Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Уравнения восстановления на полуоси, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 1, 61–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:05:48

УДК 517.9+519.24

Н. Б. Енгибарян

Уравнения восстановления на полуоси

Рассматривается уравнение восстановления (УВ)

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x \varphi(x-t) dF(t), \quad g \in L_1(0; \infty),$$

где F – функция распределения неотрицательной случайной величины. Доказывается, что если F обладает нетривиальной абсолютно непрерывной компонентой или является распределением абсолютно непрерывного типа, то решение УВ имеет структуру

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \left[\int_0^\infty x dF(x) \right]^{-1} \int_0^\infty g(x) dt,$$

где $\varphi_1 \in L_1(0; \infty)$, $\varphi_2 \in C[0; \infty)$, $\varphi_2(+\infty) = 0$.

Если g ограничена и $g(+\infty) = 0$, то $\varphi_1(+\infty) = 0$.

Доказательство опирается на построение структуральной факторизации УВ по абсолютно непрерывной, дискретной и сингулярной компонентам.

Библиография: 10 наименований.

Введение

Рассмотрим интегральное уравнение типа свертки

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x \varphi(x-t) dF(t), \quad (0.1)$$

где F – функция распределения некоторой неотрицательной случайной величины:

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq 0, \quad F(x) \uparrow \text{ по } x, \quad F(+\infty) = 1. \quad (0.2)$$

Через $f(+\infty)$ обозначается предел функции f в $+\infty$.

Как и в работе [1], функцию F назовем *предъядром* уравнения (0.1). Интеграл в (0.1) понимается в смысле Лебега–Стилтьеса [2].

Уравнение (0.1) занимает важное место в теории вероятностей и называется *уравнением восстановления* (УВ) на полуоси (см. [3]–[5]). Свойства решения уравнения (0.1) определяются свойствами функции восстановления H , которая определяется из УВ,

$$H(x) = F(x) + \int_0^x H(x-t) dF(t). \quad (0.3)$$

Если распределение F обладает плотностью $u = F'$ (случай абсолютно непрерывного восстановления), то УВ (0.1) принимает вид

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x u(x-t)\varphi(t) dt, \quad (0.4)$$

где

$$u \geq 0, \quad u \in L_1 \equiv L_1(0; \infty), \quad \int_0^\infty u(x) dx = 1. \quad (0.5)$$

Одним из главных вопросов теории восстановления является поведение решения УВ (0.1) и (0.4) в $+\infty$ (см. [3]–[8]). К основным результатам в этом направлении относятся теорема Блекуэлла (основная форма теоремы восстановления) и ее альтернативная форма.

ТЕОРЕМА 0.1 (теорема Блекуэлла). *Если F – неарифметическое распределение, то функция восстановления H обладает свойством*

$$H(x + \alpha) - H(x) \rightarrow \nu^{-1}\alpha, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \forall \alpha > 0, \quad (0.6)$$

где

$$\nu = \int_0^\infty x dF(x) \quad (\leq +\infty), \quad \nu^{-1} \geq 0.$$

Здесь и в дальнейшем, если $\nu = +\infty$, считается $\nu^{-1} = 0$.

ТЕОРЕМА 0.2 (альтернативная форма теоремы восстановления). *Пусть F – неарифметическое распределение и функция g непосредственно интегрируема по Риману (НИР) на $[0; \infty)$. Тогда решение уравнения (0.1), (0.2) удовлетворяет соотношению*

$$\varphi(+\infty) = A \equiv \nu^{-1} \int_0^\infty g(x) dx. \quad (0.7)$$

Напомним, что распределение называется *арифметическим*, если $\exists h > 0$ такое, что распределение сосредоточено на множестве $nh, n \in \mathbb{Z}$. (Определение НИР см. в [3].) В [3] приведены примеры, показывающие, что если отказаться от требования НИР функции g , то даже при непрерывной $g \in L_1$ предельное соотношение (0.7) может не иметь места. Поэтому НИР функции g считается естественной основой теории УВ.

В работе [8] были получены новые теоремы восстановления для УВ (0.4), (0.5). Часть результатов [8] мы сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть в уравнении (0.4), (0.5) $g \in L_1$. Тогда:*

а) *решение уравнения имеет вид*

$$\varphi = A + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (0.8)$$

где $\varphi_1 \in L_1$, $\varphi_2 \in C[0; \infty)$, $\varphi_2(+\infty) = 0$;

б) *если g ограничена, $g(+\infty) = 0$, то имеет место равенство (0.7).*

В частном случае уравнения (0.4) теорема значительно сильнее теорем 0.1 и 0.2.

Основной целью настоящей работы является обобщение теоремы 0.3 на уравнение (0.1) в случае важного класса распределений абсолютно непрерывного типа (когда некоторая сверточная степень F содержит абсолютно непрерывную компоненту). В §2 приведено новое доказательство теоремы 0.3, которое значительно проще ее доказательства в работе [8]. Далее излагается и применяется новый метод покомпонентной факторизации уравнения (0.1), который имеет также самостоятельное значение.

