Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Карпов, Тестирование S -двойственности и исключительные расслоения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 1, 107–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im230>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:13:22

УДК 512.723

Б. В. Карпов

Тестирование S -двойственности и исключительные расслоения

В этой работе обсуждаются алгебро-геометрические задачи, связанные с математическим тестированием гипотезы S -двойственности. В частности, дается полное описание конфигураций полей для классических калибровочных теорий, для которых коэффициент бета-функции Гелл-Мана–Лоу в однопетлевом приближении равен нулю. При геометрической реализации одной из этих конфигураций на поверхностях дель Педро показана связь с исключительными расслоениями. А именно, каждое исключительное расслоение с нулевыми когомологиями, наклон которого отрицателен, но больше наклона канонического класса, дает корреляционную функцию для тестирования S -двойственности.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

1.1 Обозначения. Пусть $\tau \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$ – комплексное число, принадлежащее верхней полуплоскости и $q = e^{2\pi i \tau}$. Пусть S – (гладкая) поверхность дель Педро над $\mathbb{C}$, K – ее канонический класс. Через $\mathcal{M}(r, c_1, c_2)$ мы будем обозначать многообразие модулей расслоений на S ранга r с классами Чжэня c_1 и c_2 , стабильных по Мамфорду–Такемото относительно $-K$. Компактификация этого многообразия модулей по Гизекеру–Маруяме $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, c_2)$ является грубым пространством модулей полустабильных по Гизекеру пучков. Известно, что $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, c_2)$ – проективная схема. Кроме того, если r и $c_1 \cdot K$ взаимно просты, то $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, c_2)$ гладко (см. п. 5.1).

1.2. Степенные ряды. а) Положим при фиксированных r и c_1

$$Z_a(\tau) = \sum_{k \geq 0} \chi(\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, k)) q^k. \quad (1)$$

б) Предположим, что выполнены два условия: неравенство на наклоны

$$-K^2 < -\frac{c_1 \cdot K}{r} < 0 \quad (2)$$

и равенство размерностей

$$\dim \bar{\mathcal{M}}(r, c_1, k) = 2r \dim H^1(E), \quad (3)$$

где $E \in \bar{\mathcal{M}}(r, c_1, k)$.

Работа над этой статьей была частично финансирована РФФИ (грант № 97-01-00933).

В силу первого из них и свойств стабильности имеем $H^0(E) = H^2(E) = 0$, следовательно,

$$\dim H^1(E) = -\chi(E) = k - \frac{1}{2}c_1 \cdot (c_1 - K) - r. \quad (4)$$

Эта размерность зависит только от топологических инвариантов пучка E . Поэтому пучок $\mathcal{H}_k$ на $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, k)$ со слоем $(\mathcal{H}_k)_E = H^1(E)$ локально свободен. Рассмотрим в этой ситуации степенной ряд (при фиксированных r и c_1):

$$Z_b(\tau) = \sum_{k \geq 0} c_{\text{top}}(\mathcal{H}_k)^{2r} q^k. \quad (5)$$

1.3. Вопрос. Какими модулярными свойствами обладают степенные ряды (1) и (5) относительно преобразований $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, где матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ принадлежит $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ или некоторой конгруэнц-подгруппе?

Ответ на этот вопрос известен только для ряда (1), когда $S = \mathbb{P}^2$ и $r = 2$ [12]. Цель работы [12] – провести математическое тестирование физической гипотезы S -двойственности, которая заключается в существовании симметрии между сильным и слабым взаимодействиями. Предположение об этой симметрии было сделано Монтоненом и Оливом [9] более двадцати лет назад. Современная математическая трактовка этой гипотезы состоит в том, что корреляционная функция рассматриваемой квантовой теории обладает “хорошими” модулярными свойствами. Сложность вопроса такова, что на сегодняшний день квантовые корреляционные функции могут быть вычислены в квазиклассическом пределе, т.е. для классической калибровочной теории, при квантовании которой получается данная квантовая теория. Для классической теории τ является “голой” константой связи и имеет вид

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2},$$

где θ – вакуумный угол и g – константа взаимодействия. После квантования эта величина называется “эффективной” константой связи, но константой, вообще говоря, уже не является, кроме случая равенства нулю значения коэффициента бета-функции Гелл-Мана–Лоу в однопетлевом приближении на конфигурации полей данной теории.

