') \setminus \varphi_{x, y'}(\langle x', y \rangle)$;
 - 2д) $[O_2(G(x)), G_4(x)] \leq G_5(x)$ и $G_4(x)/G_5(x)$ – дуальный к естественному $SL_3(q)$ -модулю; если $h \in G_4(x) \setminus G_5(x)$, то найдется (единственная) прямая X' проективной плоскости $\Gamma(x)$ такая, что $h \in G_4(y)$ для всех $y \in X'$ и $h \notin G_4(y)$ для всех $y \in \Gamma(x) \setminus X'$; при этом для произвольной вершины $y \in \Gamma(x) \setminus X'$ действие h на $\Gamma_4(y)$ восстанавливается в соответствии с 2г);
 - 2е) $[O_2(G(x)), G_5(x)] = 1$ и $G_5(x)$ – естественный $SL_2(q)$ -модуль; если $1 \neq h \in G_5(x)$, то для произвольной вершины $y \in \Gamma(x)$ найдется (единст-

венная) прямая $Y_{h,y}$ проективной плоскости $\Gamma(y)$ такая, что $h \in G_4(y')$ для всех $y' \in Y_{h,y}$ и $h \notin G_4(y')$ для всех $y' \in \Gamma(y) \setminus Y_{h,y}$, причем для различных вершин $y_1, y_2 \in \Gamma(x)$ имеем $Y_{h,y_2} = \varphi_{y_1,y_2}(Y_{h,y_1})$; при этом для произвольной вершины $y \in \Gamma(x)$ действие h на $\Gamma_5(y)$ восстанавливается в соответствии с 2д).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду [3, ч. II, предложение 1.3, 1)] группа $G(x)/O_2(G(x))$ естественно действует на $\Gamma(x)$, а также на множестве прямых проективных плоскостей $\Gamma(y)$, $y \in \Gamma(x)$, содержащих x . Из [3, ч. II, предложение 1.2, 1)] вытекает существование нормальной в $G(x)/O_2(G(x))$ подгруппы H_2 группы $G_1(x)/O_2(G(x))$ такой, что $H_2 \cong \text{SL}_2(q)$. Обозначая через C централизатор H_2 в $G(x)/O_2(G(x))$, имеем, очевидно, $C \times H_2 \trianglelefteq G(x)/O_2(G(x))$, причем для произвольной вершины $z \in \Gamma(x)$ группа $C \cap G_1(x)/O_2(G(x))$ оставляет на месте каждую прямую проективной плоскости $\Gamma(z)$, содержащую x . Отсюда следует существование в C характеристической подгруппы H_1 , изоморфной совершенному центральному расширению группы $\text{PSL}_3(q)$. Заметим, что в силу $[H_1, H_2] = 1$ для произвольного элемента $h \in H_1$ и содержащей x прямой Z проективной плоскости $\Gamma(z)$, $z \in \Gamma(x)$, имеем $h(Z) = Z$ при $h(z) = z$ и $h(Z) = \varphi_{z,h(z)}(Z)$ при $h(z) \neq z$.

ЛЕММА 1.1. Пусть U – $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модуль. Тогда:

- 1) если $|U| \leq q^6$, причем U неприводим, $[H_1, U] \neq 1$ и U как $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуль точен, то $H_1 \cong \text{SL}_3(q)$ и U есть тензорное произведение либо естественного $\text{SL}_3(q)$ -модуля и естественного $\text{SL}_2(q)$ -модуля, либо дуального к естественному $\text{SL}_3(q)$ -модуля и естественного $\text{SL}_2(q)$ -модуля;
- 2) если $|U| \leq q^3$, причем $[H_1, U] \neq 1$, то $H_1 \cong \text{SL}_3(q)$ и U есть либо естественный $\text{SL}_3(q)$ -модуль, либо дуальный к естественному $\text{SL}_3(q)$ -модулю;
- 3) если $|U| \leq q^2$, причем U – точный $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуль, то $[H_1, U] = 1$ и U – естественный $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуль (таким образом, в случае $H_1 \cong \text{SL}_3(q)$ в нашей терминологии U является естественным $\text{SL}_2(q)$ -модулем).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1) имеем (см. [16, (1.6) и замечание (а) на с. 3200]) $U = U_1 \otimes_{\mathbb{F}} U_2$ для $\mathbb{F} = \text{End}_{H_1 \times H_2} U$ и некоторых нетривиального $\mathbb{F} H_1$ -модуля U_1 и точного $\mathbb{F} H_2$ -модуля U_2 таких, что $[H_2, U_1] = 1 = [H_1, U_2]$. При этом, очевидно, $\dim_{\mathbb{F}} U_1 \geq 3$ и $\dim_{\mathbb{F}} U_2 \geq 2$. Для завершения доказательства 1) остается заметить, что, во-первых, наличие нетривиального $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуля порядка $\leq q^3$ влечет $H_1 \cong \text{SL}_3(q)$, а сам модуль при этом есть либо естественный, либо дуальный к естественному, и что, во-вторых, единственным точным $\mathbb{F}_2 H_2$ -модулем порядка $\leq q^2$ является естественный $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуль. Отсюда же следуют утверждения 2) и 3) леммы. Лемма доказана.

Далее, переходя в случае необходимости от графа Γ и группы G к универсальному накрывающему графу для Γ и соответствующей накрывающей группе для G (см., например, [3, ч. I, § 1]) считаем, не теряя общности, граф Γ деревом. Кроме того, будем предполагать, что $G_2(x) \neq 1$. Тогда если $[z', z''] \in E(\Gamma)$, $Z' \in [z' : z'']$, $Z'' \in [z'' : z']$, то согласно [3, ч. II, предложение 1.3. 4)] имеем $G_2^{\Gamma_{Z', Z''}}(z') \neq 1$, и поэтому для $\Gamma_{Z', Z''}$ и $G^{\Gamma_{Z', Z''}}$ справедливо утверждение 1) из [3, ч. II, предложение 1.1].

ЛЕММА 1.2. $H_1 \cong \text{SL}_3(q)$, и имеют место утверждения 2а), 2б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [3, ч. II, предложения 1.3, 1) и 1.2, 1)] следует, что $O_2(G(x))/G_2(x)$ – неединичная элементарная 2-группа и, в частности, $[O_2(G(x)), O_2(G(x))] \leq G_2(x)$. Обозначим через U минимальную неединичную $(H_1 \times H_2)$ -допустимую подгруппу группы $O_2(G(x))/G_2(x)$. Тогда U – неприводимый $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модуль. Группа U (естественным образом) точно действует на множестве $\bigcup_{y \in \Gamma(x)} \Gamma(y)$, причем для $y \in \Gamma(x)$ имеем $U^{\Gamma(y)} \leq T_y(x)$. Отсюда вытекает, что U – точный $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуль. Далее, если $[H_1, u] = 1$ для некоторого элемента $1 \neq u \in U$, то из $u^{\Gamma(y)} \notin T_y(x, Y)$, где $y \in \Gamma(x)$, $Y \in [y : x]$, следует $u^{\Gamma(y')} \notin T_{y'}(x, \varphi_{y, y'}(Y))$ для всех $y' \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$. Однако в последнем случае для $h \in O_2(G(x))$ такого, что $u = hG_2(x)$, и для $X \in [x : y]$ элемент $h^{\Gamma_{X, Y}}$ является 2-элементом из $G_1^{\Gamma_{X, Y}}(x)$, не лежащим в $G_1^{\Gamma_{X, Y}}(x')$ ни для какой вершины $x' \in X$, а это противоречит утверждению 1) из [3, ч. II, предложение 1.1]. Таким образом, $[H_1, u] \neq 1$ для всех $1 \neq u \in U$ и, в частности, $[H_1, U] \neq 1$. Лемма 1.1, 1) теперь влечет $|U| \geq q^6$.

Покажем, что для произвольных вершин $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y \in \langle y_1, y_2 \rangle \setminus \{y_1, y_2\}$ из $h \in G_1(x)$, $h^{\Gamma(y_1)} \in T_{y_1}(x, Y')$, где $Y' \in [y_1 : x]$, и $h^{\Gamma(y_2)} \in T_{y_2}(x, \varphi_{y_1, y_2}(Y'))$ следует $h^{\Gamma(y)} \in T_y(x, \varphi_{y_1, y}(Y'))$. Согласно [3, ч. II, предложение 1.3, 1)] имеем $h^{\Gamma(y)} \in T_y(x)$. Кроме того, утверждение 1) из [3, ч. II, предложение 1.1] влечет $h^{\Gamma_{X', Y'}} \in G_1^{\Gamma_{X', Y'}}(x, y_1, y_2) = G_2^{\Gamma_{X', Y'}}(x)$, где $X' = \langle y_1, y_2 \rangle$. Это доказывает требуемое включение $h^{\Gamma(y)} \in T_y(x, \Gamma_{X', Y'}(y)) = T_y(x, \varphi_{y_1, y}(Y'))$. В качестве очевидного следствия отсюда получаем $G_1(x, y_1, y_2) \leq G_1(y)$.

Другим очевидным следствием является справедливость следующего утверждения. Пусть $y_1, y_2, y_3 \in \Gamma(x)$ и $\langle y_1, y_2, y_3 \rangle = \Gamma(x)$. Тогда если $h \in G_1(x)$ и $h^{\Gamma(y_i)} \in T_{y_i}(x, Y_i)$ для $i = 1, 2, 3$, где $Y_1 \in [y_1 : x]$, $Y_j = \varphi_{y_1, y_j}(Y_1)$ для $j = 2, 3$, то $h^{\Gamma(y')} \in T_{y'}(x, \varphi_{y_1, y'}(Y_1))$ для всех $y' \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $G_1(x, y_1, y_2, y_3) = G_2(x)$, и потому (с учетом [3, ч. II, предложение 1.3, 1)]) $|O_2(G(x))/G_2(x)| \leq q^6$, причем в случае $|O_2(G(x))/G_2(x)| = q^6$, обозначая для $y_1 \in \Gamma(x)$, $Y_1 \in [y_1 : x]$ через U_{y_1, Y_1} подгруппу группы $O_2(G(x))/G_2(x)$, образованную элементами, стабилизирующими поточечно (при естественном действии) прямую Y_1 и все прямые $\varphi_{y_1, y'}(Y_1)$, $y' \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, имеем $|U_{y_1, Y_1}| = q^3$.

Из $|O_2(G(x))/G_2(x)| \leq q^6$ и $|U| \geq q^6$ (см. выше) получаем $U = O_2(G(x))/G_2(x)$, причем к $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модулю U применима лемма 1.1, 1) (и потому, в частности, $H_1 \cong \text{SL}_3(q)$). Таким образом, для завершения доказательства леммы достаточно найти в $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуле $U = O_2(G(x))/G_2(x)$ порядка q^6 дуальный к естественному $\mathbb{F}_2 H_1$ -подмодулю. Покажем, что таковым является U_{y_1, Y_1} , где $y_1 \in \Gamma(x)$, $Y_1 \in [y_1 : x]$. Действительно, из сказанного ранее следует, что U_{y_1, Y_1} – нетривиальный $\mathbb{F}_2 H_1$ -подмодуль $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуля U , причем $|U_{y_1, Y_1}| = q^3$. Поэтому U_{y_1, Y_1} есть либо естественный, либо дуальный к естественному $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуль. Пусть $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y_3 \in \Gamma(x) \setminus \langle y_1, y_2 \rangle$. Тогда из $|U_{y_1, Y_1}^{\Gamma(y_i)}| \leq q$, $i = 1, 2, 3$, и $G_1(x, y_1, y_2, y_3) = G_2(x)$ (см. выше) следует, что $U_{y_1, Y_1} \cap G_1(x, y_1, y_2)/G_2(x)$ – подгруппа порядка q группы U_{y_1, Y_1} , которая в силу $G_1(x, y_1, y_2) = \bigcap_{y \in \langle y_1, y_2 \rangle} G_1(x, y)$ (см. выше) нормализуется при естественном действии стабилизатором прямой $\langle y_1, y_2 \rangle$ в группе H_1 . Таким образом, как и утверждалось, U_{y_1, Y_1} – дуальный к

естественному $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуль. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. *Имеет место утверждение 2в).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $H_1 \times H_2$ естественным образом действует на группе $Z(O_2(G(x))/G_3(x)) \cap G_2(x)/G_3(x)$. Обозначим через U минимальную неединичную $(H_1 \times H_2)$ -допустимую подгруппу группы $Z(O_2(G(x))/G_3(x)) \cap G_2(x)/G_3(x)$. Тогда U – неприводимый $\mathbb{F}_2(H_1 \times H_2)$ -модуль.

Группа $G(x)/G_3(x)$ естественным образом точно действует на $\Gamma_3(x)$. Пусть $1 \neq u \in U$. Тогда для некоторых $y_1 \in \Gamma(x)$, $y'_1 \in \Gamma(y_1) \setminus \{x\}$, $Y' \in [y'_1 : y_1]$ имеем $1 \neq u^{\Gamma(y'_1)} \in T_{y'_1}(y_1, Y')$. Предположим $[H_1, u] = 1$. Тогда поскольку стабилизатор y_1 в H_1 сдвигает прямую $\varphi_{y'_1, x}(Y')$ и оставляет на месте прямую $\langle x, y'_1 \rangle$ (см. начало доказательства предложения), а группа $O_2(G(x))/G_3(x) \leq G_1(x)/G_3(x)$ действует транзитивно на $\langle x, y'_1 \rangle \setminus \{x\}$, то централизатор U в $G(x)/G_3(x)$ содержит элемент, который стабилизирует вершины y_1, y'_1 и сдвигает прямую Y' и который, следовательно, не перестановочен с элементом $u \in U$. Полученное противоречие означает, что $[H_1, u] \neq 1$. Далее, если $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуль U не является точным, то централизатор u в $G_1(x)/G_3(x)$ действует транзитивно на $\Gamma(y_1) \setminus \{x\}$, что с учетом [3, ч. II, предложение 1.2, 2)] влечет $1 \neq u^{\Gamma(y'_1)} \in T_{y'_1}(y_1, \varphi_{y'_1, y'}(Y'))$ для всех $y' \in \Gamma(y_1) \setminus \{x, y'_1\}$. Но в последнем случае для $h \in G_2(x)$ такого, что $u = hG_3(x)$, и для $Y \in [y_1 : y'_1] \setminus \{\langle x, y'_1 \rangle\}$ элемент $h^{\Gamma_Y, Y'}$ является 2-элементом из $G_1^{\Gamma_Y, Y'}(y_1)$, не лежащим в $G_1^{\Gamma_Y, Y'}(y')$ ни для какой вершины $y' \in Y$, а это противоречит утверждению 1) из [3, ч. II, предложение 1.1]. Таким образом, U – точный $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуль. Лемма 1.1, 1) теперь влечет, что либо

а) $|U| > q^6$, либо

б) U есть тензорное произведение естественного или дуального к естественному $SL_3(q)$ -модуля и естественного $SL_2(q)$ -модуля.

Покажем, что реализуется случай б), причем $U = G_2(x)/G_3(x)$. Для этого достаточно показать, что $|G_2(x)/G_3(x)| = q^6$.

Для $y_1 \in \Gamma(x)$, $Y_1 \in [y_1 : x]$ обозначим через U_{y_1, Y_1} подгруппу группы $G_2(x)/G_3(x)$, образованную элементами, действующими тривиально на $\Gamma(y')$ для всех $y' \in Y_1$ и действующими тривиально на $\Gamma(y')$ для всех $y \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y' \in \varphi_{y_1, y}(Y_1)$. Покажем, что $|G_2(x)/G_3(x) : U_{y_1, Y_1}| \leq q^3$. Для $y'_1 \in Y_1 \setminus \{x\}$ согласно [3, ч. II, предложение 1.3, 4)] имеем $|G_2(x) : G_2(x) \cap G_1(y'_1)| = q^2$. Кроме того, утверждение 1) из [3, ч. II, предложение 1.1] влечет тривиальность действия $G_2(x) \cap G_1(y'_1)$ на $V(\Gamma_{X, Y_1})$ для всех $X \in [x : y_1]$, откуда

$$G_2(x) \cap G_1(y'_1) \leq G_1(y')$$

для всех $y' \in Y_1$ и

$$(G_2(x) \cap G_1(y'_1))^{\Gamma(y')} \leq T_{y'}(y, \varphi_{x, y'}(\langle y, y_1 \rangle))$$

для всех $y \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y' \in \varphi_{y_1, y}(Y_1) \setminus \{x\}$. В качестве следствия получаем, что для произвольных $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y'_2 \in \varphi_{y_1, y_2}(Y_1) \setminus \{x\}$ справедливо

$$|G_2(x) : G_2(x) \cap G_1(y'_1, y'_2)| \leq q^3$$

и, кроме того,

$$(G_2(x) \cap G_1(y'_1, y'_2))^{\Gamma(y'_3)} \leq T_{y'_3}(y_3, \langle \varphi_{x, y'_3}(\langle y_1, y_3 \rangle), \varphi_{x, y'_3}(\langle y_2, y_3 \rangle) \rangle) = 1$$

для произвольных $y_3 \in \Gamma(x) \setminus \langle y_1, y_2 \rangle$, $y'_3 \in \varphi_{y_1, y_3}(Y_1) \setminus \{x\} = \varphi_{y_2, y_3}(\langle x, y'_2 \rangle) \setminus \{x\}$ (см. [3, ч. II, предложение 1.2, 2])). Поскольку для произвольной вершины $y \in \langle y_1, y_2 \rangle \setminus \{y_1\}$ в группе $G_1(y_1)$ найдется элемент, отображающий вершины y_2, y_3 в вершины y_3, y соответственно (см. [3, ч. II, предложение 1.2, 1])), то отсюда следует также, что $G_2(x) \cap G_1(y'_1, y'_2) \leq G_1(y')$ для всех $y' \in \varphi_{y_1, y}(Y_1)$. Таким образом,

$$U_{y_1; Y_1} = G_2(x) \cap G_1(y'_1, y'_2) / G_3(x), \\ |G_2(x) / G_3(x) : U_{y_1; Y_1}| = |G_2(x) : G_2(x) \cap G_1(y'_1, y'_2)| \leq q^3.$$

Если теперь $Y'_1 \in [y_1 : x]$, $Y''_1 \in [y_1 : x] \setminus \{Y'_1\}$, то $U_{y_1; Y'_1} \cap U_{y_1; Y''_1} = 1$, поскольку (см. доказательство леммы 1.2) $G_1(x, y, y', y'') = G_2(y)$ для всех $y \in \Gamma(x)$, $y' \in \Gamma(y) \setminus \{x\}$, $y'' \in \Gamma(y) \setminus \langle x, y' \rangle$. Таким образом,

$$|G_2(x) / G_3(x)| = \left| G_2(x) / G_3(x) : U_{y_1; Y'_1} \cap U_{y_1; Y''_1} \right| \leq |G_2(x) / G_3(x) : U_{y_1; Y_1}|^2 \leq q^6,$$

что и утверждалось.

Итак, $G_2(x) / G_3(x) = U$ есть тензорное произведение естественного или дуального к естественному $\mathrm{SL}_3(q)$ -модуля и естественного $\mathrm{SL}_2(q)$ -модуля. Теперь для завершения доказательства леммы достаточно найти в $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуле $G_2(x) / G_3(x)$ естественный $\mathbb{F}_2 H_1$ -подмодуль. Покажем, что таковым является $U_{y_1; Y_1}$, где $y_1 \in \Gamma(x)$, $Y_1 \in [y_1 : x]$. Действительно, H_1 нормализует подгруппу $U_{y_1; Y_1}$ группы U (см. начало доказательства предложения). Кроме того, согласно предыдущему абзацу

$$|U_{y_1; Y_1}| = |G_2(x) / G_3(x)|^{\frac{1}{2}} = q^3.$$

Поэтому $U_{y_1; Y_1}$ есть либо естественный, либо дуальный к естественному $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуль. Пусть $y''_1 \in \Gamma(y_1) \setminus Y_1$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y''_2 \in \varphi_{y_1, y_2}(\langle x, y''_1 \rangle) \setminus \{x\}$. Тогда (см. выше) поточечный стабилизатор $\Gamma(y''_1)$ в $U_{y_1; Y_1}$, равный $U_{y_1; Y_1} \cap G_2(x, y_1) / G_3(x)$, действует на $\Gamma(y''_2)$ как подгруппа группы $T_{y''_2}(y_2, \varphi_{x, y_2}(\langle y_1, y_2 \rangle))$, причем в силу

$$G_2(x) \cap G_1(y''_1, y''_2) / G_3(x) = U_{y_1; \langle x, y''_1 \rangle}, \quad U_{y_1; Y_1} \cap U_{y_1; \langle x, y''_1 \rangle} = 1$$

это действие точное. Поскольку $U_{y_1; Y_1}^{\Gamma(y''_1)} \leq T_{y''_1}(y_1)$ (см. [3, ч. II, предложение 1.3, 4])), отсюда следует, что $U_{y_1; Y_1} \cap G_2(x, y_1) / G_3(x)$ – подгруппа порядка q группы $U_{y_1; Y_1}$, нормализуемая при естественном действии стабилизатором точки y_1 в группе H_1 . Таким образом, как и утверждалось, $U_{y_1; Y_1}$ – естественный $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуль. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. Если $y_1 \in \Gamma(x)$, то $G_2(x, y_1)/G_3(x)$ – группа порядка q^2 , и для произвольных $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y'_2 \in \Gamma(y_2) \setminus \{x\}$ справедливо $G_2(x, y_1)^{\Gamma(y'_2)} = T_{y'_2}(y_2, \varphi_{x, y'_2}(\langle y_1, y_2 \rangle))$. При этом для каждого элемента $h \in G_2(x, y_1) \setminus G_3(x)$ найдется такая зависящая от h прямая $Y \in [y_1 : x]$, что для произвольной вершины $y \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$ имеем $h \in G_1(y')$ при $y' \in \varphi_{y_1, y}(Y)$ и $h \notin G_1(y')$ при $y' \in \Gamma(y) \setminus \varphi_{y_1, y}(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_1 \in \Gamma(x)$. Тогда, как было показано при доказательстве леммы 1.3, в обозначениях, введенных там, группа $U_{y_1; Y_1} \cap G_2(x, y_1)/G_3(x)$ для произвольной прямой $Y_1 \in [y_1 : x]$ имеет порядок q и действует точно на $\Gamma(y')$ для всех $y \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y' \in \Gamma(y) \setminus \varphi_{y_1, y}(Y_1)$. Поскольку, как доказано там же, для $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y'_2 \in \Gamma(y_2) \setminus \{x\}$ справедливо

$$G_2(x, y_1)^{\Gamma(y'_2)} \leq T_{y'_2}(y_2, \varphi_{x, y'_2}(\langle y_1, y_2 \rangle)),$$

то отсюда следует, в частности,

$$G_2(x, y_1)^{\Gamma(y'_2)} = T_{y'_2}(y_2, \varphi_{x, y'_2}(\langle y_1, y_2 \rangle)).$$

Для завершения доказательства леммы теперь достаточно показать, что каждый элемент из $G_2(x, y_1)/G_3(x)$ принадлежит некоторой подгруппе $U_{y_1; Y_1}$, $Y_1 \in [y_1 : x]$. Поскольку при $Y'_1, Y''_1 \in [y_1 : x]$, $Y'_1 \neq Y''_1$, имеем $U_{y_1; Y'_1} \cap U_{y_1; Y''_1} = 1$ (см. доказательство леммы 1.3) и $|U_{y_1; Y_1} \cap G_2(x, y_1)/G_3(x)| = q$ (см. выше), то

$$\left| \bigcup_{Y_1 \in [y_1 : x]} (U_{y_1; Y_1} \cap G_2(x, y_1)/G_3(x)) \right| = q^2.$$

Доказательство леммы сводится, таким образом, к доказательству неравенства $|G_2(x, y_1)/G_3(x)| \leq q^2$.

Пусть $Y'_1, Y''_1 \in [y_1 : x]$, $Y'_1 \neq Y''_1$, и $y \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y' \in \varphi_{y_1, y}(Y'_1) \setminus \{x\}$, $y'' \in \varphi_{y_1, y}(Y''_1) \setminus \{x\}$. Тогда (см. доказательство леммы 1.3)

$$G_2(x, y_1) \cap G_1(y', y'')/G_3(x) \leq U_{y_1; Y'_1} \cap U_{y_1; Y''_1} = 1,$$

причем (см. выше)

$$G_2(x, y_1)^{\Gamma(y')} = T_{y'}(y, \varphi_{x, y'}(\langle y_1, y \rangle)),$$

$$G_2(x, y_1)^{\Gamma(y'')} = T_{y''}(y, \varphi_{x, y''}(\langle y_1, y \rangle)).$$

Отсюда следует $|G_2(x, y_1)/G_3(x)| \leq q^2$. Лемма доказана.

Следуя [3, ч. II, §3], обозначим через m такое натуральное число, что $G_m(z_0, z_1) \neq 1 = G_{m+1}(z_0, z_1)$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$. Тогда [3, ч. II, предложения 3.2, 3.3] и лемма 1.4 влекут $2 \leq m \leq 4$. Кроме того, согласно [3, ч. II, (3.1)] справедливо

$$Z(O_2(G(z_0, z_1))) \leq G_m(z_0, z_1) \quad \text{для } [z_0, z_1] \in E(\Gamma). \quad (1.1)$$

ЛЕММА 1.5. *Имеет место утверждение 2г).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, прежде всего, что $G_3(z_0, z_1) \neq 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$. Предполагая противное, имеем $m = 2$, и потому согласно (1.1) найдутся такие 4-дуга $(z_0, \dots, z_4)$ графа Γ и элемент $h_1 \in Z(O_2(G(z_0, z_1))) \leq G(z_0, \dots, z_3)$, что $h_1(z_4) \neq z_4$. Теперь из

$$G_2(z_3, z_4) \cap G_1(z_1) \leq O_2(G(z_0, z_1))$$

(см. [3, ч. II, предложение 1.3]) следует

$$G_2(z_3, z_4) \cap G_1(z_1) \leq G_2(z_3, z_4, h_1(z_4)),$$

что с учетом $G_2(z_3, z_4)^{\Gamma(z_1)} = T_{z_1}(z_2, \varphi_{z_3, z_1}(\langle z_2, z_4 \rangle))$ (см. лемму 1.4) влечет

$$|G_2(z_3, z_4) : G_2(z_3, z_4, h_1(z_4))| \leq q.$$

Но $|G_2(z_3, z_4) : G_2(z_3, z_4, h_1(z_4))| = q^2$ в силу леммы 1.4. Полученное противоречие показывает, что $G_3(z_0, z_1) \neq 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$, т.е. $m \geq 3$.

Покажем теперь, что если $(z_0, \dots, z_4)$ — 4-дуга графа Γ , то $G_3(z_0, z_1)^{\Gamma(z_4)}$ есть либо 1, либо $T_{z_4}(z_3, \varphi_{z_2, z_4}(\langle z_1, z_3 \rangle))$. Для этого по лемме 1.4 достаточно установить справедливость равенства

$$G(z_0, \dots, z_4, z_5, z'_5)^{\Gamma(z_4)} = G(z_3, z_4, z_5, z'_5)^{\Gamma(z_4)},$$

где z_5 и z'_5 — некоторые вершины из $\varphi_{z_2, z_4}(\langle z_1, z_3 \rangle) \setminus \{z_3\}$ и $\Gamma(z_4) \setminus \varphi_{z_2, z_4}(\langle z_1, z_3 \rangle)$ соответственно. Пусть z'_4 — некоторая вершина из $\varphi_{z_1, z_3}(\langle z_0, z_2 \rangle) \setminus \{z_2\}$. Согласно [3, ч. II, предложение 1.2, 1)] имеем

$$G(z_3, z_4, z_5, z'_5)^{\Gamma(z_4)} = G(z_2, z_3, z_4, z'_4, z_5, z'_5)^{\Gamma(z_4)}.$$

Так как группа $G(z_2, z_3, z_4, z'_4, z_5, z'_5)$ стабилизирует прямую $\langle z_1, z_3 \rangle$, то согласно [3, ч. II, предложение 1.3, 4)] отсюда следует

$$G(z_3, z_4, z_5, z'_5)^{\Gamma(z_4)} = G(z_1, \dots, z_4, z'_4, z_5, z'_5)^{\Gamma(z_4)}.$$

Так как группа $G(z_1, \dots, z_4, z'_4, z_5, z'_5)$ стабилизирует прямую $\langle z_0, z_2 \rangle$, то вновь по [3, ч. II, предложение 1.3, 4)], согласно которому $G_2(z_3)^{\Gamma(z_1)} = T_{z_1}(z_2)$, получаем требуемое.

Далее, если $h \in G_3(x)$, то для $y \in \Gamma(x)$ справедливо $h \in G_2(x, y)$, и потому согласно лемме 1.4 либо $h \in G_3(y)$, либо найдется такая прямая $X_{h, y} \in [x : y]$, что для произвольной вершины $y' \in \Gamma(y) \setminus \{x\}$ имеем $h \in G_1(y'')$ при $y'' \in \varphi_{x, y'}(X_{h, y})$ и $1 \neq h^{\Gamma(y'')} \in T_{y''}(y', \varphi_{y, y''}(\langle x, y' \rangle))$ при $y'' \in \Gamma(y') \setminus \varphi_{x, y'}(X_{h, y})$. С учетом доказанного отсюда следует, что для $y \in \Gamma(x)$ группа $G_3(x)^{\Gamma_3(y)}$ имеет порядок q^2 , и что порядок группы $G_3(x, y_1)^{\Gamma_3(y)}$ для $y \in \Gamma(x)$, $y_1 \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$ равен q^2 или q (одно и то же значение для всех y, y_1), причем этот порядок равен q тогда и только тогда, когда справедливо следующее утверждение:

(*) если $y_1 \in \Gamma(x)$, $h \in G_3(x, y_1)$, то для $y \in \Gamma(x)$ либо $h \in G_3(y)$, либо, в противном случае, $X_{h,y} = \langle y, y_1 \rangle$.

Доказательство леммы сводится теперь к доказательству утверждения (*). Действительно, из (*) следует, что для произвольных $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y_3 \in \Gamma(x) \setminus \langle y_1, y_2 \rangle$, $h \in G_3(x, y_1, y_2)$ справедливо $h \in G_3(y_3)$ (поскольку в противном случае $\langle y_1, y_3 \rangle = X_{h,y_3} = \langle y_2, y_3 \rangle$), откуда в силу существования в $G(x, y_1)$ элемента, меняющего местами вершины y_2 и y_3 , получаем $G_3(x, y_1, y_2) = G_4(x)$. Таким образом, $|G_3(x)^{\Gamma_4(x)}| = q^3$, и каждый элемент из $G_3(x) \setminus G_4(x)$ содержится в единственной подгруппе вида $G_3(x, y_1)$, $y_1 \in \Gamma(x)$. Если

$$U := Z(O_2(G(x))/G_4(x)) \cap G_3(x)/G_4(x),$$

то отсюда следует, что $|U| \leq q^3$ и $[H_1, U] \neq 1$. Теперь с учетом леммы 1.1, 2) имеем то, что $U = G_3(x)/G_4(x)$ – естественный или дуальный к естественному $SL_3(q)$ -модуль. Остается заметить, что стабилизатор вершины $y_1 \in \Gamma(x)$ в группе H_1 нормализует при естественном действии подгруппу $G_3(x, y_1)^{\Gamma_4(x)}$ порядка q группы $G_3(x)/G_4(x)$, и потому $G_3(x)/G_4(x)$ – естественный $SL_3(q)$ -модуль.

