Общероссийский математический портал

Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, О рядах Уолша с монотонными коэффициентами,
Изв. РАН. Сер. матем., 1999, том 63, выпуск 1, 41–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/im227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:40:24

УДК 517.53

Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян

О рядах Уолша с монотонными коэффициентами

В работе доказано, что если $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$, то ряд по системе Уолша $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ обладает свойством: для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ существуют такие числа $\delta_n = 0, \pm 1$, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ почти всюду сходится к $f(x)$. Это утверждение дополняет и усиливает ранее известные результаты об универсальных рядах и о нуль-рядах по системе Уолша.

Библиография: 23 наименования.

§ 1. Введение

Рассматриваются ряды по системе Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x) \quad (1)$$

с монотонными коэффициентами, т.е.

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (2)$$

Известно (см. [1, с. 149]), что ряд (1) с коэффициентами (2) равномерно сходится на любом интервале вида $(\delta, 1)$, $\delta > 0$.

В работе [2] была доказана

ТЕОРЕМА А. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 = +\infty$. Тогда существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, которое обладает следующими свойствами:

1) существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$, который всюду вне E сходится к нулю, $|a_n| \leq \varepsilon_n$ и $a_0 \neq 0$;

2) если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ всюду вне E сходится к нулю и $b_n = o(\varepsilon_n)$, то все коэффициенты b_n равны нулю.

Первый пункт этой теоремы дает положительный ответ на вопрос П. Л. Ульянова [3] о существовании нуль-рядов с допустимо быстро убывающими коэффициентами.

Существование тригонометрических нуль-рядов с допустимо быстро убывающими коэффициентами независимо было доказано тремя авторами (см. [4]–[6]).

Многомерные аналоги теоремы А доказаны в работах [7], [8].

В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. Тогда для любой п.в. конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0, 1]$, существует последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n = 0, \pm 1$, такая, что ряд по системе Уолша $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ сходится к $f(x)$ п.в. на $[0, 1]$. Причем любое конечное число множителей δ_n можно взять произвольными.

Очевидно, что условие $a_n \downarrow 0$ можно заменить условием $|a_n| \downarrow 0$. Ясно также, что из теоремы 1 следует существование нуль-рядов по системе Уолша с допустимо быстро убывающими коэффициентами.

Пусть S – некоторый класс измеримых функций.

Напомним, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad (3)$$

называется *универсальными относительно знаков (порядков) в классе S* , если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n = \pm 1$ ($\gamma_n = 1, 0$), для которой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится к $F(x)$ п.в.

Ряд (3) называется *универсальным относительно перестановок в классе S* , если для любой функции $F(x) \in S$ члены ряда (3) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился к $F(x)$ п.в.

Первые примеры (в разных смыслах) универсальных тригонометрических рядов были построены в работах [9]–[13]. Об исследованиях универсальных ортогональных рядов подробно можно узнать из работ [14], [15].

Здесь отметим один результат Н. Б. Погосяна [16].

ТЕОРЕМА В. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность чисел, удовлетворяющих условиям $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\{\varepsilon_n\} \notin l_2$. Тогда существует функция $f(x) \in \bigcap_{p < 2} L_p[0, 2\pi]$ с коэффициентами Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad |a_n| + |b_n| \leq \varepsilon_n \quad (n \geq 0),$$

для которой тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

является универсальным одновременно относительно знаков, перестановок и подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

В работе [8] получен неполный аналог теоремы В для кратных рядов по системе Уолша.

Из доказательства теоремы 1 будет видно, что верна следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. Тогда существуют числа $\gamma_n = \pm 1$ такие, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ является универсальным относительно подрядов.

Известно (см. [17], [18], а также [1, с. 165]), что ряд (1) с коэффициентами (2) является рядом Фурье–Уолша функции $f(x) \in L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, в том и только том случае, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < \infty$. Из этого факта и из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} W_n(x)$$

является рядом Фурье–Уолша некоторой функции из класса $\bigcap_{p < 2} L_p[0, 1]$, и для любой п.в. конечной измеримой функции $f(x)$ существуют числа $\delta_n = 0, \pm 1$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{\sqrt{n}} W_n(x)$ п.в. сходится к $f(x)$.

§ 2. Основные леммы

Напомним, что функции системы Радемахера определяются по формулам

$$R_n(x) = \text{sign}(\sin 2^n \pi x), \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Функции системы Уолша выражаются через функции системы Радемахера следующим образом (см., например, [19, с. 158]): $W_0(x) \equiv 1$, а для $n \geq 1$, если $2^{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_p}$ ($\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_p$) есть двоичное представление числа n , имеем

$$W_n(x) = \prod_{i=1}^p R_{\nu_i+1}(x).$$

Из определения системы Уолша непосредственно следует, что если $2^m \leq k < 2^{m+1}$ и $n > m$, то

$$W_{2^n}(x) W_k(x) = W_{2^n+k}(x). \quad (4)$$

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, а $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ – ее ряд Фурье по системе Уолша. Через $S^*(f, x)$ обозначим мажоранту частичных сумм этого ряда, т.е.

$$S^*(f, x) = \sup_N \left| \sum_{n=0}^N b_n W_n(x) \right|.$$

В работе [7] была доказана следующая (см. [7, лемма 3])

ЛЕММА 1. Для любого двоичного интервала $I = [\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}]$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 \leq i < 2^\sigma$, и для любого натурального числа $n > \sigma$, $n - \sigma$ четное, существует полином по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k W_k(x)$$

такой, что:

- 1) $|a_k| = 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} = (2^{-n}\mu I)^{\frac{1}{2}}, \quad 2^n \leq k < 2^{n+1};$
- 2) $P(x) = 1$, если $x \in E_1 \subset I, \quad \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I;$
- 3) $P(x) = -1$, если $x \in E_2 \subset I, \quad \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I;$
- 4) $P(x) = 0$, если $x \notin I;$
- 5) $S^*(P, x) \leq C$ для всех $x \in [0, 1];$

причем E_1 и E_2 являются конечными объединениями двоичных интервалов, а C – абсолютная постоянная.