В данной работе в § 2, 4 мы приводим аргументы в пользу того, что степенные ряды (1) и (5) могут быть интерпретированы как квантовые корреляционные функции, вычисленные в квазиклассическом пределе. При этом значение вышеупомянутого коэффициента бета-функции на соответствующих конфигурациях полей равно нулю. Этот коэффициент рассмотрен в § 3, и все конфигурации полей, для которых он нулевой, перечислены в п. 3.7. В § 5 исследуются условия (2) и (3) на поверхностях дель Пеццо и показывается, что любое исключительное расслоение с нулевыми когомологиями, наклон которого отрицателен, но больше наклона канонического класса, дает корреляционную функцию для тестирования S -двойственности. При этом возникает вопрос о связи перестроек исключительных расслоений с преобразованиями соответствующих степенных рядов. Ответ на этот вопрос пока не известен.

§ 2. Комментарий

2.1. Рассмотрим следующую классическую теорию. Пусть X – односвязная комплексная поверхность с кэлеровой метрикой g , E – векторное $\mathrm{PU}(r)$ -расслоение на X класса C^∞ с инвариантами $c_1(E) = c_1$, $c_2(E) = k$ и калибровочной группой $\mathfrak{G}$. Конфигурационным пространством будет прямое произведение

$$\mathcal{A}(E) \times \Gamma(\mathrm{ad} E \otimes K),$$

где $\mathcal{A}(E)$ – аффинное пространство $\mathrm{PU}(r)$ -связностей на E и $\Gamma(\mathrm{ad} E \otimes K)$ – пространство полей Хиггса–Хитчина. Тогда полевые уравнения от переменных $(a, \phi) \in \mathcal{A}(E) \times \Gamma(\mathrm{ad} E \otimes K)$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_a^{2,0} &= F_a^{0,2} = 0, \\ \bar{\partial}(\phi) &= 0, \\ \omega \wedge F_a + [\phi, \bar{\phi}] &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $F_a^{i,j}$ – компоненты разложения Ходжа тензора кривизны F_a связности a и ω – кэлерова форма метрики g . Эти уравнения калибровочно инвариантны, пространство $\mathfrak{G}$ -орбит решений обозначим через $\mathcal{M}_k$. Используя линеаризацию этих уравнений, легко показать, что для общей метрики

$$\mathrm{v. dim}(\mathcal{M}_k) = 0.$$

Следовательно, ввиду ориентируемости $\mathcal{M}_k$ для любого $k = c_2(E)$ мы получаем число a_k этих решений с учетом знака (по модулю конечности этого числа, которая не доказана).

Статусма рассматриваемой теории в этом случае имеет вид

$$Z(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k, \tag{7}$$

и математическое тестирование гипотезы S -двойственности для данной теории состоит в ответе на вопрос о модулярных свойствах ряда (7), аналогичный 1.3.

2.2. Приведем аргументы в пользу того, что для $X = S$ – поверхности дель Пешо – последний степенной ряд принимает вид $Z_a(\tau)$ (1). Первое уравнение из (6) задает голоморфную структуру на E , из второго следует, что отображение $\phi: E \rightarrow E \otimes K$ голоморфно. Тогда третье уравнение означает некоторые условия стабильности для голоморфной пары (E, ϕ) , из которых в силу отрицательности канонического класса вытекает, что $\phi = 0$. Таким образом, система уравнений (6) сводится к уравнениям антиавтотодуальности на связность a . Известная теорема Дональдсона [4] состоит в том, что множество $\mathfrak{G}$ -орбит неприводимых антиавтотодуальных связностей в расслоении E находится во взаимно однозначном соответствии с множеством голоморфных структур на E , стабильных по Мамфорду–Такемото относительно $[\omega]$. Для ходжевой метрики $[\omega] = -K$. Имеем