Итак, для доказательства леммы достаточно доказать справедливость утверждения (*). Предположим, что (*) не имеет места. Тогда для $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$ группа $G_3(x, y_1)^{\Gamma_3(y_2)}$, напомним, имеет порядок q^2 .

Покажем, что для произвольной вершины $y_3 \in \langle y_1, y_2 \rangle \setminus \{y_1, y_2\}$ справедливо $G_3(x, y_1, y_2)^{\Gamma_3(y_3)} \neq 1$. Поскольку (*) по сделанному предположению не выполняется, для некоторого $h_1 \in G_3(x, y_1)$ имеем $h_1 \notin G_3(y_3)$ и $X_{h_1, y_3} \neq \langle y_1, y_3 \rangle$. При этом

$$[h_1, O_2(G(y_2)) \cap G(y_1)] \subseteq G_3(x, y_1, y_2)$$

согласно лемме 1.3. В то же время согласно [3, ч. II, предложение 1.3, 1)] группа $O_2(G(y_2)) \cap G(y_1) \leq G(y_3)$, действуя на $[x : y_3]$, транзитивно переставляет отличные от $\langle y_1, y_3 \rangle$ прямые и, в частности, сдвигает прямую X_{h_1, y_3} , что влечет

$$[h_1, O_2(G(y_2)) \cap G(y_1)]^{\Gamma_3(y_3)} \neq 1.$$

Итак, $G_3(x, y_1, y_2)^{\Gamma_3(y_3)} \neq 1$, что и утверждалось.

Далее, из (1.1) с учетом $m \geq 3$ и леммы 1.4 следует существование таких $(m+1)$ -дуги $(z_0, \dots, z_{m+1})$ графа Γ и элемента $c \in Z(O_2(G(z_0, z_1))) \leq G_m(z_0, z_1)$, что

$$1 \neq c^{\Gamma(z_{m+1})} \in T_{z_{m+1}}(z_m, \varphi_{z_{m-1}, z_{m+1}}(\langle z_{m-2}, z_m \rangle)).$$

Не теряя общности, будем считать, что $z_{m+1} = x$, и пусть $y_1 \in \Gamma(x) \setminus \varphi_{z_{m-1}, x}(\langle z_{m-2}, z_m \rangle)$, $y_2 := c(y_1) \in \langle y_1, z_m \rangle \setminus \{y_1, z_m\}$. Тогда согласно предыдущему абзацу множество $G_3(x, y_1, y_2) \setminus G_3(z_m)$ непусто.

Если $G_3(x, y_1, y_2) \leq G_1(z_{m-2})$, то $X_{h', z_m} = \varphi_{z_{m-1}, x}(\langle z_{m-2}, z_m \rangle) \neq \langle y_1, z_m \rangle$ для всех $h' \in G_3(x, y_1, y_2) \setminus G_3(z_m)$. Однако в группе $G(x, y_1, y_2, z_m)$, нормализующей множество $G_3(x, y_1, y_2) \setminus G_3(z_m)$, найдется элемент, сдвигающий прямую $\varphi_{z_{m-1}, x}(\langle z_{m-2}, z_m \rangle)$. Возникающее противоречие показывает, что для завершения доказательства леммы достаточно установить справедливость включения $G_3(x, y_1, y_2) \leq G_1(z_{m-2})$.

Имеем

$$\left| G_3(x, y_1)^{\Gamma(z_{m-2})} \right| = \left| T_{z_{m-2}}(z_{m-1}, \varphi_{z_m, z_{m-2}}(\langle x, z_{m-1} \rangle)) \right| = q$$

(см. начало доказательства леммы). Кроме того, полагая $Z = \langle z_{m-3}, z_{m-1} \rangle$, $Z' = \langle z_{m-2}, z_m \rangle$, на основании утверждения 1) из [3, ч. II, предложение 1.1] получаем $(G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-2}))^{\Gamma_{Z, Z'}} = 1$, а потому (с учетом [3, ч. II, предложение 1.3, 3]))

$$(G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-2}))^{\Gamma(z_{m-3})} \leq T_{z_{m-3}}(z_{m-2}, \varphi_{z_{m-1}, z_{m-3}}(\langle z_{m-2}, z_m \rangle))$$

и, в частности,

$$\left| (G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-2}))^{\Gamma(z_{m-3})} \right| \leq q.$$

Следовательно,

$$\left| G_3(x, y_1) : G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-3}, z_{m-2}) \right| \leq q^2. \quad (1.2)$$

В то же время в силу $3 \leq m \leq 4$ и [3, ч. II, предложение 1.3] имеем

$$G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-3}, z_{m-2}) \leq O_2(G(z_0, z_1)),$$

и потому

$$\begin{aligned} G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-3}, z_{m-2}) &= c(G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-3}, z_{m-2}))c^{-1} \\ &= G_3(x, y_2) \cap G_1(z_{m-3}, z_{m-2}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-3}, z_{m-2}) \leq G_3(x, y_1, y_2),$$

что с учетом $\left| G_3(x, y_1)^{\Gamma_3(y_2)} \right| = q^2$ и (1.2) влечет

$$G_3(x, y_1) \cap G_1(z_{m-3}, z_{m-2}) = G_3(x, y_1, y_2).$$

В частности, $G_3(x, y_1, y_2) \leq G_1(z_{m-2})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.6. *Имеет место утверждение 2д).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1.5 найдутся такие 5-дуга $(z_0, \dots, z_5)$ графа Γ и элемент $h_1 \in G_3(z_0, z_1)$, что $h_1(z_5) \neq z_5$. Если $[h_1, G_3(z_4, z_5)] = 1$, то $G_3(z_4, z_5) = G_3(z_4, h_1(z_5))$, что противоречит лемме 1.5. Следовательно, $[h_1, G_3(z_4, z_5)] \neq 1$, причем $[h_1, G_3(z_4, z_5)] \subseteq G_3(z_1, \dots, z_4)$ в силу леммы 1.3 и [3, ч. II, предложение 1.3]. Так как лемма 1.5 влечет $G_3(z_1, \dots, z_4) = G_4(z_2, z_3)$, то отсюда следует $G_4(z_2, z_3) \neq 1$, где $[z_2, z_3] \in E(\Gamma)$. Таким образом, $m = 4$.

Положим $U = Z(O_2(G(x))/G_5(x)) \cap (G_4(x)/G_5(x))$. Поскольку для $y \in \Gamma(x)$ согласно предыдущему абзацу справедливо $1 \neq G_4(x, y)/G_5(x) \trianglelefteq O_2(G(x))/G_5(x)$, то $U \cap G_4(x, y)/G_5(x) \neq 1$, и потому $[H_1, U] \neq 1$. Отсюда в силу леммы 1.1, 2) следует, что $|U| \geq q^3$, причем если $|U| = q^3$, то U – либо естественный $SL_3(q)$ -модуль, либо дуальный к естественному $SL_3(q)$ -модулю.

Пусть $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y_3 \in \Gamma(x) \setminus \langle y_1, y_2 \rangle$. Тогда поскольку для $y \in \Gamma(x)$ согласно лемме 1.5 имеем

$$|G_4(x)^{\Gamma_4(y)}| \leq |G_3(x, y)^{\Gamma_4(y)}| = q,$$

то

$$|G_4(x) : G_4(x, y_1, y_2, y_3)| \leq q^2 |G_4(x, y_1, y_2) : G_4(x, y_1, y_2, y_3)| \leq q^3.$$

Обозначая для $y \in \Gamma(x)$ через C_y централизатор $G_4(x, y)$ в $G(x)$, получаем отсюда, что для доказательства леммы достаточно установить справедливость включения $T_x(y) \leq C_y^{\Gamma(x)}$. Действительно, в случае $T_x(y) \leq C_y^{\Gamma(x)}$ для $y \in \Gamma(x)$ группы $\langle C_{y_1}, C_{y_2} \rangle$ и $\langle C_{y_1}, C_{y_2}, C_{y_3} \rangle$ действуют транзитивно на $\langle y_1, y_2 \rangle$ и $\Gamma(x)$ соответственно, что дает

$$G_4(x, y_1, y_2) = \bigcap_{y \in \langle y_1, y_2 \rangle} G_4(x, y), \quad G_4(x, y_1, y_2, y_3) = G_5(x).$$

Таким образом, в этом случае имеем

$$\begin{aligned} |G_4(x)^{\Gamma_5(x)}| &\leq q^2 \left| \left(\bigcap_{y \in \langle y_1, y_2 \rangle} G_4(x, y) \right)^{\Gamma_5(x)} \right| \\ &= q^2 \left| \left(\bigcap_{y \in \langle y_1, y_2 \rangle} G_4(x, y) \right)^{\Gamma_4(y_3)} \right| \leq q^3, \end{aligned}$$

откуда с учетом $|U| \geq q^3$ получаем, что $G_4(x)/G_5(x) = U$, где $|U| = q^3$, и что $\left(\bigcap_{y \in \langle y_1, y_2 \rangle} G_4(x, y) \right)^{\Gamma_5(x)}$ – группа порядка q , действующая точно на множестве $\Gamma_4(y_3)$ для (произвольной) вершины $y_3 \in \Gamma(x) \setminus \langle y_1, y_2 \rangle$ и нормализуемая при естественном действии стабилизатором прямой $\langle y_1, y_2 \rangle$ в группе H_1 . Тем самым лемма доказана в предположении, что $T_x(y) \leq C_y^{\Gamma(x)}$ для $y \in \Gamma(x)$.

Покажем, что последнее включение действительно имеет место. Для $y \in \Gamma(x)$ из $m = 4$, (1.1) и [3, ч. II, предложение 1.3] вытекает существование такой 5-дуги $(z'_0, \dots, z'_5)$ графа Γ , что $z'_4 = y$, $z'_5 = x$ и $1 \neq Z(O_2(G(z'_0, z'_1)))^{\Gamma(x)} \leq T_x(y)$.

Так как $G_4(x, y) \leq O_2(G(z'_0, z'_1))$ (см. [3, ч. II, предложение 1.3]) и $C_y \trianglelefteq G(x, y)$, отсюда следует $T_x(y) \leq C_y^{\Gamma(x)}$. Лемма доказана.

Заметим, что лемма 1.6 влечет $|G_4(x, y)^{\Gamma_5(x)}| = q^2$ для $y \in \Gamma(x)$. Действительно, по этой лемме $G_4(x, y)/G_5(x)$ – неединичная собственная подгруппа дуального к естественному $\mathbb{F}_2 H_1$ -модуля $G_4(x)/G_5(x)$, нормализуемая при естественном действии стабилизатором точки y в группе H_1 .

ЛЕММА 1.7. *Имеет место утверждение 2e).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, прежде всего, что $G_5(x) \neq 1$. Согласно лемме 1.6 найдутся такие 6-дуга $(z_0, \dots, z_6)$ графа Γ и элемент $h_1 \in G_4(z_0, z_1)$, что $z_5 \notin \varphi_{z_2, z_4}(\langle z_1, z_3 \rangle)$ и $h_1(z_6) \neq z_6$. Если $[h_1, G_4(z_5, z_6)] = 1$, то $G_4(z_5, z_6) = G_4(z_5, h_1(z_6))$, что противоречит лемме 1.6. Следовательно, $[h_1, G_4(z_5, z_6)] \neq 1$, причем $[h_1, G_4(z_5, z_6)] \subseteq G_4(z_1, \dots, z_5)$ в силу леммы 1.5 и [3, ч. II, предложение 1.3]. Предположим $G_5(x) = 1$. Тогда согласно лемме 1.6 имеем

$$[h_1, G_4(z_5, z_6), O_2(G(z_5))] \subseteq G_5(z_5) = 1.$$

В то же время, поскольку

$$(O_2(G(z_5)) \cap G(z_3))^{\Gamma(z_4)} = T_{z_4}(z_5, \langle z_3, z_5 \rangle),$$

$O_2(G(z_5)) \cap G(z_3)$ стабилизирует множество $\langle z_2, z_4 \rangle \setminus \{z_4\}$, $G_2(z_5) \leq O_2(G(z_5))$ и $G_2(z_5)^{\Gamma(z_3)} = T_{z_3}(z_4)$ (см. [3, ч. II, предложение 1.3]), найдется элемент $h_2 \in O_2(G(z_5)) \cap G(z_2, z_3)$, для которого $1 \neq h_2^{\Gamma(z_4)} \in T_{z_4}(z_5, \langle z_3, z_5 \rangle)$. При этом $h_2(z_1) \notin \langle z_1, z_3 \rangle$ в силу $z_5 \notin \varphi_{z_2, z_4}(\langle z_1, z_3 \rangle)$. Итак, $[[h_1, G_4(z_5, z_6)], h_2] = 1$, где $1 \neq [h_1, G_4(z_5, z_6)] \subseteq G_4(z_1, z_2, z_3)$, $h_2 \in G(z_2, z_3)$ и $h_2(z_1) \notin \langle z_1, z_3 \rangle$. Согласно лемме 1.6 отсюда следует

$$1 \neq [h_1, G_4(z_5, z_6)] \subseteq G_4(z_1, z_2, z_3, h_2(z_1)) = 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что $G_5(x) = 1$.

Далее, для $y \in \Gamma(x)$ группа $G_5(x)$ действует точно на $\Gamma_5(y)$. Поэтому в силу леммы 1.6 для каждого неединичного элемента $h \in G_5(x) \leq G_4(x, y)$ найдется прямая $Y_{h, y} \in [y : x]$ такая, что $h \in G_4(y')$ для всех $y' \in Y_{h, y}$ и $h \notin G_4(y')$ для всех $y' \in \Gamma(y) \setminus Y_{h, y}$. Кроме того, поскольку, как было замечено, лемма 1.6 влечет $|G_4(x, y)^{\Gamma_5(y)}| = q^2$, то из точности действия $G_5(x)$ на $\Gamma_5(y)$ следует $|G_5(x)| \leq q^2$. Теперь, полагая $U = Z(O_2(G(x))) \cap G_5(x)$ и учитывая, что $U \neq 1$ в силу $G_5(x) \neq 1$, получаем, что U – точный $\mathbb{F}_2 H_2$ -модуль порядка $\leq q^2$. Используя лемму 1.1, 3) и $|G_5(x)| \leq q^2$, заключаем отсюда, что $G_5(x) = U$ – естественный $\text{SL}_2(q)$ -модуль.

Таким образом, для доказательства леммы остается установить справедливость равенства $Y_{h, y_2} = \varphi_{y_1, y_2}(Y_{h, y_1})$ для произвольных $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $1 \neq h \in G_5(x)$. Согласно [3, ч. II, предложение 1.2, 1)] для $y_1 \in \Gamma(x)$ группа $G_1(x)$ действует транзитивно на $[y_1 : x]$, и для произвольных $Y \in [y_1 : x]$,

$y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$ стабилизатор Y в $G_1(x)$ действует транзитивно на $[y_1 : x] \setminus \{Y\}$, а потому и на $[y_2 : x] \setminus \{\varphi_{y_1, y_2}(Y)\}$. Таким образом, если $Y_{h', y_2} \neq \varphi_{y_1, y_2}(Y_{h', y_1})$ для некоторого $1 \neq h' \in G_5(x)$, то в силу леммы 1.6 число элементов, сопряженных с h' посредством элементов из $G_1(x)$, оказывается не менее

$$|[y_1 : x]|(|[y_2 : x]| - 1) = (1 + q)q,$$

что противоречит ранее доказанному равенству $|G_5(x)| = q^2$. Лемма доказана.

Итак, в случае $G_2(x) \neq 1$ имеют место утверждения 2а)–2е), что доказывает предложение 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Довольно просто восстановить с точностью до изоморфизма строение группы $O_2(G(x))$ в случае 2) предложения 1.1. Мы не будем здесь останавливаться на этом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть R – конечная группа и $R/O_2(R) \cong \text{SL}_2(q)$, где q – степень 2. Предположим, что некоторый автоморфизм силовой 2-подгруппы группы R сдвигает каждую ее неединичную подгруппу, нормальную в R . Тогда в группе R найдется подгруппа L такая, что $L/O_2(L) \cong \text{SL}_2(q)$ и для произвольной нормальной 2-подгруппы K группы R из $[L, O_2(R)] \not\leq K$ следует $[L, K] = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение вытекает из [17, теорема 6.9]. Следует лишь заметить, что в случае $F^*(R) \neq O_2(R)$ имеем $O_2(R) = Z(R)$.

Следующее утверждение доказано в [18], [19].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть группа $R \cong \text{PSL}_n(q)$, q – степень 2, естественным образом действует на проективном пространстве $X \cong \text{PG}_{n-1}(q)$, и пусть $T \leq R$ порождается некоторым набором корневых подгрупп группы R (т.е. подгрупп, состоящих из всех проективных трансвекций с одним и тем же центром и одной и той же осью). Предположим, что T действует неприводимо на X (т.е. не стабилизирует собственных подпространств пространства X). Тогда:

1) если $n = 3$, то $T = R$;

2) если $n = 4$, то либо $T = R$, либо $T \cong \text{PSp}_4(q)$ и T действует на X естественным образом, либо $q = 2$, $T \cong S_5$ (симметрическая группа степени 5), действие T на точках из X , не являющихся центрами (нетривиальных) трансвекций группы T , есть естественное действие S_5 на множестве из пяти элементов, и действие T на оставшихся точках из X есть естественное действие S_5 на неупорядоченных парах множества из пяти элементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов неориентированного связного графа Γ такая, что для $x \in V(\Gamma)$ группа $G(x)$ конечна и $G(x)^{\Gamma(x)}$ подстановочно изоморфна симметрической группе S_5 , действующей естественным образом на неупорядоченных парах множества из пяти элементов. Предположим, что $G_1(x, y)$ – 2-группа для $[x, y] \in E(\Gamma)$. Тогда $G_2(x, y) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $[x, y] \in E(\Gamma)$ имеем $G(x, y)^{\Gamma(y)} \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$, причем неединичные 3-элементы группы $G(x, y)^{\Gamma(y)}$ не стабилизируют вершин из $\Gamma(y) \setminus \{x\}$, а ее силовская 2-подгруппа стабилизирует единственную вершину из $\Gamma(y) \setminus \{x\}$.

Пусть $[x_0, x_1] \in E(\Gamma)$, $S \in \text{Syl}_2(G(x_0, x_1))$ и x_2 – единственная вершина из $\Gamma(x_1) \setminus \{x_0\}$, стабилизируемая S . Тогда для некоторого $g \in N_G(S)$ имеем $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1$. Положим $x_i = g^i(x_0)$ для $i \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $S \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$. Далее, поскольку $G_1(x_1, x_2)$ – 2-группа, то $G(x_0, x_1, x_2, x_3) = S$. Положим $R = G(x_0, x_1)$, если $G(x_0, x_1, x_2) = S$, и $R = G(x_0, x_1, x_2)$ в противном случае. Тогда $R/O_2(R) \cong S_3$ и $S \in \text{Syl}_2(R)$. Кроме того, так как группа $H^{\Gamma(x_0)}$, где $H := \langle R, g^{-1}Rg \rangle$ в случае $R = G(x_0, x_1)$ и $H := \langle R, g^{-2}Rg^2 \rangle$ в случае $R = G(x_0, x_1, x_2)$, транзитивна, то $\langle H, g^{-1}Hg \rangle$ – реберно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ , что влечет отсутствие в R неединичных нормальных подгрупп, нормализуемых элементом g . Итак, к группе R применимо предложение 1.2 (в котором следует положить $q = 2$). Поскольку $G_2(x_0) \leq G_1(x_0, x_1)$ – 2-группа, то согласно этому предложению в группе R найдется подгруппа L , $L/O_2(L) \cong S_3$, такая, что если $[L, O_2(R)] \not\leq G_2(x_0)$, то $[L, G_2(x_0)] = 1$.

Предположим, что $[L, O_2(R)] \leq G_2(x_0)$. Тогда с учетом того, что субнормальная 2-подгруппа $G_1(x_{-1}, x_0)$ группы R содержится в $O_2(R)$, имеем

$$G_1(x_{-1}, x_0) = G_1(h(x_{-1}), x_0)$$

для произвольного элемента $h \in L$. Выбирая h со свойством $h(x_{-1}) \neq x_{-1}$ (например, взяв в качестве h любой из неединичных 3-элементов L), в силу примитивности группы $G(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ получаем отсюда $G_1(x_{-1}, x_0) = G_2(x_0)$. Последнее равенство влечет $G_1(x, y) = 1$.

Предположим теперь, что $[L, O_2(R)] \not\leq G_2(x_0)$, и, следовательно, $[L, G_2(x_0)] = 1$. В этом случае для некоторого элемента $h \in G(x_0) \setminus G(x_0, x_1)$ группа $\langle L, h^{-1}Lh \rangle$ централизует $G_2(x_0)$ и действует транзитивно на $\Gamma(x_0)$. Таким образом, $C_{G(x_0)}(G_2(x_0))$ действует транзитивно на $\Gamma(x_0)$. Но тогда $C_{G(x_1)}(G_2(x_1))$ действует транзитивно на $\Gamma(x_1)$. Следовательно, $C_G(G_2(x_0, x_1))$ – реберно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ , откуда $G_2(x, y) = 1$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Другое доказательство предложения 1.4 было сообщено автору Р. Вайсом.

§ 2. Начало доказательства теоремы

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Пусть граф Γ и группа его автоморфизмов G доставляют контрпример к теореме, причем (см. [3, ч. I, § 1]), не теряя общности, считаем граф Γ деревом. Тогда для Γ и G выполняется условие (*) из [3, ч. II, § 2], что позволяет использовать применительно к ним обозначения и результаты из [3, ч. II, § 2].

В соответствии с этим зафиксируем до конца доказательства теоремы некоторый регулярный g -трек, $g \in G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, графа Γ . Напомним (см. [3, ч. II, § 2]), что для $i \in \mathbb{Z}$ через V_i обозначается n -мерное векторное пространство

над полем $\mathbb{F}_q$, ассоциированное с проективным пространством $\Gamma(x_i)$, P_i – естественное отображение $V_i \setminus \{0\}$ на $\Gamma(x_i)$. Пространства V_i имеют выделенные базисы $e_i^1, \dots, e_i^n$ такие, что, полагая $x_i^j = P_i(e_i^j)$, $1 \leq j \leq n$, имеем

$$x_i^1 = x_{i-1}, \quad x_i^n = x_{i+1};$$

$$g^k \left(P_i \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \mu_j e_i^j \right) \right) = P_{i+k} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \mu_j e_{i+k}^j \right)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$;

$$\varphi_{x_i, x_{i+2}} \left(P_i \left(\left\langle e_i^n, \sum_{1 \leq j \leq n} \mu_j e_i^j \right\rangle \right) \right) = P_{i+2} \left(\left\langle e_{i+2}^1, \sum_{2 \leq j \leq n} \mu_{j-1}^{\sigma} e_{i+2}^j \right\rangle \right)$$

для некоторого (не зависящего от i) $\sigma \in \text{Aut } \mathbb{F}_q$ и всех $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{F}_q$.

Если $a \in G(x_i)^*$, $i \in \mathbb{Z}$, то, говоря о представимости элемента $a^{\Gamma(x_i)}$ матрицей $(\alpha_{k,l})$, $\alpha_{k,l} \in \mathbb{F}_q$, $1 \leq k, l \leq n$ (без указания базиса), мы имеем в виду, что эта матрица определяет в базисе $e_i^1, \dots, e_i^n$ линейное преобразование пространства V_i , индуцирующее на $\Gamma(x_i)$ преобразование $a^{\Gamma(x_i)}$. (Таким образом, каждый элемент из $(G(x_i)^*)^{\Gamma(x_i)}$ представим $q-1$ матрицей.) Если $a \in G(x_i)^* \cap G(x_{i+1}, x_{i+2})$ и элемент $a^{\Gamma(x_i)}$ представим матрицей вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A_1 & * \end{pmatrix},$$

где $A - ((n-1) \times (n-1))$ -матрица, то элемент $a^{\Gamma(x_{i+2})}$ представим матрицей вида

$$\begin{pmatrix} * & B_1 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $B = A^{\sigma}$ и σ – тот же, что в предыдущем абзаце, автоморфизм $\mathbb{F}_q$.

Продолжим доказательство теоремы. Если (y_0, y_1, y_2) – 2-дуга графа Γ , то согласно [3, ч. II, предложение 1.3, 3)] имеем $G_2(y_0)^{\Gamma(y_2)} = T_{y_2}(y_1)$. Поэтому если Y, Y' – подпространства размерности $n' \geq 1$ проективных пространств $\Gamma(y_1)$ и $\Gamma(y_2)$ соответственно такие, что $\langle y_0, y_2 \rangle \subseteq Y$ и $y_1 \in Y'$, то $G_2^{\Gamma_{Y,Y'}}(y_0) \neq 1$. В частности, при $n' \geq 3$ граф $\Gamma_{Y,Y'}$ и группа его автоморфизмов $G^{\Gamma_{Y,Y'}}$ доставляют контрпример к теореме. Заменяя в случае необходимости граф Γ и группу G на граф $\Gamma_{Y,Y'}$ и группу $G^{\Gamma_{Y,Y'}}$, где $\dim Y = \dim Y' = n' = 3$, будем, не теряя общности, предполагать справедливость для Γ и G равенства $n = 4$. Таким образом,

$$(G(x)^*)^{\Gamma(x)} \cong \text{PSL}_4(q) \cong \text{SL}_4(q). \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что в случае $G_2(y_0, y_1) \neq 1$ для Γ и G выполняется условие $(**)$ из [3, ч. II, §3], что позволяет использовать в дальнейшем предложение 3.2

из [3, ч. II] (которое тривиально верно в случае $G_2(y_0, y_1) = 1$). Другим следствием (2.1) является равенство

$$(G(x_i, x_i^1, \dots, x_i^n)^*)^{\Gamma(x_i)} = (G(x_i)^* \cap G(x_i^1, \dots, x_i^n))^{\Gamma(x_i)}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Действительно, в силу [3, ч. II, предложение 1.2, 1)] и (2.1) имеем

$$\begin{aligned} & \langle G(x_i)^* \cap G(x_i^1, \dots, x_i^n) \cap G_1(x_i^1), G(x_i)^* \cap G(x_i^1, \dots, x_i^n) \cap G_1(x_i^n) \rangle^{\Gamma(x_i)} \\ &= (G(x_i)^* \cap G(x_i^1, \dots, x_i^n))^{\Gamma(x_i)}, \end{aligned}$$

откуда следует (2.2).

Далее, $G_2^{\Gamma_{Y,Y'}}(y_0) \neq 1$ при $n' = 2$ (см. предыдущий абзац) согласно предложению 1.1 влечет справедливость для $\Gamma_{Y,Y'}$ и $G^{\Gamma_{Y,Y'}}$ утверждения 2) этого предложения. Отсюда с учетом транзитивности действия группы G на множестве подграфов вида $\Gamma_{Z,Z'}$ графа Γ , где Z, Z' – плоскости проективных пространств $\Gamma(z), \Gamma(z')$, $[z, z'] \in E(\Gamma)$, такие, что $z \in Z', z' \in Z$, следует

ЛЕММА 2.1. *Если $[z, z'] \in E(\Gamma)$ и Z, Z' – плоскости проективных пространств $\Gamma(z), \Gamma(z')$ соответственно такие, что $z \in Z', z' \in Z$, то для $\Gamma_{Z,Z'}$ и $G^{\Gamma_{Z,Z'}}$ справедливо утверждение 2) предложения 1.1.*

ЛЕММА 2.2. 1) *Если $z_0 \in V(\Gamma)$ и $z_1, \dots, z_4 \in \Gamma(z_0)$, причем $\langle z_1, \dots, z_4 \rangle = \Gamma(z_0)$, то $G_1(z_0, z_1, \dots, z_4) = G_2(z_0)$.*

2) *Если $(z_0, \dots, z_3)$ – 3-дуга графа Γ и $G_2(z_0, z_1) \neq 1$, то $G_2(z_0, z_1)^{\Gamma(z_3)} = T_{z_3}(z_2, \varphi_{z_1, z_3}(\langle z_0, z_2 \rangle))$.*

3) *Если $z_0 \in V(\Gamma)$ и $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma(z_0)$, причем $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ – плоскость проективного пространства $\Gamma(z_0)$, то $G_2(z_0, z_1, z_2, z_3) = G_3(z_0)$.*

4) *Если $(z_0, \dots, z_4)$ – 4-дуга графа Γ , причем $z_4 \in \varphi_{z_1, z_3}(\langle z_0, z_2 \rangle)$, то $G_3(z_0, z_1) \leq G_1(z_4)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1), очевидно, достаточно установить для произвольной 2-дуги (z'_0, z'_1, z'_2) графа Γ справедливость включения $G_1(z'_0, z'_1, z'_2) \leq G_1(z)$, где z – произвольная вершина из $\langle z'_0, z'_2 \rangle \setminus \{z'_0, z'_2\}$. Пусть z' – произвольная вершина из $\Gamma(z) \setminus \{z'_1\}$. Полагая $Z = \langle z, z'_0 \rangle$, $Z' = \langle z', z'_1 \rangle$, согласно [3, ч. II, предложение 2.1] имеем

$$G_1(z'_0, z'_1, z'_2)^{\Gamma_{Z,Z'}} \leq G_1^{\Gamma_{Z,Z'}}(z'_0, z'_1, z'_2) \leq G_1^{\Gamma_{Z,Z'}}(z),$$

откуда $G_1(z'_0, z'_1, z'_2) \leq G(z')$. Таким образом, $G_1(z'_0, z'_1, z'_2) \leq G_1(z)$, что и требовалось доказать.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что, как показывают рассуждения, используемые при доказательстве предложения 1.3, 5) из [3, ч. II], либо $G_2(z_0, z_1)^{\Gamma(z_3)} = T_{z_3}(z_2)$, либо $G_2(z_0, z_1)^{\Gamma(z_3)} = T_{z_3}(z_2, \varphi_{z_1, z_3}(\langle z_0, z_2 \rangle))$. Но, полагая

$$Z = \varphi_{z_1, z_3}(\langle z_0, z_2 \rangle), \quad Z' = \langle z_1, z_3 \rangle,$$

согласно [3, ч. II, предложение 2.1] имеем

$$G_2(z_0, z_1)^{\Gamma_{Z, Z'}} \leq G_2^{\Gamma_{Z, Z'}}(z_0, z_1) = 1,$$

и потому первая из этих возможностей не реализуется. Утверждение 2) доказано.