С помощью этой леммы и (4) нетрудно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. Для любого двоичного интервала $I = [\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}]$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 \leq i < 2^\sigma$, и для любых натуральных чисел m, n и q , где $n - m - \sigma - 1$ – положительное четное число, $0 \leq q < 2^m$, существует полином по системе Уолша $P(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \delta_k W_k(x)$ такой, что:

- 1) $\delta_k = \pm 1$, если $2^n + q2^{n-m} + 2^{n-m-1} \leq k < 2^n + (q+1)2^{n-m};$
- 2) $\delta_k = 0$ для остальных $k;$
- 3) $P(x) = 2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}}$, если $x \in E_1 \subset I, \quad \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I;$
- 4) $P(x) = -2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}}$, если $x \in E_2 \subset I, \quad \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I;$
- 5) $P(x) = 0$, если $x \notin I;$
- 6) $S^*(P, x) \leq C \cdot 2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}}$ для всех $x \in [0, 1];$

причем E_1 и E_2 являются конечными объединениями двоичных интервалов, а C – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I = [\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}]$ – двоичный интервал, а m и n – такие натуральные числа, что $n - m - \sigma - 1$ – положительное четное число. Тогда согласно лемме 1 существует такой полином

$$P'(x) = \sum_{k=2^{n-m-1}}^{2^{n-m}-1} a_k W_k(x),$$

что:

- 1') $|a_k| = 2^{-\frac{n-m+\sigma-1}{2}}, \quad 2^{n-m-1} \leq k < 2^{n-m};$
- 2') $P'(x) = 1$, если $x \in E_1 \subset I, \quad \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I;$
- 3') $P'(x) = -1$, если $x \in E_2 \subset I, \quad \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I;$
- 4') $P'(x) = 0$, если $x \notin I;$
- 5') $S^*(P', x) \leq C.$

Пусть $0 \leq q < 2^m$ – любое натуральное число и $q = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \dots + 2^{\nu_j}$. Рассмотрим полином

$$P(x) = 2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}} W_{2^{n-m+\nu_1}}(x) \cdots W_{2^{n-m+\nu_j}}(x) P'(x) W_{2^n}(x). \quad (5)$$

Ясно, что $P(x)$ удовлетворяет условиям 3)–6) леммы 2. Из (4) и (5) следует, что

$$P(x) = 2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}} \sum_{k=2^{n-m-1}}^{2^{n-m}-1} a_k W_{2^n+q2^{n-m}+k}(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \delta_k W_k(x),$$

где (см. также 1')) числа δ_k удовлетворяют условиям 1) и 2) леммы. Лемма 2 доказана.

Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – система Хаара (определение системы Хаара и о связи между системами Хаара и Уолша см., например, [20]). Напомним, что если $2^n \leq m < 2^{n+1}$, то

$$W_m(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \alpha_{km} \chi_k(x), \quad \alpha_{km} = \pm 1. \quad (6)$$

Пусть $P_n(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \chi_k(x)$ – последовательность полиномов по системе Хаара со следующими свойствами:

а) если $\Delta_n = \sup P_n(x) = \{x: P_n(x) \neq 0\}$, то полиномы $P_1(x), P_2(x), \dots, P_{n-1}(x)$ принимают постоянные значения на Δ_n , и если $\Delta_n^+ = \{x: P_n(x) > 0\}$ и $\Delta_n^- = \{x: P_n(x) < 0\}$, то $|P_n(x)|$ – постоянная на множестве $\Delta_n^+ \cup \Delta_n^-$. Кроме того, для некоторого двоичного интервала I все $\Delta_n \subset I$;

б) $\sum_{n=1}^\infty P_n^2(x) = +\infty$ п.в. на интервале I ;

с) $\sup_x S^*(P_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

д) $P_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого x .

Тогда справедлива следующая

ЛЕММА 3. Для любых положительных чисел $\varepsilon < 1, \delta$ и d существуют полином $P(x) = \sum_{k=1}^m P_{n_k}(x)$ и множество $E \subset I$ такие, что:

- 1) $|P(x) - d| < \delta$, если $x \in E$, $\mu E > (1 - \varepsilon)\mu I$;
- 2) $S^*(P, x) < \delta$, если $x \notin I$;
- 3) $S^*(P, x) < C \frac{d}{\varepsilon} + \delta$ для п.в. $x \in I$, где C – абсолютная постоянная.

Для доказательства этой леммы мы пользуемся следующими теоремами.

ТЕОРЕМА С (см. [21], [22] или [19, с. 104]). Для того чтобы ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \chi_n(x) \quad (7)$$

сходилась п.в. на множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для п.в. $x \in E$ была конечна сумма ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n^2 \chi_n^2(x)$.

ТЕОРЕМА D (см. [21]–[23] или [19, с. 108]). Если для частичных сумм ряда (7) выполнено соотношение

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n \chi_n(x) < +\infty, \quad x \in E, \quad \mu E > 0,$$

то ряд (7) сходится п.в. на E (к конечной п.в. функции).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \chi_m(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \chi_k(x). \quad (8)$$

Из (8) и свойства б) следует, что $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \chi_m^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2(x) = +\infty$ п.в. на интервале I . Поэтому в силу теоремы С ряд (8) расходится п.в. на интервале I . Следовательно (см. теорему D),

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M a_m \chi_m(x) < +\infty \quad \text{для п.в. } x \in I. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_n(x) = +\infty \quad \text{для п.в. } x \in I. \quad (10)$$

Из свойств с) и д) следует, что существует натуральное число n_0 такое, что:

$$S^*(P_n, x) < \delta \quad \text{при } n > n_0, \quad (11)$$

$$|P_n(x)| < \frac{\delta}{2} \quad \text{при } n > n_0. \quad (12)$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\tau(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \sup_{N: x \in \Delta_N} \sum_{n=n_0}^N P_n(x) \leq d, \\ \inf \left\{ N: \max_{x \in \Delta_{N+1}} \sum_{n=n_0}^{N+1} P_n(x) > d \right\} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (13)$$