§1. Классы функций. Некоторые свойства свертки

1. Функциональные пространства. Ниже будут описаны и перечислены те функциональные пространства или классы определенных на $[0; \infty)$ функций, которые будут использованы в дальнейшем изложении:

- а) банаховы пространства (БП) L_p , $1 \leq p < +\infty$;
- б) БП $M \equiv L_\infty$ ограниченных в существенном функций с нормой $\|f\| = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$; M_l и M_0 суть следующие подпространства M : если $f \in M_l$, то существует конечный предел¹ $f(+\infty)$; если $f \in M_0 \subset M_l$, то $f(+\infty) = 0$;
- в) БП непрерывных и ограниченных функций $C_M \subset M$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$; подпространство $C_l \subset C_M$ состоит из функций, для которых существует конечный предел $f(+\infty)$; подпространство $C_0 \subset C_l$ состоит из функций, для которых $f(+\infty) = 0$;
- г) через E обозначается одно из пространств, перечисленных выше;
- д) линейные топологические пространства $C = C[0; \infty)$, L_1^{loc} , M^{loc} ; последние два пространства состоят из функций, которые принадлежат $L_1(0; r)$ и $M(0; r)$ соответственно $\forall r < +\infty$;
- е) БП V функций ограниченной вариации на $[0; \infty)$ (см. [2]), удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, с нормой $\|f\| = \bigvee_0^\infty f$.

Обозначим через V_C , V_A , V_S , V_D следующие подпространства V : V_C состоит из непрерывных функций ограниченной вариации; $V_A \subset V_C$ состоит из абсолютно непрерывных функций; $V_S \subset V_C$ состоит из сингулярных функций или из тождественного нуля (если $f \in V_S$, то f непрерывна и имеет почти всюду равную нулю производную; см. [2]); V_D состоит из функций скачков с конечной суммой абсолютных величин этих скачков.

Согласно разложению Лебега [2] функция $f \in V$ единственным образом представляется в виде суммы:

$$f = f_A + f_S + f_D = f_C + f_D, \quad (1.1)$$

где $f_A \in V_A$, $f_S \in V_S$, $f_D \in V_D$, $f_C = f_A + f_S \in V_C$.

Введем классы $\text{Mon} \subset V$, $\text{Mon}^A \subset V_A$, $\text{Mon}^S \subset V_S$, $\text{Mon}^D \subset V_D$ неубывающих ограниченных функций, которые образуют конусы в своих пространствах [9]. Если в разложении (1.1) $f \in \text{Mon}$, то f_A , f_S , f_D – также неубывающие функции.

2. Операция свертки. Пусть $*$ – операция свертки в L_1^{loc} :

$$(u * f)(x) = \int_0^x u(x-t)f(t) dt, \quad u, f, u * f \in L_1^{\text{loc}}. \quad (1.2)$$

¹Предел понимается в смысле “почти всюду”.

Введем следующий класс Ω_A интегральных операторов свертки: если $\mathbb{U} \in \Omega_A$, то $(\mathbb{U}f)(x) = (u * f)(x)$, $u \in L_1$, $f \in L_1^{\text{loc}}$. Операторы из Ω_A непрерывно действуют в любом из пространств E (см. [10]), причем

$$\|\mathbb{U}\|_E \leq \gamma \equiv \int_0^\infty |u(x)| dx. \quad (1.3)$$

Известно (см. [6, с. 253, упр. 10]), что если $u \in L_1$ и $f \in M$, то $u * f$ равномерно непрерывна на $[0; \infty)$.

ЛЕММА 1.1. Пусть оператор $\mathbb{U} \in \Omega_A$. Тогда:

а) $\mathbb{U}$ переводит M в C_M ;

б) $\mathbb{U}$ переводит M_0 в C_0 и M_l в C_l .

Имеет место равенство

$$(\mathbb{U}f)(+\infty) = f(+\infty) \int_0^\infty u(x) dx. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам остается доказать утверждение б). Пусть $f \in M_0$, $\psi = \mathbb{U}f$ и $r > 0$. Имеем

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

где

$$\psi_1(x) = \int_r^\infty f(x-t)u(t) dt, \quad \psi_2(x) = \int_0^r f(x-t)u(t) dt,$$

функция f считается равной нулю при $x < 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $B = \|f\|_M$. Выберем число $r > 0$ так, чтобы

$$B \int_r^\infty |u(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|\psi_1(x)| < \varepsilon/2$.

Пусть число $r_1 > 0$ удовлетворяет условию

$$|f(y)| \int_0^\infty |u(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad y > r_1.$$

При $x > r + r_1$ имеем $|\psi_2(x)| < \varepsilon/2$. Поэтому $|\psi(x)| < \varepsilon$ при $x > r + r_1$.

Пусть теперь $f(+\infty) \neq 0$. Тогда утверждение б) леммы следует из равенства

$$\psi(x) = \int_0^x [f(x-t) - f(+\infty)] u(t) dt + f(+\infty) \int_0^x u(t) dt.$$

Лемма доказана.

Сходным путем доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\psi = u * f$, где $u \in L_1$, $f \in L_1^{\text{loc}}$, $u(+\infty) = 0$, $\exists f(+\infty)$. Тогда

$$\psi \in C_l, \quad \psi(+\infty) = f(+\infty) \int_0^\infty u(t) dt. \quad (1.5)$$

3. Уравнение (0.4) в диссипативном случае. Хорошо известно (см. [4], [7]), что при произвольном u и $g \in L_1^{\text{loc}}$ уравнение (0.4) имеет единственное решение $\varphi \in L_1^{\text{loc}}$. Оно может быть представлено по формуле

$$\varphi = g + \Phi * g, \quad (1.6)$$

где резольвентная функция Φ определяется из уравнения

$$\Phi = u + u * \Phi. \quad (1.7)$$

Если $u \geq 0$, то $\Phi \geq 0$. Если $\gamma \equiv \|u\|_{L_1} < 1$, то оператор $\mathbb{U}$ сжимающий в E (см. оценку (1.3)). Тогда $\Phi \in L_1$, а уравнение (0.4) однозначно разрешимо в E при $g \in E$.

