Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Вуоринен, О. Мартио, В. И. Рязанов, О локальном поведении пространственных квазирегулярных отображений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 6, 143–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:56:45

УДК 517.54

М. Вуоринен, О. Мартио, В. И. Рязанов

О локальном поведении пространственных квазирегулярных отображений

Мы показываем, что локальная инъективность отображений имеет место, если их дилатационный тензор или матричная дилатация принадлежит классу VMO , исчезающей средней осцилляции, или классу BMO , ограниченной средней осцилляции, с достаточно малой BMO -нормой, или, наконец, хотя бы близки классу VMO по BMO -норме.

Библиография: 29 наименований.

§ 1. Введение

Q -квазирегулярное отображение f с ветвлением в пространстве не может иметь гладкий дилатационный тензор или Q , достаточно близкое к единице. Последнее свойство является результатом об устойчивости: для каждого $n \geq 3$ найдется $Q_0 > 1$ такое, что все непостоянные Q -квазирегулярные отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Q \leq Q_0$, являются локальными гомеоморфизмами (см., например, [1]–[3]). Локальная инъективность f также имеет место, если дилатационный тензор G_f является непрерывно дифференцируемым [4]. Этот результат был последовательно улучшен: в [5] для непрерывного G_f и в [6] для аппроксимативно непрерывного G_f .

В данной статье мы показываем, что локальная инъективность квазирегулярного отображения f в пространстве тесно связана с BMO -поведением его дилатационного тензора G_f . Наш первый результат говорит, что если G_f принадлежит классу VMO исчезающей средней осцилляции, то f локально инъективно. Далее мы показываем, что для каждого $n \geq 3$ и $Q > 1$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является непостоянным Q -квазирегулярным отображением с $\|G_f\|_* < \delta$, то f является локально инъективным. Здесь обозначение $\|\cdot\|_*$ относится к BMO -норме в D . Мы также показываем, что то же самое заключение получается, если G_f близок к тензору G класса VMO в BMO -норме. Этот результат может быть использован, в частности, если G_f равномерно близок к непрерывному тензору G .

Все эти результаты могут быть также сформулированы в терминах матричной дилатации M_f .

§ 2. Определения и предварительные замечания

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. Говорят, что вещественнозначная функция $\varphi \in L^1_{\text{loc}}$ имеет *ограниченную среднюю осцилляцию* в D , если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int_B |\varphi(x) - \varphi_B| dx < \infty, \quad (2.1)$$

где супремум берется над всеми шарами B из D и

$$\varphi_B = \frac{1}{|B|} \int_B \varphi(x) dx \quad (2.2)$$

обозначает среднее значение функции φ над шаром $B \subset D$.

Ясно, что $L^\infty \subset BMO$ и $\|\varphi\|_* \leq 2\|\varphi\|_\infty$. Поскольку $\|c\|_* = 0$ для каждой постоянной $c \in \mathbb{R}$, то мы можем отождествлять $\varphi \in BMO$ с $\varphi + \text{const}$ и таким образом рассматривать BMO как подмножество $L^1_{\text{loc}}/\mathbb{R}$, состоящее из соответствующих классов эквивалентности функций из L^1_{loc} . $BMO/\mathbb{R}$ с нормой (2.1) является банаховым пространством. Пространство BMO было введено Джоном и Ниренбергом [7] в 1961 г. и вскоре стало одним из центральных понятий гармонического анализа, комплексного анализа и теории дифференциальных уравнений. В частности, о связях между BMO и квазиконформными отображениями см. [8] и [9].

Далее мы говорим, что локально интегрируемая функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *исчезающую среднюю осцилляцию* в точке $x_0 \in D$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x-x_0| < \varepsilon} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x_0)| dx = 0, \quad (2.3)$$

где Ω_n – объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и

$$\varphi_\varepsilon(x_0) = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x-x_0| < \varepsilon} \varphi(x) dx \quad (2.4)$$

– среднее значение функции φ в шаре $B(x_0, \varepsilon)$.

Мы также говорим, что функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *исчезающую среднюю осцилляцию* в D , и пишем $\varphi \in VMO$, если функция имеет это свойство в каждой точке $x_0 \in D$.

В литературе (см., например, [10, с. 250]) часто используется следующее более ограничительное определение: $\varphi \in VMO$ означает, что, во-первых, $\varphi \in BMO$ и, во-вторых, предел в (2.3) является равномерным относительно параметра $x_0 \in D$.

Заметим, что если $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит L^∞ , то хорошо известное свойство аппроксимативной непрерывности функции φ в точке x_0 (см. [11]) эквивалентно тому, что x_0 является *точкой Лебега* функции φ , т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x-x_0| < \varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| dx = 0, \quad (2.5)$$

а это влечет то, что φ имеет исчезающую среднюю осцилляцию в точке x_0 .

Для матричнозначных функций $M(x)$, $x \in D$, все перечисленные выше понятия мы используем в поэлементном смысле. К примеру, $M \in BMO$, если

$$\|M\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int_B \|M(x) - M_B\|_1 dx < \infty, \quad (2.6)$$

где M_B определено аналогично (2.2). Здесь и позже мы используем две нормы в пространстве $(n \times n)$ -матриц $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$,

$$\|A\|_1 = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

и

$$\|A\|_2 = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|Ah|}{|h|}. \quad (2.8)$$

Эти нормы удовлетворяют неравенствам

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq n^{1/2} \|A\|_2. \quad (2.9)$$

Поэтому в (2.6) так же, как и в других $ВМО$ - и $ВМО$ -условиях, может быть использована любая из этих норм.