$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}(r, c_1, k)$. Во многих известных случаях это многообразие модулей имеет положительную размерность, следовательно, кэлерова метрика g не является общей. Для регуляризации задачи мы должны применить деформацию к нормальному конусу, как это описано в [10, гл. III]. В этом случае расслоение препятствий на $\mathcal{M}_k(r)$ имеет слоем коядро оператора $\bar{\partial}_a$, т.е. для точки $E \in \mathcal{M}(r, c_1, k)$ слой расслоения препятствий есть $H^1(\text{ad } E \otimes K)$ в силу изоморфизма Дольбо. Таким образом, расслоение препятствий для нашей задачи есть кокасательное расслоение $\Omega\mathcal{M}(r, c_1, k)$ в силу изоморфизма Кодаиры–Спенсера. Согласно конструкции, изложенной в [10, гл. III], число решений нашей задачи есть

$$a_k = c_{\text{top}}(\Omega\mathcal{M}(r, c_1, k)), \quad (8)$$

т.е. старший класс Чжэня кокасательного расслоения. Поскольку многообразие модулей $\mathcal{M}(r, c_1, k)$ не компактно, то коэффициенты (8) не определены однозначно, они зависят от рассматриваемой теории когомологий. Наиболее простой путь придать смысл коэффициентам ряда состоит в том, чтобы рассмотреть естественную алгебро-геометрическую компактификацию $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, k)$ данного многообразия модулей, т.е. сделать замену

$$a_k \longleftrightarrow c_{\text{top}}(\Omega\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, k)),$$

после которой интересующий физиков ряд (7) примет вид (1).

2.3. ПРИМЕР. Единственный случай, когда для поверхности дель Пеццо ответ на вопрос о модулярных свойствах степенного ряда, аналогичного (7), известен, имеет место для $S = \mathbb{P}^2$ и $r = 2$. Здесь используется результат А.А. Клячко [5] о выражении эйлеровой характеристики пространств модулей стабильных расслоений ранга 2 через арифметическую функцию Гурвица $H(D)$, равную числу классов целочисленных квадратичных форм Q дискриминанта $-D$, взятых с весом $2/|\text{Aut } Q|$. Согласно этому результату

$$\chi(\mathcal{M}(2, 0, k)) = 3H(4k) - \frac{3}{2}d(k), \quad \chi(\mathcal{M}(2, -1, k)) = 3H(4k - 1). \quad (9)$$

Здесь χ обозначает эйлерову характеристику относительно когомологий с компактными носителями, $d(k)$ – число делителей числа k .

Модулярные свойства степенных рядов с коэффициентами (9) таковы: эти ряды являются голоморфными частями обобщений рядов Эйзенштейна веса $3/2$ (подробности см. в [12]).

2.4. Конфигурация полей. Элемент (a, ϕ) конфигурационного пространства классической теории, изложенной выше, состоит из двух полей: a и ϕ . Первое поле (связность) присутствует во всех теориях такого типа, а остальные поля являются сечениями расслоений вида

$$(\text{тензорная операция от } E) \otimes (\text{тензорная операция от } TX).$$

При этом тензорная операция в первом сомножителе такова, что представление слоя калибровочной группы в слое первого сомножителя неприводимо (на втором сомножителе калибровочная группа не действует), т.е. возникает набор неприводимых представлений $\mathrm{PU}(r)$. Этот набор мы и называем конфигурацией полей данной теории. В рассмотренном выше примере конфигурация полей состоит из одного присоединенного представления, происходящего из действия на ϕ .

§ 3. Коэффициент бета-функции

3.1. Пусть γ – неприводимое конечномерное комплексное представление алгебры Ли $\mathfrak{su}(r)$ (алгебры Ли послойной калибровочной группы), can – каноническое представление $\mathfrak{su}(r)$ в $\mathbb{C}^r$. Для представления γ рассмотрим элемент Казимира b_γ и инвариантную форму

$$B_\gamma(X; Y) = \mathrm{Tr}(\gamma(X)\gamma(Y)).$$

Известно, что все такие формы пропорциональны. Пусть $\{e_i\}$ – базис в $\mathfrak{su}(r)$. Рассмотрим двойственный базис $\{f_i\}$ относительно билинейной формы B_γ , т.е. такой, что $B_\gamma(e_i; f_j) = \delta_{ij}$. По определению $b_\gamma = \sum_i e_i f_i$. Это центральный элемент универсальной обертывающей алгебры, он не зависит от выбора базиса.

Обозначим через $c_2(\gamma)$ коэффициент пропорциональности между билинейной формой B_γ и формой следа $(X; Y) = \mathrm{Tr}(XY) = B_{\mathrm{can}}(X; Y)$:

$$B_\gamma(X; Y) = c_2(\gamma)(X; Y), \quad b_{\mathrm{can}} = c_2(\gamma)b_\gamma,$$

где последнее равенство очевидно из определений. Число $c_2(\gamma)$ целое положительное, в [13, с. 176] оно называется индексом Дынкина представления γ .