Перепишем уравнение (0.4) в операторной форме:

$$(I - \mathbb{U})\varphi = g, \quad (1.8)$$

где I – единичный оператор, $\mathbb{U} \in \Omega_A$. Рассмотрим (1.8) в так называемом диссипативном случае, когда

$$u \geq 0, \quad \gamma = \int_0^\infty u(x) dx < 1. \quad (1.9)$$

Тогда оператор $I - \mathbb{U}$ обладает обратным в E : $(I - \mathbb{U})^{-1} = I + \Phi$, где $\Phi \in \Omega_A$ – оператор с ядром Φ . Из (1.7) имеем

$$\int_0^\infty \Phi(x) dx = \gamma(1 - \gamma)^{-1}. \quad (1.10)$$

При $g \in L_1$ из (1.6) имеем

$$\int_0^\infty \varphi(x) dx = (1 - \gamma)^{-1} \int_0^\infty g(x) dx. \quad (1.11)$$

Обозначим через $m_k(f)$ момент порядка $k \geq 0$ функции $f \in L_1$:

$$m_k(f) = \int_0^\infty x^k f(x) dx. \quad (1.12)$$

Если $f \geq 0$, то числам будем приписывать как конечное, так и бесконечное значение. Если же f знакопеременная, то интеграл (1.12) будем считать абсолютно сходящимся.

Если в (0.4) (или в (1.8)) $\gamma < 1$ и существуют первые моменты $m_1(u)$ и $m_1(g)$, то имеет место легко проверяемое равенство (см. [7])

$$m_1(\varphi) = (1 - \gamma)^{-1} [m_1(g) + (1 - \gamma)^{-1} m_1(u) m_0(g)]. \quad (1.13)$$

§ 2. Уравнение восстановления (0.4), (0.5)

1. Рассмотрим уравнение (0.4) при выполнении условия консервативности (0.5). Будет приведено новое доказательство теоремы 0.3.

Резольвентная функция Φ , определяемая из (1.7), и функция восстановления H , определяемая из (0.3) при $u(x) = F'(x)$, связаны соотношением

$$H(x) = \int_0^x \Phi(t) dt.$$

Поэтому согласно теореме 0.1 Φ обладает следующими свойствами:

$$\Phi \geq 0, \quad \int_x^{x+h} \Phi(t) dt \rightarrow [m_1(u)]^{-1}h, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \forall h > 0. \quad (2.1)$$

Пусть w – функция вида

$$w(x) = \varepsilon > 0, \quad x \in [a; b] \subset [0; \infty); \quad w(x) = 0, \quad x \notin [a; b]. \quad (2.2)$$

Из (2.1) получаем

$$(w * \Phi)(x) \rightarrow \varepsilon(b-a)[m_1(u)]^{-1}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Это свойство функции Φ легко распространяется на решение φ уравнения (0.4), (0.5) с произвольным свободным членом $g \in L_1$ с помощью равенства

$$w * \varphi = w * g + (w * \Phi) * g,$$

вытекающего из (1.6) и леммы 1.2:

$$w * \varphi \in C_l, \quad (w * \varphi)(x) \rightarrow \varepsilon(b-a)[m_1(u)]^{-1} \int_0^\infty g(x) dx, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.3)$$

Сначала рассмотрим уравнение (0.4) при предположении, что ядро u обладает свойством: $\exists$ функция w вида (2.2) такая, что $u(x) \geq w(x)$. Тогда мы скажем, что функция u обладает ячейкой w . Обозначим $u - w = q$. Имеем

$$q(x) \geq 0, \quad \gamma_1 \equiv \int_0^\infty q(x) dx = 1 - \varepsilon(b-a) < 1. \quad (2.4)$$

Пусть $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{W}$ суть операторы из Ω_A с ядрами q и w соответственно. Имеем $\mathbb{U} = \mathbb{W} + \mathbb{Q}$.

Рассмотрим факторизацию

$$I - \mathbb{U} = (I - \mathbb{Q})(I - \mathbb{P}), \quad (2.5)$$

где $\mathbb{P}$ – искомый оператор из Ω_A . В силу обратимости $I - \mathbb{Q}$ имеем

$$\mathbb{P} = (I - \mathbb{Q})^{-1} \mathbb{W}. \quad (2.6)$$

Из (1.11), диссипативности Q и (1.13) следует

$$p \geq 0, \quad \int_0^\infty p(x) dx = 1, \quad (2.7)$$

$$m_1(p) = (1 - \gamma_1)^{-1} m_1(u). \quad (2.8)$$

Нами доказана

ЛЕММА 2.1. Пусть консервативное ядро u имеет ячейку вида (2.2). Тогда имеет место разложение (2.5), где $\mathbb{P} \in \Omega_A$, и выполняются (2.7) и (2.8).