Легко видеть, что при $j = 1, 2, \dots$ множество $e_j = \{x: \tau(x) = j\}$ либо пусто, либо совпадает с Δ_{j+1} . Так как $P_n(x)$ – полином по системе Хаара, то из а) получаем, что при $n > j + 1$ интервалы Δ_n и e_j либо не пересекаются, либо $\Delta_n \subset e_j$. Положим $\gamma_n = 0$, если $\Delta_n \subset e_j$ для некоторого j , и $\gamma_n = 1$ в противном случае. Из выбора чисел $\{\gamma_n\}$ и из (13) следует, что

$$\sup_N \sum_{n=n_0}^N \gamma_n P_n(x) \leq d, \quad x \in I. \quad (14)$$

Пусть $x \in I$ и $\limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_n(x) = +\infty$. Тогда $x \in e_j$ для некоторого $j \geq n_0$, поэтому

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n P_n(x) = \sum_{n=n_0}^j P_n(x), \quad x \in e_j.$$

Но полиномы $P_{n_0}(x), P_{n_0+1}(x), \dots, P_j(x)$ принимают постоянные значения на интервале $e_j = \Delta_{j+1}$ (см. свойство а)), а $\sum_{n=n_0}^{j+1} P_n(x') > d$ для некоторого $x' \in e_j$. Следовательно, из (12) и (14) получаем, что для $x \in e_j$

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n P_n(x) - d \right| < \frac{\delta}{2}. \quad (15)$$

Учитывая также (10), получаем, что неравенство (15) выполняется для п.в. $x \in I$.

Положим

$$\tau'(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \inf_{N: x \in \Delta_N} \left(\min_{t \in \Delta_N} \sum_{n=n_0}^N \gamma_n P_n(t) \right) > -\frac{4d}{\varepsilon}, \\ \inf \left\{ N: \min_{t \in \Delta_{N+1}} \sum_{n=n_0}^{N+1} \gamma_n P_n(x) < -\frac{4d}{\varepsilon}, x \in \Delta_{N+1} \right\} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (16)$$

Легко видеть, что при $j \geq n_0$ множество $e'_j = \{x: \tau'(x) = j\}$ либо пусто, либо совпадает с Δ_{j+1} . Пусть $\gamma'_n = 0$, если $\Delta_n \subset e'_j$ для некоторого j , и $\gamma'_n = 1$ в противном случае. Нетрудно убедиться в том, что:

$$\inf_N \sum_{n=n_0}^N \gamma'_n \gamma_n P_n(x) \geq -\frac{4d}{\varepsilon} \quad \text{для п.в. } x \in I, \quad (17)$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) = \sum_{n=n_0}^j \gamma_n P_n(x), \quad \text{если } x \in e_j, \quad j \geq n_0, \quad (18)$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n P_n(x), \quad \text{если } \tau(x) = +\infty. \quad (19)$$

Из (15) и (19) следует, что

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) - d \right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{для п.в. } x \in \{x: \tau'(x) = +\infty\}. \quad (20)$$

Докажем, что

$$\mu\{x: \tau'(x) = +\infty\} > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mu I.$$

Действительно, из (16) имеем

$$\mu\{x: \tau'(x) = +\infty\} = \mu I - \mu\{x: \tau'(x) < +\infty\} = \mu I - \sum_{j=n_0}^{\infty} \mu\{x: \tau'(x) = j\}, \quad (21)$$

и на множестве $e'_j = \{x: \tau'(x) = j\} = \Delta_{j+1}$ (если $e'_j \neq \emptyset$) сумма $\sum_{n=n_0}^j \gamma_n P_n(x)$ постоянная (см. свойство а)). Следовательно, на одном из множеств Δ_{j+1}^+ или Δ_{j+1}^- выполняется неравенство

$$\sum_{n=n_0}^{j+1} \gamma_n P_n(x) < -\frac{4d}{\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\mu e'_j \leq 2\mu \left\{ x \in \Delta_{j+1}: \sum_{n=n_0}^{j+1} \gamma_n P_n(x) < -\frac{4d}{\varepsilon} \right\}. \quad (22)$$

Рассмотрим функцию

$$S(x) = \begin{cases} \sum_{n=n_0}^{j+1} \gamma_n P_n(x), & \text{если } x \in e'_j, \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n P_n(x), & \text{если } \tau'(x) = +\infty. \end{cases} \quad (23)$$

Так как множества e'_j , $j \geq n_0$, не пересекаются, $\int_0^1 P_n(x) dx = 0$ для всех $n \geq n_0$ ($P_n(x)$ – полином по системе Хаара) и

$$\sup_N \left| \sum_{n=n_0}^N \gamma'_n \gamma_n P_n(x) \right| \leq d + \frac{4d}{\varepsilon} \quad \text{для п.в. } x \in I \quad (24)$$

(см. (14) и (17)), то из (18), (19) и (23) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) dx + \int_0^1 \sum_{\substack{n=n_0 \\ e'_n \neq \emptyset}}^{\infty} \gamma_{n+1} P_{n+1}(x) dx \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n \int_0^1 P_n(x) dx + \sum_{\substack{n=n_0 \\ e'_n \neq \emptyset}}^{\infty} \gamma_{n+1} \int_0^1 P_{n+1}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Учитывая также (14), получаем

$$0 = \int_0^1 S(x) dx \leq d\mu I - \frac{4d}{\varepsilon} \mu \left\{ x: S(x) < -\frac{4d}{\varepsilon} \right\},$$

откуда

$$\mu \left\{ x: S(x) < -\frac{4d}{\varepsilon} \right\} < \frac{\varepsilon}{4} \mu I.$$

Поэтому (см. также (21)–(23))

$$\begin{aligned} \mu\{x: \tau'(x) = +\infty\} &\geq \mu I - 2 \sum_{j=n_0}^{\infty} \mu \left\{ x \in e'_j: \sum_{n=n_0}^{j+1} \gamma_n P_n(x) < -\frac{4d}{\varepsilon} \right\} \\ &= \mu I - 2\mu \left\{ x \in I: S(x) < -\frac{4d}{\varepsilon} \right\} > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mu I. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (20) и (25) следует, что существуют натуральное число $m > n_0$ и множество E такие, что

$$\begin{aligned} E &\subset \{x: \tau'(x) = +\infty\}, & \mu E &> (1 - \varepsilon) \mu I, \\ \left| \sum_{n=n_0}^m \gamma'_n \gamma_n P_n(x) - d \right| &< \delta, & x &\in E. \end{aligned}$$