Любое комплексное представление алгебры $\mathfrak{su}(r)$ продолжается по линейности и на ее комплексификацию $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ без изменения c_2 , поэтому мы будем рассматривать γ как неприводимое конечномерное представление $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$. Имеет место общая формула, выражающая $c_2(\gamma)$ через старший вес.

3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть R – система корней алгебры $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$, λ – старший вес представления γ и ρ – полусумма положительных корней. Тогда

$$c_2(\gamma) = \frac{(\lambda; \lambda + 2\rho)}{r^2 - 1} \dim \Gamma = \frac{(\lambda; \lambda + 2\rho)}{r^2 - 1} \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\lambda + \rho; \alpha)}{(\rho; \alpha)}. \quad (10)$$

Здесь Γ – пространство представления γ и $(;)$ – форма, двойственная к форме следа.

Доказательство основывается на двух фактах из теории представлений полупростых алгебр Ли. Первый из них [1, гл. VIII, § 6] состоит в том, что элемент Казимира b_{can} действует на пространстве Γ как гомотетия с коэффициентом

$$(\lambda; \lambda + 2\rho) = \|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2. \quad (11)$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{Tr}(\gamma(b_{\mathrm{can}})) = c_2(\gamma) \mathrm{Tr}(\gamma(b_\gamma)) = (\lambda; \lambda + 2\rho) \dim \Gamma.$$

С другой стороны, из определения b_γ имеем

$$\mathrm{Tr}(\gamma(b_\gamma)) = \sum_i \mathrm{Tr}(\gamma(e_i)\gamma(f_i)) = \sum_i 1 = \dim \mathfrak{su}(r) = r^2 - 1.$$

Требуемое равенство легко вытекает теперь из формулы для размерности пространства представления с данным старшим весом [1, гл. VIII, §9, теорема 2], и это есть вторая формула теории представлений, на которой основано вычисление $c_2(\gamma)$.

В общем случае использование формулы (10) затруднено в силу громоздкости произведения по положительным корням, равного $\dim \Gamma$, однако для симметрических и внешних степеней канонического представления c_2 легко вычисляется.

3.3. СЛЕДСТВИЕ. Имеем

$$c_2(\Lambda^k(\mathrm{can})) = \binom{r-2}{k-1}, \quad c_2(S^k(\mathrm{can})) = \binom{r+k}{k-1}, \quad c_2(\mathrm{ad}) = 2r. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_i , $1 \leq i \leq r-1$, — фундаментальные веса; тогда $(\omega_i; \omega_k) = \frac{i(r-k)}{r}$ при $i \leq k$. Полусумма положительных корней выражается по формуле $\rho = \sum_{i=1}^{r-1} \omega_i$. Старшие веса представлений $\Lambda^k(\mathrm{can})$, $S^k(\mathrm{can})$ и ad равны соответственно ω_k , $k\omega_1$ и $\omega_1 + \omega_{r-1}$. Вычисляя коэффициенты гомотетии по формуле (11), имеем

$$\begin{aligned} (\omega_k; \omega_k + 2\rho) &= \frac{k(r-k)(r+1)}{r}, & (k\omega_1; k\omega_1 + 2\rho) &= \frac{k(r+k)(r-1)}{r}, \\ (\omega_1 + \omega_{r-1}; \omega_1 + \omega_{r-1} + 2\rho) &= 2r. \end{aligned}$$

В силу (10) если умножить эти числа соответственно на

$$\dim \Lambda^k(\mathrm{can}) = \binom{r}{k}, \quad \dim S^k(\mathrm{can}) = \binom{r+k-1}{k}, \quad r^2 - 1 = \dim \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C}),$$

а затем разделить на $r^2 - 1 = \dim \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$, то получим требуемое.

Отметим еще одно простое свойство индексов Дынкина: поскольку для двойственного представления $B_{\gamma^*}(X; Y) = B_\gamma(X; Y)$, то справедливо равенство

$$c_2(\gamma^*) = c_2(\gamma). \quad (13)$$

3.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя обозначение $c_2(\gamma)$ не совсем традиционно в теории алгебр Ли, оно себя оправдывает при последующем переходе к геометрии. А именно, если рассматривать представление γ как тензорную операцию на расслоениях ранга r , то $c_2(\gamma)$ есть коэффициент при $c_2(E)$ в выражении $c_2(\gamma(E))$ через классы Чжэня расслоения E .