Разложение (2.5) нами будет применено к уравнению (1.8). Согласно (2.6) φ удовлетворяет уравнению

$$(I - \mathbb{P})\varphi = \varphi_1, \quad (2.9)$$

где φ_1 определяется из диссипативного уравнения

$$\varphi_1 = g + q * \varphi_1. \quad (2.10)$$

Пусть $g \in L_1$. Тогда $\varphi_1 \in L_1$ и

$$\int_0^\infty \varphi_1(x) dx = (1 - \gamma_1)^{-1} \int_0^\infty g(x) dx. \quad (2.11)$$

Если же $g \in L_1 \cap M_0$, то согласно лемме 1.1 получаем $\varphi_1 \in L_1 \cap M_0$.

Перейдем к рассмотрению уравнения (2.9) при $\varphi_1 \in L_1$. Его решение имеет вид $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_2 = (I - \mathbb{Q})^{-1}(w * \varphi)$. Согласно (2.3) $w * \varphi \in C_l$. С учетом диссипативности оператора $\mathbb{Q}$ получаем $\varphi_2 \in C_l$. Вычисление значения $\varphi_2(+\infty)$ с помощью соотношений (1.11), (1.13) и (2.1) не представляет труда. Итак, нами доказана теорема 0.3 в случае, когда дополнительно предполагается существование ячейки у ядра u .

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Из (1.8) имеем следующее уравнение для φ :

$$\varphi = g_1 + \mathbb{U}^2\varphi, \quad g_1 = g + \mathbb{U}g. \quad (2.12)$$

Легко проверить, что ядро $u * u$ оператора $\mathbb{U}^2$ удовлетворяет условию консервативности вида (0.5). Покажем, что это ядро обладает ячейкой вида (2.2). Представим функцию u в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \geq 0$ – ненулевая ограниченная функция. Тогда $u * u \geq u_1 * u$, где $u_1 * u$ – неотрицательная непрерывная ненулевая функция, заведомо обладающая ячейкой вида (2.2). Поэтому к уравнению (2.1) может быть применен результат, полученный в предыдущем пункте.

Значение $\varphi(+\infty)$ вычисляется с помощью легко проверяемых формул

$$\int_0^\infty g_1(x) dx = 2 \int_0^\infty g(x) dx, \quad m_1(u * u) = 2m_1(u).$$

§3. Общее уравнение (0.1). Классы операторов

Основной целью §3–5 является обобщение теоремы 0.3 на случай уравнения (0.1), (0.2) с вероятностной мерой абсолютно непрерывного типа. На этом пути будет построена структуральная факторизация уравнения (0.1).

1. Классы операторов. Обозначим через Ω следующий класс интегральных операторов свертки: $\mathbb{F} \in \Omega$, если

$$\psi(x) = (\mathbb{F}f)(x) = \int_0^x f(x-t) dF(t), \quad (3.1)$$

где предъядро F оператора $\mathbb{F}$ удовлетворяет условиям

$$F(0) = 0, \quad \gamma \equiv \bigvee_0^\infty F < +\infty. \quad (3.2)$$

Из ограниченности вариации F следует $F \in M_l$.

Пусть $C_l^0, C_M^0, \dots$ суть подпространства $C_l, C_M, \dots$ соответственно таких непрерывных функций f , для которых $f(0) = 0$. Обозначим через E_C^0 одно из пространств C_l^0, C_0^0, C_M^0, V_C .

Аналогично лемме 2.1 работы [1] доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. *Оператор $\mathbb{F} \in \Omega$ непрерывно действует в пространствах E_C^0 и C^0 . В БП E_C^0 имеет место оценка*

$$\|\mathbb{F}\| \leq \gamma. \quad (3.3)$$

Заметим, что при рассмотрении оператора $\mathbb{F} \in \Omega$ в пространствах непрерывных функций интеграл в (3.1) можно понимать в смысле интеграла Римана–Стилтьеса. Ниже эти операторы будут продолжены в пространства суммируемых по Лебегу функций.

Пусть f принадлежит классу $L_1 \cap C^0$. Используя теорему Фубини [2], из (3.1) получаем

$$\int_0^\infty |\psi(x)| dx \leq \int_0^\infty \left[\int_0^x |f(x-t)| dx \right] |dF(t)|,$$

откуда следует неравенство

$$\|\psi\|_{L_1} \leq \gamma \|f\|_{L_1}. \quad (3.4)$$

Так как класс $L_1 \cap C^0$ плотен в L_1 , то оператор $\mathbb{F} \in \Omega$, определяемый согласно (3.1) посредством интеграла Римана–Лебега, допускает непрерывное продолжение в L_1 с сохранением оценки (3.3) нормы. В дальнейшем под $\mathbb{F} \in \Omega$ будем подразумевать указанное продолжение. Аналогичным образом можно рассматривать оператор $\mathbb{F}$ в пространствах L_p и M, M_l .

В п. 2 будет описан несколько иной способ представления операторов из класса Ω .

2. Классы операторов $\Omega_D, \Omega_A, \Omega_S, \Omega_C$. Согласно разложению Лебега (1.1) предъядро F оператора $\mathbb{F}$ представляется в виде суммы:

$$F = F_A + F_S + F_D \equiv F_C + F_D,$$

поэтому сам оператор $\mathbb{F}$ допускает представление

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_A + \mathbb{F}_S + \mathbb{F}_D = \mathbb{F}_C + \mathbb{F}_D. \quad (3.5)$$

Обозначим через $\Omega_A, \Omega_S, \Omega_C$ и Ω_D соответствующие подклассы операторов из Ω .