В дальнейшем $\theta^+(n)$ и $\theta(n)$ обозначают группы $(n \times n)$ -ортогональных матриц U , определяемых условием

$$U^*U = I = UU^*, \quad (2.10)$$

с детерминантом, равным 1 и ± 1 соответственно, где I обозначает единичную матрицу, а U^* – транспонированную для U .

Вообще, матрица M называется *унимодулярной*, если $\det M = 1$. *Специальная линейная группа* $SL(n)$ есть мультипликативная группа всех унимодулярных $(n \times n)$ -матриц над $\mathbb{R}$. Совокупность всех симметричных, положительно определенных матриц из $SL(n)$ обозначается через $S(n)$. Отметим, что $S(n)$, $n \geq 2$, не является группой, поскольку произведение двух симметричных матриц может быть несимметричной матрицей (см. [12, с. 24]). Симметризация матрицы $M \in SL(n)$ определяется как

$$G = M^*M \in S(n). \quad (2.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть $M_1, M_2 \in SL(n)$, $n \geq 2$, и пусть G_1 и G_2 – симметризации M_1 и M_2 соответственно. Тогда равенство $M_2 = UM_1$, $U \in \theta^+(n)$, является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $G_1 = G_2$.

В дальнейшем $SL_q(n)$ и $S_q(n)$ обозначают подмножества $SL(n)$ и $S(n)$ всех матриц A с $\|A\|_2 \leq q$.

Непрерывное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{n,\text{loc}}^1$ с якобианом $J_f(x) > 0$ почти всюду (п.в.) называется *Q -квазирегулярным*, $Q \geq 1$, если его *локальная дилатация*

$$K_f(x) = \|f'(x)\|_2^n / J_f(x) \leq Q \text{ п.в.} \quad (2.12)$$

Здесь через $f'(x)$ и $J_f(x)$ мы обозначаем, как обычно, якобиеву матрицу отображения f и ее детерминант $J_f(x) = \det f'(x)$ соответственно.

Нормированная якобиева матрица непостоянного квазирегулярного отображения f определяется как

$$M_f(x) = f'(x)/J_f(x)^{1/n} \quad \text{п.в.}, \quad (2.13)$$

а симметризованная нормированная якобиева матрица – как

$$G_f(x) = M_f^*(x)M_f(x),$$

где, как и выше, M^* – транспонированная матрица для M . Отметим, что (2.13) сначала задается в каждой регулярной точке $x \in D$, т.е. в точках, где f дифференцируемо и $J_f(x) \neq 0$. Затем мы полагаем $M_f(x) = I$ в остальных точках D , чтобы завершить определение. Мы также называем $M_f(x)$ и $G_f(x)$ соответственно *матричной дилатацией* и *дилатационным тензором* отображения f в точке x (см. [13], [14]).

Как легко видеть, $M_f(x) \in \text{SL}_q(n)$ и $G_f(x) \in S_{q^2}(n)$, где $q = Q^{1/n}$ для Q -квазирегулярных отображений. В частности, отсюда мы получаем следующие верхние границы для всех элементов матричной дилатации $|m_f^{i,k}(x)| \leq Q^{1/n}$ и дилатационного тензора $|g_f^{i,k}(x)| \leq Q^{2/n}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Впоследствии мы используем пространственный аналог теоремы сходимости Берса–Боярского (ср., например, [15]–[17]), который был установлен в работе [18].

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть f и $f_j: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $j = 1, 2, \dots$, – непостоянные Q -квазирегулярные отображения, и пусть G_j – их дилатационные тензоры. Предположим, что $f_j \rightarrow f$ локально равномерно и $G_j(x) \rightarrow G_0(x)$ почти всюду при $j \rightarrow \infty$. Тогда

$$G(x) = G_0(x) \quad \text{п.в.} \quad (2.14)$$

Отсюда и из замечания 2.1 мы немедленно получаем также еще один вариант теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть f и $f_j: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $j = 1, 2, \dots$, – непостоянные квазирегулярные отображения, и пусть M и M_j – их матричные дилатации. Предположим, что $f_j \rightarrow f$ локально равномерно и $U_j(x) \cdot M_j(x) \rightarrow M_0(x)$ почти всюду при $j \rightarrow \infty$. Тогда

$$M(x) = U(x) \cdot M_0(x) \quad \text{п.в.} \quad (2.15)$$

Здесь $U(x)$ и $U_j(x)$ – некоторые ортогональные матрицы.

Другим способом следствие 2.1 было доказано в работе [19]. Отметим, что теорема 2.1 также может быть получена из следствия 2.1, но не совсем тривиальным способом.