Для доказательства утверждения 3) достаточно доказать справедливость включения $G_2(z_0, z_1, z_2, z_3) \leq G_2(z)$, где z – произвольная вершина из $\Gamma(z_0) \setminus \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$. Действительно, тогда для произвольной вершины $z' \in \Gamma(z_0)$, выбирая $z'_1, z'_2, z'_3 \in \Gamma(z_0) \setminus \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ порождающими плоскость, которая не содержит z' , имеем

$$G_2(z_0, z_1, z_2, z_3) \leq G_2(z_0, z'_1, z'_2, z'_3) \leq G_2(z'),$$

что доказывает 3). Итак, рассуждая от противного, предположим, что $G_2(z_0, z_1, z_2, z_3) \not\leq G_2(z_4)$ для некоторой вершины $z_4 \in \Gamma(z_0) \setminus \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$. Тогда $G_2(z_0, z_1, z_2, z_3) \not\leq G_1(z_5)$ для некоторой вершины $z_5 \in \Gamma(z_4) \setminus \{z_0\}$. Но согласно ранее доказанному утверждению 2) имеем

$$G_2(z_0, z_1, z_2, z_3)^{\Gamma(z_5)} \leq T_{z_5}(z_4, \varphi_{z_0, z_5}(\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle)) = 1.$$

Полученное противоречие доказывает 3).

Докажем утверждение 4). Предположим, что для некоторого элемента $h \in G_3(z_0, z_1)$ имеем $h(z) \neq z$, где $z \in \Gamma(z_4)$. Обозначим через Z (некоторую) плоскость проективного пространства $\Gamma(z_4)$, содержащую прямую $\varphi_{z_2, z_4}(\langle z_1, z_3 \rangle)$ и точку z , и через Z' некоторую плоскость проективного пространства $\Gamma(z_3)$, содержащую прямую $\langle z_2, z_4 \rangle$. Тогда $(z_0, \dots, z_4)$ – 4-дуга графа $\Gamma_{Z, Z'}$, причем, с одной стороны, $G_3(z_0, z_1)^{\Gamma_{Z, Z'}} \not\leq G_1^{\Gamma_{Z, Z'}}(z_4)$ в силу $h \in G_3(z_0, z_1)$ и $h(z) \neq z$, а с другой стороны, $G_3^{\Gamma_{Z, Z'}}(z_0, z_1) \leq G_1^{\Gamma_{Z, Z'}}(z_4)$ в силу леммы 2.1 и предложения 1.1 (утверждение 2г)). Так как $G_3(z_0, z_1)^{\Gamma_{Z, Z'}} \leq G_3^{\Gamma_{Z, Z'}}(z_0, z_1)$, это дает требуемое противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Если (z_0, z_1, z_2) – 2-дуга графа Γ и $h \in G_3(z_0, z_1, z_2) \setminus G_4(z_1)$, то для каждой вершины $z \in \Gamma(z_1) \setminus \langle z_0, z_2 \rangle$ найдется прямая Z_z проективного пространства $\Gamma(z)$ такая, что $h \in G_2(z')$ для всех $z' \in Z_z$ и $h \in G_1(z') \setminus G_2(z')$ для всех $z' \in \Gamma(z) \setminus Z_z$. При этом если $z' \in \Gamma(z) \setminus Z_z$ и $z'' \in \Gamma(z') \setminus \varphi_{z_1, z'}(\langle z, z_0, z_2 \rangle)$, то $1 \neq h^{\Gamma(z'')}(z') \in T_{z''}(z', \varphi_{z, z''}(\langle Z_z, z' \rangle))$. Наконец, если z_3, z_4 – различные вершины из $\Gamma(z_1) \setminus \langle z_0, z_2 \rangle$, то $Z_{z_4} = \varphi_{z_3, z_4}(Z_{z_3})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем прежде всего, что для произвольной вершины $z_3 \in \Gamma(z_1) \setminus \langle z_0, z_2 \rangle$ группа $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}$ действует точно на $\Gamma_3(z_3)$. Если z – произвольная вершина из $\Gamma(z_1) \setminus \langle z_0, z_2, z_3 \rangle$, то согласно лемме 2.2, 4) для произвольной вершины $z' \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$ имеем $G_3(z_0, z_1, z_2, z_3) \leq G_2(z')$, и потому $G_3(z_0, z_1, z_2, z_3) \leq G_3(z)$. Теперь если z – произвольная вершина из $\Gamma(z_1)$, то для некоторого $h' \in G(z_1)$ вершины $h'(z_0), h'(z_2), h'(z_3), h'^{-1}(z)$ содержатся в $\Gamma(z_1) \setminus \langle z_0, z_2, z_3 \rangle$, откуда $G_3(z_0, z_1, z_2, z_3) \leq G_3(z)$, что и утверждалось.

Пусть $z \in \Gamma(z_1) \setminus \langle z_0, z_2 \rangle$, $z'_1 \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$, $z'_2 \in \Gamma(z) \setminus \langle z_1, z'_1 \rangle$. Тогда в силу точности действия группы $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}$ на $\Gamma_3(z)$ (см. предыдущий абзац) и леммы 2.2, 3) группа $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}$ действует точно на $\Gamma_2(z'_1) \cup \Gamma_2(z'_2)$. Далее, пусть

$$z''_1 \in \Gamma(z'_1) \setminus \varphi_{z_1, z'_1}(\langle z, z_0, z_2 \rangle), \quad z''_2 \in \Gamma(z'_2) \setminus \varphi_{z_1, z'_2}(\langle z, z_0, z_2 \rangle).$$

Так как по лемме 2.2, 4) имеем $G_3(z_0, z_1, z_2) \leq G_1(z'')$ для произвольной вершины $z'' \in \varphi_{z_1, z'_i}(\langle z, z_0 \rangle) \cup \varphi_{z_1, z'_i}(\langle z, z_2 \rangle)$, $i = 1, 2$, то согласно лемме 2.2, 1) группа $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_2(z'_i)}$ действует точно на $\Gamma(z'_i)$, $i = 1, 2$. Следовательно, группа $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}$ действует точно на $\Gamma(z'_1) \cup \Gamma(z'_2)$. Поскольку при этом в силу леммы 2.2, 2) имеем

$$\begin{aligned} G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma(z'_1)} &\leq T_{z'_1}(z'_1, \varphi_{z, z'_1}(\langle z_1, z'_1 \rangle)), \\ (G_3(z_0, z_1, z_2) \cap G_1(z'_1))^{\Gamma(z'_2)} &= (G_3(z_0, z_1, z_2) \cap G_2(z'_1))^{\Gamma(z'_2)} \\ &\leq T_{z'_2}(z'_2, \varphi_{z, z'_2}(\langle z_1, z'_1, z'_2 \rangle)), \end{aligned}$$

то $|G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}| \leq q^3$, причем

$$(G_3(z_0, z_1, z_2) \cap G_2(z'_1))^{\Gamma(z'_2)} = T_{z'_2}(z'_2, \varphi_{z, z'_2}(\langle z_1, z'_1, z'_2 \rangle))$$

в случае $|G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}| = q^3$.

Для доказательства первого и второго утверждений леммы теперь достаточно показать, что:

- (а) $|G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}| = q^3$, и
- (б) все неединичные элементы группы $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}$ сопряжены в группе $G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)}$.

Действительно, два первых утверждения леммы легко следуют из предыдущего и утверждений (а), (б), если заметить, что (б) влечет

$$G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)} \leq Z(O_2(G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)})),$$

а множество $\langle z_1, z'_1 \rangle \setminus \{z_1\}$ является $O_2(G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)})$ -орбитой, содержащей z'_1 .

Для доказательства утверждений (а) и (б) в силу $|G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}| \leq q^3$ (см. выше) достаточно показать, что факторгруппа группы $G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)}$ по централизатору в ней подгруппы $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}$ содержит секцию, изоморфную $\text{PSL}_3(q)$. Предположим, что указанная факторгруппа такой секции не имеет. Тогда в силу [3, ч. II, предложение 1.2, 1)] централизатор группы $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}$ в группе $G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)}$ содержит подгруппу, действующую на $[z : z_1]$, где $z \in \Gamma(z_1) \setminus \langle z_0, z_2 \rangle$, как $\text{PSL}_3(q)$. Так как по условию $G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)} \neq 1$, то для некоторого $h_1 \in G_3(z_0, z_1, z_2)$ имеем

$$1 \neq h_1^{\Gamma_4(z_1)} \in Z(O_2(G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)})).$$

Обозначим через C централизатор элемента $h_1^{\Gamma_4(z_1)}$ в группе $G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)}$. Группа C содержит подгруппу, действующую на $[z : z_1]$ как $\text{PSL}_3(q)$. Кроме того, с

учетом [3, ч. II, предложение 1.3, 1)] имеем $T_z(z_1) \leq C^{\Gamma(z)}$. Отсюда следует, что $1 \neq h_1^{\Gamma(z_1'')} \in T_{z_1'}(z_1')$ для некоторых $z_1' \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$, $z_1'' \in \Gamma(z_1') \setminus \{z\}$, причем группа $C(z_1')$ не стабилизирует плоскостей проективного пространства $\Gamma(z)$. Поскольку в силу $C \leq G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)}$ группа $C(z_1')$ стабилизирует множество $\langle z, z_1'' \rangle \setminus \{z\}$, то из

$$G_2(z_1)^{\Gamma_4(z_1)} \leq O_2(G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)}) \leq C, \quad G_2(z_1)^{\Gamma(z_1')} = T_{z_1'}(z)$$

(см. [3, ч. II, предложение 1.3]) следует, что, более того, группа $C(z_1', z_1'')$ не стабилизирует плоскостей проективного пространства $\Gamma(z)$. Но тогда группа $C(z_1', z_1'')^{\Gamma(z_1')}$ не стабилизирует ось трансекции $h_1^{\Gamma(z_1'')}$, и потому $[h_1^{\Gamma_4(z_1')}, C] \neq 1$, вопреки выбору C . Это доказывает (а) и (б), а вместе с ними первое и второе утверждения леммы.

Докажем последнее утверждение леммы. Пусть z_3, z_4 – различные вершины из $\Gamma(z_1) \setminus \langle z_0, z_2 \rangle$. Тогда если $Z_{z_4} \neq \varphi_{z_3, z_4}(Z_{z_3})$, то с учетом транзитивности действия группы $G_1(z_1)$ на $[z_3 : z_1]$ и группы $G_1(z_1) \cap G(Z_{z_3})$ на $[z_4 : z_1] \setminus \{\varphi_{z_3, z_4}(Z_{z_3})\}$ (см. [3, ч. II, предложение 1.2, 1)]) получаем, подсчитывая число сопряженных с $h^{\Gamma_4(z_1)}$ элементов группы $G_1(z_1)^{\Gamma_4(z_1)}$, что

$$|G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}| > (1 + q + q^2)(q + q^2).$$

Последнее неравенство, однако, противоречит ранее доказанному равенству $|G_3(z_0, z_1, z_2)^{\Gamma_4(z_1)}| = q^3$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Если $G_7(x_i) \neq 1$, $i \in \mathbb{Z}$, то $G_7(x_i) \not\leq G_1(x_{i+7})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $G_7(x_0) \neq 1$ влечет $G_7(x_0) \not\leq G_1(x_7)$. Предположим, что, напротив, $G_7(x_0) \neq 1$, но $G_7(x_0) \leq G_1(x_7)$.

Согласно [3, ч. II, предложение 1.3, 3)] в группе $G_1(x_0, x_1)$ найдется элемент h такой, что $1 \neq h^{\Gamma(x_2)} \in T_{x_2}(x_1, \langle x_2^1, x_2^3, x_2^4 \rangle)$. Поскольку в силу [3, ч. II, предложение 1.3, 1)] h – 2-элемент, причем $h \in G(x_3)^*$ и $h^{[x_3: x_2]} = 1$, то $h^{\Gamma(x_3)} \in T_{x_3}(x_2)$. Следовательно, домножая элемент h на подходящий элемент из $G_2(x_1)$, на основании [3, ч. II, предложение 1.3, 4)] предполагаем, не теряя общности, что $h^{\Gamma(x_3)} \in T_{x_3}(x_2, \langle x_3^1, x_3^3, x_3^4 \rangle)$. Далее, в силу $h \in G(x_3^3)$ элемент h оставляет на месте прямую $\langle x_3, x_5 \rangle = \varphi_{x_2, x_4}(\langle x_2^3, x_2^4 \rangle)$. Следовательно, домножая элемент h на подходящий элемент из $G_3(x_1)$, на основании [3, ч. II, предложение 1.3, 5)] предполагаем, не теряя общности, что $h \in G(x_5)$. Из $h \in G(x_3^3)$ теперь следует, что элемент h оставляет на месте прямую $\langle x_4, x_6 \rangle = \varphi_{x_3, x_5}(\langle x_3^3, x_3^4 \rangle)$. Поэтому, домножая элемент h на подходящий элемент из $G_3(x_2)$, на основании [3, ч. II, предложение 1.3, 5)] предполагаем, не теряя общности, что $h \in G(x_6)$. Итак, h – 2-элемент группы $G(x_0, \dots, x_6)^*$, причем $h^{\Gamma(x_2)}$ представим матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}_q$. Элементы $h^{\Gamma(x_4)}$, $h^{\Gamma(x_6)}$ представимы при этом (см. начало параграфа) соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^{\sigma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $h \in G(x_0) \leq N_G(G_7(x_0))$ и по предположению $G_7(x_0) \leq G_1(x_7)$, то $G_7(x_0) \leq G_1(h(x_7))$, где (согласно виду $h^{\Gamma(x_6)}$) $h(x_7) \in \Gamma(x_6) \setminus \langle x_6^1, x_6^2, x_6^4 \rangle$. Поскольку, кроме того, лемма 2.2, 4) влечет $G_7(x_0) \leq G_1(x_6^2)$, то на основании леммы 2.2, 1) заключаем

$$G_7(x_0) \leq G_1(x_6, x_6^1, x_6^2, x_6^4, h(x_7)) = G_2(x_6).$$

Из $g^{-1}hg \in G(x_0) \leq N_G(G_7(x_0))$ теперь следует

$$G_7(x_0) \leq G_2(x_4, x_5, x_6, g^{-1}hg(x_6)),$$

где $g^{-1}hg(x_6) \in \Gamma(x_5) \setminus \langle x_4, x_6 \rangle$, что согласно лемме 2.2, 3) влечет $G_7(x_0) \leq G_3(x_5)$.

Покажем, что группа $G(x_0, \dots, x_4)$ действует транзитивно на $\Gamma(x_4) \setminus \langle x_4^1, x_4^2 \rangle$. Согласно [3, ч. II, предложение 1.2, 1)] стабилизатор прямой $\langle x_1, x_3 \rangle$ в группе $G_1(x_3)$ действует транзитивно на множестве $\Gamma(x_4) \setminus \langle x_4^1, x_4^2 \rangle$. Отсюда с учетом [3, ч. II, предложение 1.3, 3)] следует транзитивность действия на этом множестве также группы $G(x_1, \dots, x_4) \cap G_1(x_3)$, а потому и стабилизатора прямой $\langle x_0, x_2 \rangle$ в группе $G(x_1, \dots, x_4)$. Теперь с учетом [3, ч. II, предложение 1.3, 4)] получаем требуемое. Заметим, что из транзитивности действия группы $G(x_0, \dots, x_4)$ на $\Gamma(x_4) \setminus \langle x_4^1, x_4^2 \rangle$ вытекает транзитивность действия группы $G(x_0, \dots, x_3) = g^{-1}G(x_1, \dots, x_4)g$ на $\Gamma(x_3) \setminus \langle x_3^1, x_3^2 \rangle = g^{-1}(\Gamma(x_4) \setminus \langle x_4^1, x_4^2 \rangle)$.

Из $G_7(x_0) \leq G_3(x_5)$ и транзитивности действия группы $G(x_0, \dots, x_4)$ на $\Gamma(x_4) \setminus \langle x_4^1, x_4^2 \rangle$ следует $G_7(x_0) \leq G_3(x'_4)$ для всех $x'_4 \in \Gamma(x_4) \setminus \langle x_4^1, x_4^2 \rangle$. Отсюда на основании леммы 2.3 заключаем $G_7(x_0) \leq G_4(x_4)$.

Далее, из $G_7(x_0) \leq G_4(x_4)$ и транзитивности действия группы $G(x_0, \dots, x_3)$ на $\Gamma(x_3) \setminus \langle x_3^1, x_3^2 \rangle$ следует $G_7(x_0) \leq G_4(x'_3)$ для всех $x'_3 \in \Gamma(x_3) \setminus \langle x_3^1, x_3^2 \rangle$. Предположим, что $G_7(x_0) \not\leq G_5(x_3)$. Тогда найдется 5-дуга $(y_0 = x_3, y_1, \dots, y_5)$ графа Γ такая, что $h'(y_5) \neq y_5$ для некоторого $h' \in G_7(x_0)$. Обозначим через Y (некоторую) плоскость пространства $\Gamma(y_0)$, содержащую

$$\Phi_{y_0}(y_5) = \varphi_{y_2, y_0}(\langle \varphi_{y_4, y_2}(\langle y_3, y_5 \rangle), y_1 \rangle),$$

и через Y' (некоторую) плоскость пространства $\Gamma(y_1)$, содержащую прямую $\varphi_{y_3, y_1}(\langle y_2, y_4 \rangle)$ и точку y_0 . Тогда, с одной стороны, из $h' \in G_7(x_0)$ и $h'(y_5) \neq y_5$ следует $G_7(x_0)^{\Gamma_{Y, Y'}} \not\leq G_5^{\Gamma_{Y, Y'}}(x_3)$, а с другой стороны, из $G_7(x_0) \leq G_4(x'_3)$ для всех $x'_3 \in \Gamma(x_3) \setminus \langle x_3^1, x_3^2 \rangle$ и

$$|Y \cap (\Gamma(x_3) \setminus \langle x_3^1, x_3^2 \rangle)| > 1 + q$$

в силу леммы 2.1 и предложения 1.1 (утверждение 2д)) следует

$$G_7(x_0)^{\Gamma_{Y,Y'}} \leq G_5^{\Gamma_{Y,Y'}}(x_3).$$

Полученное противоречие означает, что $G_7(x_0) \leq G_5(x_3)$.

Так как группа $G(x_0)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ , удаленных от вершины x_0 на расстояние 3, то из $G_7(x_0) \leq G_5(x_3)$ следует $G_7(x_0) \leq G_8(x_0)$, т.е. $G_7(x_0) = 1$. Противоречие с начальным предположением завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2.5. *Если $G_r(x_i) \not\leq G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ для некоторых $i \in \mathbb{Z}$, $r \geq 2$, то*

$$G_r(x_i) \cap N_G(G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)) \not\leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство леммы 4 из [3, ч. I, § 6], кроме заключительного предложения, которое должно быть заменено на следующее: поскольку из $g' \in G_r(x_i)$ следует, что g' — 2-элемент (см. [3, ч. II, предложение 1.3, 1])), то из $g' \notin G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ с учетом [3, ч. II, (2.2)] и $g' \in G(x_i, x_{i+1})^*$ вытекает $g' \notin G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$.

§ 3. Основная лемма

ЛЕММА 3.1. $G_7(z_0, z_1) = 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G_7(z_0, z_1) \neq 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$. Если $G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = 1$, то получаем противоречие с [3, ч. II, предложение 3.2]. Следовательно, $G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \neq 1$. Положим

$$N = N_G(G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)).$$

Ясно, что:

$$N \text{ действует интранзитивно на } E(\Gamma), \quad (3.1)$$

$$g \in N, \quad (3.2)$$

$$G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \leq N. \quad (3.3)$$

Из (3.3) в силу регулярности трека $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ и (2.2) следует

$$(G(x_i)^* \cap G(x_i^1, \dots, x_i^n))^{\Gamma(x_i)} \leq N(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^{\Gamma(x_i)}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Далее, поскольку конечность группы $G(x)$ влечет

$$G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = G(\dots, x_{i-1}, x_i) = G(x_i, x_{i+1}, \dots), \quad i \in \mathbb{Z},$$

то из лемм 2.4, 2.5 вытекает

$$N_7(x_i) \not\leq G(\dots, x_{i-1}, x_i) \cup G(x_i, x_{i+1}, \dots), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

Обозначим через t наибольшее натуральное число со свойством $G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1})^{\Gamma(x_i+t)} \neq 1$ для $i \in \mathbb{Z}$ (существование t следует из конечности $G(x)$ и, например, [3, ч. II, предложение 1.3, 3]); очевидно, t не зависит от выбора i). Поскольку

$$\begin{aligned} & |G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1}) : G_1(x_i, \dots, x_{i+t-1})| \\ &= |G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1}) : G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t})| > 1, \\ & |G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t}) : G_1(x_i, \dots, x_{i+t})| \\ &= |G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t}) : G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t+1})| = 1, \end{aligned}$$

то t одновременно является наибольшим натуральным числом, для которого $G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1})^{\Gamma(x_i)} \neq 1$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} & [G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1}), G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)] \\ & \leq G_1(x_i, \dots, x_t) = G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \end{aligned}$$

и потому $G_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1}) \leq N$. Таким образом, с учетом [3, ч. II, предложение 1.3, 3)] имеем

$$1 \neq N_1(x_{i-t+1}, \dots, x_{i-1})^{\Gamma(x_i)} \leq T_{x_i}(x_{i-1}), \quad (3.6)$$

$$1 \neq N_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1})^{\Gamma(x_i)} \leq T_{x_i}(x_{i+1}). \quad (3.7)$$

Заметим, что лемма 2.4 влечет $t \geq 14$.

Обозначим через T нормальную подгруппу группы $N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$, порожденную как нормальная подгруппа множеством $N(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cap (T_{x_0}(x_0^1) \cup T_{x_0}(x_0^4))$. Заметим, что согласно (3.4) группа T порождается некоторым множеством корневых подгрупп группы $G(x_0)^{\Gamma(x_0)}$.

Аналогично доказательству леммы 5 из [3, ч. I, § 6] дальнейшее доказательство леммы состоит в последовательном рассмотрении имеющихся возможностей для группы T и получении противоречия в каждом случае.

Этому систематическому рассмотрению нам будет удобно предпослать рассмотрение следующих двух специальных случаев:

$$(a) \quad q = 2 \text{ и } T = N(x_0)^{\Gamma(x_0)} = G(x_0, P_0(e_0^1 + e_0^2 + e_0^3 + e_0^4))^{\Gamma(x_0)};$$

(б) $T = T_1 \times T_2$, $\langle x_0^1, x_0^3 \rangle$ и $\langle x_0^2, x_0^4 \rangle$ — T -допустимые подпространства, группа $T_1 \cong \text{PSL}_2(q)$ действует естественным образом на точках $\langle x_0^1, x_0^3 \rangle$ и тривиально на точках $\langle x_0^2, x_0^4 \rangle$, группа $T_2 \cong \text{PSL}_2(q)$ действует тривиально на точках $\langle x_0^1, x_0^3 \rangle$ и естественным образом на точках $\langle x_0^2, x_0^4 \rangle$.

СЛУЧАЙ (а). Положим $H = \langle N(x_0), g \rangle \leq N$, и пусть Δ – подграф графа Γ , порожденный H -орбитой (на $V(\Gamma)$), содержащей вершину x_0 . Обозначим через $\overline{}$ естественный гомоморфизм $H \rightarrow H^{V(\Delta)}$. Тогда, с учетом предположений случая (а), Δ – дерево, $\overline{H}$ – транзитивная на множестве 1-дуг группа автоморфизмов Δ , для $y \in V(\Delta)$ множество $\Gamma(y) \setminus \Delta(y)$ состоит из единственной вершины, которая в дальнейшем обозначается через $\tilde{y}$, и $\overline{H}(y)^{\Delta(y)} = G(y, \tilde{y})^{\Delta(y)}$. Заметим также, что $x_i \in V(\Delta)$ и $\tilde{x}_i = P_i(e_i^1 + e_i^2 + e_i^3 + e_i^4)$ для $i \in \mathbb{Z}$. Кроме того, поскольку из $H \leq N$ следует $V(\Delta) \subseteq \text{Fix}(G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots))$, а из $q = 2$ и регулярности g -трека $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ следует $G_1(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, то

$$\overline{H}(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = 1. \quad (3.8)$$

Для $[y_0, y_1] \in E(\Delta)$ группа $\overline{H}(y_0, y_1)^{\Delta(y_i)}$, $i = 0, 1$, есть расширение группы

$$T_{y_i}(\tilde{y}_i, \langle \tilde{y}_i, y_{1-i} \rangle)^{\Delta(y_i)} \times T_{y_i}(y_{1-i}, \langle \tilde{y}_i, y_{1-i} \rangle)^{\Delta(y_i)}$$

посредством $\text{SL}_2(2)$, причем каждый из прямых множителей является естественным $\text{SL}_2(2)$ -модулем. Поскольку согласно, например, [3, ч. II, предложение 1.3] имеем

$$\overline{H}_1(y_0, y_1) = \overline{H_1(y_0, y_1)} \leq O_2(\overline{H}(y_0, y_1)), \quad (3.9)$$

то отсюда следует, что для $i = 0, 1$

$$\begin{aligned} O_2(\overline{H}(y_0, y_1))^{\Delta(y_i)} &= O_2(\overline{H}(y_0, y_1)^{\Delta(y_i)}) \\ &= T_{y_i}(\tilde{y}_i, \langle \tilde{y}_i, y_{1-i} \rangle)^{\Delta(y_i)} \times T_{y_i}(y_{1-i}, \langle \tilde{y}_i, y_{1-i} \rangle)^{\Delta(y_i)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

причем

$$O_2(\overline{H}(y_0, y_1)) = \left\{ h \in \overline{H}(y_0, y_1) \mid h^{\Delta(y_i)} \in O_2(\overline{H}(y_0, y_1)^{\Delta(y_i)}), i = 0, 1 \right\}. \quad (3.11)$$

Кроме того, отсюда с учетом (3.7) следует, что

$$T_{y_0}(y_1, \langle \tilde{y}_0, y_1 \rangle)^{\Delta(y_0)} \leq \overline{H}_1(y_1)^{\Delta(y_0)}.$$

Мы покажем, что, более того,

$$\overline{H}(y_0, y_1)^{\Delta(y_0)} = \overline{H}_1(y_1)^{\Delta(y_0)}. \quad (3.12)$$

Для доказательства (3.12) выберем вершины $y' \in \Delta(y_0) \setminus \langle \tilde{y}_0, y_1 \rangle$, $y'' \in \Delta(y_0) \setminus \langle \tilde{y}_0, y_1, y' \rangle$. Тогда, поскольку

$$T_{y_0}(y', \langle \tilde{y}_0, y' \rangle)^{\Delta(y_0)} \leq \overline{H}_1(y')^{\Delta(y_0)}$$

(см. выше), для некоторого $h \in H_1(y')$ имеем

$$1 \neq h^{\Gamma(y_0)} \in T_{y_0}(y', \langle \tilde{y}_0, y_1, y' \rangle).$$

При этом $h^{[y':y_0]} = 1$ влечет $h^{[y_1:y_0]} = 1$, т.е. $h^{\Gamma(y_1)} \in T_{y_1}(y_0, \langle y_0, \tilde{y}_1 \rangle)$. Так как

$$T_{y_1}(y_0, \langle y_0, \tilde{y}_1 \rangle)^{\Delta(y_1)} \leq \overline{H}_1(y_0)^{\Delta(y_1)},$$

то, домножая в случае необходимости элемент h на подходящий элемент из $H_1(y_0)$, получаем такой элемент $h_1 \in H_1(y_1)$, что

$$1 \neq h_1^{\Gamma(y_0)} \in T_{y_0}(y', \langle \tilde{y}_0, y_1, y' \rangle).$$

Аналогично находим такой элемент $h_2 \in H_1(y_1)$, что

$$1 \neq h_2^{\Gamma(y_0)} \in T_{y_0}(y'', \langle \tilde{y}_0, y_1, y'' \rangle).$$

Подгруппа $\langle \bar{h}_1, \bar{h}_2 \rangle$ группы $\overline{H}_1(y_1)$ такова, что $\langle \bar{h}_1, \bar{h}_2 \rangle^{\Delta(y_0)} \cong \text{SL}_2(2)$ и

$$\overline{H}(y_0, y_1)^{\Delta(y_0)} = O_2(\overline{H}(y_0, y_1)^{\Delta(y_0)}) \rtimes \langle \bar{h}_1, \bar{h}_2 \rangle^{\Delta(y_0)},$$

а подгруппа $[O_2(\overline{H}(y_0, y_1)), \langle \bar{h}_1, \bar{h}_2 \rangle]$ группы $\overline{H}_1(y_1)$ согласно (3.10) индуцирует на $\Delta(y_0)$ группу $O_2(\overline{H}(y_0, y_1)^{\Delta(y_0)})$. Это доказывает (3.12).

Следствием (3.12) является справедливость для $[y_0, y_1] \in E(\Delta)$, $y_2 \in \Delta(y_1) \setminus \langle y_0, \tilde{y}_1 \rangle$ равенства

$$\overline{H}_1(y_1, y_2)^{\Delta(y_0)} = T_{y_0}(y_1, \langle \tilde{y}_0, y_1 \rangle)^{\Delta(y_0)}. \quad (3.13)$$

Действительно, с учетом (3.7) и [3, ч. II, предложение 1.3, 3)] имеем

$$1 \neq \overline{H}_1(y_1, y_2)^{\Delta(y_0)} = \overline{H}_1(y_1, y_2)^{\Delta(y_0)} \leq T_{y_0}(y_1, \langle \tilde{y}_0, y_1 \rangle)^{\Delta(y_0)}.$$

Но тогда согласно (3.12) подгруппа $[\overline{H}_1(y_1, y_2), \overline{H}_1(y_1)]$ группы $\overline{H}_1(y_0, y_1)$ индуцирует на $\Delta(y_0)$ группу $T_{y_0}(y_1, \langle \tilde{y}_0, y_1 \rangle)^{\Delta(y_0)}$. Это доказывает (3.13).