Положив $P(x) = \sum_{n=n_0}^m \gamma'_n \gamma_n P_n(x)$, нетрудно убедиться в том, что (см. (11) и свойство а))

$$S^*(P, x) < \delta, \quad \text{если } x \notin I,$$

и (см. (11) и (24))

$$S^*(P, x) < d \left(1 + \frac{4}{\varepsilon}\right) + \delta < \frac{5d}{\varepsilon} + \delta \quad \text{для п.в. } x \in I.$$

Тем самым лемма 3 доказана.

§ 3. Главная лемма

ЛЕММА 4. Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n \geq 0} a_n^2 = +\infty$. Тогда для любого двоичного интервала $I = [\frac{\eta}{2^\sigma}, \frac{\eta+1}{2^\sigma}]$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 \leq \eta < 2^\sigma$, и для любых положительных чисел $\varepsilon < 1$, $\delta < 1, d, M$ ($M \in \mathbb{N}$) существуют полином по системе Уолша $P(x) = \sum_{n=M}^N \delta_n a_n W_n(x)$ и множество $E \in [0, 1]$ такие, что:

- 1) $\delta_n = 0, \pm 1$ для $M \leq n \leq N$;
- 2) $|P(x) - d\chi_I(x)| < \delta$, если $x \notin E$;
- 3) $\mu E < \varepsilon \mu I$;
- 4) $S^*(P, x) < \delta$, если $x \notin I \cup E$;
- 5) $S^*(P, x) < C \frac{d}{\varepsilon} + \delta$, если $x \in I \setminus E$;

где $\chi_I(x)$ – характеристическая функция интервала I , а C – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n \geq 0} a_n^2 = +\infty$. Тогда

$$\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}^2 = +\infty. \quad (26)$$

Обозначим

$$G = \{k \in \mathbb{N}: a_{2^k} < 2a_{2^{k+1}}\}. \quad (27)$$

Пусть $m \in G$, $m < n$ и $k \notin G$ при $m < k < n$; тогда

$$\sum_{k=m+1}^n 2^k a_{2^k}^2 \leq \sum_{k=m+1}^n 2^k \left(\frac{a_{2^{m+1}}}{2^{k-m-1}} \right)^2 = 2^m a_{2^{m+1}}^2 \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^{k-m-2}} < 4 \cdot 2^m a_{2^m}^2.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}^2 \leq 4a_1^2 + 4 \sum_{m \in G} 2^m a_{2^m}^2.$$

Из последнего неравенства с учетом (26) получаем

$$\sum_{k \in G} 2^k a_{2^k}^2 = +\infty. \quad (28)$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что если $k, k' \in G$, то $(k - k')$ – четное число. Действительно, за G можно взять одно из следующих множеств: $G_1 = \{k \in G: k \text{ четное}\}$ и $G_2 = \{k \in G: k \text{ нечетное}\}$. Очевидно, что для одного из них выполняется (28).

Пусть γ – некоторое число, удовлетворяющее условию

$$\gamma^2 < \left((d+1)^2 + \frac{4(Cd+1)^2}{\varepsilon} \right)^{-1} \cdot \frac{\delta^2 \varepsilon}{16} \mu I, \quad (29)$$

где C – постоянная из леммы 3.

Возьмем натуральное число m настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$(1 + \gamma)^{2^m} > 2, \quad (30)$$

и рассмотрим следующие отношения:

$$\frac{a_{2^n + q 2^{n-m}}}{a_{2^n + (q+1) 2^{n-m}}}, \quad n \in G, \quad n > m, \quad q = 1, 2, \dots, 2^m.$$

Из (27) и (30) следует, что для каждого $n \in G$, $n > m$, существует такое число q_n , что

$$\frac{a_{2^n + q_n 2^{n-m}}}{a_{2^n + (q_n+1) 2^{n-m}}} < 1 + \gamma, \quad n \in G, \quad n > m. \quad (31)$$

Обозначим (в дальнейшем будем считать, что если $n \in G$, то $n > m$)

$$\alpha_n = a_{2^n + (q_n+1) 2^{n-m}}, \quad n \in G. \quad (32)$$

Очевидно, что

$$\frac{a_k}{\alpha_n} - 1 < \gamma, \quad \text{если } 2^n + q_n 2^{n-m} \leq k \leq 2^n + (q_n + 1) 2^{n-m}. \quad (33)$$

Из (27) и (32) с учетом монотонности последовательности $\{a_n\}$ следует, что

$$\sum_{n \in G} 2^n \alpha_n^2 \geq \sum_{n \in G} 2^n \alpha_{2^{n+1}}^2 \geq 2^{-2} \sum_{n \in G} 2^n a_{2^n}^2.$$

Поэтому (см. также (28))

$$\sum_{n \in G} 2^n \alpha_n^2 = +\infty. \quad (34)$$

Обозначим $G' = \{n \in G: 2^n \alpha_n^2 > 2^{-n/2}, n > m\}$. Очевидно, что

$$\sum_{n \in G \setminus G'} 2^n \alpha_n^2 \leq \sum_{n \in G \setminus G'} 2^{-n/2} < +\infty.$$

Следовательно (см. также (34)),

$$\sum_{n \in G'} 2^n \alpha_n^2 = +\infty. \quad (35)$$

Существуют натуральные числа p_n такие, что

$$n - m - p_n \text{ — четное число, } n \in G', \quad (36)$$

$$\sum_{n \in G'} 2^{n-m-p_n} \alpha_n^2 = +\infty, \quad (37)$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in G'}} 2^{n-m-p_n} \alpha_n^2 = 0, \quad (38)$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in G'}} 2^{n-m-p_n} \alpha_n = +\infty. \quad (39)$$