Нам также нужна лемма из [6]. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непостоянное Q -квазирегулярное отображение, и пусть $x_0 \in D$. Для $0 < \rho < \text{dist}(x_0, \partial D)$ мы полагаем

$$l(x_0, f, \rho) = \inf_{|x-x_0|=\rho} |f(x) - f(x_0)| \quad (2.16)$$

и

$$L(x_0, f, \rho) = \sup_{|x-x_0|=\rho} |f(x) - f(x_0)|. \quad (2.17)$$

Напомним (см. [20]–[22]), что

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{L(x_0, f, \rho)}{l(x_0, f, \rho)} \leq C < \infty. \quad (2.18)$$

Здесь C зависит только от n и произведения $i_f(x_0)Q$, где $i_f(x_0)$ обозначает локальный топологический индекс отображения f в точке x_0 . Другими словами, из (2.18) ясно, что искажение инфинитезимальных сфер ограничено постоянной C .

Нам нужно аналогичное утверждение об искажении инфинитезимальных сферических колец.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – непостоянное Q -квазирегулярное отображение. Тогда имеют место неравенства*

$$C^{-2}\Lambda^\alpha \leq \liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{l(x_0, f, \rho\Lambda)}{L(x_0, f, \rho)} \leq \Lambda^\beta, \quad (2.19)$$

$$\Lambda^\alpha \leq \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{L(x_0, f, \rho\Lambda)}{l(x_0, f, \rho)} \leq C^2\Lambda^\beta \quad (2.20)$$

для всех $\Lambda \geq 1$ слева и для всех $\Lambda > \gamma$ справа, где

$$\alpha = Q^{-1}, \quad \beta = (i_f(x_0)Q)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \gamma = C^{2Q} > 1. \quad (2.21)$$

Здесь C – та же самая постоянная, что и в (2.18), зависящая только от n и $i_f(x_0)Q$.

Для замкнутости изложения мы завершаем эту секцию доказательством последнего утверждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Без потери общности мы можем предполагать, что $f(0) = x_0 = 0 \in D$.

Пусть $\rho > 0$ и $E_{\rho, \Lambda}$ – конденсатор $(\overline{B(0, \rho)}, B(0, \rho\Lambda))$. Тогда согласно [24, с. 15, 29]

$$\text{cap } f(E_{\rho, \Lambda}) \leq Q^{n-1} \text{cap } E_{\rho, \Lambda}.$$

Кроме того, с одной стороны,

$$\text{cap } E_{\rho, \Lambda} = \frac{\omega_{n-1}}{(\log \Lambda)^{n-1}},$$

с другой стороны, в силу свойства монотонности емкости

$$\text{cap } f(E_{\rho, \Lambda}) \geq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\log \frac{L(0, f, \rho\Lambda)}{l(0, f, \rho)}\right)^{n-1}},$$

где $\omega_{n-1} - (n-1)$ -мерная площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Таким образом,

$$\frac{L(0, f, \rho\Lambda)}{l(0, f, \rho)} \geq \Lambda^{\frac{1}{Q}},$$

и левое неравенство в (2.20) доказано. Используя (2.18), мы получаем отсюда левое неравенство в (2.19).

Обозначим через U_t связную компоненту прообраза $f^{-1}(B(0, t))$, содержащую начало. По лемме 2.9 работы [20, с. 9, 10] ее диаметр $d(U_t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и существует $\delta > 0$ такое, что U_t является нормальной областью, а $\partial U_t = U_\delta \cap f^{-1}(\partial B(0, t))$ для $t \in (0, \delta]$, $U_{t_1} \subseteq U_{t_2}$ и $U_{t_2} \setminus \overline{U_{t_1}}$ является кольцевой областью для всех $0 < t_1 < t_2 \leq \delta$.

Теперь для $\Lambda > \gamma = C^{2Q}$ левая часть неравенства (2.19) больше единицы. Поэтому для малых ρ конденсаторы

$$\mathcal{E}_{\rho, \Lambda} = (\overline{U_{L(0, f, \rho)}}, U_{l(0, f, \rho\Lambda)})$$

и

$$f(\mathcal{E}_{\rho, \Lambda}) = (\overline{B(0, L(0, f, \rho))}, B(0, l(0, f, \rho\Lambda)))$$

корректно определены. Кроме того,

$$\text{cap } f(\mathcal{E}_{\rho, \Lambda}) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\log \frac{l(0, f, \rho\Lambda)}{L(0, f, \rho)}\right)^{n-1}} \quad (2.22)$$

и монотонность емкостей влечет неравенство

$$\text{cap } \mathcal{E}_{\rho, \Lambda} \geq \frac{\omega_{n-1}}{(\log \Lambda)^{n-1}}. \quad (2.23)$$

По теореме 6.2 из [20]

$$\text{cap } \mathcal{E}_{\rho, \Lambda} \leq i_f(0)Q \text{cap } f(\mathcal{E}_{\rho, \Lambda}). \quad (2.24)$$

Сравнивая (2.22)–(2.24), мы видим, что

$$\frac{l(0, f, \rho\Lambda)}{L(0, f, \rho)} \leq \Lambda^\beta,$$

т.е. правое неравенство в (2.19) доказано.

Наконец, используя снова неравенство (2.18), мы приходим к правому неравенству в (2.20).