Класс Ω_D нами будет описан с помощью операторов сдвига.

Пусть T_α , $\alpha \geq 0$, – оператор простого сдвига:

$$(T_\alpha f)(x) = \begin{cases} f(x - \alpha), & x \geq \alpha, \\ 0, & x < \alpha. \end{cases}$$

Имеем $T_0 = I$. Оператор T_α непрерывно действует в E_C^0 , L_p , M_l , причем

$$\|T_\alpha\| = 1.$$

Пусть $\{\alpha_k\}$, $k \in J = J(F)$, – множество точек разрыва (скачков) функции ограниченной вариации F . Здесь $J(F)$ – конечное или счетное множество значений индекса k , причем числа α_k занумерованы в произвольном порядке. Пусть a_k – скачок F в точке α_k :

$$a_k = F(\alpha_k +) - F(\alpha_k -), \quad F(0-) = F(0).$$

Числа a_k удовлетворяют условию

$$\sum_{k \in J(F_D)} |a_k| \equiv \gamma_D = \bigvee_0^\infty F_D \leq \gamma = \bigvee_0^\infty F < +\infty. \quad (3.6)$$

Для функции F_D и оператора $\mathbb{F}_D$ имеем выражения

$$F_D(x) = \sum_k a_k \theta(x - \alpha_k), \quad \mathbb{F}_D = \sum_k a_k T_{\alpha_k}, \quad (3.7)$$

где θ – функция Хевисайда единичного скачка.

Согласно (3.5)–(3.7) $\mathbb{F}_D$ является суммой равномерно сходящегося операторного ряда (или конечной суммой). Поэтому $\mathbb{F}_D$ непрерывно действует в любом из пространств E_C^0 , L_p и имеет место оценка

$$\|\mathbb{F}_D\| \leq \gamma_D. \quad (3.8)$$

В случае $a_k \geq 0$ неравенство обращается в равенство. Тогда $\mathbb{F}_D$ является положительным оператором в пространствах E_C^0 , L_p . Он оставляет инвариантными конусы неотрицательных функций в пространствах C_M^0 , L_p , M , а в V является положительным в смысле конуса Мон.

Для описания операторов из класса Ω_A мы воспользуемся их представлением через свертку (1.2).

Операторы из Ω_S (с чисто сингулярным предъядром) будут описаны с помощью интеграла Лебега–Стилтьеса по формуле (3.1).

§ 4. Основная факторизационная теорема

1. Умножение операторов. В [1, лемма 3.1] показано, что класс Ω_C образует коммутативную алгебру. Предъядром произведения $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \mathbb{F}_2$ операторов $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 \in \Omega_C$ является следующая свертка предъядер сомножителей:

$$F(x) = \int_0^x F_1(x-t) dF_2(t). \quad (4.1)$$

Если $F_1, F_2 \in \text{Mon}^C$, то $F \in \text{Mon}^C$ и $\|F\|_V = \|F_1\|_V \|F_2\|_V$.

Покажем, что Ω_D также образует коммутативную алгебру с единицей $I = T_0$. Имеем $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$. Пусть

$$A, B \in \Omega_D, \quad A = \sum_{k \in J_1} a_k T_{\alpha_k}, \quad B = \sum_{k \in J_2} b_k T_{\beta_k}.$$

Тогда

$$AB = \sum_{k \in J_1, m \in J_2} a_k b_m T_{\alpha_k + \beta_m}. \quad (4.2)$$

Произведение AB можно представить в виде

$$AB = \sum_{n \in J_3} c_n T_{\tau_n}, \quad (4.3)$$

где τ_n – конечное или счетное множество различных значений всевозможных сумм $\alpha_k + \beta_m$, а

$$c_n = \sum_{\alpha_k + \beta_m = \tau_n} a_k b_m. \quad (4.4)$$

Имеем

$$\sum_{n \in J_3} c_n = \sum_{k \in J_1} a_k \sum_{m \in J_2} b_m, \quad \sum_n |c_n| \leq \sum_k |a_k| \sum_m |b_m|.$$

2. Умножение в Ω . Для построения произведения произвольных операторов из Ω нам остается рассмотреть произведение оператора из Ω_D и оператора из Ω_C .

ЛЕММА 4.1. а) Если $\mathbb{U} \in \Omega_D$, $\mathbb{U} = \sum_{k \in J} a_k T_{\alpha_k}$, $\mathbb{W} \in \Omega_C$, то $\mathbb{P} = \mathbb{U}\mathbb{W} = \mathbb{W}\mathbb{U} \in \Omega_C$, причем предъядро P произведения $\mathbb{P}$ имеет вид

$$P(x) = \sum_{k \in J} a_k W(x - \alpha_k). \quad (4.5)$$

б) Если $\mathbb{U} \in \Omega_A$ (с ядром $u \in L_1$) и $\mathbb{W} \in \Omega_C$, то $\mathbb{P} = \mathbb{U}\mathbb{W} = \mathbb{W}\mathbb{U} \in \Omega_A$, причем его ядро имеет вид

$$p(x) = \int_0^x u(x-t) dW(t). \quad (4.6)$$

в) Если $\mathbb{U} \in \Omega_D$ и $\mathbb{W} \in \Omega_A$, то $\mathbb{P} = \mathbb{U}\mathbb{W} \in \Omega_A$. Ядро оператора $\mathbb{P}$ имеет вид