Пусть (y_0, y_1, y_2) – 2-дуга графа Δ . Если $y_2 \notin \langle y_0, \tilde{y}_1 \rangle$, то в группе H найдется элемент h такой, что $h(y_i) = x_i$, и потому $h(\tilde{y}_i) = \tilde{x}_i$ для $i = 0, 1, 2$. Поскольку

$$\langle x_1, \tilde{x}_2 \rangle = P_2(\langle e_2^1, e_2^1 + \dots + e_2^4 \rangle) = \varphi_{x_0, x_2}(P_0(\langle e_0^4, e_0^1 + \dots + e_0^4 \rangle)) = \varphi_{x_0, x_2}(\langle \tilde{x}_0, x_1 \rangle),$$

отсюда следует, что $\varphi_{y_0, y_2}(\langle \tilde{y}_0, y_1 \rangle) = \langle y_1, \tilde{y}_2 \rangle$. Если же $y_2 \in \langle y_0, \tilde{y}_1 \rangle \setminus \{\tilde{y}_1\}$, то, выбирая вершину $y \in \Delta(y_1) \setminus \langle y_0, \tilde{y}_1 \rangle$ и применяя последнее равенство к 2-дугам (y_0, y_1, y) и (y_2, y_1, y) , на основании [3, ч. II, предложение 1.2, 2)] получаем его справедливость для 2-дуги (y_0, y_1, y_2) . Итак, для произвольной 2-дуги (y_0, y_1, y_2) графа Δ имеем

$$\varphi_{y_0, y_2}(\langle \tilde{y}_0, y_1 \rangle) = \langle y_1, \tilde{y}_2 \rangle. \quad (3.14)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, что представляет собой группа

$$\overline{H}_{(y_0, y_1, y_2)} := O_2(\overline{H}(y_0, y_1)) \cap O_2(\overline{H}(y_1, y_2)),$$

где (y_0, y_1, y_2) – 2-дуга графа Δ , $y_2 \notin \langle y_0, \tilde{y}_1 \rangle$. Заметим, прежде всего, что из $h \in \overline{H}(y_0, y_1, y_2)$ и $h^{\Delta(y_i)} \in T_{y_i}(y_1, \langle y_1, \tilde{y}_i \rangle)^{\Delta(y_i)} \times T_{y_i}(\tilde{y}_i, \langle y_1, \tilde{y}_i \rangle)^{\Delta(y_i)}$ для некоторого $i \in \{0, 2\}$ в силу (3.14) следует

$$h^{\Delta(y_{2-i})} \in T_{y_{2-i}}(y_1, \langle y_1, \tilde{y}_{2-i} \rangle)^{\Delta(y_{2-i})} \times T_{y_{2-i}}(\tilde{y}_{2-i}, \langle y_1, \tilde{y}_{2-i} \rangle)^{\Delta(y_{2-i})}.$$

Теперь с использованием (3.10) и (3.11) легко проверяется справедливость равенства

$$\begin{aligned} \overline{H}_{(y_0, y_1, y_2)} = \left\{ h \in \overline{H}(y_0, y_1, y_2) \mid h^{\Delta(y_1)} \in T_{y_1}(\tilde{y}_1, \langle y_0, \tilde{y}_1, y_2 \rangle)^{\Delta(y_1)}, \right. \\ \left. h^{\Delta(y_i)} \in T_{y_i}(y_1, \langle y_1, \tilde{y}_i \rangle)^{\Delta(y_i)} \times T_{y_i}(\tilde{y}_i, \langle y_1, \tilde{y}_i \rangle)^{\Delta(y_i)} \right. \\ \left. \text{для некоторого (а тогда и для каждого) } i \in \{0, 2\} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.10) следует

$$\overline{H}_{(y_0, y_1, y_2)}^{\Delta(y_1)} = T_{y_1}(\tilde{y}_1, \langle y_0, \tilde{y}_1, y_2 \rangle)^{\Delta(y_1)}. \quad (3.15)$$

Кроме того, отсюда и из (3.12), (3.14) и (3.10) следует

$$(\overline{H}_{(y_0, y_1, y_2)} \cap \overline{H}_1(y_1))^{\Delta(y)} = O_2(\overline{H}(y_1, y)^{\Delta(y)}), \quad y \in \Delta(y_1). \quad (3.16)$$

Перечисленных свойств группы $\overline{H}_{(y_0, y_1, y_2)}$ достаточно для дальнейшего.

Пусть $[y_0, y_1] \in E(\Delta)$. Согласно (3.5) и (3.9) группа $\overline{H}_7(y_0)\overline{H}_7(y_1)$ является неединичной нормальной подгруппой группы $\overline{H}(y_0, y_1)$, содержащейся в $O_2(\overline{H}(y_0, y_1))$. Поэтому, полагая

$$\overline{H}_{[y_0, y_1]} := (\overline{H}_7(y_0)\overline{H}_7(y_1)) \cap Z(O_2(\overline{H}(y_0, y_1))),$$

имеем $\overline{H}_{[y_0, y_1]} \neq 1$.

Покажем, что

$$\overline{H}_{[y_0, y_1]} \neq \overline{H}_{[y_1, y_2]}, \quad [y_0, y_1] \in E(\Delta), \quad y_2 \in \Delta(y_1) \setminus \langle y_0, \tilde{y}_1 \rangle. \quad (3.17)$$

Поскольку в рассматриваемом случае (а) имеем $\langle \overline{H}(y_0, y_1), \overline{H}(y_1, y_2) \rangle = \overline{H}(y_1)$, то из $\overline{H}_{[y_0, y_1]} = \overline{H}_{[y_1, y_2]}$ следовало бы $\overline{H}_{[y_0, y_1]} \trianglelefteq \overline{H}(y_1)$, а потому в силу транзитивности действия $\overline{H}$ на множестве 1-дуг Δ также $\overline{H}_{[y_0, y_1]} \trianglelefteq \overline{H}(y_0)$. Однако реберно-транзитивная группа автоморфизмов $\langle \overline{H}(y_0), \overline{H}(y_1) \rangle$ графа Δ не содержит неединичных нормальных подгрупп, стабилизирующих ребро, что доказывает (3.17).

Далее, из $\bar{H}_{[y_0, y_1]} \neq 1$, $[y_0, y_1] \in E(\Delta)$, и из (3.8) в силу конечности группы $\bar{H}(x)$ и (3.2) вытекает существование таких натуральных $t', t'' \geq 6$, что для каждого $i \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}_{[x_i, x_{i+1}]} &\leq \bar{H}_1(x_{i-t'+1}, \dots, x_i), & \bar{H}_{[x_i, x_{i+1}]}^{\Delta(x_{i-t'})} &\neq 1, \\ \bar{H}_{[x_i, x_{i+1}]} &\leq \bar{H}_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t''}), & \bar{H}_{[x_i, x_{i+1}]}^{\Delta(x_{i+t''+1})} &\neq 1. \end{aligned}$$

Если $\bar{h} \in \bar{H}_{[x_i, x_{i+1}]}$, где $h \in H$, $i \in \mathbb{Z}$, причем $\bar{h} \in \bar{H}_1(x_{j+1}, \dots, x_{i+1}) \setminus \bar{H}_1(x_j)$, где $j < i$, то с учетом (3.13) либо

$$h^{\Gamma(x_j)} \in T_{x_j}(x_{j+1}, \langle \tilde{x}_j, x_{j+1} \rangle) \setminus T_{x_j}(x_{j+1}, \langle x_{j-1}, \tilde{x}_j, x_{j+1} \rangle),$$

либо

$$1 \neq h^{\Gamma(x_j)} \in T_{x_j}(x_{j+1}, \langle x_{j-1}, \tilde{x}_j, x_{j+1} \rangle).$$

В последнем случае в силу $h \in H_1(x_{j+1})$ имеем $h^{[x_{j-1}:x_j]} = 1$, т.е. $h^{\Gamma(x_{j-1})} \in T_{x_{j-1}}(x_j, \langle \tilde{x}_{j-1}, x_j \rangle)$, причем $h^{\Gamma(x_{j-1})} \notin T_{x_{j-1}}(x_j, \langle x_{j-2}, \tilde{x}_{j-1}, x_j \rangle)$, поскольку в противном случае элементы $h^{\Gamma(x_{j-2})}$ и $(g^{-2}hg^2)^{\Gamma(x_{j-2})}$ представимы соответственно матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(см. начало §2), откуда $[\bar{h}, \bar{g}^{-2}\bar{h}\bar{g}^2] \neq 1$, вопреки $\bar{h} \in Z(O_2(\bar{H}(x_i, x_{i+1})))$, $\bar{g}^{-2}\bar{h}\bar{g}^2 \in \bar{H}_7(x_{i-2})\bar{H}_7(x_{i-1}) \leq O_2(\bar{H}(x_i, x_{i+1}))$ (см. (3.9)). Итак, для любого элемента $\bar{h} \in \bar{H}_{[x_i, x_{i+1}]}$ такого, что $\bar{h} \in \bar{H}_1(x_{j+1}, \dots, x_{i+1}) \setminus \bar{H}_1(x_j)$, где $j < i$, либо $\bar{h}$ меняет местами две вершины из $\langle x_{j-1}, x_{j+1} \rangle \setminus \{x_{j+1}\}$, либо $\bar{h}$ стабилизирует вершину x_{j-1} и меняет местами две вершины из $\langle x_{j-2}, x_j \rangle \setminus \{x_j\}$. С учетом (3.17) в первом случае $[\bar{h}, \bar{H}_{[x_{j-1}, x_j]}] \neq 1$, а во втором случае $[\bar{h}, \bar{H}_{[x_{j-2}, x_{j-1}]}] \neq 1$.

Аналогично, если $\bar{h} \in \bar{H}_{[x_i, x_{i+1}]}$, причем $\bar{h} \in \bar{H}_1(x_i, \dots, x_j) \setminus \bar{H}_1(x_{j+1})$, где $j > i$, то либо $\bar{h}$ меняет местами две вершины из $\langle x_j, x_{j+2} \rangle \setminus \{x_j\}$, либо $\bar{h}$ стабилизирует вершину x_{j+2} и меняет местами две вершины из $\langle x_{j+1}, x_{j+3} \rangle \setminus \{x_{j+1}\}$. В первом случае $[\bar{h}, \bar{H}_{[x_{j+1}, x_{j+2}]}] \neq 1$, а во втором случае $[\bar{h}, \bar{H}_{[x_{j+2}, x_{j+3}]}] \neq 1$.

Обозначим через l наименьшее натуральное число со свойством $[\bar{H}_{[x_{-1}, x_0]}, \bar{H}_{[x_l, x_{l+1}]}] \neq 1$. Из предыдущего следует, что число l корректно определено, причем

$$l \leq \min\{t' + 1, t'' + 1\}. \quad (3.18)$$

Заметим также, что из $\bar{H}_{[x_l, x_{l+1}]} \leq O_2(\bar{H}(x_i, x_{i+1}))$ для $l - t' \leq i \leq l$ и $\bar{H}_{[x_{-1}, x_0]} \leq O_2(\bar{H}(x_i, x_{i+1}))$ для $-1 \leq i \leq t'' - 1$ (см. (3.10), (3.11) и [3, ч. II, предложение 1.3, 3]) с учетом $\bar{H}_{[x_i, x_{i+1}]} \leq Z(O_2(\bar{H}(x_i, x_{i+1})))$, $i \in \mathbb{Z}$, следует

$$l \geq \max\{t', t''\} \geq 6. \quad (3.19)$$

Выберем элементы $a \in \overline{H}_{[x_{-1}, x_0]}$, $b \in \overline{H}_{[x_l, x_{l+1}]}$ такие, что $c := [a, b] \neq 1$, и положим $C = C_{\overline{H}}(c)$. Согласно (3.18) имеем $b \in \overline{H}_1(x_2, \dots, x_{l+1})$, причем из определения l , (3.17) и [3, ч. II, предложение 1.3, 3)] вытекает $b \in \overline{H}(x_0)$. Кроме того, из (3.10), (3.11), [3, ч. II, предложение 1.3, 3)] и $a \in Z(O_2(\overline{H}(x_{-1}, x_0)))$ следует $b \notin \overline{H}_1(x_0, x_1)$. Таким образом, либо $b \in (\overline{H}_1(x_2, \dots, x_{l+1}) \setminus \overline{H}_1(x_1)) \cap \overline{H}(x_0)$, либо $b \in \overline{H}_1(x_1, \dots, x_{l+1}) \setminus \overline{H}(x_{-1})$, либо $b \in (\overline{H}_1(x_1, \dots, x_{l+1}) \setminus \overline{H}_1(x_0)) \cap \overline{H}(x_{-1})$. Как показывают рассуждения, непосредственно предшествующие выбору l , элемент b меняет местами в первом и во втором случаях вершины из $\langle x_{-1}, x_1 \rangle \setminus \{x_1\}$, а в третьем случае вершины из $\langle x_{-2}, x_0 \rangle \setminus \{x_0\}$. В качестве следствия, полагая $b' := \bar{g}b\bar{g}^{-1}$ в первом и во втором случаях и $b' := \bar{g}^2b\bar{g}^{-2}$ в третьем случае, получаем $b' \in \overline{H}_1(x_3, \dots, x_{l+1}) \cap \overline{H}(x_1)$ и b' меняет местами вершины из $\langle x_0, x_2 \rangle \setminus \{x_2\}$.

Обозначая через $\hat{x}_i$ вершину $P_i(e_i^1 + e_i^4)$ для $i \in \mathbb{Z}$, в качестве другого следствия получаем, что

$$\overline{H}_{(x_{-1}, x_0, \hat{x}_0)} = O_2(\overline{H}(x_{-1}, x_0)) \cap O_2(\overline{H}(x_0, \hat{x}_0)) \leq C,$$

поскольку $c = a^{-1}(b^{-1}ab) \in \overline{H}_{[x_{-1}, x_0]}\overline{H}_{[b^{-1}(x_{-1}), b^{-1}(x_0)]} \leq \overline{H}_{[x_{-1}, x_0]}\overline{H}_{[\hat{x}_0, x_0]} \subseteq Z(O_2(\overline{H}(x_{-1}, x_0)))Z(O_2(\overline{H}(x_0, \hat{x}_0)))$.

Аналогично доказываются существование элемента $a' \in \overline{H}_1(x_{-1}, \dots, x_{l-3}) \cap \overline{H}(x_{l-1})$, меняющего местами вершины из $\langle x_{l-2}, x_l \rangle \setminus \{x_{l-2}\}$, и справедливость для $\hat{x}_l = P_l(e_l^1 + e_l^4)$ включения

$$\overline{H}_{(x_{l+1}, x_l, \hat{x}_l)} = O_2(\overline{H}(x_{l+1}, x_l)) \cap O_2(\overline{H}(x_l, \hat{x}_l)) \leq C$$

(для чего используется $c = (a^{-1}b^{-1}a)b \in \overline{H}_{[a^{-1}(x_{l+1}), a^{-1}(x_l)]}\overline{H}_{[x_l, x_{l+1}]} \leq \overline{H}_{[x_{l+1}, x_l]}\overline{H}_{[x_l, \hat{x}_l]}$).

Как было доказано, $\overline{H}_{(x_{-1}, x_0, \hat{x}_0)} \leq C$. Покажем теперь, что для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ группа C содержит группу $\overline{H}_{(x'_{2i}, x_{2i}, x''_{2i})}$ для некоторой 2-дуги $(x'_{2i}, x_{2i}, x''_{2i})$ графа Δ , где $x''_{2i} \notin \langle \hat{x}_{2i}, x'_{2i} \rangle$. Предварительно заметим, что в силу $b' \in \overline{H}_1(x_3, \dots, x_{l+1})$, $\overline{H}_1(x_l, x_{l+1}) \leq O_2(\overline{H}_1(x_l))$ (см. (3.9)) и $O_2(\overline{H}_1(x_l)) \leq \overline{H}_{(x_{l+1}, x_l, \hat{x}_l)} \leq C$ имеем $\bar{g}^j b' \bar{g}^{-j} \in C$ для $0 \leq j \leq l-3$ (напомним, что $l \geq 6$, см. (3.19)). Аналогично, $\bar{g}^{-j} a' \bar{g}^j \in C$ для $0 \leq j \leq l-3$.

Из $b' \in C$, $b'(x_0) = \hat{x}_1$ и

$$\begin{aligned} T_{x_1}(x_0, \langle x_0, \hat{x}_1 \rangle)^{\Delta(x_1)} &\leq O_2(\overline{H}(x_0, x_1)^{\Delta(x_1)}) \\ &= (\overline{H}_{(x_{-1}, x_0, \hat{x}_0)} \cap \overline{H}_1(x_0))^{\Delta(x_1)} \leq C(x_1)^{\Delta(x_1)} \end{aligned}$$

(см. (3.10), (3.16)) следует существование в группе C элемента, отображающего x_0 в x_2 . Образ под действием этого элемента 2-дуги $(x_{-1}, x_0, \hat{x}_0)$ можно взять в качестве (x'_2, x_2, x''_2) . Далее, из $\bar{g}^2 b' \bar{g}^{-2} \in C$, $\bar{g}^2 b' \bar{g}^{-2}(x_2) = \hat{x}_3$ и $\bar{g}^{-l+4} a' \bar{g}^{l-4} \in C$, $\bar{g}^{-l+4} a' \bar{g}^{l-4}(x_4) = \hat{x}_3$ следует существование в группе C элемента, отображающего x_2 в x_4 . Это доказывает утверждение для $i = 1, 2$. Если $l = 6$, то для $i = 3$ требуемым свойством обладает 2-дуга $(x_{l+1}, x_l, \hat{x}_l) = (x_7, x_6, \hat{x}_6)$. Если $l \neq 6$, т.е. $l > 6$ (см. (3.19)), то из $\bar{g}^4 b' \bar{g}^{-4} \in C$, $\bar{g}^4 b' \bar{g}^{-4}(x_4) = \hat{x}_5$ и $\bar{g}^{-l+6} a' \bar{g}^{l-6} \in C$,

$\bar{g}^{-l+6}a'\bar{g}^{l-6}(x_6) = \hat{x}_5$ следует существование в группе C элемента, отображающего x_4 в x_6 . Следовательно, утверждение справедливо также для $i = 3$, что завершает его доказательство.

Покажем, что $C(x_1)^{\Delta(x_1)} = \bar{H}(x_1)^{\Delta(x_1)}$. Из

$$\begin{aligned} (\bar{H}_{(x_{-1}, x_0, \hat{x}_0)} \cap \bar{H}_1(x_0))^{\Delta(x_1)} &\leq C(x_1)^{\Delta(x_1)}, \\ (\bar{H}_{(x'_2, x_2, x''_2)} \cap \bar{H}_1(x_2))^{\Delta(x_1)} &\leq C(x_1)^{\Delta(x_1)} \end{aligned}$$

с учетом (3.16) и (3.10) следует, что для этого достаточно найти в группе $C(x_1)$ элемент, сдвигающий множество $\langle x_0, \tilde{x}_1, x_2 \rangle \setminus \{\tilde{x}_1\}$. Так как

$$T_{x_3}(x_4, \langle x_2, \tilde{x}_3, x_4 \rangle)^{\Delta(x_3)} \leq O_2(\bar{H}(x_3, x_4)^{\Delta(x_3)}) = (\bar{H}_{(x'_4, x_4, x''_4)} \cap \bar{H}_1(x_4))^{\Delta(x_3)}$$

(см. (3.10), (3.16)) и $\bar{H}_{(x'_4, x_4, x''_4)} \leq C$, то для некоторого элемента $h \in H$ имеем $\bar{h} \in C_1(x_4)$ и $1 \neq h^{\Delta(x_3)} \in T_{x_3}(x_4, \langle x_2, \tilde{x}_3, x_4 \rangle)^{\Delta(x_3)}$. Из $h^{[x_4:x_3]} = 1$ при этом следует $h^{[x_2:x_3]} = 1$, т.е. $h^{\Delta(x_2)} \in T_{x_2}(x_3, \langle \tilde{x}_2, x_3 \rangle)^{\Delta(x_2)}$. Поскольку $T_{x_2}(x_3, \langle \tilde{x}_2, x_3 \rangle)^{\Delta(x_2)} = \bar{H}_1(x_3, x_4)^{\Delta(x_2)}$ (см. (3.13)) и $\bar{H}_1(x_3, x_4) \leq O_2(\bar{H}_1(x_4)) \leq \bar{H}_{(x'_4, x_4, x''_4)} \leq C$ (см. (3.9)), то, домножая в случае необходимости элемент $\bar{h}$ на подходящий элемент из $\bar{H}_1(x_3, x_4)$, будем предполагать, что (помимо $\bar{h} \in C_1(x_4)$ и $1 \neq h^{\Delta(x_3)} \in T_{x_3}(x_4, \langle x_2, \tilde{x}_3, x_4 \rangle)^{\Delta(x_3)}$) справедливо $\bar{h} \in C_1(x_2)$. Теперь из $\bar{h} \in C(x_1, x_2, x_3)$, $h(P_3(\langle e_3^1, e_3^2, e_3^3 + e_3^4 \rangle)) \neq P_3(\langle e_3^1, e_3^2, e_3^3 + e_3^4 \rangle)$ и $\varphi_{x_3, x_1}(P_3(\langle e_3^1, e_3^2, e_3^3 + e_3^4 \rangle)) = \langle x_0, \tilde{x}_1, x_2 \rangle$ следует, что элемент $\bar{h} \in C(x_1)$ сдвигает множество $\langle x_0, \tilde{x}_1, x_2 \rangle \setminus \{\tilde{x}_1\}$, и равенство $C(x_1)^{\Delta(x_1)} = \bar{H}(x_1)^{\Delta(x_1)}$ доказано.

Покажем, что $C(x_2)^{\Delta(x_2)} = \bar{H}(x_2)^{\Delta(x_2)}$. Из

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(x_0, x_1) &\leq O_2(\bar{H}_1(x_0)) \leq \bar{H}_{(x_{-1}, x_0, \hat{x}_0)} \leq C, \\ \bar{H}_1(x_3, x_4) &\leq O_2(\bar{H}_1(x_4)) \leq \bar{H}_{(x'_4, x_4, x''_4)} \leq C \end{aligned}$$

в силу (3.13) следует

$$\langle T_{x_2}(x_1, \langle x_1, \tilde{x}_2 \rangle)^{\Delta(x_2)}, T_{x_2}(x_3, \langle \tilde{x}_2, x_3 \rangle)^{\Delta(x_2)} \rangle \leq C(x_2)^{\Delta(x_2)}. \quad (3.20)$$

Далее, так как $T_{x_4}(x_5, \langle \tilde{x}_4, x_5 \rangle)^{\Delta(x_4)} = \bar{H}_1(x_5, x_6)^{\Delta(x_4)}$ (см. (3.13)) и $\bar{H}_1(x_5, x_6) \leq O_2(\bar{H}_1(x_6)) \leq \bar{H}_{(x'_6, x_6, x''_6)} \leq C$, то для некоторого элемента $h \in H$ имеем $\bar{h} \in C_1(x_5)$ и $1 \neq h^{\Delta(x_4)} \in T_{x_4}(x_5, \langle x_3, \tilde{x}_4, x_5 \rangle)^{\Delta(x_4)}$. Из $h^{[x_5:x_4]} = 1$ при этом следует $h^{[x_3:x_4]} = 1$, т.е. $h^{\Delta(x_3)} \in T_{x_3}(x_4, \langle \tilde{x}_3, x_4 \rangle)^{\Delta(x_3)}$. Поскольку

$$T_{x_3}(x_4, \langle \tilde{x}_3, x_4 \rangle)^{\Delta(x_3)} \leq (\bar{H}_{(x'_4, x_4, x''_4)} \cap \bar{H}_1(x_4))^{\Delta(x_3)}$$

(см. (3.16), (3.10)) и $\bar{H}_{(x'_4, x_4, x''_4)} \cap \bar{H}_1(x_4) \leq C_1(x_4)$, то, домножая элемент $\bar{h}$ на подходящий элемент из $\bar{H}_{(x'_4, x_4, x''_4)} \cap \bar{H}_1(x_4)$, получаем такой элемент $\bar{h}_1 \in C_1(x_3)$, что

$1 \neq \bar{h}_1^{\Delta(x_4)} \in T_{x_4}(x_5, \langle x_3, \tilde{x}_4, x_5 \rangle)^{\Delta(x_4)}$. Элемент $\bar{h}_1^{\Delta(x_4)}$ меняет местами множества $\langle x_4^1, x_4^2 \rangle$ и $P_4(\langle e_4^1, e_4^2 + e_4^4 \rangle)$. Следовательно, элемент $\bar{h}_1^{\Delta(x_2)}$ меняет местами множества $\varphi_{x_4, x_2}(\langle x_4^1, x_4^2 \rangle) = \langle x_2^1, x_2^4 \rangle$ и $\varphi_{x_4, x_2}(P_4(\langle e_4^1, e_4^2 + e_4^4 \rangle)) = P_2(\langle e_2^1 + e_2^3, e_2^4 \rangle)$. С учетом (3.20) получаем отсюда, что стабилизатор в группе $C(x_2)^{\Delta(x_2)}$ множества $\langle x_2^1, x_2^3, x_2^4 \rangle$ индуцирует на нем группу $SL_3(2)$. Поскольку, кроме того, согласно (3.15) имеем

$$\bar{H}_{(x'_2, x_2, x''_2)}^{\Delta(x_2)} = T_{x_2}(\tilde{x}_2, \langle x'_2, \tilde{x}_2, x''_2 \rangle)^{\Delta(x_2)},$$

причем $\bar{H}_{(x'_2, x_2, x''_2)} \leq C$, то $C(x_2)^{\Delta(x_2)} = \bar{H}(x_2)^{\Delta(x_2)}$.

Из $C(x_i)^{\Delta(x_i)} = \bar{H}(x_i)^{\Delta(x_i)}$ для $i = 1, 2$ следует, что $C = C_{\bar{H}}(c)$ – реберно-транзитивная группа автоморфизмов Δ . Поскольку c – неединичный элемент, стабилизирующий ребро графа Δ (действительно, $c = [a, b]$, где, как было показано ранее, a и b – элементы из $\bar{H}(x_0, \dots, x_l)$), это дает требуемое противоречие в случае (а).

СЛУЧАЙ (б). В этом случае с учетом (3.6), (3.7) и (3.4) имеем

$$N_1(x_i, x_{i+1})^{\Gamma(x_{i-1})} = T_{x_{i-1}}(x_i, \langle x_{i-1}^1, x_{i-1}^3, x_{i-1}^4 \rangle), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (3.21)$$

$$N_1(x_i, x_{i+1})^{\Gamma(x_{i+2})} = T_{x_{i+2}}(x_{i+1}, \langle x_{i+2}^1, x_{i+2}^2, x_{i+2}^4 \rangle), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3.22)$$

Кроме того, согласно предположениям случая (б) и (3.2) для каждого $i \in \mathbb{Z}$ группа $N(x_i, x_{i+1})$ стабилизирует множества $\langle x_i^1, x_i^3 \rangle$, $\langle x_i^2, x_i^4 \rangle$, $\langle x_{i+1}^1, x_{i+1}^3 \rangle$, $\langle x_{i+1}^2, x_{i+1}^4 \rangle$.

Покажем, что

$$PSL_2(q) \cong N_1(x_i)^{\langle x_{i-1}^1, x_{i-1}^3 \rangle}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3.23)$$

Согласно (3.22) имеем

$$T_{x_{i-1}}(x_{i-2}, \langle x_{i-1}^1, x_{i-1}^2, x_{i-1}^4 \rangle) = N_1(x_{i-3}, x_{i-2})^{\Gamma(x_{i-1})}.$$

При этом из $N_1(x_{i-3}, x_{i-2})^{[x_{i-2}:x_{i-1}]} = 1$ следует $N_1(x_{i-3}, x_{i-2})^{[x_i:x_{i-1}]} = 1$, что в рассматриваемом случае (б) влечет

$$N_1(x_{i-3}, x_{i-2})^{\Gamma(x_i)} \leq T_{x_i}(x_{i-1}, \langle x_i^1, x_i^2, x_i^4 \rangle)$$

(здесь учтено, что $N_1(x_{i-3}, x_{i-2})$ – 2-группа, см. [3, ч. II, предложение 1.3, 1])). Поскольку согласно (3.22) имеем

$$N_1(x_{i-2}, x_{i-1})^{\Gamma(x_i)} = T_{x_i}(x_{i-1}, \langle x_i^1, x_i^2, x_i^4 \rangle),$$

то отсюда следует

$$T_{x_{i-1}}(x_{i-2}, \langle x_{i-1}^1, x_{i-1}^2, x_{i-1}^4 \rangle) \leq N_1(x_i)^{\Gamma(x_{i-1})}.$$

Так как по предположениям случая (б) в группе $N(x_{i-1}, x_i)$ содержится элемент, меняющий местами x_{i-1}^1 и x_{i-1}^3 , то это доказывает (3.23).

Аналогично с использованием (3.21) доказывается, что

$$\mathrm{PSL}_2(q) \stackrel{\sim}{\leq} N_1(x_i)^{\langle x_{i+1}^2, x_{i+1}^4 \rangle}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3.24)$$

Положим

$$R = O^{2'}(N(x_{-1}, x_0, x_1)^*),$$

где

$$N(x_{-1}, x_0, x_1)^* = N(x_{-1}, x_0, x_1) \cap G(x_{-1})^* \cap G(x_0)^* \cap G(x_1)^*.$$

Тогда по предположениям случая (б) и (3.23), (3.24) имеем

$$R^{\Gamma(x_0)} = T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle) \times T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle),$$

$R^{\Gamma(x_{-1})}$ действует на прямой $\langle x_{-1}^1, x_{-1}^3 \rangle$ как соответствующая группа $\mathrm{PSL}_2(q)$, причем ядро этого действия есть $T_{x_{-1}}(x_{-1}^4, \langle x_{-1}^1, x_{-1}^3, x_{-1}^4 \rangle)$, и $R^{\Gamma(x_1)}$ действует на прямой $\langle x_1^2, x_1^4 \rangle$ как соответствующая группа $\mathrm{PSL}_2(q)$, причем ядро этого действия есть $T_{x_1}(x_1^1, \langle x_1^1, x_1^2, x_1^4 \rangle)$. В частности, поскольку $R_1(x_{-1}, x_0)$ и $R_1(x_0, x_1)$ – 2-группы (см. [3, ч. II, предложение 1.3, 1]), то

$$R/O_2(R) \cong \mathrm{PSL}_2(q) \cong \mathrm{SL}_2(q),$$

а группа $O_2(R)$ есть поточечный стабилизатор в группе R любого из множеств $\langle x_{-1}^1, x_{-1}^3 \rangle$ или $\langle x_1^2, x_1^4 \rangle$. Отсюда следует, что $S := O^{2'}(R(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1))$ – силовская 2-подгруппа группы R . Другим следствием является существование в группе R такого элемента g_1 , что элемент $g' := g_1 g$ отображает 3-дугу $(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1)$ в 3-дугу $(x_{-1}, x_0, x_1, x_1^2)$.