§ 3. *ВМО и инъективность*

В этом параграфе мы показываем, что если дилатационный тензор пространственного отображения принадлежит классу *ВМО*, то f не имеет ветвления.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – непостоянное квазирегулярное отображение, и пусть дилатационный тензор $G_f(x)$ или матричная дилатация $M_f(x)$ принадлежит классу *ВМО*. Тогда отображение f является локальным гомеоморфизмом области D .*

Доказательство теоремы редуцируется к следующей лемме.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – непостоянное квазирегулярное отображение и дилатационный тензор $G_f(x)$ или матричная дилатация $M_f(x)$ имеют исчезающую среднюю осцилляцию в точке $x_0 \in D$. Тогда отображение f является гомеоморфизмом в некоторой окрестности точки x_0 .*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Эти результаты имеют различные следствия:

- а) f является гомеоморфизмом в окрестности точки x_0 , если G_f непрерывен или аппроксимативно непрерывен в точке x_0 ;
- б) f является локальным гомеоморфизмом области D , если G_f непрерывен или аппроксимативно непрерывен в D (см. [5] и [6] соответственно);
- с) более того, ввиду известной теоремы Зорича [23] $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$, если G_f – класса *ВМО*;
- д) в частности, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, является гомеоморфизмом $\mathbb{R}^n$, если G_f непрерывен или аппроксимативно непрерывен в $\mathbb{R}^n$.

Аналогичные результаты имеют место в терминах матричной дилатации M_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Предположим, что

$$i_f(x_0) > 1, \quad (3.1)$$

где $i_f(x_0)$ обозначает, как обычно, локальный топологический индекс отображения f в точке x_0 , и пусть, для примера, $G_f(x)$ имеет исчезающую среднюю осцилляцию в x_0 . Тогда мы имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x-x_0| < \varepsilon} \|G_f(x) - M_\varepsilon\|_1 dx = 0; \quad M_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x-x_0| < \varepsilon} G_f(x) dx.$$

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим семейство Q -квазирегулярных отображений $h_\varepsilon: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$,

$$h_\varepsilon(z) = \frac{f(x_0 + \varepsilon z) - f(x_0)}{L(x_0, f, \varepsilon)},$$

где L определено (2.17). Отображение h_ε имеет дилатационный тензор

$$g_\varepsilon(z) = G_f(x_0 + \varepsilon z),$$

и поэтому мы получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{B}^n} \|g_\varepsilon(z) - M_\varepsilon\|_1 dz = 0, \quad M_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n} \int_{\mathbb{B}^n} g_\varepsilon(z) dz.$$

Все элементы матриц $g_\varepsilon(z)$ и, следовательно, M_ε ограничены числом $Q^{2/n}$. Таким образом, найдется последовательность $\varepsilon_j \rightarrow 0$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M_{\varepsilon_j} = G_0$$

и $g_{\varepsilon_j}(z) \rightarrow G_0$ п.в., где $G_0 \in S_q(n)$, $q = Q^{2/n}$.

Пусть $H_j = h_{\varepsilon_j}$. Так как $H_j(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{B}^n$, последовательность отображений (H_j) является равномерно непрерывной (см. [24, с. 10]). Поэтому по теореме Арцела–Асколи семейство H_j является нормальным, и без потери общности мы можем также предполагать, что $H_j \rightarrow h$ при $j \rightarrow \infty$ локально равномерно в $\mathbb{B}^n$, где h по известной теореме Решетняка (см., например, [3, с. 180]) является Q -квазирегулярным отображением с $h(0) = 0$. Покажем, что $h \neq \text{const}$.

Действительно,

$$|h_{\varepsilon_j}(z)| = \frac{|f(x_0 + \varepsilon_j z) - f(x_0)|}{L(x_0, f, \varepsilon_j)} \geq \frac{l(x_0, f, \varepsilon_j |z|)}{L(x_0, f, \varepsilon_j)},$$

и, переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, мы получаем по (2.20) неравенство

$$|h(z)| \geq C^{-2} |z|^\beta$$

для $0 < |z| < C^{-2Q} < 1$, где $\beta = (i_f(x_0) \cdot Q)^{\frac{1}{n-1}}$.

Таким образом, по теореме 2.1 h имеет постоянный дилатационный тензор G_0 в $\mathbb{B}^n$. Пусть M – матрица, определенная соотношением $M^*M = G_0$ (см. замечание 2.1), и пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – соответствующее аффинное отображение, $A(x) = M \cdot x$. Тогда отображение $H = h \circ A^{-1}: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является 1-квазирегулярным отображением в эллипсоиде $A(\mathbb{B}^n)$ и по известной теореме Лиувилля H -преобразование Мёбиуса (см., например, [3], [23]–[25]). Поэтому $i_h(0) = 1$ и, таким образом, $i_{H_j}(0) = 1$ для больших j (см. [2, с. 24]). Это противоречит предположению (3.1). Тем самым лемма 3.1 доказана.

§ 4. ВМО-норма и инъективность

Здесь мы показываем, что пространственные Q -квазирегулярные отображения являются инъективными, если ВМО-нормы дилатационного тензора или матричной дилатации достаточно малы.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $n \geq 3$ и $Q > 1$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что каждое непостоянное Q -квазирегулярное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, локально инъективно, если*

$$\|G_f(x)\|_{*,D} < \delta \tag{4.1}$$

или аналогичное неравенство имеет место для M_f .