$$p(x) = \sum_{k \in J} a_k w(x - \alpha_k). \quad (4.7)$$

г) Ω образует коммутативную алгебру с единицей $I = T_0$. Если $\mathbb{U}, \mathbb{W} \in \Omega$, то $(\mathbb{U}\mathbb{W})_D = \mathbb{U}_D \mathbb{W}_D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{U} = \mathbb{U}_D$ – оператор вида (3.7), $\mathbb{W} \in \Omega_C$ с предъядром $W \in V_C$ и $f \in E_C^0$. Обозначим $\varphi = \mathbb{W}f$ и $\psi = \mathbb{U}\varphi = (\mathbb{U}\mathbb{W})f$. Имеем

$$\varphi(x) = \int_0^\infty f(x-t) dW(t), \quad \psi(x) = \sum_{k \in J} a_k \varphi(x - \alpha_k)$$

(если $x < 0$, то $f(x) = \varphi(x) = 0$). Имеем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum a_k \int_0^\infty f(x - \alpha_k - t) dW(t) = \sum a_k \int_0^\infty f(x - y) dW(y - \alpha_k) \\ &= \int_0^\infty f(x - y) dP(y) = (\mathbb{P}f)(x), \end{aligned}$$

где P определяется согласно (4.5).

Законность суммирования под знаком дифференциала следует из первой теоремы Хелли [2]. Аналогично проверяется, что $\mathbb{W}\mathbb{U} = \mathbb{P}$. Утверждение а) леммы доказано. Пусть теперь $\mathbb{U}, \mathbb{W} \in \Omega$. С учетом замкнутости Ω_D, Ω_C относительно умножения и утверждения а) леммы будем иметь

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_D + \mathbb{P}_C,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \mathbb{U}\mathbb{W}, \quad \mathbb{P}_D = \mathbb{U}_D\mathbb{W}_D, \\ \mathbb{P}_C &= \mathbb{U}_C\mathbb{W}_C + \mathbb{U}_D\mathbb{W}_C + \mathbb{U}_C\mathbb{W}_D, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение г).

Из (4.6) и $u \in L_1$ следует $p \in L_1$. Интегрируя обе части (4.6) по x от 0 до $y \geq 0$, получаем

$$P_1(y) = \int_0^y U(y-t) dW(t), \quad \text{где} \quad P_1(y) = \int_0^y p(x) dx.$$

Поэтому $P_1 \in V_A$ совпадает с предъядром произведения $\mathbb{U}\mathbb{W}$, определяемым по формуле (4.1). Следовательно, $P'(x) = p(x)$, что и доказывает утверждение в) леммы. Формула (4.7) доказывается аналогично (4.5). Лемма доказана.

Из леммы 4.1 непосредственно следует, что класс Ω_C является идеалом в алгебре Ω , а класс Ω_A является идеалом в алгебрах Ω и Ω_C .

3. Построение покомпонентной факторизации. В настоящем пункте мы будем заниматься построением разложения ранее неизученного вида для оператора $I - \mathbb{F}$, где $\mathbb{F} \in \Omega$. Так как наша основная цель – рассмотрение уравнения (0.1), (0.2), то мы ограничимся случаем, когда предъядро F консервативное.

Пусть $F \in \text{Mon}$, $\gamma = 1$. Имеем

$$I - \mathbb{F} = I - \mathbb{F}_D - \mathbb{F}_C, \tag{4.8}$$

где $F_D \in \text{Mon}^D$, $F_C \in \text{Mon}^C$. Предполагается, что

$$F_D = \sum_{k \in J} a_k T_{\alpha_k}, \quad a_k \geq 0, \quad \gamma_D < 1.$$

Ищем оператор $\mathbb{U} \in \Omega_C$ такой, чтобы

$$(I - \mathbb{F}_D)\mathbb{U} = \mathbb{F}_C. \quad (4.9)$$

Это равенство эквивалентно следующему уравнению относительно искомого предъядра U :

$$U(x) = F_C(x) + \sum_{k \in J} a_k U(x - \alpha_k), \quad U(x) = 0 \text{ при } x \leq 0. \quad (4.10)$$

Так как $\gamma_D = \sum_k a_k < 1$, то уравнение (4.10) имеет единственное решение в БП V_C , причем это решение является пределом простых итераций и обладает свойствами

$$U(0) = 0, \quad U \in \text{Mon}^C, \quad U - F_C \in \text{Mon}^C. \quad (4.11)$$

Из (4.8) и (4.9) получаем следующее разложение:

$$I - \mathbb{F} = (I - \mathbb{F}_D)(I - \mathbb{U}). \quad (4.12)$$

Если же $\gamma_D = 1$, то имеет место равенство (4.12) с $\mathbb{U} = 0$.