Так как группа $R(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1)$ стабилизирует множества $\langle x_1^2, x_1^4 \rangle$ и $\varphi_{x_{-1}, x_1}(\langle x_{-2}, x_0 \rangle) = \langle x_1^1, x_1^2 \rangle$, пересечение которых есть $\{x_1^2\}$, то

$$\begin{aligned} R(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1) &= R(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_1^2) \\ &= R(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1) \cap (g' R(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1) g'^{-1}) \end{aligned}$$

Следовательно, $g' \in N_H(R(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1))$, и потому

$$g' \in N_H(S). \quad (3.25)$$

Положим $x'_i = g'^i(x_0)$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Очевидно, $(\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots)$ – g' -трек графа Γ . Из $x'_2 = x_1^2 \in \varphi_{x_{-1}, x_1}(\langle x_{-2}, x_0 \rangle) = \varphi_{x'_{-1}, x'_1}(\langle x'_{-2}, x'_0 \rangle)$ следует, что $x'_i \in \Gamma_{\langle x_{-2}, x_0 \rangle, \langle x_{-1}, x_1 \rangle}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Поэтому для произвольной вершины z графа Γ из $d(x'_j, z) \leq 2$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ следует существование таких плоскостей $Z_{-1} \subseteq \Gamma(x_{-1})$ и $Z_0 \subseteq \Gamma(x_0)$, что $\langle x_{-2}, x_0 \rangle \subseteq Z_{-1}$, $\langle x_{-1}, x_1 \rangle \subseteq Z_0$ и $z \in V(\Gamma_{Z_{-1}, Z_0})$. Поскольку согласно лемме 2.1 и предложению 1.1 ограничение группы $G_6(x_0)$ на каждый подграф вида Γ_{Z_{-1}, Z_0} , где Z_{-1} – плоскость $\Gamma(x_{-1})$,

содержащая x_0 , и Z_0 – плоскость $\Gamma(x_0)$, содержащая x_{-1} , тривиально, отсюда вытекает

$$G_6(x_0) \leq G_2(\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots). \quad (3.26)$$

Положим $H = \langle N(x_0), g \rangle \leq N$, и пусть Δ – подграф графа Γ , порожденный H -орбитой (на $V(\Gamma)$), содержащей вершину x_0 . Обозначим через $\bar{}$ естественный гомоморфизм $H \rightarrow H^{V(\Delta)}$. Тогда, с учетом предположений случая (б), Δ – дерево, $\bar{H}$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Δ , $x_i \in V(\Delta)$ и $\Delta(x_i) = \langle x_i^1, x_i^3 \rangle \cup \langle x_i^2, x_i^4 \rangle$ для $i \in \mathbb{Z}$. Отметим также, что $R \leq H$ и $g' \in H$.

В дальнейшем нам потребуются следующие соотношения, в которых предполагается $h \in H$, $z \in V(\Delta)$. Из строения группы $G(x)^{\Gamma(x)}$ следует

$$\bar{h} \in \bar{H}_1(z) \text{ влечет } h \in H_1(z). \quad (3.27)$$

Далее, из (3.27) и леммы 2.2, 1) следует

$$\bar{h} \in \bar{H}_2(z) \text{ влечет } h \in H_2(z). \quad (3.28)$$

Наконец, из (3.28) и леммы 2.2, 3) следует

$$\bar{h} \in \bar{H}_3(z) \text{ влечет } h \in H_3(z). \quad (3.29)$$

Покажем теперь, что к группе $\bar{R}$ применимо предложение 1.2. В силу

$$R/O_2(R) \cong \text{SL}_2(q) \lesssim \bar{R}^{\langle x_{-1}^1, x_{-1}^3 \rangle}$$

(см. (3.23)),

$$S = O^{2'}(R(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1)) \in \text{Syl}_2(R)$$

и (3.25) для этого достаточно убедиться в том, что элемент $\bar{g}'$ при действии сопряжением сдвигает каждую неединичную нормальную в $\bar{R}$ подгруппу группы $\bar{S}$. Но, предполагая противное, получаем, что группа $\langle \bar{R}, \bar{g}' \rangle$ не может действовать транзитивно на вершинах графа Δ . В то же время из

$$\Delta(x_0) = \langle x_0^1, x_0^3 \rangle \cup \langle x_0^2, x_0^4 \rangle,$$

транзитивности действия группы $\bar{g}'\bar{R}\bar{g}'^{-1}$ на $\langle x_0^1, x_0^3 \rangle$, транзитивности действия группы $\bar{g}'^{-1}\bar{R}\bar{g}'$ на $\langle x_0^2, x_0^4 \rangle$ и из $\bar{g}'^{-1}(x_0) = x_0^1$, $\bar{g}'(x_0) = x_0^4$ вытекает, что $\langle \bar{R}, \bar{g}' \rangle$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Δ . Полученное противоречие показывает, что группа $\bar{R}$ удовлетворяет условию предложения 1.2. Следовательно, согласно этому предложению существует такая подгруппа L , группы $\bar{R}$, что $L/O_2(L) \cong \text{SL}_2(q)$ и для произвольной нормальной в $\bar{R}$ подгруппы K группы $O_2(\bar{R})$ из $[L, O_2(\bar{R})] \not\leq K$ вытекает $[L, K] = 1$. Заметим, что $L/O_2(L) \cong \text{SL}_2(q)$ влечет

$$L^{\langle x_{-1}^1, x_{-1}^3 \rangle} \cong \text{PSL}_2(q) \cong L^{\langle x_1^2, x_1^4 \rangle}.$$

Предположим, что $H_1(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \not\leq H_1(x_i^2)$ для $i \in \mathbb{Z}$. Тогда с учетом $g \in H$, [3, ч. II, предложение 1.3], (3.27) имеем

$$\begin{aligned} O_2(\bar{R}) &\geq \bar{R}_1(x_0, x_1, x_1^4) = \bar{H}_1(x_0, x_1, x_2) \\ &\neq \bar{H}_1(x_0, x_1, x_1^2) = \bar{R}_1(x_0, x_1, x_1^2) \leq O_2(\bar{R}), \end{aligned}$$

и потому подгруппа L группы $\bar{R}$, действующая транзитивно на $\langle x_1^2, x_1^4 \rangle$, действует нетривиально на группе $O_2(\bar{R})/\bar{R}_2(x_1)$. По выбору L это влечет $\bar{R}_2(x_1) \leq C_{\bar{R}}(L)$, откуда $\bar{R}_2(\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots) \leq C_{\bar{R}}(L)$. Таким образом,

$$\langle L, \bar{g}' \rangle \leq N_{\bar{H}}(\bar{R}_2(\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots)).$$

В то же время из $\Delta(x_0) = \langle x_0^1, x_0^3 \rangle \cup \langle x_0^2, x_0^4 \rangle$, транзитивности действия группы $\bar{g}'L\bar{g}'^{-1}$ на $\langle x_0^1, x_0^3 \rangle$, транзитивности действия группы $\bar{g}'^{-1}L\bar{g}'$ на $\langle x_0^2, x_0^4 \rangle$ и из $\bar{g}'^{-1}(x_0) = x_0^1$, $\bar{g}'(x_0) = x_0^4$ вытекает, что $\langle L, \bar{g}' \rangle$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Δ . Следовательно, $\bar{R}_2(\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots) = 1$. Но из (3.5) вытекает $\overline{H_7(x_0)} \neq 1$, причем

$$\overline{H_7(x_0)} \leq \overline{H_2(\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots)} = \bar{R}_2(\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots)$$

согласно (3.26) и (3.28). Полученное противоречие означает, что $H_1(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \leq H_1(x_i^2)$.

Аналогично, рассматривая действие группы L на $O_2(\bar{R})/\bar{R}_2(x_{-1})$, в случае $H_1(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \not\leq H_1(x_i^3)$ получаем $\bar{R}_2(x_{-1}) \leq C_{\bar{R}}(L)$, и потому

$$\bar{R}_2(\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots) \leq C_{\bar{R}}(L),$$

что, как и ранее, дает противоречие.

Итак, $H_1(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \leq H_1(x_i^2, x_i^3)$, т.е. с учетом леммы 2.2, 1) справедливо равенство

$$H_1(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = H_2(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

В силу транзитивности действия группы $H(x_{i-1}, x_i)$ на $\langle x_i^2, x_{i+1} \rangle$ отсюда следует

$$H_1(x_{i-1}, x_i, x_i^2) = H_2(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3.30)$$

Теперь несложно получить требуемое противоречие в случае (б). Действительно, согласно (3.5) имеем

$$H_3(x_{-2}, x_{-1}) = N_3(x_{-2}, x_{-1}) \not\leq N(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots),$$

что с учетом $g \in H$ влечет $H_3(x_{-2}, x_{-1}) \not\leq H_3(x_0)$. Если справедливо $H_3(x_{-2}, x_{-1}) \leq H_2(x_1)$, то в силу транзитивности действия группы $H(x_{-2}, x_{-1}, x_0) = N(x_{-2}, x_{-1}, x_0)$ на $\langle x_0^2, x_0^4 \rangle$ (см. (3.24)) справедливо также $H_3(x_{-2}, x_{-1}) \leq H_2(x_0^2)$, и потому по лемме 2.2, 3) получаем $H_3(x_{-2}, x_{-1}) \leq$

$H_3(x_0)$, вопреки ранее доказанному. Следовательно, $H_3(x_{-2}, x_{-1}) \not\leq H_2(x_1)$. Но тогда согласно (3.30) имеем $H_3(x_{-2}, x_{-1}) \not\leq H_1(x_1^2)$, что противоречит лемме 2.2, 4). Рассмотрение случая (б) завершено.

Итак, ни случай (а), ни случай (б) не реализуются.

Перейдем к рассмотрению других имеющихся возможностей для группы T . Обозначим через X непустое T -допустимое подпространство проективного пространства $\Gamma(x_0)$ наименьшей размерности. В зависимости от $\dim X$ дальнейшее доказательство леммы 3.1 сводится к рассмотрению четырех случаев (в каждом из которых нашей целью будет получение противоречия).

Случай 1. $\dim X = 3$. В этом случае группа T действует неприводимо на $\Gamma(x_0)$, и поскольку согласно (3.1) и (3.2) это действие интранзитивно, то на основании предложения 1.3, 2) заключаем, что $q = 2$ и $N(x_0)^{\Gamma(x_0)} = T \cong S_5$. Более того, согласно этому предложению действие группы $N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ на множестве центров содержащихся в ней (нетривиальных) трансвекций (каковыми центрами согласно (3.6) и (3.7) являются, в частности, x_{-1} и x_1) есть естественное действие S_5 на неупорядоченных парах множества из пяти элементов.

Положим $H = \langle N(x_0), g \rangle \leq N$, и пусть Δ – подграф графа Γ , порожденный H -орбитой (на $V(\Gamma)$), содержащей вершину x_0 . Обозначим через $\bar{}$ естественный гомоморфизм $H \rightarrow H^{V(\Delta)}$. Тогда с учетом предыдущего абзаца Δ – дерево, $\bar{H}$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Δ , и для $z \in V(\Delta)$ группа $\bar{H}(z)$ конечна и $\bar{H}(z)^{\Delta(z)}$ подстановочно изоморфна группе S_5 , действующей естественным образом на неупорядоченных парах множества из пяти элементов. Кроме того, $\bar{H}_1(z_0, z_1) = \bar{H}_1(z_0, z_1) - 2$ -группа для $[z_0, z_1] \in E(\Delta)$. Согласно предложению 1.4 отсюда следует $\bar{H}_2(z_0, z_1) = 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Delta)$. В частности, так как $x_i \in V(\Delta)$ для $i \in \mathbb{Z}$, то

$$N_2(x_0, x_1) \leq H_2(x_0, x_1) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots).$$

Но тогда $N_7(x_0) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, что противоречит (3.5).

Случай 2. $\dim X = 2$. В этом случае согласно предложению 1.3, 1) группа T индуцирует на проективной плоскости X соответствующую группу $\text{PSL}_3(q)$. По выбору T плоскость X при этом $N(x_0)$ -допустима. В силу (3.6) и (3.7) отсюда следует, что $x_{-1}, x_1 \in X$.

Положим $H = \langle N(x_0), g \rangle \leq N$, и пусть Δ – подграф графа Γ , порожденный H -орбитой (на $V(\Gamma)$), содержащей вершину x_0 . Обозначим через $\bar{}$ естественный гомоморфизм $H \rightarrow H^{V(\Delta)}$. Тогда с учетом предыдущего абзаца Δ – дерево, $\bar{H}$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Δ , и для $z \in V(\Delta)$ группа $\bar{H}(z)$ конечна и группа $\bar{H}(z)^{\Delta(z)}$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу $\text{PSL}_3(q)$ в естественном представлении на точках $\text{PG}_2(q)$. Согласно лемме 2.1 и предложению 1.1 отсюда следует, что $\bar{H}_5(z_0, z_1) = 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Delta)$. В частности, с учетом $x_i \in V(\Delta)$ для $i \in \mathbb{Z}$ имеем

$$N_5(x_0, x_1) \leq H_5(x_0, x_1) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots).$$

Но тогда $N_7(x_0) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, что противоречит (3.5).

СЛУЧАЙ 3. $\dim X = 1$. 1) Предположим сначала, что существует отличная от X T -допустимая прямая X_1 проективного пространства $\Gamma(x_0)$. Тогда отсутствие у T неподвижных точек и порождаемость T трансвекциями влекут $\langle X, X_1 \rangle = \Gamma(x_0)$ и $T = T_1 \times T_2$, где группа $T_1 \cong \text{PSL}_2(q)$ действует естественным образом на точках X и тривиально на точках X_1 , а группа $T_2 \cong \text{PSL}_2(q)$ действует тривиально на точках X и естественным образом на точках X_1 . Это, в свою очередь, влечет отсутствие иных, отличных от X и X_1 , T -допустимых прямых (и потому $N(x_0)$ -допустимость пары прямых $\{X, X_1\}$), а также принадлежность множеству $X \cup X_1$ центра каждой (нетривиальной) трансвекции группы T . В частности, по выбору T , учитывая (3.6) и (3.7), имеем $x_0^1, x_0^4 \in X \cup X_1$. Не теряя общности, будем предполагать, что $x_0^1 \in X$.

Предположим, что $x_0^4 \in X$. Тогда из $\text{PSL}_2(q) \cong T_2^{X_1} \leq (N(x_{-1}, x_0, x_1) \cap N(x_0)^*)^{X_1}$ следует $\text{PSL}_2(q) \lesssim (N(x_{-1}, x_0, x_1)^*)^{X_1}$, что в силу $N(x_0, x_1)$ -инвариантности прямой $\langle x_0, x_2 \rangle = g(X)$ влечет

$$O^2(\text{PSL}_2(q)) \lesssim O^{2',2}((N(x_{-1}, x_0, x_1)^*)^{X_1}) \leq N(x_{-1}, x_0, x_1, x_2)^{X_1}.$$

В частности,

$$O^2(\text{PSL}_2(q)) \lesssim N(x_{-1}, x_0, x_1, x_2)^{[x_0:x_1]} \cong N(x_{-1}, x_0, x_1, x_2)^{[x_2:x_1]}.$$

Последнее, однако, противоречит $N(x_{-1}, x_0, x_1, x_2)$ -инвариантности прямых $\langle x_2^1, x_2^4 \rangle = g^2(X)$ и $\langle x_2^1, x_2^2 \rangle = \varphi_{x_0, x_2}(X)$.

Предположим теперь, что $x_0^4 \in X_1$. С учетом (3.6), (3.7), (3.2) и (3.4) имеем для $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} N(x_i)^{\Gamma(x_i)} \cap T_{x_i}(x_{i+1}) &= T_{x_i}(x_{i+1}, \langle x_{i+1}, g^i(X) \rangle) = N_1(x_{i+1}, \dots, x_{i+t-1})^{\Gamma(x_i)}, \\ N(x_i)^{\Gamma(x_i)} \cap T_{x_i}(x_{i-1}) &= T_{x_i}(x_{i-1}, \langle x_{i-1}, g^i(X_1) \rangle) = N_1(x_{i-t+1}, \dots, x_{i-1})^{\Gamma(x_i)}. \end{aligned}$$

Пусть $h \in N_1(x_{-t+1}, \dots, x_{-1}) \setminus N_1(x_0)$. Тогда элемент $h^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

где α, β — не равные одновременно нулю элементы $\mathbb{F}_q$. Из $h \in N_1(x_{-t+1}, \dots, x_{-1}) \leq N_1(x_{-2}, x_{-1})$ с учетом [3, ч. II, предложение 1.3, 1)] следует, что h — 2-элемент группы $N(x_1)^*$, причем $h^{[x_1:x_0]} = 1$. Отсюда

$$h^{\Gamma(x_1)} \in N(x_1)^{\Gamma(x_1)} \cap T_{x_1}(x_0) = T_{x_1}(x_0, \langle x_0, g(X_1) \rangle)$$

и, в частности, $h \in N(x_0, x_1, x_2)$. Элемент $h^{\Gamma(x_2)}$ представим матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & \alpha^\sigma & \beta^\sigma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

где σ – автоморфизм поля $\mathbb{F}_q$ (см. начало § 2). Теперь, взяв элемент $h^{\Gamma(x_0)}$ в случае $\alpha = 0$ и элемент $[h, g^{-2}hg^2]^{\Gamma(x_0)}$ в случае $\alpha \neq 0$, имеем неединичный элемент группы $N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$, содержащийся в $T_{x_0}(x_{-1}, \langle x_0^1, x_0^2 \rangle)$, что с учетом

$$N(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_{-1}) = T_{x_0}(x_{-1}, \langle x_0^1, X_1 \rangle)$$

и $x_0^1 \notin X_1$, $x_0^4 \in X_1$ влечет $X_1 = \langle x_0^4, P_0(e_0^2 + \mu e_0^1) \rangle$ для некоторого $\mu \in \mathbb{F}_q$. Симметрично показывается, что $X = \langle x_0^1, P_0(e_0^3 + \nu e_0^4) \rangle$ для некоторого $\nu \in \mathbb{F}_q$.

Далее, из $X_1 = \langle x_0^4, P_0(e_0^2 + \mu e_0^1) \rangle$ и $h^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_{-1}, \langle x_0^1, X_1 \rangle)$ следует, что для матрицы (3.31) справедливо $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Поскольку элемент $h \in N(x_1, x_2)$ оставляет на месте прямую $g^2(X) = \langle x_2^1, P_2(e_2^3 + \nu e_2^4) \rangle$, это согласно (3.32) влечет $\nu = 0$. Симметрично показывается, что $\mu = 0$. Итак, $X = \langle x_0^1, x_0^3 \rangle$, $X_1 = \langle x_0^2, x_0^4 \rangle$, и мы находимся в предположениях рассмотренного ранее случая (б). Таким образом, предположение $x_0^4 \in X_1$ также ведет к противоречию.

2) Предположим, что X – единственная T -допустимая (а потому и $N(x_0)$ -допустимая) прямая проективного пространства $\Gamma(x_0)$.

Тогда в силу выбора T и X имеем $T^X \cong \text{PSL}_2(q)$, причем по крайней мере одна из точек x_0^1, x_0^4 содержится в X . Ввиду симметрии будем, не теряя общности, предполагать далее, что $x_0^1 \in X$.

Предположим, что $x_0^4 \in X$, т.е. $X = \langle x_0^1, x_0^4 \rangle$. Пусть $H := \langle N(x_0), g \rangle \leq N$, и Δ – подграф графа Γ , порожденный H -орбитой (на $V(\Gamma)$), содержащей вершину x_0 . Обозначим через $\bar{\cdot}$ естественный гомоморфизм $H \rightarrow H^{V(\Delta)}$. Тогда Δ – дерево, $\bar{H}$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Δ , и для $z \in V(\Delta)$ группа $\bar{H}(z)$ конечна и группа $\bar{H}(z)^{\Delta(z)}$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу $\text{PSL}_2(q)$ в естественном представлении на точках $\text{PG}_1(q)$. Следовательно, $\bar{H}_2(z_0, z_1) = 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Delta)$ (см. [3, ч. I, предложение 2.1]). В частности, так как $x_i \in V(\Delta)$ для $i \in \mathbb{Z}$, то

$$N_2(x_0, x_1) \leq H_2(x_0, x_1) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots).$$

Но тогда $N_7(x_0) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, что противоречит (3.5).

Предположим теперь, что $x_0^4 \notin X$. Обозначим через X' $N(x_0)$ -орбиту, содержащую точку x_0^4 . Тогда

$$|X'| = |N(x_0) : N(x_0, x_0^4)| = |N(x_0) : N(g^{-1}(x_0), g^{-1}(x_0^4))| = |X| = q + 1.$$

Поскольку в силу (3.7) и (3.4) имеем

$$T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^4, X \rangle) = N(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^4),$$

то из $X' \not\subseteq \langle x_0^4, X \rangle$ следовало бы, что X' – прямая, вопреки предположению о единственности T -допустимой прямой X . Поэтому $X' \subseteq \langle x_0^4, X \rangle$ и, в частности, $\langle x_0^4, X \rangle = \langle X, X' \rangle$ – $N(x_0)$ -допустимая плоскость, поточечно стабилизируемая группой $N(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^4)$. Если множество X' поточечно стабилизируется, кроме того, группой $N(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^1)$, то по выбору группы T последняя действует на X' тривиально. Так как по предположению случая 3 наименьшая размерность непустых T -допустимых подпространств есть 1, это невозможно. Следовательно, группа $N(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^1)$ действует на X' нетривиально, что с учетом (3.6) и (3.4) влечет $X' \supseteq \langle x_0^1, x' \rangle \setminus \{x_0^1\}$ для некоторой вершины

$x' \in X'$. Взяв элемент $h \in N(x_0)$, сдвигающий вершину x_0^1 , получаем отсюда $X' \supseteq \langle h(x_0^1), h(x') \rangle \setminus \{h(x_0^1)\}$, где $h(x_0^1) \in X$ и $\langle h(x_0^1), h(x') \rangle \neq \langle x_0^1, x' \rangle$, поскольку в противном случае

$$\{x_0^1\} = X \cap \langle x_0^1, x' \rangle = X \cap \langle h(x_0^1), h(x') \rangle = \{h(x_0^1)\}.$$

Из $|X'| = q + 1$ и $|\langle x_0^1, x' \rangle \cap \langle h(x_0^1), h(x') \rangle| = 1$ теперь следует $q = 2$. Но в последнем случае $|\langle X, X' \rangle| = 7$, $|X| = |X'| = 3$, и потому $N(x_0)$ -допустимое множество $\langle X, X' \rangle \setminus (X \cup X')$ состоит из единственной точки. Так как по предположению случая 3 наименьшая размерность непустых T -допустимых подпространств есть 1, это невозможно.

СЛУЧАЙ 4. $\dim X = 0$. 1) Покажем сначала, что

$$T \cap T_{x_0}(x_0^1) \not\leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle), \quad (3.33)$$

$$T \cap T_{x_0}(x_0^4) \not\leq T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^4, x_0^1 \rangle). \quad (3.34)$$

Предположим, что $T \cap T_{x_0}(x_0^1) \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$. Тогда с учетом (3.6) существует элемент $a \in N_1(x_{-1})$ такой, что $a^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где α, β — не равные одновременно нулю элементы $\mathbb{F}_q$. Поскольку при этом элемент a оказывается 2-элементом (см. [3, ч. II, предложение 1.3, 1]), действующим тривиально на $[x_1 : x_0]$, то с учетом $T \cap T_{x_0}(x_0^1) \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ элементы $a^{\Gamma(x_1)}, a^{\Gamma(x_2)}$ представимы соответственно матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & \lambda \\ 0 & 1 & \alpha^\sigma & \beta^\sigma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in \mathbb{F}_q$.

Заменяя в случае $\alpha \neq 0$ элемент a на элемент $[a, g^{-2}ag^2]$, считаем в дальнейшем $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Более того, с учетом (3.4), не теряя общности, будем считать $\beta = 1$.

Если $T \cap T_{x_0}(x_0^4) \leq T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^4, x_0^1 \rangle)$, то аналогично доказывается существование элемента $b \in N(x_{-2}, x_{-1}, x_0)$ такого, что $b^{\Gamma(x_{-2})}, b^{\Gamma(x_{-1})}, b^{\Gamma(x_0)}$ представимы соответственно матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & * & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Но тогда из $a^{\Gamma(x_0)}, b^{\Gamma(x_0)} \in T$ следует, что все T -допустимые точки принадлежат прямой $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, для которой имеем

$$\langle x_0^1, x_0^4 \rangle \cap g^{-2}ag^2(\langle x_0^1, x_0^4 \rangle) \cap g^2bg^{-2}(\langle x_0^1, x_0^4 \rangle) = \emptyset.$$

Таким образом, получаем противоречие с тем, что множество всех T -допустимых точек непусто (поскольку содержит X) и $N(x_0)$ -допустимо.

Следовательно, существует элемент $b_1 \in N(x_0)$, для которого

$$b_1^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4) \setminus T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle).$$

Так как при этом $1 \neq [a, b_1]^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$, то с учетом (3.4) имеем $T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle) \leq T$. Если

$$T \cap T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle) \neq T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle),$$

то с учетом (3.4) отсюда следует $T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle) \leq T$, и потому все T -допустимые точки принадлежат прямой $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$. Последнее в силу $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle \cap g^{-2}ag^2(\langle x_0^1, x_0^4 \rangle) = \{x_0^1\}$ и $b_1(x_0^1) \neq x_0^1$ противоречит $N(x_0)$ -допустимости непустого множества всех T -допустимых точек. Итак,

$$T \cap T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle) = T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle).$$

Покажем теперь, что существует элемент $b_2 \in N(x_0, x_1)$, для которого $b_2^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4) \setminus T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $b_2^{\Gamma(x_1)} \in T_{x_1}(x_1^4)$. Для этого заметим, что согласно (3.7) существует элемент $b'_2 \in N_1(x_1)$, для которого $1 \neq b_2'^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4)$. Если $b_2'^{\Gamma(x_0)} \notin T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$, то в качестве b_2 можно взять элемент b'_2 . Если $b_2'^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $b_2'^{\Gamma(x_{-1})} \notin T_{x_{-1}}(x_{-1}^4, \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4 \rangle)$, то в качестве b_2 можно взять элемент $gb_2'g^{-1}$. Если, наконец, $b_2'^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $b_2'^{\Gamma(x_{-1})} \in T_{x_{-1}}(x_{-1}^4, \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4 \rangle)$, то с учетом

$$b_2^{\Gamma(x_0)} \in T \cap T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle) = T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$$

элементы $b_2^{\Gamma(x_0)}, b_2'^{\Gamma(x_{-2})}$ представимы соответственно матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu^{\sigma^{-1}} & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix},$$

где $0 \neq \nu \in \mathbb{F}_q$; следовательно, $[b_2', g^2b_2'g^{-2}]^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и в то же время

$$[b_2', g^2b_2'g^{-2}]^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4) \setminus T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle) = T_{x_0}(x_0^4) \setminus T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$$

согласно предыдущему абзацу. Таким образом, последний случай не возможен.

Из существования элемента $b_2 \in N(x_0, x_1)$ такого, что $b_2^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4) \setminus T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $b_2^{\Gamma(x_1)} \in T_{x_1}(x_1^4)$, в силу (3.4) следует (достаточно спрячь элемент b_2 подходящим элементом группы $N(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$) существование в группе $N(x_0, x_1)$ такого элемента b , что $b^{\Gamma(x_1)} \in T_{x_1}(x_1^4)$ и $b^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \gamma & \delta & 1 \end{pmatrix},$$

где $\gamma, \delta \in \mathbb{F}_q$.

Учитывая, что неподвижными точками элемента $a^{\Gamma(x_0)} \in T$ являются точки плоскости $\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle$, из $b^{\Gamma(x_0)} \in T$ получаем, что все T -допустимые точки принадлежат прямой $P_0(\langle e_0^2 + \gamma e_0^1, e_0^4 \rangle)$. Поскольку множество всех T -допустимых точек непусто (по предположению рассматриваемого случая 4) и $N(x_0)$ -допустимо, то $N(x_0)$ -допустима прямая $P_0(\langle e_0^2 + \gamma e_0^1, e_0^4 \rangle)$ или некоторая ее точка. Однако из $b^{\Gamma(x_0)}$, $(g^{-2}ag^2)^{\Gamma(x_0)} \in N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ и (3.4) вытекает, что длина $N(x_0)$ -орбиты, содержащей вершину x_0^1 , есть по меньшей мере q^2 , и потому в силу

$$|N(x_0) : N(x_0, x_0^4)| = |N(x_0) : N(g^{-1}(x_0), g^{-1}(x_0^4))| = |N(x_0) : N(x_0, x_0^1)|$$

это же верно для длины $N(x_0)$ -орбиты, содержащей вершину x_0^4 . Следовательно, прямая $P_0(\langle e_0^2 + \gamma e_0^1, e_0^4 \rangle)$, содержащая вершину x_0^4 , не может быть $N(x_0)$ -допустимой. С учетом $(g^{-2}ag^2)^{\Gamma(x_0)} \in N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ отсюда следует, что $N(x_0)$ -допустима точка $\tilde{x} := P_0(e_0^2 + \gamma e_0^1)$.

Заметим, что $N(x_0)$ -допустимость точки $P_0(e_0^2 + \gamma e_0^1)$ с учетом (3.4) влечет при $q > 2$ равенство $\gamma = 0$.

Далее, из

$$1 \neq T \cap T_{x_0}(x_0^1) \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle) \cap T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, \tilde{x} \rangle) = T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$$

и (3.4) следует

$$T \cap T_{x_0}(x_0^1) = T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle).$$

Это ввиду выбора T влечет $N(x_0, x_0^1) \leq N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$, т.е. $N(x_0, x_0^1)$ -допустимость плоскости $\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle$, а ввиду

$$b^{\Gamma(x_0)} \in (T \cap T_{x_0}(x_0^4)) \setminus T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$$

– отсутствие в $N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ элементов, отображающих x_0^1 в x_0^4 .