В частном случае $D = \mathbb{R}^n$ теорема Зорича влечет глобальную инъективность таких квазирегулярных отображений.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $n \geq 3$ и $Q > 1$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что каждое непостоянное Q -квазирегулярное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом, т.е. квазиконформным отображением $\mathbb{R}^n$, если

$$\|G_f(x)\|_{*, \mathbb{R}^n} < \delta \quad (4.2)$$

или имеет место аналогичное неравенство для M_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Допустим, что утверждение теоремы неверно, например, относительно дилатационного тензора. Тогда существует последовательность Q -квазирегулярных отображений $f_j: D_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ с

$$\|G_{f_j}(x)\|_{*, D_j} < 1/j \quad (4.3)$$

и последовательность точек $x_j \in D_j$ с локальными топологическими индексами

$$2 \leq i_{f_j}(x_j) \leq 9Q^{n-1} \quad (4.4)$$

(см. [2, с. 23]). Другими словами, здесь мы использовали тот факт, что локальный топологический индекс Q -квазирегулярного отображения не может быть равномерно сколь угодно большим на B_f .

В частности, для всех $0 < \varepsilon < \Delta_j = \text{dist}(x_j, \partial D_j)$ мы получаем из (4.3), что

$$\frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x-x_j| < \varepsilon} \|G_{f_j}(x) - M_\varepsilon\|_1 dx < \frac{1}{j}, \quad M_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x-x_j| < \varepsilon} G_{f_j}(x) dx. \quad (4.5)$$

Рассмотрим семейство Q -квазирегулярных отображений $H_{j,\varepsilon}: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$,

$$H_{j,\varepsilon}(z) = \frac{f_j(x_j + \varepsilon z) - f_j(x_j)}{L(x_j, f_j, \varepsilon)},$$

где $0 < \varepsilon < \Delta_j$. Отметим, что

$$|H_{j,\varepsilon}(z)| \geq \frac{l(x_j, f_j, \varepsilon|z|)}{L(x_j, f_j, \varepsilon)},$$

и по лемме 2.1 для каждого фиксированного $j = 1, 2, \dots$ и $z_0 \in \mathbb{B}^n$, $0 < |z_0| < C^{-2Q}$, найдется $0 < \varepsilon_j < \Delta_j$ такое, что $|h_j(z_0)| \geq C^{-2}|z_0|^\beta - 1/j$, где $\beta = (9Q^n)^{\frac{1}{n-1}}$ и $h_j(z) = H_{j,\varepsilon_j}(z)$.

Отображения h_j имеют дилатационные тензоры $g_j(z) = G_{f_j}(x_j + \varepsilon_j z)$, и (4.5) влечет

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}^n} \|g_j(z) - m_j\|_1 dz = 0, \quad m_j = \frac{1}{\Omega_n} \int_{\mathbb{B}^n} g_j(z) dz. \quad (4.6)$$

Отметим, что все элементы матриц $g_j(z)$ и, следовательно, m_j ограничены числом $Q^{2/n}$. Поэтому без потери общности мы можем также предполагать, что

$\lim_{j \rightarrow \infty} m_j = G_0 \in S_q(n)$, $q = Q^{2/n}$, и $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j(z) = G_0$ почти всюду в единичном шаре $\mathbb{B}^n$.

Так как $h_j(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{B}^n$, последовательность h_j является равностепенно непрерывной. Следовательно, без потери общности мы можем предполагать, что $h_j \rightarrow h$ локально равномерно в $\mathbb{B}^n$ при $j \rightarrow \infty$, где h – некоторое Q -квазирегулярное отображение с $h(0) = 0$. По построению $|h(z_0)| \geq C^{-2}|z_0|^\beta > 0$ в зафиксированной выше точке $z_0 \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ и, следовательно, h не является постоянной. Поэтому h , с точностью до преобразования Мёбиуса, есть аффинное отображение с постоянным дилатационным тензором G_0 . Следовательно, $i_h(0) = 1$ и, таким образом, $i_{h_j}(0) = 1$ для больших j . Последнее противоречит предположению (4.3), и доказательство теоремы завершено для G_f .

Доказательство для M_f аналогично.

§ 5. Близость в $ВМО$ -норме и инъективность

Наш метод позволяет продвинуться еще дальше. Если G – матричнозначная функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и если S – некоторый класс таких функций, то мы пишем

$$d_*(G, S) = \inf_{M \in S} \|G - M\|_*.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $n \geq 3$ и $Q > 1$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что каждое непостоянное Q -квазирегулярное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является локально инъективным, если $d_*(G_f, VMO) < \delta$ или $d_*(M_f, VMO) < \delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Теорема 5.1 имеет множество интересных следствий.

а) Пусть C – класс непрерывных матричнозначных функций в области D . Поскольку $C \subset VMO$, f является локально инъективным в предположении, что $d_*(G_f, C) < \delta$.

б) Если $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то соответствующие результаты о глобальной инъективности f могут быть получены из теоремы Зорича.

в) Пусть APC – класс аппроксимативно непрерывных матричнозначных функций в D . Тогда f локально инъективно, если $d_\infty(G_f, APC)$ достаточно мало. В частности, это имеет место, если $d_\infty(G_f, C)$ достаточно мало (см. [6]).