В дальнейшем через n' будем обозначать число $n - m - p_n$. Пусть $I = [\frac{\eta}{2^\sigma}, \frac{\eta+1}{2^\sigma}]$ — двоичный интервал, а M — некоторое натуральное число. Из (37)–(39) следует, что существует конечное подмножество B'_1 множества G' такое, что

$$\min\{B'_1\} \geq \log_2 M, \quad (40)$$

$$2^{n'} \alpha_n > 4, \quad \text{если } n \in B'_1, \quad (41)$$

$$2^{n'} \alpha_n^2 < 2^{-\sigma}, \quad \text{если } n \in B'_1, \quad (42)$$

$$\sum_{n \in B'_1} 2^{n'} \alpha_n^2 > 2^{-\sigma+1}. \quad (43)$$

Для каждого $n \in B'_1$ существует нечетное число $\sigma_n \geq \sigma$ такое, что (см. (42))

$$2^{-\sigma_n-1} < 2^{n'} \alpha_n^2 \leq 2^{-\sigma_n+1}. \quad (44)$$

Из (41) и (44) следует, что

$$2^{n'-\sigma_n} \geq 2^{n'} \cdot 2^{n'-1} \cdot \alpha_n^2 = \frac{1}{2} (2^{n'} \alpha_n)^2 > 8, \quad n \in B'_1,$$

т.е. (см. также (36))

$$n' - \sigma_n - 1 > 0, \quad n' - \sigma_n - 1 \text{ — четное число, } n \in B'_1. \quad (45)$$

А из (43) и (44) получаем, что

$$\sum_{n \in B'_1} 2^{-\sigma_n} \geq \frac{1}{2} \sum_{n \in B'_1} 2^{n'} \alpha_n^2 > 2^{-\sigma}.$$

Следовательно (напомним, что $\sigma_n \geq \sigma$), существует подмножество B_1 множества B'_1 такое, что

$$\sum_{n \in B_1} 2^{-\sigma_n} = 2^{-\sigma}.$$

Интервал I представим в виде объединения двоичных интервалов $I_n, n \in B_1$, $\mu I_n = 2^{-\sigma_n}$. В силу леммы 2 (см. также (45)) для каждого интервала $I_n, n \in B_1$, и чисел $m + p_n, n$ и $q_n 2^{p_n}$ существует полином по системе Уолша

$$P_n(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \alpha_n \delta_k W_k(x)$$

такой, что:

1') $\delta_k = \pm 1$, если $2^n + q_n 2^{n-m} + 2^{n-m-p_n-1} \leq k < 2^n + q_n 2^{n-m} + 2^{n-m-p_n}$;

2') $\delta_k = 0$ для остальных k ;

3') $P_n(x) = 2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}} \alpha_n$, если $x \in E'_n$, $\mu E'_n = \frac{1}{2} \mu I_n$;

4') $P_n(x) = -2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}} \alpha_n$, если $x \in E''_n$, $\mu E''_n = \frac{1}{2} \mu I_n$;

5') $P_n(x) = 0$, если $x \notin I_n$;

причем E'_n и $E''_n, n \in B_1$, являются конечными объединениями двоичных интервалов. Из (44), 3') и 4') следует, что

$$2^{-1} \leq |P_n(x)| = 2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}} \alpha_n \leq 1, \quad \text{если } x \in E'_n \cup E''_n, \quad n \in B_1.$$

Допустим, что множества $B_1, B_2, \dots, B_{j-1}$ и полиномы $P_n(x), n \in \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$, уже построены, $\lambda_{j-1} = \max B_{j-1} + 1$ и полином $P_n(x), n \in \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$, постоянный на каждом двоичном интервале с длиной $2^{-\lambda_{j-1}}$.

Из (37)–(39) следует, что существует конечное подмножество B'_j множества G' такое, что:

$$\min B'_j \geq \lambda_{j-1}, \quad (46)$$

$$2^{n'} \alpha_n > \frac{4}{\sqrt{j}}, \quad \text{если } n \in B'_j, \quad (47)$$

$$2^{n'} \alpha_n^2 \leq \frac{1}{j} 2^{-\lambda_{j-1}}, \quad \text{если } n \in B'_j, \quad (48)$$

$$\sum_{n \in B'_j} 2^{n'} \alpha_n^2 > 2^{-\sigma+1} \cdot \frac{1}{j}. \quad (49)$$

Для каждого $n \in B'_j$ существует нечетное число $\sigma_n \geq \lambda_{j-1}$ такое, что (см. (48))

$$\frac{1}{j} 2^{-\sigma_n-1} < 2^{n'} \alpha_n^2 \leq \frac{1}{j} 2^{-\sigma_n+1}. \quad (50)$$

Из (47) и (50) следует, что

$$2^{n'-\sigma_n} \geq 2^{n'} j 2^{n'-1} \alpha_n^2 = \frac{j}{2} (2^{n'} \alpha_n)^2 > 8, \quad n \in B'_j,$$

т.е. (см. также (36)) $n' - \sigma_n - 1 > 0$, $n' - \sigma_n - 1$ – четное число, $n \in B'_j$.

Из (49) и (50) получаем, что

$$\sum_{n \in B'_j} 2^{-\sigma_n} \geq \frac{j}{2} \sum_{n \in B'_j} 2^{n'} \alpha_n^2 > 2^{-\sigma}.$$

Следовательно (напомним, что $\sigma_n \geq \lambda_{j-1} > \sigma$), существует подмножество B_j множества B'_j такое, что

$$\sum_{n \in B_j} 2^{-\sigma_n} = 2^{-\sigma}.$$

Поэтому интервал I можно представить в виде объединения двоичных интервалов I_n , $n \in B_j$, $\mu I_n = 2^{-\sigma_n}$. Очевидно, что полином $P_k(x)$, $k \in \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$, принимает постоянное значение на каждом интервале I_n , $n \in B_j$. В силу леммы 2 для каждого интервала I_n , $n \in B_j$, и чисел $m + p_n$, n и $q_n 2^{p_n}$ существует полином по системе Уолша

$$P_n(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \alpha_n \delta_k W_k(x) \quad (51)$$