Если элемент $g^{-2}ag^2$ оставляет на месте прямую $\langle x_0^4, \tilde{x} \rangle$, иными словами, если $\lambda = \gamma$, то, используя матричные представления для элементов $b^{\Gamma(x_0)}$ и $(g^{-2}ag^2)^{\Gamma(x_0)}$ группы $N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ и (3.4), получаем, что

$$\begin{aligned} b^{\Gamma(x_0)} &\in T_{x_0}(x_0^4, P_0(\langle e_0^2 + \gamma e_0^1, e_0^3 + \delta e_0^1, e_0^4 \rangle)) \leq N(x_0, x_0^4)^{\Gamma(x_0)}, \\ T_{x_0}(g^{-2}ag^2(x_0^4), g^{-2}ag^2(P_0(\langle e_0^2 + \gamma e_0^1, e_0^3 + \delta e_0^1, e_0^4 \rangle))) &\leq N(x_0, x_0^4)^{\Gamma(x_0)}, \end{aligned}$$

причем различные точки из $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle \setminus \{x_0^4\}$ (т.е. из содержащей x_0^1 орбиты группы $T_{x_0}(x_0^4, P_0(\langle e_0^2 + \gamma e_0^1, e_0^3 + \delta e_0^1, e_0^4 \rangle))$) принадлежат различным орбитам длины q группы $T_{x_0}(g^{-2}ag^2(x_0^4), g^{-2}ag^2(P_0(\langle e_0^2 + \gamma e_0^1, e_0^3 + \delta e_0^1, e_0^4 \rangle)))$. Следовательно, длина $N(x_0, x_0^4)$ -орбиты, содержащей вершину x_0^1 , не менее q^2 . Поскольку

$$\begin{aligned} |N(x_0, x_0^1) : N(x_0, x_0^1, x_0^4)| &= |N(g(x_0), g(x_0^1)) : N(x_0, x_0^1, x_0^4)| \\ &= |N(x_0, x_0^4) : N(x_0, x_0^1, x_0^4)|, \end{aligned}$$

то длина $N(x_0, x_0^1)$ -орбиты, содержащей вершину x_0^4 , также не менее q^2 . Так как плоскость $\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle$ и прямая $\langle x_0^1, \tilde{x} \rangle$ этой плоскости $N(x_0, x_0^1)$ -допустимы, то из

$$x_0^4 \in \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle \setminus \langle x_0^1, \tilde{x} \rangle \quad \text{и} \quad |\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle \setminus \langle x_0^1, \tilde{x} \rangle| = q^2$$

теперь следует транзитивность действия группы $N(x_0, x_0^1) \leq N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ на $\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle \setminus \langle x_0^1, \tilde{x} \rangle$. В частности, поскольку $x_0^4, P_0(e_0^1 + e_0^4) \in \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle \setminus \langle x_0^1, \tilde{x} \rangle$, то в группе $N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ найдется элемент, отображающий точку x_0^4 в точку $P_0(e_0^1 + e_0^4)$. Но элемент $b^{\Gamma(x_0)} \in N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)^{\Gamma(x_0)}$ отображает точку $P_0(e_0^1 + e_0^4)$ в точку x_0^1 . Следовательно, в группе $N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ существует элемент, отображающий точку x_0^4 в точку x_0^1 . Как было замечено ранее, последнее невозможно. Итак, элемент $g^{-2}ag^2$ сдвигает прямую $\langle x_0^4, \tilde{x} \rangle$, т.е. $\lambda \neq \gamma$.

Положим $x' = P_0(e_0^2 + \lambda e_0^1)$. Тогда из $\lambda \neq \gamma$ следует $\tilde{x} \notin \langle x_0^4, x' \rangle$. Кроме того, поскольку $b^{\Gamma(x_0)} \in T$ в силу (3.4) влечет

$$T_{x_0}(x_0^4, P_0(\langle e_0^2 + \gamma e_0^1, e_0^3 + \delta e_0^1, e_0^4 \rangle)) \leq T,$$

то из $\lambda \neq \gamma$ следует, что подгруппа $\langle T \cap T_{x_0}(x_0^4), g^{-2}ag^2(T \cap T_{x_0}(x_0^4))g^{-2}a^{-1}g^2 \rangle$ группы $N(x_0, \langle x_0^4, x' \rangle, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)^{\Gamma(x_0)}$ индуцирует на прямой $\langle x_0^4, x' \rangle$ соответствующую проективную группу $\text{PSL}_2(q)$. Отсюда следует, что если группа $N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ не оставляет на месте прямую $\langle x_0^4, x' \rangle$, то она действует транзитивно на множестве отличных от $\tilde{x}$ точек плоскости $\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle$, и потому в группе $N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ существует элемент, отображающий точку x_0^1 в точку x_0^4 . Как было замечено ранее, последнее не возможно. Итак, $\langle x_0^4, x' \rangle$ — $N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ -инвариантная прямая.

Из $N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ -допустимости прямой $\langle x_0^4, x' \rangle$ и из $N(x_0, x_0^1) \leq N(x_0, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$ следует, что $N(x_0, x_0^1)$ -орбита, содержащая x_0^4 , содержится в $\langle x_0^4, x' \rangle$. Поскольку при этом $N(x_0, x_0^1)$ -допустимая прямая $\langle x_0^1, \tilde{x} \rangle$ пересекается с $\langle x_0^4, x' \rangle$ по отличной от x_0^4 точке x' , то длина $N(x_0, x_0^1)$ -орбиты, содержащей x_0^4 , не превосходит q . Из

$$\begin{aligned} |N(x_0, x_0^4) : N(x_0, x_0^1, x_0^4)| &= |N(g^{-1}(x_0), g^{-1}(x_0^4)) : N(x_0, x_0^1, x_0^4)| \\ &= |N(x_0, x_0^1) : N(x_0, x_0^1, x_0^4)| \end{aligned}$$

теперь следует, что длина $N(x_0, x_0^4)$ -орбиты, содержащей x_0^1 , также не превосходит q . Но в силу $b^{\Gamma(x_0)} \in N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ и (3.4) уже $T \cap T_{x_0}(x_0^4)$ -орбита $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle \setminus \{x_0^4\}$ имеет длину q . Следовательно, множество $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle \setminus \{x_0^4\}$ есть $N(x_0, x_0^4)$ -орбита.

Элемент $[a, b]^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, полагая $h = g^{-1}a^{-1}g^2[a, b]g^{-2}ag$, получаем, что элемент $h^{\Gamma(x_1)}$ представим матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом из $h \in N(x_0, x_0^4)$ и $N(x_0, x_0^4)$ -инвариантности множества $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle \setminus \{x_0^4\}$ следует $h(x_{-1}) \in \langle x_{-1}, x_1 \rangle \setminus \{x_1\}$. Поскольку $b \in N$, $b^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4) \setminus T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $b^{\Gamma(x_1)} \in T_{x_1}(x_1^4)$, то, учитывая (3.4), получаем отсюда $b'h(x_{-1}) = x_{-1}$ для некоторого элемента b' группы $N(x_0, x_1)$ такого, что $b'^{\Gamma(x_1)} \in T_{x_1}(x_1^4)$. Элемент $b'h$ при этом принадлежит $N(x_{-1}, x_0, x_1)$ и отображает плоскость $P_1(\langle e_1^1, e_1^3 + \gamma e_1^2, e_1^4 \rangle)$ в плоскость $P_1(\langle e_1^1, e_1^3 + (1 + \gamma)e_1^2, e_1^4 \rangle)$. Но тогда элемент $b'h$ отображает плоскость

$$P_{-1}(\langle e_{-1}^2 + \gamma e_{-1}^1, e_{-1}^3, e_{-1}^4 \rangle) = \varphi_{x_1, x_{-1}}(P_1(\langle e_1^1, e_1^3 + \gamma e_1^2, e_1^4 \rangle))$$

в плоскость

$$P_{-1}(\langle e_{-1}^2 + (1 + \gamma)e_{-1}^1, e_{-1}^3, e_{-1}^4 \rangle) = \varphi_{x_1, x_{-1}}(P_1(\langle e_1^1, e_1^3 + (1 + \gamma)e_1^2, e_1^4 \rangle)),$$

первая из которых содержит $N(x_{-1})$ -допустимую точку $P_{-1}(e_{-1}^2 + \gamma e_{-1}^1) = g^{-1}(\tilde{x})$, а вторая не содержит. Полученное противоречие доказывает (3.33).

Симметричные рассуждения доказывают (3.34).

2) Дальнейшее доказательство в случае 4 состоит в последовательном рассмотрении возможных типов действия группы T на проективном пространстве $[x_0 : \tilde{x}_0] \cong \text{PG}_2(q)$, где через $\tilde{x}_0$ здесь и далее обозначается некоторая фиксированная T -допустимая точка. Заметим, что из (3.33), (3.34) следует $\tilde{x}_0 \notin \langle x_0^1, x_0^4 \rangle$. Кроме того, T индуцирует на проективном пространстве $[x_0 : \tilde{x}_0]$ подгруппу соответствующей проективной группы $\text{PSL}_3(q)$, порожденную некоторым набором корневых подгрупп. Для $i \in \mathbb{Z}$ полагаем $\tilde{x}_i = g^i(\tilde{x}_0)$.

2а) Предположим, что группа T действует на проективном пространстве $[x_0 : \tilde{x}_0]$ неприводимо.

Согласно предложению 1.3, 1) в этом случае группа T индуцирует на проективном пространстве $[x_0 : \tilde{x}_0]$ группу $\text{PSL}_3(q)$. Отсюда следует, в частности, что $\tilde{x}_0$, будучи единственной T -инвариантной точкой, $N(x_0)$ -инвариантна (и потому, в силу (3.4) и $\tilde{x}_0 \notin \langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, при $q > 2$ имеем $\tilde{x}_0 \in \{x_0^2, x_0^3\}$). Кроме того, либо существует T -допустимая плоскость $Y \subseteq \Gamma(x_0)$, не содержащая $\tilde{x}_0$, и тогда T есть коммутант стабилизатора в $\text{Soc}(G(x_0)^{\Gamma(x_0)}) \cong \text{PSL}_4(q)$ точки $\tilde{x}_0$ и плоскости Y , либо T есть коммутант стабилизатора в $\text{Soc}(G(x_0)^{\Gamma(x_0)}) \cong \text{PSL}_4(q)$ точки $\tilde{x}_0$.

Если реализуется первая из этих возможностей, то Y , будучи единственной T -допустимой плоскостью проективного пространства $\Gamma(x_0)$, $N(x_0)$ -допустима, причем согласно (3.33), (3.34) имеем $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle \subseteq Y$. Положим $H = \langle N(x_0), g \rangle$, и пусть Δ – подграф графа Γ , порожденный H -орбитой (на $V(\Gamma)$), содержащей вершину x_0 . Обозначим через $\bar{\cdot}$ естественный гомоморфизм $H \rightarrow H^{V(\Delta)}$. Тогда Δ – дерево, $\bar{H}$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Δ , и для $z \in V(\Delta)$ группа $\bar{H}(z)$ конечна и группа $\bar{H}(z)^{\Delta(z)}$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу $\text{PSL}_3(q)$ в естественном представлении на точках $\text{PG}_2(q)$. Следовательно, согласно лемме 2.1 и предложению 1.1 $\bar{H}_5(z_0, z_1) = 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Delta)$. В частности, так как $x_i \in V(\Delta)$ для $i \in \mathbb{Z}$, то

$$N_5(x_0, x_1) \leq H_5(x_0, x_1) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots).$$

Но тогда $N_7(x_0) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, что противоречит (3.5).

Таким образом, реализуется вторая возможность, т.е. группа T совпадает с коммутантом стабилизатора в $\text{Soc}(G(x_0)^{\Gamma(x_0)}) \cong \text{PSL}_4(q)$ точки $\tilde{x}_0$. В этом случае группа $N(x_{-1}, x_0)$ действует транзитивно на множестве точек $\Gamma(x_0) \setminus \langle x_0^1, \tilde{x}_0 \rangle$, которое содержит x_0^4 . Поскольку согласно (3.6) существует элемент $a \in N_1(x_{-1})$ такой, что $1 \neq a^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1)$, то отсюда вытекает, что, сопрягая в случае необходимости элемент a подходящим элементом группы $N(x_{-1}, x_0)$, можно, не теряя общности, предполагать существование элемента $a \in N_1(x_{-1})$, для которого $a^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1) \setminus T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$.

Следующим рассуждениям придан несколько более общий характер с тем, чтобы использовать их также при рассмотрении других подслучаев случая 4. Итак, предположим, что существует элемент $a \in N_1(x_{-1})$ такой, что $a^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1) \setminus T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$. Тогда точка $x' := a(x_1)$ прямой $\langle x_{-1}, x_1 \rangle$ отлична от x_1 , и потому согласно (3.34) и (3.4) в группе $N(x_0, x_1)$ найдется элемент, меняющий местами точки x_{-1} и x' . Сопрягая этим элементом элемент a , получаем элемент $h \in N_1(x')$, меняющий местами точки x_{-1} и x_1 . Далее, по выбору элемента h имеем $hg^2 \in N(x_{-1})$, причем $hg^2(x_{-1}^1) = x_{-1}^4$. Выясним, как элемент hg^2 действует на других точках $\Gamma(x_{-1})$. Пусть $P_{-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_{-1}^j \right)$ – произвольная отличная от x_{-1}^1 точка пространства $\Gamma(x_{-1})$. Тогда с учетом [3, ч. II, предложение 1.2, 2)] и $h \in N_1(x')$ имеем

$$\begin{aligned} hg^2 \left(P_{-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_{-1}^j \right) \right) &= \\ &= h \left(P_1 \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_1^j \right) \right) \in h \left(P_1 \left(\left\langle e_1^1, \sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_1^j \right\rangle \right) \right) \\ &= h \left(\varphi_{x_{-1}, x_1} \left(P_{-1} \left(\left\langle e_{-1}^4, \sum_{1 \leq j \leq 3} \mu_{j+1}^{\sigma^{-1}} e_{-1}^j \right\rangle \right) \right) \right) \\ &= h \left(\varphi_{x', x_1} \varphi_{x_{-1}, x'} \left(P_{-1} \left(\left\langle e_{-1}^4, \sum_{1 \leq j \leq 3} \mu_{j+1}^{\sigma^{-1}} e_{-1}^j \right\rangle \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_{x', x-1} \left(h \left(\varphi_{x-1, x'} \left(P_{-1} \left(\left\langle e_{-1}^4, \sum_{1 \leq j \leq 3} \mu_{j+1}^{\sigma^{-1}} e_{-1}^j \right\rangle \right) \right) \right) \right) \\
&= \varphi_{x', x-1} \varphi_{x-1, x'} \left(P_{-1} \left(\left\langle e_{-1}^4, \sum_{1 \leq j \leq 3} \mu_{j+1}^{\sigma^{-1}} e_{-1}^j \right\rangle \right) \right) \\
&= P_{-1} \left(\left\langle e_{-1}^4, \sum_{1 \leq j \leq 3} \mu_{j+1}^{\sigma^{-1}} e_{-1}^j \right\rangle \right).
\end{aligned}$$

Возвращаясь к случаю, когда группа T совпадает с коммутантом стабилизатора в $\text{Soc}(G(x_0)^{\Gamma(x_0)}) \cong \text{PSL}_4(q)$ точки $\tilde{x}_0$, заключаем на основании полученного соотношения, что ни x_{-1}^2 , ни x_{-1}^3 не являются $N(x_{-1})$ -допустимыми точками, и потому точки x_0^2 , x_0^3 не являются $N(x_0)$ -допустимыми. Как было замечено, это влечет $q = 2$. В последнем случае из полученного соотношения следует, что неподвижной точкой элемента $(hg^2)^{\Gamma(x_{-1})}$ может быть лишь точка $P_{-1}(e_{-1}^1 + \dots + e_{-1}^4)$. Поэтому $\tilde{x}_i = P_i(e_i^1 + \dots + e_i^4)$ для $i \in \mathbb{Z}$. Мы находимся, таким образом, в предположениях рассмотренного ранее случая (а), что дает требуемое противоречие в случае неприводимого действия T на $[x_0 : \tilde{x}_0]$.

2б) Предположим, что действие группы T на проективном пространстве $[x_0 : \tilde{x}_0]$ таково, что существует T -допустимая прямая, но нет T -допустимых точек.

По предположению существует T -допустимая плоскость Y пространства $\Gamma(x_0)$, содержащая точку $\tilde{x}_0$. Поскольку из (3.33), (3.34) и T -допустимости Y следует $x_0^1, x_0^4 \in Y$, то $Y = \langle x_0^1, x_0^4, \tilde{x}_0 \rangle$ – единственная T -допустимая плоскость, содержащая точку $\tilde{x}_0$.

Если существует T -допустимая плоскость, отличная от Y , то, поскольку в силу (3.33) и (3.34) каждая T -допустимая плоскость содержит точки x_0^1, x_0^4 , получаем, что прямая $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, будучи пересечением всех T -допустимых плоскостей, $N(x_0)$ -допустима. Покажем, однако, что прямая $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$ не является $N(x_0)$ -допустимой. Положим $H = \langle N(x_0), g \rangle$, и пусть Δ – подграф графа Γ , порожденный H -орбитой (на $V(\Gamma)$), содержащей вершину x_0 . Обозначим через $\overline{}$ естественный гомоморфизм $H \rightarrow H^{V(\Delta)}$. Тогда, предполагая $N(x_0)$ -инвариантность прямой $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, имеем: Δ – дерево, $\overline{H}$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Δ , и для $z \in V(\Delta)$ группа $\overline{H}(z)$ конечна и группа $\overline{H}(z)^{\Delta(z)}$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу $\text{PSL}_2(q)$ в естественном представлении на точках $\text{PG}_1(q)$. Следовательно, $\overline{H}_2(z_0, z_1) = 1$ для $[z_0, z_1] \in E(\Delta)$ (см. [3, ч. I, предложение 2.1]). В частности, так как $x_i \in V(\Delta)$ для $i \in \mathbb{Z}$, то

$$N_2(x_0, x_1) \leq H_2(x_0, x_1) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots).$$

Но тогда $N_7(x_0) \leq G(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, что противоречит (3.5).

Таким образом, плоскость $Y = \langle x_0^1, x_0^4, \tilde{x}_0 \rangle$ – единственная T -допустимая плоскость, и потому она $N(x_0)$ -допустима. Поскольку из (3.33), (3.34) следует, что $\tilde{x}_0$ – единственная T -допустимая точка плоскости Y , то точка $\tilde{x}_0$ также $N(x_0)$ -допустима.

Если $N_1(x_{-1})^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^1) \not\leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$, то согласно рассуждениям из 2а) существует элемент $hg^2 \in N(x_{-1})$ такой, что

$$hg^2 \left(P_{-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_{-1}^j \right) \right) \in P_{-1} \left(\left\langle e_{-1}^4, \sum_{1 \leq j \leq 3} \mu_{j+1}^{\sigma^{-1}} e_{-1}^j \right\rangle \right)$$

для всех $\mu_1, \dots, \mu_4$, не равных одновременно нулю, и, в частности, $hg^2(x_{-1}^1) = x_{-1}^4$, $hg^2(x_{-1}^4) \in \langle x_{-1}^3, x_{-1}^4 \rangle \setminus \{x_{-1}^4\}$. Поскольку ни x_{-1}^2 , ни x_{-1}^3 не являются неподвижными точками элемента hg^2 , заключаем на основании (3.4) и $\tilde{x}_0 \notin \langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, что $q = 2$. Но тогда неподвижной точкой элемента $(hg^2)^{\Gamma(x_{-1})}$ может быть лишь точка $P_{-1}(e_{-1}^1 + \dots + e_{-1}^4)$, и потому

$$\begin{aligned} g^{-1}(Y) &= \langle g^{-1}(x_0^1), g^{-1}(x_0^4), g^{-1}(\tilde{x}_0) \rangle = \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4, \tilde{x}_{-1} \rangle \\ &= \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4, P_{-1}(e_{-1}^1 + \dots + e_{-1}^4) \rangle \end{aligned}$$

$-N(x_{-1})$ -допустимая плоскость пространства $\Gamma(x_{-1})$. Противоречие с $hg^2(x_{-1}^4) \in \langle x_{-1}^3, x_{-1}^4 \rangle \setminus \{x_{-1}^4\}$.

Таким образом,

$$N_1(x_{-1})^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^1) \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle). \quad (3.35)$$

Поскольку согласно (3.33), (3.34) и (3.4) в группе $N(x_0)$ найдется элемент, меняющий местами точки x_0^1 и x_0^4 , то справедливо также включение

$$N_1(x_1)^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^4) \leq T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle). \quad (3.36)$$

Предположим, что для некоторого $a \in N_1(x_{-1})$ имеем $1 \neq a^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$, $a^{\Gamma(x_1)} \in T_{x_1}(x_1^1, \langle x_1^1, x_1^4 \rangle)$. Тогда a — 2-элемент (см. [3, ч. II, предложение 1.3, 1]), и элементы $a^{\Gamma(x_0)}$, $a^{\Gamma(x_2)}$ представимы соответственно матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & \alpha^\sigma & \beta^\sigma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где α, β — не равные одновременно нулю элементы $\mathbb{F}_q$. Элемент $a_1 := [a, g^{-2}ag^2]$ таков, что $a_1 \in N_1(x_{-1})$ и $a_1^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\alpha^\sigma & \alpha\beta^\sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $N_1(x_{-1})^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^1) \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ (см. (3.35)), отсюда следует, что либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 0$. Если $\beta = 0$, то $a(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 = a_1(\tilde{x}_0)$, противоречит $\tilde{x}_0 \notin \langle x_0^1, x_0^4 \rangle$. Следовательно, $\alpha = 0$, и тогда в силу $a(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 = g^{-2}ag^2(\tilde{x}_0)$ и $\tilde{x}_0 \notin \langle x_0^1, x_0^4 \rangle$ имеем $\tilde{x}_0 \in \langle x_0^1, x_0^2 \rangle \setminus \{x_0^1\}$. При этом $Y = \langle x_0^1, x_0^4, \tilde{x}_0 \rangle = \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle$.

Если дополнительно предположить, что, симметричным образом, для некоторого $b \in N_1(x_1)$ имеем $1 \neq b^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$, $b^{\Gamma(x_{-1})} \in T_{x_{-1}}(x_{-1}^4, \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4 \rangle)$, то аналогичные рассуждения дают $\tilde{x}_0 \in \langle x_0^3, x_0^4 \rangle \setminus \{x_0^4\}$, а это противоречит $\tilde{x}_0 \in \langle x_0^1, x_0^2 \rangle \setminus \{x_0^1\}$. Таким образом, учитывая (3.7) и (3.36), получаем, что (при сделанных предположениях относительно элемента a) существует элемент $b_1 \in N_1(x_1)$, для которого $1 \neq b_1^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $b_1^{\Gamma(x_{-1})} \in T_{x_{-1}}(x_{-1}^4) \setminus T_{x_{-1}}(x_{-1}^4, \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4 \rangle)$. При этом в силу $b_1(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, где $\tilde{x}_0 \in \langle x_0^1, x_0^2 \rangle \setminus \{x_0^1\}$, элемент $b_1^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 1 \end{pmatrix},$$

где ν – ненулевой элемент $\mathbb{F}_q$. Далее, в силу $b_1(x_{-1}^1) \in \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4 \rangle \setminus \{x_{-1}^1\}$ из (3.33), (3.4) и (3.2) вытекает существование элемента $a_2 \in N(x_{-2}, x_{-1})$ такого, что $a_2(x_0) = b_1(x_{-2})$. Заметим, что при этом $b_1 a_2 g^2(x_{-2}) = x_{-2}$ и, с учетом $N(x_{-2})$ -допустимости плоскости $g^{-2}(Y) = \langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^4 \rangle$ и [3, ч. II, предложение 1.2, 2)],

$$\begin{aligned} b_1 a_2 g^2(\langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^3 \rangle) &= b_1 a_2(\langle x_0^1, x_0^2, x_0^3 \rangle) = b_1 a_2(\varphi_{x_{-2}, x_0}(\langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^4 \rangle)) \\ &= b_1(\varphi_{x_{-2}, a_2(x_0)}(\langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^4 \rangle)) \\ &= b_1(\varphi_{x_0, a_2(x_0)} \varphi_{x_{-2}, x_0}(\langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^4 \rangle)) \\ &= b_1(\varphi_{x_0, a_2(x_0)}(\langle x_0^1, x_0^2, x_0^3 \rangle)) = \varphi_{x_0, x_{-2}}(b_1(\langle x_0^1, x_0^2, x_0^3 \rangle)) \\ &= \varphi_{x_0, x_{-2}}(P_0(\langle e_0^1, e_0^2, e_0^3 + \nu e_0^4 \rangle)) \\ &= P_{-2}(\langle e_{-2}^1, e_{-2}^2 + \nu^{\sigma^{-1}} e_{-2}^3, e_{-2}^4 \rangle). \end{aligned}$$

Но теперь из

$$\langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^3 \rangle \cap \langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^4 \rangle = \langle x_{-2}^1, x_{-2}^2 \rangle$$

и

$$P_{-2}(\langle e_{-2}^1, e_{-2}^2 + \nu^{\sigma^{-1}} e_{-2}^3, e_{-2}^4 \rangle) \cap \langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^4 \rangle = \langle x_{-2}^1, x_{-2}^4 \rangle$$

в силу $N(x_{-2})$ -допустимости плоскости $\langle x_{-2}^1, x_{-2}^2, x_{-2}^4 \rangle$ следует $b_1 a_2 g^2(\langle x_{-2}^1, x_{-2}^2 \rangle) = \langle x_{-2}^1, x_{-2}^4 \rangle$, что противоречит $N(x_{-2})$ -допустимости точки $\tilde{x}_{-2} \in \langle x_{-2}^1, x_{-2}^2 \rangle \setminus \{x_{-2}^1\}$.

Таким образом, предположение о существовании в группе $N_1(x_{-1})$ элемента a , для которого $1 \neq a^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $a^{\Gamma(x_1)} \in T_{x_1}(x_1^1, \langle x_1^1, x_1^4 \rangle)$, ведет к противоречию. Аналогично, к противоречию приводит предположение о существовании в группе $N_1(x_1)$ элемента b , для которого $1 \neq b^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $b^{\Gamma(x_{-1})} \in T_{x_{-1}}(x_{-1}^4, \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4 \rangle)$. Поскольку, однако, согласно (3.6) и (3.7) имеем $N_1(x_{-1})^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^1) \neq 1$ и $N_1(x_1)^{\Gamma(x_0)} \cap T_{x_0}(x_0^4) \neq 1$, то отсюда с учетом (3.35) и (3.36) следует существование таких элементов $a' \in N_1(x_{-1})$, $b' \in N_1(x_1)$, что

$$1 \neq a'^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle), \quad 1 \neq b'^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$$

и

$$a'^{\Gamma(x_1)} \notin T_{x_1}(x_1^1, \langle x_1^1, x_1^4 \rangle), \quad b'^{\Gamma(x_{-1})} \notin T_{x_{-1}}(x_{-1}^4, \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4 \rangle).$$

При этом в силу [3, ч. II, предложение 1.3, 1)] элементы a' и b' оказываются 2-элементами, что совместно с $a'^{[x_1:x_0]} = 1$ и $b'^{[x_{-1}:x_0]} = 1$ (последние равенства вытекают из $a' \in N_1(x_{-1})$ и $b' \in N_1(x_1)$) влечет $a'^{\Gamma(x_1)} \in T_{x_1}(x_1^1)$ и $b'^{\Gamma(x_{-1})} \in T_{x_{-1}}(x_{-1}^4)$. Учитывая, кроме того, (3.4), будем без потери общности предполагать, что $a'(x_1^4) = P_1(e_1^1 + e_1^4)$ и $b'(x_{-1}^1) = P_{-1}(e_{-1}^1 + e_{-1}^4)$.

Элемент $g^2 b' g^{-2} a' g^2$ группы N оставляет на месте вершину x_0 . Найдем образ плоскости $\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle$ под действием этого элемента. С учетом [3, ч. II, предложение 1.2, 2)] имеем

$$\begin{aligned} g^2 b' g^{-2} a' g^2 (\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle) &= g^2 b' g^{-2} a' (\langle x_2^1, x_2^2, x_2^4 \rangle) \\ &= g^2 b' g^{-2} a' (\varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle)) = g^2 b' g^{-2} (\varphi_{x_0, a'(x_2)}(\langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle)) \\ &= g^2 b' g^{-2} (\varphi_{x_2, a'(x_2)} \varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle)) = g^2 b' g^{-2} (\varphi_{x_2, a'(x_2)}(\langle x_2^1, x_2^2, x_2^4 \rangle)) \\ &= g^2 b' (\varphi_{x_0, g^{-2} a'(x_2)}(\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)) = g^2 (\varphi_{x_0, x_{-2}}(\langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)) \\ &= g^2 (\langle x_{-2}^1, x_{-2}^3, x_{-2}^4 \rangle) = \langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{x}_0 \notin \langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, отсюда в силу $N(x_0)$ -допустимости точки $\tilde{x}_0$ следует $\tilde{x}_0 \notin \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle$. Кроме того, рассматривая действие элемента $(g^2 b' g^{-2} a' g^2)^{-1}$ на плоскость $\langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle$, получаем $\tilde{x}_0 \notin \langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle$. Таким образом, с учетом (3.4) и $N(x_0)$ -допустимости точки $\tilde{x}_0$ имеем $q = 2$ и $\tilde{x}_0 = P_0(e_0^2 + e_0^3 + \theta e_0^1 + \theta' e_0^4)$ для некоторых $\theta, \theta' \in \mathbb{F}_2$.

Ранее была доказана $N(x_0)$ -допустимость плоскости $Y = \langle x_0^1, x_0^4, \tilde{x}_0 \rangle = P_0(\langle e_0^1, e_0^2 + e_0^3, e_0^4 \rangle)$. Кроме того (см. начало рассмотрения подслучая 2б)), прямая $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$ не является $N(x_0)$ -допустимой. С учетом (3.33), (3.34) это влечет совпадение группы $N(x_0)^Y$ со стабилизатором в группе $G(x_0, Y)^Y \cong \text{PSL}_3(2)$ точки $\tilde{x}_0$. Из $a'^{\Gamma(x_0)}, b'^{\Gamma(x_0)} \in N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ теперь следует совпадение группы $N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ с группой $G(x_0, \tilde{x}_0, Y)^{\Gamma(x_0)}$ – стабилизатором в группе $G(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cong \text{PSL}_4(2)$ флага $\{\tilde{x}_0\} \subseteq Y$. В частности, в группе $N(x_0)$ найдется элемент h' , который стабилизирует поточечно плоскость Y и отображает точку x_0^3 в точку из $\Gamma(x_0) \setminus \langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle$.