Аналогичные результаты могут быть сформулированы в терминах матричной дилатации M_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Допустим, что утверждение теоремы неверно, например, относительно дилатационного тензора. Тогда найдутся последовательности Q -квазирегулярных отображений $f_j: D_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданных в областях $D_j \subset \mathbb{R}^n$, и матричнозначных функций $M_j \in VMO$ такие, что

$$\|G_{f_j} - M_j\|_{*, D_j} < 1/j, \quad (5.1)$$

и последовательность точек $x_j \in D_j$ с локальными топологическими индексами

$$2 \leq i_{f_j}(x_j) \leq 9Q^{n-1} \quad (5.2)$$

(см. [2, с. 23]).

Теперь следующие шаги доказательства являются аналогичными шагам предыдущих доказательств. Рассмотрим семейство Q -квазирегулярных отображений $r_j: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$,

$$H_{j,\varepsilon}(z) = \frac{f_j(x_j + \varepsilon z) - f_j(x_j)}{L(x_j, f_j, \varepsilon)},$$

где $0 < \varepsilon < \Delta_j = \text{dist}(x_j, \partial D_j)$.

Отметим, что

$$|H_{j,\varepsilon}(z)| \geq \frac{l(x_j, f_j, \varepsilon|z|)}{L(x_j, f_j, \varepsilon)},$$

и по лемме 2.1 для каждого фиксированного $j = 1, 2, \dots$ и $z_0 \in \mathbb{B}^n$, $0 < |z_0| < C^{-2Q}$, найдется $0 < \delta_j < \Delta_j$ такое, что $|H_{j,\varepsilon}(z_0)| \geq C^{-2}|z_0|^\beta - 1/j$ для всех $0 < \varepsilon < \delta_j$, где $\beta = (9Q^n)^{\frac{1}{n-1}}$.

Выбирая достаточно малое $0 < \varepsilon_j < \delta_j$ такое, что

$$\frac{1}{\Omega_n \varepsilon_j^n} \int_{|x-x_j| < \varepsilon_j} \|M_j(x) - m_j\|_1 dx < \frac{1}{j}, \quad m_j = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon_j^n} \int_{|x-x_j| < \varepsilon_j} M_j(x) dx,$$

мы получаем из (5.1), что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon_j^n} \int_{|x-x_j| < \varepsilon_j} \|G_{f_j}(x) - m_j\|_1 dx = 0. \quad (5.3)$$

Пусть $h_j(z) = H_{j,\varepsilon_j}(z)$. Дилатационные тензоры $g_j(z) = G_{f_j}(x_j + \varepsilon_j z)$ отображений h_j удовлетворяют по (5.3) предельному соотношению

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}^n} \|g_j(z) - m_j\|_1 dz = 0. \quad (5.4)$$

Из (5.4) мы заключаем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} [g_j(z) - m_j] = 0 \quad (5.5)$$

по мере в единичном шаре $\mathbb{B}^n$ и, следовательно, без потери общности мы можем предполагать, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} [g_j(z) - m_j] = 0$$

почти всюду в $\mathbb{B}^n$. Поэтому все элементы матриц m_j ограничены,

$$|m_j^{i,k}| \leq Q^{2/n} + d_j, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

где $d_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Таким образом, без потери общности мы можем также предполагать, что существуют пределы

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} m_j = G_0 \in S_q(n), \quad q = Q^{2/n},$$

почти всюду в единичном шаре $\mathbb{B}^n$.

Остаток доказательства является таким же, как в теоремах 3.1 и 4.1.

§ 6. VMO и асимптотическая линейность

Пусть U – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало 0, и пусть $v, w: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ – отображения, не обязательно непрерывные. Мы пишем $v(x) = o(w(x))$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность V начала такая, что $\|v(x)\| \leq \varepsilon \|w(x)\|$ для всех $x \in V \setminus \{0\}$. Здесь норма $\|\cdot\|$ не обязательно должна быть обычной евклидовой нормой. Функции v и w называются *эквивалентными* при $x \rightarrow 0$, пишем

$$v(x) \sim w(x), \quad (6.1)$$

если

$$\|v(x) - w(x)\| = o(\|w(x)\| + \|v(x)\|). \quad (6.2)$$

Легко показать, что отношение $v(x) \sim w(x)$ является отношением эквивалентности и равносильно каждому из соотношений

$$v(x) - w(x) = o(v(x)), \quad (6.3)$$

$$v(x) - w(x) = o(w(x)). \quad (6.4)$$

Кроме того, если $m = 1$, то мы имеем обычную эквивалентность вещественных величин.

В дальнейшем обычная евклидова норма и обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ обозначается через $|\cdot|$ и $(\cdot, \cdot)$ соответственно. В [28] было показано, что отношение эквивалентности $v(x) \sim w(x)$ относительно обычной евклидовой нормы равносильно следующим двум геометрическим условиям:

$$|v(x)| \sim |w(x)|, \quad (6.5)$$

$$(v(x), w(x)) \sim |v(x)| |w(x)|. \quad (6.6)$$

Первое означает эквивалентность длин векторов $v(x)$ и $w(x)$, а второе означает, что угол между векторами $v(x)$ и $w(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow 0$.