такой, что:

- 1'') $\delta_k = \pm 1$, если $2^n + q_n 2^{n-m} + 2^{n'-1} \leq k < 2^n + q_n 2^{n-m} + 2^{n'}$;
- 2'') $\delta_k = 0$ для остальных k ;
- 3'') $P_n(x) = 2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}} \alpha_n$, если $x \in E'_n \subset I_n$, $\mu E'_n = \frac{1}{2} \mu I_n$;
- 4'') $P_n(x) = -2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}} \alpha_n$, если $x \in E''_n \subset I_n$, $\mu E''_n = \frac{1}{2} \mu I_n$;

5'') $P_n(x) = 0$, если $x \notin I_n$;

6'') $S^*(P_n, x) \leq C_1 \cdot 2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}} \alpha_n$ для всех $x \in [0, 1]$;

причем E'_n и E''_n являются конечными объединениями двоичных интервалов с длиной 2^{-n-1} , а C_1 – постоянная.

Из 3''), 4''), 6'') и (50) следует, что

$$\frac{2^{-1}}{\sqrt{j}} \leq |P_n(x)| = 2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}} \alpha_n \leq \frac{1}{\sqrt{j}}, \quad \text{если } x \in E'_n \cup E''_n, \quad n \in B_j,$$

и

$$S^*(P_n, x) \leq \frac{C_1}{\sqrt{j}} \quad \text{для всех } x \in [0, 1].$$

Поэтому (см. также 5''))

$$\sum_{n \in B_j} (P_n(x))^2 > \frac{1}{4j} \quad \text{для п.в. } x \in I.$$

Нетрудно убедиться в том, что для полиномов $P_n(x)$, $n \in B_j$, $j = 1, 2, \dots$, выполняются условия а)–д). Поэтому согласно лемме 3 существует полином

$$P'(x) = \sum_{k=1}^m P_{n_k}(x), \quad n_k \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$P'(x) = 0, \quad \text{если } x \notin I, \tag{52}$$

$$\mu \left\{ x \in I : |P'(x) - d| > \frac{\delta}{2} \right\} < \frac{\varepsilon}{4} \mu I, \tag{53}$$

$$S^*(P', x) < \frac{\delta}{2}, \quad \text{если } x \notin I, \tag{54}$$

$$S^*(P', x) < C \frac{4d}{\varepsilon} + \frac{\delta}{2} \quad \text{для п.в. } x \in I, \tag{55}$$

где C – абсолютная постоянная из леммы 3.

Из (52), (53) и (55) следует, что (см. также (29))

$$\|P'\|_2^2 \leq \left(d + \frac{\delta}{2}\right)^2 \mu I + \left(\frac{4Cd}{\varepsilon} + \frac{\delta}{2}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \leq (d+1)^2 + \frac{4(Cd+1)^2}{\varepsilon} < \frac{\varepsilon \delta^2}{16\gamma^2} \mu I. \tag{56}$$

Для каждого полинома $P_n(x)$, $n \in B_j$, $j = 1, 2, \dots$ (см. (51)), обозначим

$$P'_n(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \delta_k W_k(x)$$

и рассмотрим полином

$$P(x) = \sum_{k=M}^N \delta_k a_k W_k(x) \equiv \sum_{k=1}^m P'_{n_k}(x). \quad (57)$$

Из (33), (51), (57), $1''$ и $2''$) следует, что

$$\begin{aligned} \|P - P'\|_2^2 &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=2^{n_k}}^{2^{n_k+1}-1} \delta_i^2 (a_i - \alpha_{n_k})^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=2^{n_k}}^{2^{n_k+1}-1} \delta_i^2 \alpha_{n_k}^2 \left(\frac{a_i}{\alpha_{n_k}} - 1 \right)^2 < \gamma^2 \sum_{k=1}^m \|P_{n_k}\|_2^2 = \gamma^2 \|P'\|_2^2. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом (56) получаем

$$\|P - P'\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon \delta^2}{16} \mu I. \quad (58)$$

Следовательно,

$$\mu \left\{ x \in [0, 1]: |P(x) - P'(x)| > \frac{\delta}{2} \right\} \leq \frac{4\|P - P'\|_2^2}{\delta^2} < \frac{\varepsilon}{4} \mu I. \quad (59)$$

Из (52), (53) и (59) получаем

$$\mu \left\{ x \in [0, 1]: |P(x) - d\chi_I(x)| > \delta \right\} < \frac{\varepsilon}{2} \mu I. \quad (60)$$

Для мажоранты частичных сумм полинома $P(x)$ имеем

$$S^*(P, x) \leq S^*(P', x) + S^*(P - P', x). \quad (61)$$

Так как система Уолша имеет слабый тип $(2, 2)$ (см., например, [1, с. 189]), то из (58) следует, что

$$\mu \left\{ x: S^*(P - P', x) > \frac{\delta}{2} \right\} \leq \frac{4C'}{\delta^2} \|P - P'\|_2^2 < C' \frac{\varepsilon}{2} \mu I, \quad (62)$$

где C' – абсолютная постоянная.

Обозначим

$$E = \left\{ x: |P(x) - d\chi_I(x)| > \delta \right\} \cup \left\{ x: S^*(P - P', x) > \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (63)$$

Из (60), (62) и (63) следует, что $\mu E < (C' + 1)\varepsilon \mu I$. А из (54), (55), (61) и (63) получаем, что

$$\begin{aligned} S^*(P, x) &< \delta, & \text{если } x \notin E \cup I, \\ S^*(P, x) &< \frac{4Cd}{\varepsilon} + \delta, & \text{если } x \in I \setminus E. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

§ 4. Доказательство теорем

Рассмотрим множество $\{(\Delta, d, \lambda)\}$, зависящее от трех параметров, где Δ пробегает все двоичные интервалы, d пробегает множество всех рациональных чисел, а λ – множество положительных рациональных чисел. Пронумеровав это множество, мы можем представить его в виде последовательности

$$(\Delta_1, d_1, \lambda_1), (\Delta_2, d_2, \lambda_2), \dots, (\Delta_m, d_m, \lambda_m), \dots \quad (64)$$

В этой последовательности элементы отличны друг от друга, но параметры, стоящие в разных элементах в одинаковых местах, могут совпадать.