3.5. Рассмотрим теперь коэффициент бета-функции. Пусть имеется конечный набор $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{N_a}\}$ неприводимых представлений $\mathfrak{su}(r)$, среди которых, возможно, есть эквивалентные. Если этот набор является конфигурацией полей некоторой теории в смысле, описанном выше, то коэффициент бета-функции Гелл-Мана–Лоу в однопетлевом приближении имеет вид

$$\beta(\{\gamma_i\}) = -c_2(\text{ad}) + \sum_i c_2(\gamma_i). \quad (14)$$

Ниже мы описываем все конфигурации полей с нулевым значением этого коэффициента. Положительность чисел $c_2(\gamma)$ накладывает существенное ограничение на представление, входящее в конфигурацию полей с нулевым бета-коэффициентом (14):

$$c_2(\gamma) \leq 2r = c_2(\text{ad}). \quad (15)$$

Вычисленные выше значения c_2 от $\Lambda^k(\text{can})$ и $S^k(\text{can})$ показывают, что таких представлений “мало”, поскольку значения c_2 растут как полиномы от r . Точная формулировка утверждения такова.

3.6. ТЕОРЕМА. При $3 \leq r \leq 5$ или $r \geq 9$ список всех неприводимых представлений γ алгебры $\mathfrak{su}(r)$, для которых $c_2(\gamma) \leq c_2(\text{ad})$, имеет вид

$$\begin{aligned} \text{ad}, \text{can}, \text{can}^* &\cong \Lambda^{r-1}(\text{can}), S^2(\text{can}), S^2(\text{can}^*), \\ \Lambda^2(\text{can}), \Lambda^2(\text{can}^*) &\cong \Lambda^{r-2}(\text{can}). \end{aligned}$$

При $r = 6, 7, 8$ к этому списку добавляются еще представления

$$\Lambda^3(\text{can}), \Lambda^3(\text{can}^*) \cong \Lambda^{r-3}(\text{can}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, мы будем рассматривать комплексные неприводимые представления $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$. Пусть λ – старший вес представления γ . Будем писать $c_2(\lambda)$ вместо $c_2(\gamma)$. Покажем сначала, что

$$c_2(\lambda + \omega_i) > c_2(\lambda). \quad (16)$$

Поскольку $\lambda = \sum_{i=1}^{r-1} k_i \omega_i$, где $k_i \geq 0$ и $(\omega_i; \omega_j) > 0$, имеем

$$(\omega_i + \lambda; \omega_i + \lambda + 2\rho) = (\omega_i; \omega_i + 2\rho) + 2(\omega_i; \lambda) + (\lambda; \lambda + 2\rho) > (\lambda; \lambda + 2\rho).$$

Кроме того, для размерностей пространства представлений с весами $\lambda + \omega_i$ и λ справедливо неравенство

$$\prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\omega_i + \lambda + \rho; \alpha)}{(\rho; \alpha)} = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\lambda + \rho; \alpha) + (\omega_i; \alpha)}{(\rho; \alpha)} > \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\lambda + \rho; \alpha)}{(\rho; \alpha)}.$$

Это в силу (10) означает справедливость (16).

Отметим, что функция $c_2(\lambda)$ инвариантна при замене $\omega_i \mapsto \omega_{r-i}$, соответствующей переходу к двойственному представлению.

Пусть $r \geq 9$. Старшим весом представления $\Lambda^i(\text{can})$ является ω_i , поэтому из (12) вытекает, что $c_2(\omega_i) > c_2(\text{ad})$ при $i \in \{3, \dots, r-3\}$ и $c_2(k\omega_1) > c_2(\text{ad})$ при $k \geq 3$. Учитывая неравенство (16), получаем, что для выполнения $c_2(\sum_{i=1}^{r-1} k_i \omega_i) \leq c_2(\text{ad})$ необходимо, чтобы коэффициенты k_i , $i \in \{3, \dots, r-3\}$, были нулевыми. С другой стороны, вычисления по формуле (10) показывают, что

$$\begin{aligned} c_2(\omega_1 + \omega_2) &= c_2(\omega_{r-1} + \omega_{r-2}) = r^2 - 3 > 2r, & r \geq 4; \\ c_2(2\omega_2) &= c_2(2\omega_{r-2}) = \frac{1}{3}r(r^2 - 4) > 2r, & r \geq 4; \\ c_2(\omega_1 + \omega_{r-2}) &= c_2(\omega_2 + \omega_{r-1}) = \frac{1}{2}(3r+1)(r-2) > 2r, & r \geq 4; \\ c_2(\omega_2 + \omega_{r-2}) &= r^2(r-3) > 2r, & r \geq 5. \end{aligned}$$