Мы пишем $v(x) \approx w(x)$ и говорим, что v и w имеют один и тот же порядок в начале, если

$$c^{-1}|v(x)| \leq |w(x)| \leq c|v(x)| \quad (6.7)$$

для некоторого $c \geq 1$ при $x \rightarrow 0$.

Оба отношения эквивалентности (6.1) и (6.7) являются квазиконформными инвариантами. Теперь мы готовы дать основные определения.

Отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(0) = 0$, называется *асимптотически линейным* в нуле, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(\alpha x) \sim \alpha f(x) \quad (6.8)$$

при $x \rightarrow 0$ и

$$f(x + z) \sim f(x) + f(z) \quad (6.9)$$

при $x \rightarrow 0$ и $x + z \approx x \approx z$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $n \geq 3$ и $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0 \in D$, – непостоянное квазирегулярное отображение, и пусть либо дилатационный тензор $G_f(x)$, либо матричная дилатация $M_f(x)$ имеют исчезающую среднюю осцилляцию в нуле. Тогда отображение f асимптотически линейно в начале.

В частности, отсюда мы получаем следующие следствия (см. [6]).

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть $n \geq 3$ и $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0 \in D$, – непостоянное Q -квазирегулярное отображение, и пусть либо дилатационный тензор $G_f(x)$, либо матричная дилатация $M_f(x)$ являются непрерывными или хотя бы аппроксимативно непрерывными в нуле. Тогда отображение f асимптотически линейно в начале.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Пусть, например, $G_f(x)$ имеет исчезающую среднюю осцилляцию в нуле, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x| < \varepsilon} \|G_f(x) - M_\varepsilon\|_1 dx = 0, \quad M_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x| < \varepsilon} G_f(x) dx. \quad (6.10)$$

Рассмотрим семейство Q -квазирегулярных отображений

$$h_\varepsilon(z) = f(\varepsilon z)/\rho(\varepsilon), \quad (6.11)$$

где $\rho(\varepsilon) = L(0, f, \varepsilon)$ и L такое же, как в (2.17).

В дальнейшем мы предполагаем, что семейство (6.11) задано для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $z \in B(0, r(\varepsilon))$, $r(\varepsilon) = r_0/\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $r_0 = \text{dist}(0, \partial D)$.

1) Итак, предположим, что (6.8) не имеет места для отображения f . Тогда найдутся $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и последовательность $x_j \rightarrow 0$, $x_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, такие, что

$$\frac{|f(\rho x_j) - \rho f(x_j)|}{|f(\rho x_j)| + |\rho f(x_j)|} \geq \Delta > 0. \quad (6.12)$$

Кроме того, мы можем дополнительно предполагать, что $\eta_j = x_j/|x_j| \rightarrow \eta_0 \in \mathbb{R}^n$, $|\eta_0| = 1$.

Положим $H_j = h_{\delta_j}$, где $\delta_j = |x_j| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Как легко видеть, отображения H_j имеют дилатационные тензоры $g_j(z) = G_f(\delta_j z)$. Последовательно выбирая $\varepsilon = p\delta_j$, $p, j = 1, 2, \dots$, в (6.11), мы получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{B(0, p)} \int_{B(0, p)} \|g_j(z) - m_{j,p}\|_1 dz = 0, \quad m_{j,p} = \frac{1}{B(0, p)} \int_{B(0, p)} g_j(z) dz \quad (6.13)$$

для каждого фиксированного $p = 1, 2, \dots$

Отметим, что все элементы матриц $g_j(z)$ и, следовательно, матриц $m_{j,p}$ ограничены числом $Q^{2/n}$. Поэтому, используя диагональный процесс, мы можем предполагать, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j(z) = G_0 \quad (6.14)$$

почти всюду в $\mathbb{R}^n$, где $G_0 \in S_q(n)$, $q = Q^{2/n}$.

Далее, по принципу максимума для открытых отображений и по лемме 2.1 мы имеем

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \max_{|x| \leq R} |H_j(z)| \leq C^2 R^\beta \quad (6.15)$$

по крайней мере для всех $R > \gamma = C^{2Q} > 1$, где $\beta = Q^{\frac{1}{n-1}}$. Таким образом, мы можем предполагать, что $H_j(z) \rightarrow h(z)$ локально равномерно (см. [24, с. 10]), где h – некоторое Q -квазирегулярное отображение с $h(0) = 0$ по теореме Решетняка.

Ясно, что h не является константой, поскольку снова ввиду правого неравенства из (2.20) мы имеем $|h(z)| \geq C^{-2}|z|^\beta$ для $0 < |z| < C^{-2Q} < 1$, где $\beta = Q^{\frac{1}{n-1}}$.

Поэтому по (6.14) и по теореме 2.1 h имеет постоянный дилатационный тензор G_0 почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 3.1, мы получаем по теореме Лиувилля, что h является аффинным отображением, и так как $h(0) = 0$, h является линейным отображением всего пространства $\mathbb{R}^n$.

В частности, линейность h влечет

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|f(\rho x_j) - \rho f(x_j)|}{|f(\rho x_j)| + |\rho f(x_j)|} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|H_j(\rho \eta_j) - \rho H_j(\eta_j)|}{|H_j(\rho \eta_j)| + |\rho H_j(\eta_j)|} \\ &= \frac{|h(\rho \eta_0) - \rho h(\eta_0)|}{|h(\rho \eta_0)| + |\rho h(\eta_0)|} = 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

поскольку $|h(\eta_0)| \geq C^{-1} > 0$, и локально равномерная сходимость влечет так называемую непрерывную сходимость (см., например, [29, с. 268]).