Вычислим норму функции U в V_C . Так как ряд в (4.10) сходится равномерно, то в нем можно совершить почленный предельный переход при $x \rightarrow +\infty$, что приводит к равенству

$$U(+\infty) = F_C(+\infty) + U(+\infty) \sum_{k \in J} a_k, \quad (1 - \gamma_D)U(+\infty) = 1 - \gamma_D,$$

откуда

$$U(+\infty) = 1, \quad \gamma_D < 1. \quad (4.13)$$

Вычислим теперь первый момент меры dU . Пусть $0 < r < +\infty$. Из (4.10) имеем

$$\begin{aligned} \mu_r &\equiv \int_0^r x dU(x) = \int_0^r x dF_C(x) + \sum_k a_k \int_0^r (x - \alpha_k) dU(x - \alpha_k) \\ &\quad + \sum_k a_k \alpha_k \int_0^r dU(x - \alpha_k), \end{aligned} \quad (4.14)$$

откуда следует неравенство

$$\mu_r \leq \int_0^r x dF_C(x) + \sum_k a_k \int_0^r x dU(x) + \sum_k a_k \alpha_k \int_0^r dU(x).$$

С учетом (4.14) и равенства $\sum_k a_k \alpha_k = \int_0^\infty x dF_D(x)$ получаем

$$\mu_r(1 - \gamma_D) \leq \int_0^\infty x d[F_C(x) + F_D(x)] = \nu \equiv \int_0^\infty x dF(x),$$

поэтому

$$\mu_r \leq (1 - \gamma_D)^{-1} \nu \quad (\leq +\infty), \quad \gamma_D < 1.$$

Устремляя в этом неравенстве r к $+\infty$, получаем

$$\mu \equiv \int_0^\infty x dU(x) \leq (1 - \gamma_D)^{-1} \nu, \quad (4.15)$$

откуда следует $\mu < +\infty$ при $\nu < +\infty$, $\gamma_D < 1$.

Пусть $\nu < +\infty$. Рассмотрим соотношение (4.15) при $r = +\infty$:

$$\mu = \int_0^\infty x dF_C(x) + \sum_k a_k \int_0^\infty (x - \alpha_k) dU(x - \alpha_k) + \sum_k a_k \alpha_k \int_0^\infty dU(x - \alpha_k),$$

откуда с учетом (4.14) будем иметь

$$\mu = (1 - \gamma_D)^{-1} \nu, \quad \gamma_D < 1. \quad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) следует, что при $\gamma_D < 1$ число μ конечно тогда и только тогда, когда конечно число ν . Поэтому равенство (4.16) имеет место для $\nu \leq +\infty$. Нами доказана

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathbb{F} \in \Omega$ и его предъядро F удовлетворяет условиям консервативности (0.2). Тогда имеет место факторизация (4.12), где $\mathbb{U} \in \Omega_C$, $U \in \text{Mon}^C$. Если $F_C = 0$, то $\gamma_D \equiv F_D(+\infty) = 1$ и $U = 0$. Если же $F_C \neq 0$, то $\gamma_D < 1$, и имеют место равенства (4.15), (4.16), где $\nu \leq +\infty$.

Пусть $\mathbb{U}_S$ и $\mathbb{U}_A$ суть сингулярная и абсолютно непрерывная части оператора $\mathbb{U}$, фигурирующего в разложении (4.12), и пусть $\delta_S = U_S(+\infty)$, $\delta_A = U_A(+\infty)$. Рассмотрим факторизацию

$$I - \mathbb{U} = (I - \mathbb{U}_S)(I - \mathbb{W}_A), \quad (4.17)$$

где $\mathbb{W}_A \in \Omega_A$ с ядром w . С учетом утверждения б) леммы 4.1 и формулы (4.6) из (4.17) получаем следующее уравнение относительно w , где u — ядро оператора $\mathbb{U}_A$:

$$w(x) = u(x) + \int_0^x w(x-t) dU_S(t). \quad (4.18)$$

Если $\delta_S = 1$, то $U_A = 0$ и $w = 0$. Пусть теперь $\delta_S < 1$. Тогда $\mathbb{U}_S$ — положительный сжимающий оператор в L_1 , поэтому решение w уравнения (4.18) обладает свойствами $w \geq 0$, $w \in L_1$. Интегрируя (4.18) по x от 0 до $+\infty$, получаем

$$\int_0^\infty w(x) dx = (1 - \delta_S)^{-1} \int_0^\infty u(x) dx = 1.$$

Следовательно, ядро w оператора $\mathbb{W}_A$ удовлетворяет условиям консервативности (0.5).

Комбинируя формулу (2.13) работы [1] (при $h(x) = x$) с выводом формулы (4.18), получаем следующую формулу для первого момента w :

$$m_1(w) = (1 - \delta_S)^{-1} m_1(u). \quad (4.19)$$

Нами доказана

ЛЕММА 4.3. Пусть $\mathbb{U} \in \Omega_C$ и его предъядро U удовлетворяет условиям консервативности (0.2). Тогда имеет место факторизация (4.17). Если $U_A = 0$, то $\mathbb{W}_A = 0$. Если $\mathbb{U}_A \neq 0$, то ядро w оператора $\mathbb{W}_A$ удовлетворяет условиям консервативности (0.5). Имеет место формула (4.19).

Из разложений (4.12) и (4.17) приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.1 (о покомпонентной факторизации). Пусть предъядро F оператора $\mathbb{F} \in \Omega$ удовлетворяет условиям консервативности (0.2). Тогда имеет место факторизация

$$I - \mathbb{F} = (I - \mathbb{F}_D)(I - \mathbb{U}_S)(I - \mathbb{W}_A), \quad (4.20)$$

где $\mathbb{F}_D \in \Omega_D$, $\mathbb{U}_S \in \Omega_S$, $\mathbb{W}_A \in \Omega_A$, $F_D \in \text{Mon}^D$, $U_S \in \text{Mon}^S$, $W_A \in \text{Mon}^A$, причем $\gamma_D \equiv F_D(+\infty) \leq 1$, $\delta_S \equiv U_S(+\infty) \leq 1$, $\beta_A \equiv W_A(+\infty) \leq 1$. Возможны три случая:

- а) $\gamma_D = 1$, $\delta_S = \beta_A = 0$;
- б) $\gamma_D < 1$, $\delta_S = 1$, $\beta_A = 0$;
- в) $\gamma_D < 1$, $\delta_S < 1$, $\beta_A = 1$.