Справедливость первого утверждения теоремы для $r \geq 9$ следует теперь из (16). При $3 \leq r \leq 5$ вышеприведенные рассуждения остаются в силе с той лишь разницей, что множество $\{3, \dots, r-3\}$ пусто.

При $r \in \{6, 7, 8\}$ имеем $c_2(\omega_i) < c_2(\text{ad})$, за исключением случая $(r=8, i=4)$, т.е. для $i \in \{1, 2, 3, r-3, r-2, r-1\}$. Вычисления по формуле (10) показывают, что

$$\begin{aligned} c_2(\omega_1 + \omega_3) &= c_2(\omega_{r-1} + \omega_{r-3}) = \frac{1}{2}(r-2)(r^2 - r - 4) > 2r, & r \geq 5; \\ c_2(\omega_2 + \omega_3) &= c_2(\omega_{r-2} + \omega_{r-3}) = \frac{1}{24}r(r-2)(5r^2 - 4r - 25) > 2r, & r \geq 4; \\ c_2(2\omega_3) &= c_2(2\omega_{r-3}) = (r+2) \binom{r}{4} > 2r, & r \geq 5; \\ c_2(\omega_1 + \omega_{r-3}) &= c_2(\omega_3 + \omega_{r-1}) = \frac{1}{3}(2r+1)(r-2)(r-3) > 2r, & r \geq 5; \\ c_2(\omega_2 + \omega_{r-3}) &= c_2(\omega_3 + \omega_{r-2}) = \frac{1}{12}r(r-4)(5r^2 - 8r - 1) > 2r, & r \geq 6; \\ c_2(\omega_3 + \omega_{r-3}) &= \frac{1}{6}r^2(r-1)^2(r-5) > 2r, & r \geq 6. \end{aligned}$$

Из результатов этих вычислений и из неравенства (16) вытекает справедливость последнего утверждения теоремы.

Теперь понятно, какой вид могут иметь наборы представлений с нулевым коэффициентом бета-функции (14). По определению $c_2(\text{can}) = 1$, поэтому любой набор $\{\gamma_i\}$, для которого $\beta(\{\gamma_i\}) < 0$, дополняется подходящим числом представлений can или can^* до набора с $\beta = 0$. Все такие наборы приведены в следующем утверждении.

3.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{N_a}\}$ – конечный набор неприводимых представлений алгебры $\text{su}(r)$, среди которых есть эквивалентные, и $\beta(\{\gamma_i\}) = 0$. Тогда $\{\gamma_i\}$ – один из следующих наборов.

1. При $r = 2$ полное описание составляют нижеуказанные случаи а) и б); при $r = 3$ – а), б), в); при $r = 4, 5$ или $r \geq 9$ – случаи а), ..., ф):

- а) $N_a = 1$ и $\gamma_1 = \text{ad}$;
- б) $N_a = 2r$ и каждое из γ_i изоморфно либо can , либо $\text{can}^* \cong \Lambda^{r-1}(\text{can})$;
- в) $N_a = 2$, одно из γ_i изоморфно либо $\Lambda^2(\text{can})$, либо $\Lambda^2(\text{can}^*)$, а другое – либо $S^2(\text{can})$, либо $S^2(\text{can}^*)$;
- г) $N_a = r + 3$, одно из γ_i изоморфно либо $\Lambda^2(\text{can})$, либо $\Lambda^2(\text{can}^*)$, а остальные $r + 2$ – либо can , либо can^* ;
- д) $N_a = r - 1$, одно из γ_i изоморфно либо $S^2(\text{can})$, либо $S^2(\text{can}^*)$, а остальные $r - 2$ – либо can , либо can^* ;
- е) $N_a = 6$, два из γ_i изоморфны либо $\Lambda^2(\text{can})$, либо $\Lambda^2(\text{can}^*)$, а четыре остальных – либо can , либо can^* .