Обозначим

$$g_m(x) = d_m \chi_{\Delta_m}(x) = \begin{cases} d_m, & \text{если } x \in \Delta_m, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta_m. \end{cases} \quad (65)$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$, где

$$1 > \eta_1 > \eta_2 > \dots, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m < +\infty. \quad (66)$$

В силу леммы 4 для каждого $m = 1, 2, \dots$ существуют полином

$$P_m(x) = \sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}} \delta_n a_n W_n(x),$$

множество $E_m \subset [0, 1]$ и абсолютная постоянная C такие, что:

- А) $\delta_n = 0, \pm 1$ для всех n ;
- В) $|P_m(x) - g_m(x)| < \eta_m$, если $x \notin E_m$;
- С) $\mu E_m < \lambda_m \mu \Delta_m$;
- Д) $S^*(P_m, x) < C \frac{|d_m|}{\lambda_m} + \eta_m$, если $x \in \Delta_m \setminus E_m$;
- Е) $S^*(P_m, x) < \eta_m$, если $x \notin I \cup E_m$.

Докажем, что для любой п.в. конечной измеримой функции $f(x)$ существует подпоследовательность $\{P_{n_k}(x)\}$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{для п.в. } x \in [0, 1].$$

Тем самым теорема будет доказана.

Для этого сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5. Пусть $\varphi(x)$ – п.в. конечная измеримая функция, определенная на $[0, 1]$; далее, пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ – произвольные числа, а m – произвольное натуральное число. Тогда существуют натуральные числа $m_1, m_2, \dots, m_j$ и множество E , удовлетворяющие следующим условиям:

- а) $m < m_1 < m_2 < \dots < m_j$;
- б) $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 1 - 2\varepsilon$;
- в) $\left| \sum_{i=1}^j P_{m_i}(x) - \varphi(x) \right| < \delta$, если $x \in E$;
- д) $S^*\left(\sum_{i=1}^j P_{m_i}, x\right) \leq C \frac{|\varphi(x)|}{\varepsilon} + \varepsilon$ для всех $x \in E$, где C – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что существуют конечное разбиение интервала $[0, 1]$ на попарно непересекающиеся двоичные интервалы $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_j$, рациональные числа $d'_1, d'_2, \dots, d'_j$ и множество E_0 такие, что

$$E_0 \subset [0, 1], \quad \mu E_0 > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (67)$$

$$|\varphi(x) - d'_i| < \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon^2}{C} \right\} \quad \text{при } x \in \Delta'_i \cap E_0, \quad i = 1, 2, \dots, j, \quad (68)$$

где C – постоянная из D).

Для фиксированного i , $1 \leq i \leq j$, в последовательности (64) существует подпоследовательность вида

$$(\Delta'_i, d'_i, \lambda_{k_1}), (\Delta'_i, d'_i, \lambda_{k_2}), \dots, (\Delta'_i, d'_i, \lambda_{k_n}), \dots,$$

где

$$\lambda_{k_n} \geq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k_n} = \varepsilon. \quad (69)$$

Пусть m_0 выбрано настолько большим, чтобы (см. (66))

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \eta_m < \min \left\{ \varepsilon, \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (70)$$

Применяя условия В)–Е) для $m = k_n$ с достаточно большим индексом n и учитывая (68)–(70), легко видеть, что для номера $m_i = k_n > m_{i-1}$ выполняются условия:

$$|P_{m_i}(x) - d'_i| < \eta_{m_i}, \quad \text{если } x \in \Delta'_i \setminus E_{m_i}, \quad (71)$$

где

$$E_{m_i} \subset [0, 1], \quad \mu E_{m_i} < \lambda_{k_m} \mu \Delta'_i < \varepsilon \mu \Delta'_i + \frac{\varepsilon}{2j}, \quad (72)$$

$$|P_{m_i}(x)| < \eta_{m_i}, \quad \text{если } x \notin \Delta'_i \cup E_{m_i}, \quad (73)$$

$$S^*(P_{m_i}, x) < \eta_{m_i}, \quad \text{если } x \notin \Delta'_i \cup E_{m_i}, \quad (74)$$

$$\begin{aligned} S^*(P_{m_i}, x) &< C \frac{|d'_i|}{\lambda_{k_n}} + \eta_{m_i} < C \frac{|\varphi(x)| + \varepsilon^2/C}{\varepsilon} + \eta_{m_i} \\ &< C \frac{|\varphi(x)|}{\varepsilon} + 2\varepsilon, \quad x \in (\Delta'_i \setminus E_{m_i}) \cap E_0. \end{aligned} \quad (75)$$

Обозначим

$$E = E_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^j E_{m_i} \right). \quad (76)$$

Из (72) следует, что

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^j E_{m_i} \right) \leq \sum_{i=1}^j \mu E_{m_i} < \sum_{i=1}^j \left(\varepsilon \mu \Delta'_i + \frac{\varepsilon}{2j} \right) = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{2} \varepsilon.$$

Отсюда с учетом (67) и (76) получаем, что $\mu E > 1 - 2\varepsilon$.