Представляет интерес классификация перечисленных выше случаев в терминах исходного предъядра F . Ясно, что случай а) соответствует чисто дискретному предъядру, когда $F_C = 0$. В случае б) имеем $F_A = 0$. Здесь открытым для нас остается вопрос: возможно ли, чтобы $F_A = 0$, но $U_A \neq 0$?

Факторизация (4.20) является универсальной в том смысле, что не предполагает дополнительные ограничения на F , кроме условия (0.2). В теореме 4.1, как и в лемме 4.1, четко проявляется иерархия различных компонент функции распределения.

§ 5. Теорема восстановления

В качестве применения теоремы 0.3 и факторизации (4.20) в настоящем параграфе будет получена новая теорема восстановления для уравнения (0.1).

Предположим сначала, что $F_A \neq 0$. Тогда в факторизации (4.20) имеет место случай а). Уравнение (0.1) принимает вид

$$(I - \mathbb{F}_D)(I - \mathbb{U}_S)(I - \mathbb{W}_A)\varphi = g. \quad (5.1)$$

Обозначим

$$(I - \mathbb{W}_A)\varphi = f, \quad (5.2)$$

$$(I - \mathbb{U}_S)f = \psi; \quad (5.3)$$

тогда

$$(I - \mathbb{F}_D)\psi = g. \quad (5.4)$$

Решение уравнения (5.1) сводится к последовательному решению уравнений (5.4), (5.3) и (5.2), причем (5.4) и (5.3) представляют собой уравнения со сжимающими операторами.

Пусть $g \in L_1$. Тогда из (5.4) имеем $\psi \in L_1$. Если же $g \in L_1 \cap M_0$, то $\psi \in L_1 \cap M_0$. Из (5.4) получаем

$$\int_0^\infty \psi(x) dx = (1 - \gamma_D)^{-1} \int_0^\infty g(x) dx. \quad (5.5)$$

Аналогично, если в (5.3) $\psi \in L_1$, то $f \in L_1$. Если $\psi \in L_1 \cap M_0$, то $f \in L_1 \cap M_0$. Имеет место равенство

$$\int_0^\infty f(x) dx = (1 - \delta_S)^{-1} \int_0^\infty \psi(x) dx. \quad (5.6)$$

Из (4.1), (4.15), (5.5) и (5.6) следует равенство

$$[m_1(w)]^{-1} \int_0^\infty f(x) dx = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x) dx. \quad (5.7)$$

Применяя к уравнению (5.2) теорему 0.3, получаем представление вида (0.8) для решения уравнения (0.1), (0.2) в случае $F_A \neq 0$.

Рассмотрим теперь это уравнение в том случае, когда F является распределением абсолютно непрерывного типа (см. [5]). Это свойство означает, что существует $n \geq 1$ такое, что

$$(F_n)_A \neq 0, \quad (5.8)$$

где F_n — предъядро оператора $\mathbb{F}^n$. Это предъядро может быть построено как сверточная n -я степень исходного предъядра.

Из (0.1) следует, что φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi = g_n + \mathbb{F}^n \varphi, \quad (5.9)$$

где $g_n = g + \dots + \mathbb{F}^n g$. Если $g \in L_1$, то $g_n \in L_1$. Если $g \in L_1 \cap M_0$, то $g_n \in L_1 \cup M_0$. Имеют место легко проверяемые равенства

$$F_n(+\infty) = 1, \quad \int_0^\infty g_n(x) dx = n \int_0^\infty g(x) dx, \quad \int_0^\infty x dF_n(x) = n\nu. \quad (5.10)$$

Применяя к уравнению (5.9) доказанные выше свойства решения уравнения (0.1) при $F_A \neq 0$ и используя равенства (5.10), мы приходим к следующей теореме восстановления.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть в уравнении (0.1), (0.2) $F_A \neq 0$ или F является распределением абсолютно непрерывного типа. Тогда решение уравнения имеет вид*

$$\varphi = A + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (5.11)$$

где $\varphi_1 \in L_1$, $\varphi_2 \in C_0$, $A = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x) dx$.

Если $g \in L_1 \cap M_0$, то $\varphi(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x) dx$.

Список литературы

1. *Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках, содержащие сингулярные вероятностные распределения // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 21–48.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1984.
4. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
5. *Севастьянов Б. А.* Теория восстановления // Итоги науки и техники. Теория вероятностей, матем. статистика, теор. кибернетика. Т. 11. М.: ВИНТИ АН СССР, 1974. С. 99–127.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
7. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 22. М.: ВИНТИ АН СССР, 1984. С. 175–244.
8. *Енгибарян Н. Б., Геворкян Г. Г.* Новые теоремы для интегральных уравнений восстановления // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32. № 1. С. 5–20.
9. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.

Поступило в редакцию
18.II.1997