2. При $r = 6$ к вышеперечисленным случаям добавляются следующие:

- г₆) $N_a = 7$, одно из γ_i изоморфно либо $\Lambda^3(\text{can})$, либо $\Lambda^3(\text{can}^*)$, а шесть остальных – либо can , либо can^* ;
- д₆) $N_a = 4$, одно из γ_i изоморфно либо $\Lambda^3(\text{can})$, либо $\Lambda^3(\text{can}^*)$, второе изоморфно либо $\Lambda^2(\text{can})$, либо $\Lambda^2(\text{can}^*)$, а два остальных – либо can , либо can^* ;
- и₆) $N_a = 2$, каждое γ_i изоморфно либо $\Lambda^3(\text{can})$, либо $\Lambda^3(\text{can}^*)$.

3. При $r = 7$ к случаям а), ..., ф) добавляется

- г₇) $N_a = 5$, одно из γ_i изоморфно либо $\Lambda^3(\text{can})$, либо $\Lambda^3(\text{can}^*)$, а четыре остальных – либо can , либо can^* .

4. При $r = 8$ к случаям а), ..., ф) добавляется

- г₈) $N_a = 2$, одно из γ_i изоморфно либо $\Lambda^3(\text{can})$, либо $\Lambda^3(\text{can}^*)$, а другое – либо can , либо can^* .

Для алгебр $\text{su}(2)$ и $\text{su}(3)$ в некоторых из этих случаев алгебро-геометрическая задача угадана заранее и соответствующие вычисления ведутся с использованием метода Вафа–Виттена (геометрическая ситуация зануления). Например, на $\mathbb{P}^2$ при $r = 2$ случай а) исследован в [12], случай б) – в [3]. Алгебро-геометрическая задача для случая б) при $r = 3$ для $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ рассмотрена в [7]. Как будет видно из дальнейшего, геометрическая реализация случая б) на поверхностях дель Пеццо связана с исключительными расслоениями.

§ 4. Комментарий для конфигурации полей типа б)

Пусть M – гладкое, компактное, односвязное многообразие с римановой метрикой g . Рассмотрим связность Леви–Чивита на касательном расслоении. Выбор $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры дает нам пару комплексных эрмитовых расслоений $W^{\pm}$ ранга 2

с классом $c = c_1(\det W^\pm)$. Связность Леви–Чивита индуцирует $\mathrm{PU}(2)$ -связности на $W^\pm$.

Рассмотрим C^∞ -расслоение E на M со структурной группой $\mathrm{PU}(r)$. Конфигурационным пространством наших полевых уравнений будет множество наборов $(a, b, \phi_1, \dots, \phi_{2r})$, где первый элемент – унитарная связность a на E , определенная с точностью до гомотетии, второй – $U(1)$ -связность b на линейном расслоении $\det(E \otimes W^+)$ и ϕ_i – сечения тензорного произведения $E \otimes W^+$.

Рассмотрим скрученный оператор Дирака

$$D_{a,b}: \Gamma(E \otimes W^+) \longrightarrow \Gamma(E \otimes W^-). \quad (17)$$

Это дифференциальный оператор, задающийся как композиция ковариантного дифференцирования

$$d_{a,b}: \Gamma(E \otimes W^+) \longrightarrow \Gamma(E \otimes W^+) \otimes \Gamma(T^*M)$$

и свертки

$$\Gamma(E \otimes W^+ \otimes T^*M) = \Gamma(E \otimes W^+ \otimes \mathrm{Hom}(W^-, W^+)^*) = \Gamma(E \otimes W^-)$$

посредством клиффордова умножения.

Наши полевые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} D_{a,b}(\phi_i) &= 0, \\ F_a^+ &= i \sum_j (\phi_j \otimes \bar{\phi}_j)_0, \end{aligned} \quad (18)$$

где индекс 0 означает взятие бесследной части в $\mathrm{End}(W^+)$. Мы используем здесь естественное отождествление $\mathrm{ad} W^+ \cong \Omega$ (см., например, [11]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно заметить, что эти уравнения имеют вид нулевого уровня отображения моментов гиперкэлеровой редукции относительно калибровочной группы. В частности, первое уравнение содержит интерпретацию нулевого уровня отображения моментов для голоморфной симплектической структуры.