Если группа $N(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ оставляет на месте прямую $\langle x_i, x_{i+2} \rangle$ для некоторого (а тогда в силу (3.2) и для каждого) $i \in \mathbb{Z}$, то $h' \in N(x_{-1}, x_0, x_1)$ влечет

$$h'(x_2) \in \langle x_0, x_2 \rangle \setminus \{x_0\} = \{x_2, P_1(e_1^1 + e_1^4)\}.$$

Но при $h'(x_2) = x_2$ имеем $h' \in N(x_0, x_1, x_2)$ и

$$\begin{aligned} h'(\langle x_1, x_3 \rangle) &= h'(\varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^3, x_0^4 \rangle)) = \varphi_{x_0, x_2}(\langle h'(x_0^3), x_0^4 \rangle) \\ &\not\subseteq \varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle) = \langle x_2^1, x_2^2, x_2^4 \rangle \supseteq \langle x_1, x_3 \rangle, \end{aligned}$$

а при $h'(x_2) = P_1(e_1^1 + e_1^4)$ с учетом $a'^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$ и $a'(P_1(e_1^1 + e_1^4)) = x_2$ имеем $a' h' \in N(x_0, x_1, x_2)$ и

$$\begin{aligned} a' h'(\langle x_1, x_3 \rangle) &= a' h'(\varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^3, x_0^4 \rangle)) = \varphi_{x_0, x_2}(\langle a' h'(x_0^3), x_0^4 \rangle) \\ &\not\subseteq \varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle) = \langle x_2^1, x_2^2, x_2^4 \rangle \supseteq \langle x_1, x_3 \rangle, \end{aligned}$$

и потому в любом из этих случаев группа $N(x_0, x_1, x_2)$ сдвигает прямую $\langle x_1, x_3 \rangle$. Следовательно, предположение о $N(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ -допустимости прямой $\langle x_i, x_{i+2} \rangle$ приводит к противоречию. Таким образом, для каждого $i \in \mathbb{Z}$ прямая $\langle x_i, x_{i+2} \rangle$ не является $N(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ -допустимой.

Теперь несложно завершить рассмотрение подслучая 2б). Прежде всего, $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \not\leq N_3(x_{-2})$, так как в противном случае с учетом (3.2) имеем

$$N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_3(x_{-4}, x_{-3}, \dots) \leq G(x_{-4}, x_{-3}, \dots),$$

что противоречит (3.5). Если $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_2(x_{-1})$, то, поскольку группа $N(x_{-4}, x_{-3}, x_{-2})$ сдвигает прямую $\langle x_{-3}, x_{-1} \rangle$ (см. предыдущий абзац) и $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N(x_{-4}, x_{-3}, x_{-2})$, на основании леммы 2.2, 3) получаем $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_3(x_{-2})$. Противоречие. Итак,

$$N_3(x_{-4}, x_{-3}) \not\leq N_2(x_{-1}). \quad (3.37)$$

Далее, согласно лемме 2.2, 2) и (3.35) имеем $N_3(x_{-3})^{\Gamma(x_0)} \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle)$. Поскольку, кроме того, $\tilde{x}_0 = P_0(e_0^2 + e_0^3 + \theta e_0^1 + \theta' e_0^4) - N(x_0)$ -допустимая точка, то

$$N_3(x_{-3})^{\Gamma(x_0)} \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4, \tilde{x}_0 \rangle) = 1,$$

т.е.

$$N_3(x_{-3}) \leq N_1(x_0). \quad (3.38)$$

Из (3.38), в частности, следует $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_1(x_{-1}^1, x_{-1}^4)$. Поскольку, кроме того, согласно лемме 2.2, 4) имеем $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_1(x_{-1}^2)$, то из (3.37) и леммы 2.2, 1) вытекает существование в группе $N_3(x_{-4}, x_{-3})$ элемента h_1 такого, что $h_1 \notin N_1(y)$ для всех $y \in \Gamma(x_{-1}) \setminus \langle x_{-1}^1, x_{-1}^2, x_{-1}^4 \rangle$.

Далее, как было доказано, группа $N(x_{-3}, x_{-2}, x_{-1})$ сдвигает прямую $\langle x_{-2}, x_0 \rangle$. Обозначим через h_2 элемент группы $N(x_{-3}, x_{-2}, x_{-1})$ такой, что $h_2(\langle x_{-2}, x_0 \rangle) \neq \langle x_{-2}, x_0 \rangle$. Тогда в силу $N(x_{-1})$ -допустимости плоскости

$$g^{-1}(Y) = \langle x_{-1}^1, x_{-1}^4, \tilde{x}_{-1} \rangle = \langle x_{-2}, x_0, P_{-1}(e_{-1}^2 + e_{-1}^3 + \theta e_{-1}^1 + \theta' e_{-1}^4) \rangle$$

и в силу $g^{-1}(Y) \cap \langle x_{-1}^1, x_{-1}^2, x_{-1}^4 \rangle = \langle x_{-2}, x_0 \rangle$ имеем $h_2(x_0) \in \Gamma(x_{-1}) \setminus \langle x_{-1}^1, x_{-1}^2, x_{-1}^4 \rangle$. Теперь выбор элемента h_1 влечет $h_2^{-1}h_1h_2 \in N_3(x_{-3})$ и $h_2^{-1}h_1h_2 \notin N_1(x_0)$. Противоречие с (3.38) завершает рассмотрение подслучая 2б).

2в) Предположим, наконец, что действие группы T на проективном пространстве $[x_0 : \tilde{x}_0]$ таково, что существует T -допустимая точка.

По предположению существует T -допустимая прямая Y пространства $\Gamma(x_0)$, содержащая T -допустимую точку $\tilde{x}_0$. Поскольку из (3.33), (3.34) следует, что произвольная T -допустимая прямая либо не пересекается с прямой $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$ и этим условием, будучи пересечением осей трансекций из $T \cap (T_{x_0}(x_0^1) \cup T_{x_0}(x_0^4))$, однозначно определена, либо совпадает с прямой $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$, которая не содержит T -допустимых

точек, то Y – единственная T -допустимая прямая, содержащая T -допустимые точки. Отсюда вытекает, что $Y - N(x_0)$ -допустимая прямая,

$$Y \cap \langle x_0^1, x_0^4 \rangle = \emptyset, \quad (3.39)$$

$$T \cap T_{x_0}(x_0^1) \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, Y \rangle), \quad (3.40)$$

$$T \cap T_{x_0}(x_0^4) \leq T_{x_0}(x_0^4, \langle x_0^4, Y \rangle). \quad (3.41)$$

Заметим, что по выбору T из (3.40), (3.41) и $N(x_0)$ -допустимости прямой Y следует T -допустимость каждой точки прямой Y . Более того, поскольку Y – единственная T -допустимая прямая, содержащая T -допустимые точки, то Y есть в точности множество всех T -допустимых точек.

Из (3.6), (3.40) и (3.39) следует существование в группе $N_1(x_{-1})$ элемента a такого, что $a^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1) \setminus T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$. Рассуждения из 2а) теперь показывают, что для некоторого элемента $h \in N_1(a(x_1))$ элемент hg^2 принадлежит группе $N(x_{-1})$ и отображает произвольную точку $P_{-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_{-1}^j \right)$ пространства $\Gamma(x_{-1})$ в точку из $P_{-1} \left(\langle e_{-1}^4, \sum_{1 \leq j \leq 3} \mu_{j+1}^{\sigma^{-1}} e_{-1}^j \rangle \right)$. Положим $h_1 = g(hg^2)g^{-1}$. Элемент $h_1 \in N(x_0)$ отображает произвольную точку $P_0 \left(\sum_{1 \leq j \leq 4} \mu_j e_0^j \right) \in \Gamma(x_0)$ в точку из $P_0 \left(\langle e_0^4, \sum_{1 \leq j \leq 3} \mu_{j+1}^{\sigma^{-1}} e_0^j \rangle \right)$.

При $q > 2$ из (3.4) и (3.39) следует, что $N(x_0)$ -допустимой прямой Y пространства $\Gamma(x_0)$ может быть лишь прямая $\langle x_0^2, x_0^3 \rangle$. Но $h_1(\langle x_0^2, x_0^3 \rangle) \neq \langle x_0^2, x_0^3 \rangle$. Следовательно, $q = 2$, и элемент $h_1^{\Gamma(x_0)}$ представим матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Поскольку $Y - \langle h_1 \rangle$ -допустимая прямая, то отсюда следует, что реализуется одна из следующих двух возможностей.

1°. $Y = P_0(\langle e_0^1 + e_0^3, e_0^2 + e_0^4 \rangle)$, элемент h_1 стабилизирует точку $P_0(e_0^1 + \dots + e_0^4)$ и меняет местами точки $P_0(e_0^1 + e_0^3)$ и $P_0(e_0^2 + e_0^4)$ прямой Y .

2°. $Y = P_0(\langle e_0^1 + e_0^2 + e_0^4, e_0^1 + e_0^3 + e_0^4 \rangle)$, элемент h_1 циклически переставляет точки $P_0(e_0^1 + e_0^2 + e_0^4)$, $P_0(e_0^1 + e_0^3 + e_0^4)$, $P_0(e_0^2 + e_0^3)$ прямой Y .

Далее, как было замечено, группа T поточечно стабилизирует прямую Y . Поскольку, кроме того, стабилизатор в группе T прямой $\langle x_0^1, x_0^4 \rangle$ согласно (3.33), (3.34) действует на этой прямой как группа $\text{PSL}_2(2)$, то из $h_1(\langle x_0^1, x_0^4 \rangle) = \langle x_0^3, x_0^4 \rangle$ и $h_1(\langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle) \neq \langle x_0^1, x_0^3, x_0^4 \rangle$ следует, что T есть поточечный стабилизатор прямой Y в группе $G(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cong \text{PSL}_4(2)$. В частности, поточечный стабилизатор в группе $N(x_0)$ прямой Y содержит элемент h_2 такой, что $h_2(x_0^1) = h_1(x_0^1)$ и $h_2(x_0^4) = h_1(x_0^4)$. Элемент $h_3 := h_2^{-1}h_1$ принадлежит $N(x_{-1}, x_0, x_1)$ и действует на точках прямой Y так же, как элемент h_1 . В случае 1° имеем

$$h_3(x_0^3) = h_3(P_0((e_0^1 + e_0^3) + e_0^1)) = P_0((e_0^2 + e_0^4) + e_0^1);$$

в случае 2° имеем

$$h_3(x_0^3) = h_3(P_0((e_0^1 + e_0^3 + e_0^4) + e_0^1 + e_0^4)) = P_0((e_0^2 + e_0^3) + e_0^1 + e_0^4).$$

Следовательно, как в случае 1°, так и в случае 2° справедливо $h_3(x_0^3) \notin \langle x_0^3, x_0^4 \rangle$.

Следующие рассуждения отчасти сходны с заключительными рассуждениями из 2б).

Если группа $N(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ оставляет на месте прямую $\langle x_i, x_{i+2} \rangle$ для некоторого (а тогда в силу (3.2) и для каждого) $i \in \mathbb{Z}$, то $h_3 \in N(x_{-1}, x_0, x_1)$ влечет

$$h_3(x_2) \in \langle x_0, x_2 \rangle \setminus \{x_0\} = \{x_2, P_1(e_1^1 + e_1^4)\}.$$

Но при $h_3(x_2) = x_2$ имеем $h_3 \in N(x_0, x_1, x_2)$ и

$$\begin{aligned} h_3(\langle x_1, x_3 \rangle) &= h_3(\varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^3, x_0^4 \rangle)) = \varphi_{x_0, x_2}(\langle h_3(x_0^3), x_0^4 \rangle) \\ &\neq \varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^3, x_0^4 \rangle) = \langle x_1, x_3 \rangle, \end{aligned}$$

а при $h_3(x_2) = P_1(e_1^1 + e_1^4)$ с учетом $gag^{-1} \in N_1(x_0)$ и $gag^{-1}(P_1(e_1^1 + e_1^4)) = x_2$ (напомним, что $a \in N_1(x_{-1})$ и $a^{\Gamma(x_0)} \in T_{x_0}(x_0^1) \setminus T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^4 \rangle)$) имеем $gag^{-1}h_3 \in N(x_0, x_1, x_2)$ и

$$\begin{aligned} gag^{-1}h_3(\langle x_1, x_3 \rangle) &= gag^{-1}h_3(\varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^3, x_0^4 \rangle)) = \varphi_{x_0, x_2}(\langle gag^{-1}h_3(x_0^3), x_0^4 \rangle) \\ &= \varphi_{x_0, x_2}(\langle h_3(x_0^3), x_0^4 \rangle) \neq \varphi_{x_0, x_2}(\langle x_0^3, x_0^4 \rangle) = \langle x_1, x_3 \rangle, \end{aligned}$$

и потому в любом из этих случаев группа $N(x_0, x_1, x_2)$ сдвигает прямую $\langle x_1, x_3 \rangle$. Следовательно, предположение о $N(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ -допустимости прямой $\langle x_i, x_{i+2} \rangle$ приводит к противоречию. Таким образом, для каждого $i \in \mathbb{Z}$ прямая $\langle x_i, x_{i+2} \rangle$ не является $N(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ -допустимой.

Если $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_3(x_{-2})$, то с учетом (3.2) имеем

$$N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_3(x_{-4}, x_{-3}, \dots) \leq G(x_{-4}, x_{-3}, \dots),$$

что противоречит (3.5). Следовательно, $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \not\leq N_3(x_{-2})$. Если $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_2(x_{-1})$, то, поскольку группа $N(x_{-4}, x_{-3}, x_{-2})$ сдвигает прямую $\langle x_{-3}, x_{-1} \rangle$ (см. предыдущий абзац) и $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N(x_{-4}, x_{-3}, x_{-2})$, на основании леммы 2.2, 3) получаем $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_3(x_{-2})$. Противоречие. Следовательно,

$$N_3(x_{-4}, x_{-3}) \not\leq N_2(x_{-1}). \quad (3.42)$$

Далее, согласно лемме 2.2, 2) и (3.40) имеем

$$N_3(x_{-4}, x_{-3})^{\Gamma(x_0)} \leq T_{x_0}(x_0^1, \langle x_0^1, x_0^2, Y \rangle),$$

и поскольку как в случае 1°, так и в случае 2° справедливо равенство $\langle x_0^1, x_0^2, Y \rangle = \Gamma(x_0)$, то $N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_1(x_0)$. Кроме того, согласно лемме 2.2, 4) имеем

$N_3(x_{-4}, x_{-3}) \leq N_1(x_{-1}^2)$. Из (3.42) и леммы 2.2, 1) теперь следует существование в группе $N_3(x_{-4}, x_{-3})$ элемента h_4 такого, что $h_4 \notin N_1(y)$ для всех $y \in \Gamma(x_{-1}) \setminus \langle x_{-1}^1, x_{-1}^2, x_{-1}^4 \rangle$.

Поскольку, как было показано, подгруппа T группы $N(x_0)^{\Gamma(x_0)}$ совпадает с поточечным стабилизатором прямой Y в группе $G(x_0)^{\Gamma(x_0)} \cong \text{PSL}_4(2)$, то как в случае 1°, так и в случае 2° в группе $N(x_{-1}, x_0)$ найдется элемент h_5 такой, что $h_5(x_0^4) \notin \langle x_0^1, x_0^2, x_0^4 \rangle$. С учетом (3.2) при этом $g^{-1}h_5g \in N(x_{-2}, x_{-1})$ и $g^{-1}h_5g(x_{-1}^4) \notin \langle x_{-1}^1, x_{-1}^2, x_{-1}^4 \rangle$. Полагая $y' = g^{-1}h_5g(x_{-1}^4)$, имеем согласно предыдущему абзацу и лемме 2.2, 2)

$$1 \neq h_4^{\Gamma(y')} \in T_{y'}(x_{-1}, \varphi_{x_{-2}, y'}(\langle x_{-3}, x_{-1} \rangle)). \quad (3.43)$$

В то же время как в случае 1°, так и в случае 2° имеет место включение

$$Y \subseteq \varphi_{x_{-2}, x_0}(\langle x_{-1}, g^{-2}(Y) \rangle) \setminus \{x_{-1}\}.$$

Действуя на левую и правую его части элементом $g^{-1}h_5g \in N(x_{-2}, x_{-1})$, с учетом $N(x_{-2})$ -допустимости прямой $g^{-2}(Y)$ (которая следует из $N(x_0)$ -допустимости прямой Y и (3.2)) получаем

$$g^{-1}h_5g(Y) \subseteq \varphi_{x_{-2}, y'}(\langle x_{-1}, g^{-2}(Y) \rangle) \setminus \{x_{-1}\},$$

причем $g^{-1}h_5g(Y) - N(y')$ -допустимая прямая. Но тогда трансекция $h_4^{\Gamma(y')} \in N(y')^{\Gamma(y')}$ с центром x_{-1} стабилизирует прямую $g^{-1}h_5g(Y)$ поточно, и потому ось $h_4^{\Gamma(y')}$ содержит плоскость $\langle x_{-1}, g^{-1}h_5g(Y) \rangle = \varphi_{x_{-2}, y'}(\langle x_{-1}, g^{-2}(Y) \rangle)$. Из (3.43) и равенства $\langle x_{-2}^1, x_{-2}^4, g^{-2}(Y) \rangle = \Gamma(x_{-2})$, справедливого как в случае 1°, так и в случае 2°, теперь следует

$$\begin{aligned} 1 \neq h_4^{\Gamma(y')} &\in T_{y'}(x_{-1}, \langle \varphi_{x_{-2}, y'}(\langle x_{-3}, x_{-1} \rangle), \varphi_{x_{-2}, y'}(\langle x_{-1}, g^{-2}(Y) \rangle) \rangle) \\ &= T_{y'}(x_{-1}, \varphi_{x_{-2}, y'}(\langle x_{-2}^1, x_{-2}^4, g^{-2}(Y) \rangle)) = 1. \end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает рассмотрение подслучая 2в). Лемма 3.1 доказана.

§ 4. Завершение доказательства теоремы

Обозначим через m такое натуральное число, что $G_m(z_0, z_1) \neq 1 = G_{m+1}(z_0, z_1)$ для произвольного ребра $[z_0, z_1]$ графа Γ (заметим, что $G_1(z_0, z_1) \neq 1$ в силу $G_2(x) \neq 1$). Аналогично [3, ч. II, § 3] имеем

$$Z(O_2(G(z_0, z_1))) \leq G_m(z_0, z_1) \quad \text{для} \quad [z_0, z_1] \in E(\Gamma). \quad (4.1)$$

Согласно лемме 3.1 число m не превосходит 6.

ЛЕММА 4.1. 1) $T_{z_1}(z_0) \leq (C_{G(z_1)}(G_m(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_1)}$ для $[z_0, z_1] \in E(\Gamma)$.

2) Для произвольной 2-дуги (z_0, z_1, z_2) графа Γ найдется такая вершина z , удаленная на расстояние $m - 1$ от z_2 , что $Z(O_2(G(z, z')))) \not\leq G(z_0)$ для некоторой вершины $z' \in \Gamma(z)$. Для каждой вершины z с этим свойством группа $G_m(z_0, z_1)^{\Gamma_m(z_2)}$ точно действует на множестве $\Gamma(z)$.

3) Если $m > 1$, то для произвольной 2-дуги (z_0, z_1, z_2) графа Γ группа $G_m(z_0, z_1)^{\Gamma_m(z_2)}$ имеет порядок $\leq q^2$, а ее централизатор в $G_1(z_1)^{\Gamma_m(z_2)}$ индуцирует на $[z_2 : z_1]$ группу, которая содержит изоморфную $\text{PSL}_3(q)$ нормальную подгруппу группы $G(z_1, z_2)^{[z_2 : z_1]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Для этого в силу $C_{G(z_1)}(G_m(z_0, z_1)) \leq G(z_0, z_1)$ достаточно показать, что

$$T_{z_1}(z_0) \cap (C_{G(z_1)}(G_m(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_1)} \neq 1.$$

Согласно (4.1) существуют такие элемент $h \in Z(O_2(G(z_0, z_1)))$ и m -дуга $(z_1, z_2, \dots, z_{m+1})$ графа Γ , что $h^{\Gamma(z_{m+1})} \neq 1$. Заметим, что при этом

$$h^{\Gamma(z_{m+1})} \in G_m(z_0, z_1)^{\Gamma(z_{m+1})} \leq T_{z_{m+1}}(z_m)$$

(см. [3, ч. II, предложение 1.3, 3])). В силу транзитивности действия группы G на множестве 1-дуг графа Γ найдется элемент $h_1 \in G$ такой, что $h_1(z_{m+i}) = z_i$ для $i = 0, 1$. Имеем, очевидно,

$$1 \neq (h_1 h h_1^{-1})^{\Gamma(z_1)} \in T_{z_1}(z_0), \quad h_1 h h_1^{-1} \in Z(O_2(G(h_1(z_0), h_1(z_1)))).$$

Поскольку, кроме того, согласно [3, ч. II, предложение 1.3] имеем

$$G_m(z_0, z_1) \leq O_2(G(h_1(z_0), h_1(z_1))),$$

то

$$1 \neq (h_1 h h_1^{-1})^{\Gamma(z_1)} \in T_{z_1}(z_0) \cap (C_{G(z_1)}(G_m(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_1)},$$

что доказывает 1).

Докажем утверждение 2). Согласно (4.1) существуют такие элемент $h \in Z(O_2(G(z_0, z_1)))$ и m -дуга $(z_2, z_3, \dots, z_{m+2})$ графа Γ , что $h(z_{m+2}) \neq z_{m+2}$. В силу транзитивности действия группы G на множестве 2-дуг графа Γ найдется элемент $h_1 \in G$ такой, что $h_1(z_{m+i}) = z_{2-i}$ для $i = 0, 1, 2$. При этом $h_1(z_1)$ – вершина, удаленная на расстояние $m - 1$ от z_2 ,

$$h_1 h h_1^{-1} \in Z(O_2(G(h_1(z_0), h_1(z_1)))), \quad h_1 h h_1^{-1}(z_0) \neq z_0.$$

Таким образом, в качестве z можно взять вершину $h_1(z_1)$.

Пусть теперь z – произвольная вершина на расстоянии $m - 1$ от z_2 , для которой $Z(O_2(G(z, z')))) \not\leq G(z_0)$, где z' – некоторая вершина из $\Gamma(z)$. Тогда из

$$G_m(z_0, z_1) \cap G_1(z) \leq O_2(G(z, z'))$$

и

$$Z(O_2(G(z, z')))^{\Gamma(z_1)} \leq T_{z_1}(z_2)$$

(см. [3, ч. II, предложение 1.3] и (4.1)) следует, что группа $C_{G(z_1)}(G_m(z_0, z_1) \cap G_1(z))^{\Gamma(z_1)}$ содержит элемент из $T_{z_1}(z_2)$, сдвигающий вершину z_0 . Поскольку согласно доказанному ранее утверждению 1) леммы эта группа содержит, кроме того, $T_{z_1}(z_0)$, то некоторый элемент из $C_{G(z_1)}(G_m(z_0, z_1) \cap G_1(z))$ отображает вершину z_0 в вершину z_2 . Отсюда следует равенство $G_m(z_0, z_1) \cap G_1(z) = G_m(z_0, z_1, z_2)$, доказывающее 2).

Докажем утверждение 3). Так как в случае $m > 1$ для произвольной $(m+1)$ -дуги $(z_0, \dots, z_{m+1})$ графа Γ согласно лемме 2.2, 2) имеем

$$G_m(z_0, z_1)^{\Gamma(z_{m+1})} \leq T_{z_{m+1}}(z_m, \varphi_{z_{m-1}, z_{m+1}}(\langle z_{m-2}, z_m \rangle)),$$

то из 2) следует, что элементарная 2-группа $G_m(z_0, z_1)^{\Gamma_m(z_2)}$ имеет порядок $\leq q^2$. В частности, произвольная группа, точно действующая на ней, не может иметь факторгруппу, изоморфную $\text{PSL}_3(q)$. Утверждение 3) следует теперь из [3, ч. II, предложение 1.2].

ЛЕММА 4.2. $m \leq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m > 5$. Тогда (см. начало параграфа) $m = 6$. Зафиксируем до конца доказательства леммы 3-дугу $(y_0, \dots, y_3)$ графа Γ и элемент h из $Z(O_2(G(y_0, y_1))) \setminus G_6(y_2)$. (Из $Z(O_2(G(y_0, y_1))) \leq G_6(y_2)$ в силу транзитивности действия G на множестве 2-дуг Γ следовало бы $1 \neq Z(O_2(G(y_0, y_1))) \leq G_7(y_0, y_1) = 1$; поэтому элемент h существует.) Согласно (4.1) имеем $h \in G_6(y_0, y_1)$.

Покажем, что для произвольных вершин $y_4 \in \Gamma(y_3) \setminus \varphi_{y_1, y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$, $y_5 \in \varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle)$ справедливо $h \in G_3(y_5)$. Рассуждая от противного, предполагаем существование такой 2-дуги (y_5, y_6, y_7) графа Γ , что $h^{\Gamma(y_7)} \neq 1$. Заметим, что при этом $(y_0, \dots, y_7)$ – 7-дуга графа Γ , и

$$h^{\Gamma(y_7)} \leq G_6(y_0, y_1)^{\Gamma(y_7)} \leq T_{y_7}(y_6)$$

(см., например, [3, ч. II, предложение 1.3, 3])). В силу транзитивности действия группы G на множестве 3-дуг графа Γ существует элемент $h_1 \in G$ такой, что $h_1(y_{7-i}) = y_{i+1}$ для $i = 0, 1, 2, 3$. Более того, из $y_0 \notin \varphi_{y_3, y_1}(\langle y_2, y_4 \rangle)$, транзитивности действия группы $G(y_1, \dots, y_4)$ на множестве $\Gamma(y_1) \setminus \varphi_{y_3, y_1}(\langle y_2, y_4 \rangle)$ (см. [3, ч. II, предложения 1.2, 1) и 1.3, 3)]) и $1 \neq h^{\Gamma(y_7)} \in T_{y_7}(y_6)$ следует возможность такого выбора элемента h_1 , что вершина $h_1^{-1}(y_0)$ сдвигается элементом h . При таком выборе h_1 элемент $h_1 h h_1^{-1} \in Z(O_2(G(h_1(y_0), h_1(y_1))))$ сдвигает вершину y_0 , что согласно лемме 4.1, 2) влечет точность действия группы $G_6(y_0, y_1)^{\Gamma_6(y_2)}$ на множестве $\Gamma(h_1(y_1))$. Однако из

$$h_1(y_1) \in \varphi_{h_1(y_4), h_1(y_2)}(\langle h_1(y_3), h_1(y_5) \rangle) = \varphi_{y_4, h_1(y_2)}(\langle y_3, h_1(y_3) \rangle)$$

согласно лемме 2.2, 4) следует

$$G_6(y_0, y_1) \leq G_3(y_3, y_4) \leq G_1(h_1(y_1)).$$

Таким образом, $G_6(y_0, y_1) \leq G_6(y_2)$, что противоречит $h \in G_6(y_0, y_1) \setminus G_6(y_2)$. Итак, для произвольных вершин $y_4 \in \Gamma(y_3) \setminus \varphi_{y_1, y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$, $y_5 \in \varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle)$ имеем $h \in G_3(y_5)$.

Далее, покажем, что для произвольной вершины $y_4 \in \Gamma(y_3) \setminus \varphi_{y_1, y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$ справедливо $h \notin G_4(y_4)$. Из $h \in G_6(y_0, y_1) \setminus G_6(y_2)$ вытекает существование такой 7-дуги $(y'_0, \dots, y'_7)$ графа Γ , что $y'_i = y_i$ для $i = 0, 1, 2, 3$ и $h^{\Gamma(y'_7)} \neq 1$. Рассуждая так же, как в предыдущем абзаце, находим элемент $h_1 \in G$, который отображает вершину y'_{7-i} в вершину y_{i+1} для $i = 0, 1, 2, 3$ и для которого вершина $h_1^{-1}(y_0)$ сдвигается элементом h . При этом (см. предыдущий абзац) группа $G_6(y_0, y_1)^{\Gamma(y_2)}$ точно действует на $\Gamma(h_1(y_1))$, и потому $h^{\Gamma(h_1(y_1))} \neq 1$. Остается заметить, что

$$h_1(y_1) = h_1(y'_1) \in h_1(\Gamma_3(y'_4)) = \Gamma_3(h_1(y'_4)) = \Gamma_3(y_4).$$

Итак, для произвольной вершины $y_4 \in \Gamma(y_3) \setminus \varphi_{y_1, y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$ имеем $h \in G_3(y_4) \setminus G_4(y_4)$, причем $h \in G_3(y_5)$ для всех $y_5 \in \varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle)$. Согласно лемме 2.3 отсюда следует, что для каждой вершины $z \in \Gamma(y_4) \setminus \varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle)$ (y_4 – по-прежнему произвольная вершина из $\Gamma(y_3) \setminus \varphi_{y_1, y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$) найдется прямая Z_z проективного пространства $\Gamma(z)$, для которой $h \in G_2(z')$ при $z' \in Z_z$ и $h \in G_1(z') \setminus G_2(z')$ при $z' \in \Gamma(z) \setminus Z_z$. Из $h \in Z(O_2(G(y_0, y_1)))$ при этом следует, что группа $O_2(G(y_0, y_1)) \cap G(y_2, y_3, y_4, z)$ оставляет на месте прямую Z_z (или, что эквивалентно, прямую $\varphi_{z, y_3}(Z_z)$). Поскольку в то же время из

$$G_2(y_1) \leq O_2(G(y_0, y_1)),$$

$$(G_2(y_1) \cap G(y_4))^{\Gamma(y_3)} = T_{y_3}(y_2, \langle y_2, y_4 \rangle), \quad (G_2(y_1) \cap G(y_4))^{\Gamma(y_4)} \leq T_{y_4}(y_3)$$

и

$$G_3(y_1)^{\Gamma(y_4)} \geq T_{y_4}(y_3, \varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle))$$

(см. [3, ч. II, предложение 1.3]) следует

$$(O_2(G(y_0, y_1)) \cap G(y_2, y_3, y_4, z))^{\Gamma(y_3)} \geq T_{y_3}(y_2, \langle y_2, y_4 \rangle),$$

то $\varphi_{z, y_3}(Z_z) = \langle y_2, y_4 \rangle$. Таким образом, $Z_z = \varphi_{y_3, z}(\langle y_2, y_4 \rangle)$ для всех $y_4 \in \Gamma(y_3) \setminus \varphi_{y_1, y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$, $z \in \Gamma(y_4) \setminus \varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle)$.