Однако (6.16) противоречит (6.12).

2) Аналогично, предположим, что (6.9) не имеет места для отображения f . Тогда существуют последовательности $x_j, z_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x_j, z_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, такие, что $x_j + z_j \approx x_j \approx z_j$ и

$$\alpha_j = \frac{|f(x_j + z_j) - f(x_j) - f(z_j)|}{|f(x_j + z_j)| + |f(x_j) + f(z_j)|} \geq \Delta > 0. \quad (6.17)$$

Кроме того, мы можем предполагать дополнительно, что

$$y_j = (x_j + z_j)/|x_j + z_j| \rightarrow y_0, \quad \zeta_j = z_j/|x_j + z_j| \rightarrow \zeta_0, \quad \eta_j = x_j/|x_j + z_j| \rightarrow \eta_0$$

при $j \rightarrow \infty$, где $y_0, \eta_0, \zeta_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 = \eta_0 + \zeta_0$ и $|y_0| = 1$. Тогда, полагая $\delta_j = |x_j + z_j|$ и рассуждая, как в предыдущем пункте, мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|H_j(y_j) - H_j(\eta_j) - H_j(\zeta_j)|}{|H_j(y_j)| + |H_j(\eta_j) + H_j(\zeta_j)|} \\ &= \frac{|h(y_0) - h(\eta_0) - h(\zeta_0)|}{|h(y_0)| + |h(\eta_0) + h(\zeta_0)|} = 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

поскольку $|h(y_0)| \geq C^{-1} > 0$. Однако (6.18) противоречит (6.17).

Список литературы

1. Гольдштейн В. М. О поведении отображений с ограниченным искажением при коэффициенте искажения, близком к единице // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12. С. 1250–1258.
2. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1971. V. 488. P. 1–31.
3. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
4. Ferrand J. Regularity of conformal mappings of Riemannian manifolds // Lect. Notes in Math. 1979. V. 743. P. 191–203.
5. Bojarski B., Iwaniec T., Kopiecki R. Riemannian Manifolds with Non-Smooth Metric Tensors and QC -Maps // Proc. Sem. on Monge-Ampere Equations Related Topics, Firenze 1980. Roma, 1982. P. 123–165.
6. Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Ryazanov V. I., Vuorinen M. On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings. Preprint 122. Helsinki: Department of Mathematics, University of Helsinki, 1996.
7. John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.
8. Astala K., Gehring F. W. Injectivity the BMO norm and the universal Teichmüller space // J. Analyse Math. 1986. V. 46. P. 16–57.
9. Reimann H. M., Rychener Th. Funktionen beschränkter mittlerer Oscillation // Lect. Notes in Math. 1975. V. 487.
10. Garnett J. B. Bounded analytic functions. New York etc.: Academic Press, 1981.
11. Saks S. Theory of the integral. New York: Dover Publ. Inc., 1964.
12. Bellmann R. Introduction to Matrix Analysis. New York etc.: McGraw-Hill Book Comp., 1970.
13. Ahlfors L. On a class of quasiconformal mappings // Österreich. Acad. Wiss. Math. – Naturw. K1. S. BII. 1976. V. 185. P. 5–10.
14. Ahlfors L. Quasiconformal deformations and mappings in $\mathbb{R}^n$ // J. Analyse Math. 1976. V. 30. P. 74–97.
15. Bers L. On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 84. P. 78–84.
16. Боярский Б. В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43(85). С. 451–503.
17. Lehto O., Virtanen K. Quasikonforme Abbildungen. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1965.
18. Iwaniec T., Kopiecki R. Stability in the differential equations for quasiregular mappings // Lect. Notes in Math. 1980. V. 798. P. 203–214.
19. Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M. Convergence theorems for quasiregular mappings in the space. Preprint 105. Helsinki: Department of Mathematics, University of Helsinki, 1996.
20. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1969. V. 448. P. 1–40.
21. Решетняк Ю. Г. Локальная структура отображений с ограниченным искажением // Сиб. матем. журн. 1969. Т. 10. № 6. С. 1319–1333.
22. Vuorinen M. Conformal Geometry and Quasiregular Mappings // Lect. Notes in Math. 1988. V. 1319.
23. Зорич В. А. Теорема Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Матем. сб. 1967. Т. 74(116). № 3. С. 417–433.

24. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1970. V. 465. P. 1–13.
25. *Bojarski B., Iwaniec T.* Another approach to Liouville theorem // Math. Nachr. 1982. V. 107. P. 253–262.
26. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. P. 353–393.
27. *Tukia P., Väisälä J.* A remark on 1-quasiconformal maps // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1985. V. 10. P. 561–562.
28. *Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M.* On asymptotical behavior of quasiconformal mappings in the space. Preprint 83. Helsinki: Department of Mathematics, University of Helsinki, 1995.
29. *Dugundji J.* Topology. Boston: Allyn and Bacon Inc., 1966.

Математический факультет
университета Хельсинки, Финляндия;
Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, г.Донецк

Поступило в редакцию
31.VII.1997