Пусть $x \in E$. Тогда для некоторого q , $1 \leq q \leq j$, имеем $x \in \Delta'_q$. Из (68), (70), (71), (73) и (76) получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^j P_{m_i}(x) - \varphi(x) \right| &\leq |P_{m_q}(x) - \varphi(x)| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^j |P_{m_i}(x)| \\ &\leq |P_{m_q}(x) - d'_q| + |\varphi(x) - d'_q| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^j \eta_{m_i} \leq \frac{\delta}{2} + \sum_{i=1}^j \eta_{m_i} < \delta. \end{aligned}$$

А из (68), (70), (74) и (75) следует, что

$$\begin{aligned} S^* \left(\sum_{i=1}^j P_{m_i}, x \right) &\leq S^*(P_{m_q}, x) + \sum_{i \neq q} S^*(P_{m_i}, x) \\ &\leq C \frac{|\varphi(x)|}{\varepsilon} + 2\varepsilon + \sum_{i=1}^j \eta_{m_i} < C \frac{|\varphi(x)|}{\varepsilon} + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $f(x)$ – п.в. конечная измеримая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$, а $\{\gamma_n\}$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < +\infty, \quad 1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots \quad (77)$$

В силу леммы 5 ($\varphi(x) = f(x)$, $\varepsilon = \gamma_1/2$, $\delta = \gamma_2^2/2$, $m = 0$) существуют полином $Q_1(x) = \sum_{i=1}^{j_1} P_{m'_i}(x)$, $0 < m'_1 < m'_2 < \dots < m'_{j_1}$, и множество F_1 такие, что

$$\begin{aligned} \mu F_1 &> 1 - \gamma_1, \\ |f(x) - Q_1(x)| &< \frac{\gamma_2^2}{2}, \quad x \in F_1. \end{aligned}$$

Пусть уже построены полиномы $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_k(x)$ и множества $F_1, F_2, \dots, F_k$ такие, что

$$\mu F_i > 1 - \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (78)$$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^k Q_i(x) \right| < \frac{\gamma_{k+1}^2}{2}, \quad x \in F_k. \quad (79)$$

Положим

$$f_k(x) = f(x) - \sum_{i=1}^k Q_i(x). \quad (80)$$

В силу леммы 5 ($\varphi(x) = f_k(x)$, $\varepsilon = \gamma_{k+1}/2$, $\delta = \gamma_{k+2}^2/2$, $m = m_{j_k}^k$) существуют полином $Q_{k+1}(x) = \sum_{i=1}^{j_{k+1}} P_{m_i^{k+1}}(x)$, $m_{j_k}^k < m_1^{k+1} < m_2^{k+1} < \dots < m_{j_{k+1}}^{k+1}$, и множество F_{k+1} такие, что

$$\begin{aligned} \mu F_{k+1} &> 1 - \gamma_{k+1}, \\ |f_k(x) - Q_{k+1}(x)| &< \frac{\gamma_{k+2}^2}{2}, \quad x \in F_{k+1}, \end{aligned}$$

и

$$S^*(Q_{k+1}, x) < C \frac{2|f_k(x)|}{\gamma_{k+1}} + \frac{\gamma_{k+1}}{2} \quad \text{для всех } x \in F_{k+1}. \quad (81)$$

Из (79)–(81) следует, что на множестве $F'_{k+1} = F_k \cap F_{k+1}$

$$S^*(Q_{k+1}, x) \leq C\gamma_{k+1} + \frac{\gamma_{k+1}}{2} < (C+1)\gamma_{k+1}. \quad (82)$$

Так по индукции мы построим множества F_k , $k = 1, 2, \dots$, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n W_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) \quad (83)$$

со следующими свойствами:

- 1) ряд (83) имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$, где $\delta_n = 0, \pm 1$;
 - 2) для любого $k \geq 1$ выполняются неравенства (78) и (79);
 - 3) для любого $k \geq 1$ на множестве F'_{k+1} выполняется неравенство (82).
- Это означает, что ряд (83) на множестве

$$F_0 \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} F'_k, \quad F'_1 = [0, 1], \quad (84)$$

сходится к функции $f(x)$.

Из (77), (78) и (84) следует, что

$$\mu F_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcap_{k=m}^{\infty} F'_k \right) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \sum_{k=m}^{\infty} (\gamma_k + \gamma_{k+1}) \right) = 1.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Голубов Б. И., Ефимов А. Ф., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. Gevorkian G. G. On coefficients of null-series and on sets of uniqueness of trigonometric and Walsh systems // Analysis Math. 1988. V. 14. P. 219–251.
3. Ульянов П. Л. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // УМН. 1964. Т. 19. № 1. С. 3–69.
4. Арутюнян Ф. Г. Представление функций из L_p , $0 \leq p < 1$, тригонометрическими рядами с быстро убывающими коэффициентами // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1984. Т. 19. С. 448–466.
5. Погосян Н. Б. О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов // Analysis Math. 1985. V. 11. P. 139–177.
6. Körner T. W. Uniqueness for trigonometric series // Annals of Math. 1987. V. 125. P. 1–34.
7. Навасардян К. А. О нуль-рядах по двойной системе Уолша // Изв. НАН Армении. Сер. матем. 1994. Т. 29. № 1. С. 59–78.
8. Navasardian K. A. Universal series by multiple Walsh system // J. of Contemporary Math. Analysis. V. 30. № 5. P. 14–29.
9. Меньшов Д. Е. Об универсальных тригонометрических рядах // ДАН СССР. 1945. Т. 49. С. 79–82.
10. Меньшов Д. Е. О частных суммах тригонометрических рядов // Матем. сб. 1947. Т. 20(62). С. 197–237.
11. Талалаян А. А. Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. № 3. С. 621–660.
12. Мушегян Г. М. Об универсальных рядах относительно перестановок // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1977. Т. 12. № 4. С. 278–302.
13. Погосян Н. Б. Представление измеримых функций ортогональными рядами // Матем. сб. 1975. Т. 98(140). С. 102–112.
14. Талалаян А. А. Представление измеримых функций рядами // УМН. 1960. Т. 15. № 5. С. 77–141.
15. Талалаян А. А., Овсепян Р. И. Теоремы Д. Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 15–42.
16. Погосян Н. Б. Об универсальных рядах Фурье // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 185–186.
17. Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И. О вложении классов функций, определенных на нуль-мерных группах // Изв. ВУЗов. Математика. 1980. № 8. С. 66–76.
18. Moricz F. On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1981. V. 38. № 1–4. P. 183–189.
19. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
20. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.
21. Арутюнян Ф. Г. О рядах по системе Хаара // Докл. АН АрмССР. 1966. Т. 42. № 3. С. 134–140.
22. Gundy R. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. № 2. P. 228–248.
23. Chow Y. S. Convergence Theorems of martingales // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1962. Bd. 1. P. 340–346.