Пусть теперь Y – некоторая плоскость проективного пространства $\Gamma(y_3)$, не содержащая точку y_2 , $y' \in Y$ и Y' – некоторая плоскость проективного пространства $\Gamma(y')$, содержащая точку y_3 , но не содержащая прямую $\varphi_{y_2, y'}(\langle y_1, y_3 \rangle)$. Тогда элемент $h^{\Gamma_{Y, Y'}}$ стабилизирует поэлементно шар радиуса 4 с центром y_3 графа $\Gamma_{Y, Y'}$. Согласно лемме 2.1 и предложению 1.1 (утверждение 2д)) отсюда следует, что элемент $h^{\Gamma_{Y, Y'}}$ стабилизирует поэлементно шар радиуса 4 с центром y_4 графа $\Gamma_{Y, Y'}$, где y_4 – некоторая вершина из $Y \setminus \varphi_{y_1, y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$. Пусть z – произвольная вершина из $\Gamma_{Y, Y'}(y_4) \setminus \{y_3\}$. Согласно предыдущему абзацу имеем $\varphi_{y_3, z}(\langle y_2, y_4 \rangle) = Z_z$, что в силу выбора Y влечет $Z_z \cap \Gamma_{Y, Y'}(z) = \{y_4\}$. В частности, для произвольной вершины $z' \in \Gamma_{Y, Y'}(z) \setminus \{y_4\}$ в соответствии с выбором Z_z (см. предыдущий абзац) имеем $h \notin G_2(z')$. Более того, с учетом выбора Y' (и [3, ч. II, предложение 1.2, 2)) лемма 2.3 влечет $h^{\Gamma(z'')} \neq 1$, где z'' – произвольная вершина

из $\Gamma_{Y,Y'}(z') \setminus \varphi_{y_4,z'}(\langle y_3, z \rangle)$, причем $h^{\Gamma(z'')} \in T_{z''}(z', \varphi_{z,z''}(\langle Z_z, z' \rangle))$. Поскольку (см. выше) $Z_z \not\subseteq \Gamma_{Y,Y'}(z)$, то отсюда следует $h^{\Gamma_{Y,Y'}(z'')} \neq 1$. Противоречие с $h^{\Gamma_{Y,Y'}} \in G_4^{\Gamma_{Y,Y'}}(y_4)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. $m \leq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы сходно с доказательством леммы 4.2. Предполагая, что лемма не верна, согласно лемме 4.2 имеем $m = 5$. Зафиксируем 2-дугу (y_0, y_1, y_2) графа Γ и элемент h из $Z(O_2(G(y_0, y_1))) \setminus G_5(y_2)$ (h существует, поскольку из $Z(O_2(G(y_0, y_1))) \leq G_5(y_2)$ следовало бы $1 \neq Z(O_2(G(y_0, y_1))) \leq G_6(y_0, y_1) = 1$). Согласно (4.1) при этом $h \in G_5(y_0, y_1)$.

Покажем, что справедливы следующие утверждения.

(а) Если $(y_0, \dots, y_5)$ – 5-дуга графа Γ такая, что $y_5 \in \varphi_{y_2,y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle)$, то $h \in G_2(y_5)$.

(б) Если $(y_0, \dots, y_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что $y_4 \notin \varphi_{y_1,y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$, то $h \notin G_3(y_4)$.

(в) Если $(y_0, \dots, y_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что $y_4 \in \varphi_{y_1,y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle)$, то $h \in G_3(y_4)$.

Предварительно заметим, что после того, как утверждения (а)–(в) доказаны, выбирая произвольную не содержащую y_1 плоскость Y проективного пространства $\Gamma(y_2)$, произвольную вершину $y' \in Y$ и произвольную содержащую y_2 , но не содержащую $\varphi_{y_1,y'}(\langle y_0, y_2 \rangle)$ плоскость Y' проективного пространства $\Gamma(y')$, так же, как при доказательстве леммы 4.2, получаем противоречие, рассматривая действие элемента $h^{\Gamma_{Y,Y'}}$ на шаре радиуса 4 с центром y_2 графа $\Gamma_{Y,Y'}$ и используя лемму 2.3. Таким образом, доказательство леммы сводится к доказательству утверждений (а)–(в).

Для доказательства (а) предположим, что $h \notin G_1(y_6)$ для некоторой вершины $y_6 \in \Gamma(y_5)$. Тогда в силу транзитивности действия группы G на множестве 3-дуг графа Γ существует элемент $h_1 \in G$ такой, что $h_1(y_{6-i}) = y_{i+1}$ для $i = 0, 1, 2$ и $h(h_1^{-1}(y_0)) \neq h_1^{-1}(y_0)$. При таком выборе h_1 элемент $h_1 h h_1^{-1} \in Z(O_2(G(h_1(y_0), h_1(y_1))))$ сдвигает вершину y_0 , что согласно лемме 4.1, 2) влечет точность действия группы $G_5(y_0, y_1)^{\Gamma_5(y_2)}$ на множестве $\Gamma(h_1(y_1))$. Однако из

$$h_1(y_1) \in \varphi_{h_1(y_4), h_1(y_2)}(\langle h_1(y_3), h_1(y_5) \rangle) = \varphi_{y_3, h_1(y_2)}(\langle y_2, h_1(y_3) \rangle)$$

согласно лемме 2.2, 4) следует

$$G_5(y_0, y_1) \leq G_3(y_2, y_3) \leq G_1(h_1(y_1)).$$

Таким образом, $G_5(y_0, y_1) \leq G_5(y_2)$, что противоречит $h \in G_5(y_0, y_1) \setminus G_5(y_2)$.

Докажем утверждение (б). Из $h \in G_5(y_0, y_1) \setminus G_5(y_2)$ вытекает существование такой 6-дуги $(y'_0, \dots, y'_6)$ графа Γ , что $h^{\Gamma(y'_6)} \neq 1$ и $y'_i = y_i$, $i = 0, 1, 2$. Заметим, что $h^{\Gamma(y'_6)} \in G_5(y_0, y_1)^{\Gamma(y'_6)} \leq T_{y'_6}(y'_5)$ (см. [3, ч. II, предложение 1.3, 3])). В силу транзитивности действия группы G на множестве 3-дуг графа Γ существует элемент $h_1 \in G$ такой, что $h_1(y'_{6-i}) = y_{i+1}$ для $i = 0, 1, 2, 3$. Более того, из $y_0 \notin \varphi_{y_3,y_1}(\langle y_2, y_4 \rangle)$, транзитивности действия группы $G(y_1, \dots, y_4)$ на

$\Gamma(y_1) \setminus \varphi_{y_3, y_1}(\langle y_2, y_4 \rangle)$ (см. [3, ч. II, предложения 1.2, 1) и 1.3, 3)]) и $1 \neq h^{\Gamma(y'_6)} \in T_{y'_6}(y'_5)$ следует возможность такого выбора h_1 , что $h(h_1^{-1}(y_0)) \neq h_1^{-1}(y_0)$. При этом выборе элемента h_1 элемент $h_1 h h_1^{-1} \in Z(O_2(G(h_1(y_0), h_1(y_1))))$ сдвигает вершину y_0 , что согласно лемме 4.2, 2) влечет точность действия $G_5(y_0, y_1)^{\Gamma_5(y_2)}$ на $\Gamma(h_1(y_1))$ и, в частности, $h^{\Gamma(h_1(y_1))} \neq 1$. Для завершения доказательства утверждения (б) остается заметить, что

$$h_1(y_1) = h_1(y'_1) \in h_1(\Gamma_2(y'_3)) = \Gamma_2(h_1(y'_3)) = \Gamma_2(y_4).$$

Докажем утверждение (в). Пусть Y – некоторая плоскость проективного пространства $\Gamma(y_3)$ такая, что $y_2 \notin Y$, $y_4 \in Y$, и пусть Y' – некоторая плоскость проективного пространства $\Gamma(y_4)$ такая, что $y_3 \in Y'$, $\varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle) \not\subseteq Y'$. Покажем, что для произвольной вершины $z \in Y$

$$h^{\Gamma_{Y, Y'}} \in G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(z) \quad \text{влечет} \quad h \in G_3(z). \quad (4.2)$$

Итак, пусть $z \in Y$ и $h^{\Gamma_{Y, Y'}} \in G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(z)$. По выбору Y' с учетом [3, ч. II, предложение 1.2, 2)] имеем

$$\varphi_{y_2, z}(\langle y_1, y_3 \rangle) \cap \Gamma_{Y, Y'}(z) = \{y_3\}.$$

Поэтому в силу (а) и леммы 2.2, 3) для доказательства того, что $h \in G_3(z)$, достаточно доказать, что $h \in G_2(z')$, где z' – некоторая вершина из $\Gamma_{Y, Y'}(z) \setminus \{y_3\}$. Поскольку согласно лемме 2.2, 4) для произвольной вершины $z'' \in \varphi_{y_3, z'}(\langle y_2, z \rangle)$ имеем

$$h \in G_3(y_2, y_3) \leq G_1(z''),$$

и поскольку в силу выбора Y имеем

$$\Gamma_{Y, Y'}(z') = \varphi_{y_3, z'}(Y) \not\supseteq \varphi_{y_3, z'}(\langle y_2, z \rangle),$$

то на основании леммы 2.2, 1) заключаем, что для доказательства (4.2) достаточно доказать справедливость $h \in G_1(z'')$ для произвольной вершины $z'' \in \Gamma_{Y, Y'}(z') \setminus \{z\}$.

Итак, пусть z'' – произвольная вершина из $\Gamma_{Y, Y'}(z') \setminus \{z\}$. Согласно утверждению (а) и лемме 2.2, 2) имеем

$$h^{\Gamma(z'')} \in T_{z''}(z', \varphi_{z, z''}(\langle \varphi_{y_2, z}(\langle y_1, y_3 \rangle), z' \rangle)).$$

В то же время, из $h^{\Gamma_{Y, Y'}} \in G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(z)$ следует $h^{\Gamma(z'')} \in T_{z''}(z', \Gamma_{Y, Y'}(z''))$. Так как плоскости $\varphi_{z, z''}(\langle \varphi_{y_2, z}(\langle y_1, y_3 \rangle), z' \rangle)$ и $\Gamma_{Y, Y'}(z'')$ проективного трехмерного пространства $\Gamma(z'')$ различны (иначе $\varphi_{y_2, z}(\langle y_1, y_3 \rangle) \subseteq \Gamma_{Y, Y'}(z)$, вопреки равенству $\varphi_{y_2, z}(\langle y_1, y_3 \rangle) \cap \Gamma_{Y, Y'}(z) = \{y_3\}$), откуда следует $h \in G_1(z'')$, и (4.2) доказано.

Теперь несложно завершить доказательство утверждения (в), а вместе с ним и леммы. Из $h^{\Gamma_{Y, Y'}} \in G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(y_3)$ в силу леммы 2.1 и предложения 1.1 (утверждение 2г)) следует $h^{\Gamma_{Y, Y'}} \in G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(z)$ для некоторой вершины $z \in Y$. Согласно (4.2) это влечет $h \in G_3(z)$, откуда на основании утверждения (б) заключаем $z \in \varphi_{y_1, y_3}(\langle y_0, y_2 \rangle) \cap Y = \{y_4\}$. Таким образом, $h \in G_3(y_4)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4.4. $m \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая противное, согласно лемме 4.3 имеем $m = 4$. Зафиксируем 2-дугу (y_0, y_1, y_2) графа Γ и элемент h из

$$Z(O_2(G(y_0, y_1))) \setminus G_4(y_2) \subseteq G_4(y_0, y_1) \setminus G_4(y_2)$$

(h существует, поскольку в противном случае $1 \neq Z(O_2(G(y_0, y_1))) \leq G_5(y_0, y_1) = 1$).

По выбору h найдется такая 4-дуга $(y_2, y_3, \dots, y_6)$ графа Γ , что $h(y_6) \neq y_6$. Заметим, что при этом $(y_0, \dots, y_6)$ – 6-дуга графа Γ , и

$$h^{\Gamma(y_5)} \in G_4(y_0, y_1)^{\Gamma(y_5)} \leq T_{y_5}(y_4, \varphi_{y_3, y_5}(\langle y_2, y_4 \rangle))$$

(см. лемму 2.2, 2)). В частности, $y_6 \notin \varphi_{y_3, y_5}(\langle y_2, y_4 \rangle)$. Обозначим плоскость $\langle \varphi_{y_3, y_5}(\langle y_2, y_4 \rangle), y_6 \rangle$ проективного пространства $\Gamma(y_5)$ через Y . Далее, из $h \in G_3(y_1, y_2)$ и $h \notin G_1(y_5)$ согласно лемме 2.2, 4) следует $y_5 \notin \varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle)$. Обозначим через Y' некоторую плоскость проективного пространства $\Gamma(y_4)$, содержащую прямую $\langle y_3, y_5 \rangle$, но не содержащую прямую $\varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle)$. Имеем, очевидно, $y_2 \in V(\Gamma_{Y, Y'})$, $y_1 \notin \Gamma_{Y, Y'}(y_2)$. Кроме того, $h^{\Gamma_{Y, Y'}} \in G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(y_2)$, что согласно лемме 2.1 и предложению 1.1 (утверждение 2г)) влечет существование вершины $y' \in \Gamma_{Y, Y'}(y_2)$, для которой $h^{\Gamma_{Y, Y'}} \in G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(y')$.

Поскольку элемент h в силу его выбора централизуется группой $O_2(G(y_0, y_1))$ и группа $(O_2(G(y_0, y_1)) \cap G_1(y_1))^{\Gamma(y_2)}$ содержит в качестве подгруппы группу $T_{y_2}(y_1)$ (см. [3, ч. II, предложение 1.3]), то лемма 4.1, 3) влечет существование в группе $G_1(y_1)$ элемента h' со следующими свойствами: $[h, h'] \in G_4(y_2)$, $h'(y') = y_3$, $h'(\Gamma_{Y, Y'}(y_2)) = \Gamma_{Y, Y'}(y_2)$. Однако в силу последнего свойства и

$$\begin{aligned} h'(\Gamma_{Y, Y'}(y')) &= h'(\varphi_{y_1, y'}(\varphi_{y', y_1}(\Gamma_{Y, Y'}(y')))) \\ &= \varphi_{y_1, y_3}(\varphi_{y', y_1}(\Gamma_{Y, Y'}(y'))) = \varphi_{y', y_3}(\Gamma_{Y, Y'}(y')) = \Gamma_{Y, Y'}(y_3) \end{aligned}$$

(см. [3, ч. II, предложение 1.2, 2)]) элемент h' оставляет на месте подграф $\Gamma_{Y, Y'}$ графа Γ , и потому из $h^{\Gamma_{Y, Y'}} \in G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(y')$, $h^{\Gamma_{Y, Y'}} \notin G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(y_3) = G_3^{\Gamma_{Y, Y'}}(h'(y'))$ следует $[h, h'] \notin G_4(y_2)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 4.5. $m \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая противное, согласно лемме 4.4 имеем $m = 3$. Зафиксируем 2-дугу (y_0, y_1, y_2) графа Γ и элемент h из

$$Z(O_2(G(y_0, y_1))) \setminus G_3(y_2) \subseteq G_3(y_0, y_1) \setminus G_3(y_2)$$

(h существует, поскольку в противном случае $1 \neq Z(O_2(G(y_0, y_1))) \leq G_4(y_0, y_1) = 1$).

По выбору h найдется такая 2-дуга (y_2, y_3, y_4) графа Γ , что $h^{\Gamma(y_4)} \neq 1$. Заметим, что при этом $(y_0, \dots, y_4)$ – 4-дуга графа Γ , и

$$h^{\Gamma(y_4)} \in G_3(y_0, y_1)^{\Gamma(y_4)} \leq T_{y_4}(y_3, \varphi_{y_2, y_4}(\langle y_1, y_3 \rangle))$$

(см. лемму 2.2, 2)). Обозначим через Y ось трансекции $h^{\Gamma(y_4)}$. Ясно, что каждый элемент группы $G(y_2)^{\Gamma(y_2)}$, который стабилизирует вершины y_3, y_4 и централизует элемент $h^{\Gamma(y_2)}$, обязан оставлять на месте плоскость $\varphi_{y_4, y_2}(Y)$ проективного пространства $\Gamma(y_2)$. Однако по лемме 4.1, 3) найдется такой элемент $h' \in G_1(y_1)$, стабилизирующий прямую $\langle y_1, y_3 \rangle$, но сдвигающий плоскость $\varphi_{y_4, y_2}(Y)$ проективного пространства $\Gamma(y_2)$, что $h^{\Gamma(y_2)}$ централизует $h'^{\Gamma(y_2)}$. Поскольку элемент h централизуется $O_2(G(y_0, y_1))$, то

$$T_{y_2}(y_1) \leq (O_2(G(y_0, y_1)) \cap G_1(y_1))^{\Gamma(y_2)}$$

позволяет при этом дополнительно предполагать, что элемент h' стабилизирует вершину y_3 . Наконец, поскольку теперь из $h' \in G_1(y_1)$ следует, что элемент h' стабилизирует прямую $\langle y_2, y_4 \rangle$, и в то же время элемент h централизуется подгруппой $G_2(y_1)$ группы $O_2(G(y_0, y_1))$, то $T_{y_3}(y_2) \leq G_2(y_1)^{\Gamma(y_3)}$ позволяет предполагать, что, кроме того, элемент h' стабилизирует вершину y_4 . Как было замечено, это невозможно. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. $m = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая противное, с учетом $G_2(x) \neq 1$ и леммы 4.5 имеем $m = 2$. Зафиксируем 2-дугу (y_0, y_1, y_2) графа Γ и элемент h из

$$Z(O_2(G(y_0, y_1))) \setminus G_2(y_2) \subseteq G_2(y_0, y_1) \setminus G_2(y_2)$$

(h существует, поскольку в противном случае $1 \neq Z(O_2(G(y_0, y_1))) \leq G_3(y_0, y_1) = 1$).

По выбору h для некоторой вершины $y_3 \in \Gamma(y_2) \setminus \{y_1\}$ имеем $h^{\Gamma(y_3)} \neq 1$, причем $h^{\Gamma(y_3)} \in G_2(y_0, y_1)^{\Gamma(y_3)} \leq T_{y_3}(y_2)$ (см., например, [3, ч. II, предложение 1.3, 3])). Обозначим через Y ось трансекции $h^{\Gamma(y_3)}$. Пусть y' – произвольная отличная от y_3 вершина из $\Gamma(y_2) \setminus \{y_1\}$. Согласно лемме 4.1, 3) найдется такой элемент $h' \in G_1(y_1)$, что $h^{\Gamma(y_2)}$ централизует $h'^{\Gamma(y_2)}$ и $h'(\langle y_1, y_3 \rangle) = \langle y_1, y' \rangle$. Более того, поскольку элемент h централизуется $O_2(G(y_0, y_1))$, то

$$T_{y_2}(y_1) \leq (O_2(G(y_0, y_1)) \cap G_1(y_1))^{\Gamma(y_2)}$$

позволяет предполагать, что $h'(y_3) = y'$. Из перестановочности $h^{\Gamma(y_2)}$ и $h'^{\Gamma(y_2)}$ следует, что $h^{\Gamma(y')}(y') = (h' h h'^{-1})^{\Gamma(y')}$ – неединичный элемент из $T_{y'}(y_2, h'(Y))$, причем

$$h'(Y) = h'(\varphi_{y_1, y_3}(\varphi_{y_3, y_1}(Y))) = \varphi_{y_1, h'(y_3)}(\varphi_{y_3, y_1}(Y)) = \varphi_{y_3, y'}(Y)$$

в силу $h' \in G_1(y_1)$ и [3, ч. II, предложение 1.2, 2)]. Итак, для каждой вершины $y' \in \Gamma(y_2) \setminus \{y_1, y_3\}$ имеем $1 \neq h^{\Gamma(y')} \in T_{y'}(y_2, \varphi_{y_3, y'}(Y))$. В частности, если Z –

некоторая прямая проективного пространства $\Gamma(y_2)$, содержащая точку y_3 , но не содержащая точку y_1 , Z' – некоторая прямая проективного пространства $\Gamma(y_3)$, содержащая точку y_2 , но не содержащаяся в плоскости Y , то $h^{\Gamma_{Z,Z'}} \in G_1^{\Gamma_{Z,Z'}}(y_2)$ и $h^{\Gamma_{Z,Z'}} \notin G_1^{\Gamma_{Z,Z'}}(z)$ для всех $z \in \Gamma_{Z,Z'}(y_2)$. Противоречие с [3, ч. II, предложение 2.1] доказывает лемму.

Теперь легко завершить доказательство теоремы. Прежде всего, для произвольной 2-дуги (z_0, z_1, z_2) графа Γ лемма 4.6, (4.1) и транзитивность действия группы G на множестве 2-дуг графа Γ влекут

$$Z(O_2(G(z_0, z_1))) \leq G_1(z_0, z_1), \quad Z(O_2(G(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_2)} \neq 1,$$

и потому согласно [3, ч. II, предложения 1.3, 3), 1.2, 1)] $Z(O_2(G(z_0, z_1)))^{\Gamma(z_2)} = T_{z_2}(z_1)$. Отсюда следует, что, фиксируя произвольную 4-дугу $(y_0, \dots, y_4)$ графа Γ , для некоторого элемента $h_1 \in Z(O_2(G(y_0, y_1))) \leq G_1(y_1)$ имеем $1 \neq h_1^{\Gamma(y_2)} \in T_{y_2}(y_1, \langle y_1, y_3 \rangle)$. Кроме того, отсюда следует $Z(O_2(G(y_1, y_2)))^{\Gamma(y_3)} = T_{y_3}(y_2)$, что в силу тривиальности действия h_1 на $[y_1 : y_2]$, а потому и на $[y_3 : y_2]$, влечет наличие такого элемента $h_2 \in Z(O_2(G(y_1, y_2))) \leq G_1(y_2)$, что $h_2 h_1(y_4) = y_4$. Таким образом, имеем $h_2 h_1 \in G(y_0, \dots, y_4)$ и $(h_2 h_1)^{\Gamma(y_2)} = h_1^{\Gamma(y_2)}$ – неединичный элемент из $T_{y_2}(y_1, \langle y_1, y_3 \rangle)$. В частности, элемент $h_2 h_1$ сдвигает некоторую плоскость Y проективного пространства $\Gamma(y_2)$, содержащую точку y_3 . Поскольку согласно [3, ч. II, предложение 1.3, 4)] для некоторого элемента $h \in G_2(y_2)$ имеем $1 \neq h^{\Gamma(y_4)} \in T_{y_4}(y_3, \varphi_{y_2, y_4}(Y))$, то заключаем, что элемент $h_2 h_1$ не централизует группу $G_2(y_2)$. Но согласно [3, ч. II, предложение 1.3] имеем $G_2(y_2) \leq O_2(G(y_0, y_1))$ и $G_2(y_2) \leq O_2(G(y_1, y_2))$, а потому в силу $h_1 \in Z(O_2(G(y_0, y_1)))$ и $h_2 \in Z(O_2(G(y_1, y_2)))$ элемент $h_2 h_1$ централизует группу $G_2(y_2)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Приложение

Равенство $G_2(x) = 1$ в случае $p = 3, n \geq 3$

В [3, ч. II] доказано, что для Γ и G , удовлетворяющих основному условию (см. введение), в случае транзитивного действия G на множестве 3-дуг Γ и $p = 3$ справедливо равенство $G_3(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$. Как было отмечено в [3, ч. I, введение], при дополнительном предположении $n \geq 3$ имеет место более сильное равенство $G_2(x) = 1$. Здесь мы наметим доказательство этого утверждения (использующее равенство $G_3(x, y) = 1$).

Итак, пусть Γ и G удовлетворяет основному условию, G действует транзитивно на множестве 3-дуг Γ , $p = 3, n \geq 3$, $G_3(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$, но $G_2(x) \neq 1$. Не теряя общности, предполагаем, что Γ – дерево (см. [3, ч. I, § 1]). Кроме того, переходя в случае необходимости от Γ и G к $\Gamma_{X,Y}$ и $G^{\Gamma_{X,Y}}$, где X – плоскость $\Gamma(x)$, $y \in X$, Y – содержащая x плоскость $\Gamma(y)$, и учитывая [3, ч. II, предложение 1.3, 4)], будем предполагать без потери общности, что $n = 3$.

Допустим $G_3(x) \neq 1$. Тогда, замечая, что доказательство леммы 2 из [3, ч. II, § 4] в случае $k = 3$ сохраняет при этом силу, находим

$$h \in Z(O_3(G(x))) \cap G_3(x), \quad y \in \Gamma(x), \quad y' \in \Gamma(y) \setminus \{x\}, \quad y'' \in \Gamma(y') \setminus \{y\},$$

для которых $\langle y, y'' \rangle$ – единственная прямая из $[y' : y]$ со свойством $h \in G_1(z)$ для всех $z \in \langle y, y'' \rangle$. Ясно, что централизатор h в $G(x, y, y')$ оставляет на месте эту прямую. В то же время на основании [3, ч. II, (3.1)] находим $z_1 \in \Gamma(x)$, $z_2 \in \Gamma(z_1) \setminus \{x\}$, $z_3 \in \Gamma(z_2) \setminus \{z_1\}$, $h_1 \in Z(O_3(G(z_2, z_3))) \leq G_2(z_2, z_3)$, для которых $h_1^{\Gamma(x)} \in T_x(z_1, \langle y, z_1 \rangle)$ и $h_1(\varphi_{y', x}(\langle y, y'' \rangle)) \neq \varphi_{y', x}(\langle y, y'' \rangle)$. При этом из $h \in G_3(x) \leq O_3(G(z_2, z_3))$ следует $[h, h_1] = 1$, а из $h_1 \in G_1(z_1)$ следует h_1 -допустимость множества $\langle x, y' \rangle \setminus \{x\}$. Поэтому, домножая в случае необходимости элемент h_1 на подходящий элемент из $O_3(G(x))$, получаем элемент из $G(x, y, y')$, перестановочный с h и сдвигающий прямую $\varphi_{y', x}(\langle y, y'' \rangle)$, а значит, и прямую $\langle y, y'' \rangle$. Противоречие.

Итак, $G_3(x) = 1$. Если $Z(O_3(G(x))) \cap G_2(x, y, z) \neq 1$ для $y \in \Gamma(x)$, $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$, то рассуждения, используемые при доказательстве леммы 3 из [3, ч. II, §4], в которых, однако, следует положить $k = 2$ и опустить ссылку на лемму 2 (соответствующее место рассуждений становится очевидным), приводят к противоречию. Следовательно, $Z(O_3(G(x))) \cap G_2(x, y, z) = 1$, что в силу $G_2(x, y, z) \trianglelefteq O_3(G(x))$ влечет $G_2(x, y, z) = 1$. Из последнего равенства, в свою очередь, вытекает $G_2(x, y) = 1$. Действительно, в противном случае найдутся $y' \in \Gamma(y) \setminus \{x\}$, $z' \in \Gamma(z) \setminus \{x\}$, для которых $G_2(y, y') \not\leq G(z')$ и, следовательно, $[G_2(y, y'), G_2(z, z')] \neq 1$, что противоречит $[G_2(y, y'), G_2(z, z')] \leq G_2(x, y, z) = 1$.

Итак, $G_2(x, y) = 1$ для $[x, y] \in E(\Gamma)$. Пусть, далее, $h \in Z(O_3(G(x))) \cap G_2(x)$, $z_1 \in \Gamma(x)$, $z_2 \in \Gamma(z_1) \setminus \{x\}$, $z_3 \in \Gamma(z_2) \setminus \{z_1\}$, $1 \neq h^{\Gamma(z_2)} \in T_{z_2}(z_1, \langle z_1, z_3 \rangle)$. Тогда централизатор h в $G(x, z_1, z_2)$ оставляет на месте прямую $\langle z_1, z_3 \rangle$. В то же время найдутся $z'_1 \in \Gamma(x)$, $z'_2 \in \Gamma(z'_1) \setminus \{x\}$, $h' \in Z(O_3(G(z'_1, z'_2))) \cap G_1(z'_1, z'_2)$, для которых

$$h^{\Gamma(x)} \in T_x(z'_1, \langle z'_1, z'_1 \rangle) \quad \text{и} \quad h'(\varphi_{z_2, x}(\langle z_1, z_3 \rangle)) \neq \varphi_{z_2, x}(\langle z_1, z_3 \rangle).$$

При этом из $h \in G_2(x) \leq O_3(G(z'_1, z'_2))$ следует $[h, h'] = 1$, а из $h' \in G_1(z'_1)$ следует h' -допустимость множества $\langle x, z_2 \rangle \setminus \{x\}$. Поэтому, домножая в случае необходимости элемент h' на подходящий элемент из $O_3(G(x))$, получаем элемент из $G(x, z_1, z_2)$, перестановочный с h и сдвигающий прямую $\varphi_{z_2, x}(\langle z_1, z_3 \rangle)$, а значит, и прямую $\langle z_1, z_3 \rangle$. Полученное противоречие означает, что в случае, когда Γ и G удовлетворяют основному условию, G действует транзитивно на множествах 3-дуг Γ , $p = 3$ и $n \geq 3$, справедливо равенство $G_2(x) = 1$.

Список литературы

1. Трофимов В. И. Стабилизаторы вершин графов с проективными подорбитами // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 3. С. 544–546.
2. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 890–916.
3. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами. Случаи малых характеристик. I–II // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 5. С. 124–171; 1994. Т. 58. № 6. С. 137–156.
4. Cameron P. J. Finite permutation groups and finite simple groups // Bull. London Math. Soc. 1981. V. 13. P. 1–22.
5. Gardiner A. Arc transitivity in graphs // Quart. J. Math (2). 1973. V. 24. P. 399–407.

6. *Weiss R.* An application of p-factorization methods to symmetric graphs // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1979. V. 85. P. 43–48.
7. *Delgado A., Stellmacher B.* Weak (B, N) -pairs of rank 2 // Groups and Graphs: New Results and Methods. Basel e.a.: Birkhäuser, 1985. P. 58–244.
8. *Weiss R.* Groups with a (B, N) -pair and locally transitive graphs // Nagoya Math. J. 1979. V. 74. P. 1–21.
9. *Trofimov V. I.* More on the vertex stabilizers of the symmetric graphs with projective subconstituents // Intern. Conf. Algebr. Combin.: Abstracts. Vladimir, 1991. P. 36–37.
10. *Timmesfeld F.* Amalgams with rank 2 groups of Lie-type in characteristic 2. Preprint. Justus-Liebig-Universität: Giessen Math. Inst., 1984.
11. *Meierfrankenfeld U., Stellmacher B.* Pushing up weak BN -pairs of rank two // Commun. Algebra. 1993. V. 21. P. 825–934.
12. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* ATLAS of finite groups. Oxford e.a.: Oxford Univ. Press., 1985.
13. *Weiss R.* Graphs which are locally Grassmann // Math. Ann. 1993. V. 297. P. 325–334.
14. *Trofimov V. I., Weiss R. M.* Graphs with a locally linear group of automorphisms // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1995. V. 118. № 2. P. 191–206.
15. *Трофимов В. И.* Письмо в редакцию // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 4. С. 221.
16. *Meixner T.* Failure of factorization modules for Lie-type groups in odd characteristic // Commun. Algebra. 1991. V. 19. P. 3193–3222.
17. *Niles R.* Pushing-up in finite groups // J. Algebra. 1979. V. 57. P. 26–63.
18. *McLaughlin J.* Some groups generated by transvections // Arch. Math. 1967. V. 18. P. 364–368.
19. *McLaughlin J.* Some subgroup of $SL_n(F_2)$ // Ill. J. Math. 1969. V. 13. P. 108–115.

Поступило в редакцию
25.XII.1996