Теперь мы подбираем расслоение E так, чтобы многообразие модулей $\mathcal{M}_c(E)$ орбит решений (18) было конечным. Число этих решений с учетом знака, т.е. ориентации, зависит только от топологического типа расслоения E , поэтому мы обозначаем это число как $\#(\mathcal{M}_c^g(r, c_1, k))$, где $c_1 = c_1(E)$ и $k = c_2(E)$.

Наша статсумма в этом случае имеет вид

$$Z_{(b)} = \sum_{k=0}^{\infty} \#(\mathcal{M}_c^g(r, c_1, k)) q^k,$$

где опять $q = e^{2\pi i k \tau}$ и метрика g является достаточно общей (для необщих метрик наше многообразие модулей может иметь параметры).

Напомним, что при описании случая а) мы сразу исходили из кэлеровой метрики, т.е. сводили задачу к чисто алгебро-геометрической проблеме. Чтобы сделать это же в серии б), мы должны действовать более аккуратно (см. следующий параграф). Здесь мы проиллюстрируем общую ситуацию случаем $r = 2$ и $M = \mathbb{CP}^2$ – топологически простейшей алгебраической поверхностью.

Рассмотрим в качестве g метрику g_{FS} Фубини–Штуди. Эта метрика имеет положительную скалярную кривизну. Формула Вейценбока показывает, что в этом случае мультиплет скрученных гармонических спиноров $(\phi_1, \dots, \phi_4)$ должен быть нулевым, и полевые уравнения сводятся к уравнениям антиавтодуальности. Следовательно, многообразие модулей $\mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, c_1, k)$ решений полевых уравнений совпадает с многообразием модулей инстантонов данного топологического типа. Арифметические вычисления следующего параграфа показывают, что для c_1 есть две возможности: -1 или -5 , и

$$\dim \mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -1, k) = 4(k-1), \quad \dim \mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -5, k) = 4(k-7).$$

Опять для регуляризации задачи мы должны применить деформацию к нормальному конусу, как это описано в [10, гл. III]. В этом случае расслоение препятствий на $\mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -1, k)$ имеет слоем прямую сумму четырех коядер скрученного оператора Дирака (17). Как и выше, мы интерпретируем антиавтодуальную связность как стабильную голоморфную структуру на E и оператор Дирака – как прямую сумму $\bar{\partial}_a \oplus \bar{\partial}_a^*$, где $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структура выбирается равной $-K$ (см. [4]). В этой ситуации коядро оператора Дирака интерпретируется как пространство когерентных когомологий $H^1(E)$.

Таким образом, наше многообразие модулей $\mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -1, k)$ есть многообразие модулей стабильных расслоений данного топологического типа, и слой расслоения препятствий над точкой $E \in \mathcal{M}_c^{g_{FS}}(2, -1, k)$ канонически отождествляется с $H^1(E)^{\oplus 4}$. Согласно конструкции, изложенной в [10, гл. III], число решений нашей задачи есть

$$\#(\mathcal{M}_c^g(2, -1, k)) = c_{\text{top}}((\mathcal{H}^1)^{\oplus 4}),$$

где $\mathcal{H}^1$ – расслоение на многообразии модулей со слоем $H^1(E)$ и специально выбранной нормировкой (см. [3]).

Вышеприведенное рассуждение справедливо для случая, когда S – поверхность дель Пешо, $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структура равна $-K_S$ и g – хodgeва метрика. В этом случае пространство $\mathcal{M}_{-K_S}^g(r, c_1, k)$ орбит решений полевых уравнений относительно действия калибровочной группы интерпретируется как многообразие модулей $\mathcal{M}(r, c_1, k)$ стабильных расслоений данного топологического типа. Расслоение препятствий имеет слоем над точкой E прямую сумму $2r$ коядер скрученного оператора Дирака (17), т.е. $H^1(E)^{\oplus 2r}$. Следовательно, чтобы число (орбит) решений было конечным, необходимо выполнение условия

$$\dim \mathcal{M}(r, c_1, k) = 2r \dim H^1(E),$$

т.е. равенства размерностей (3). Если это равенство имеет место, то статсумма данной теории есть

$$Z_{(b)} = \sum_{k=0}^{\infty} \#(\mathcal{M}_{-K_S}^g(r, c_1, k)) q^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{\text{top}}((\mathcal{H}_k)^{\oplus 2r}) q^k, \quad (19)$$

где $\mathcal{H}_k$ – расслоение над $\mathcal{M}(r, c_1, k)$ со слоем $H^1(E)$.

Отметим, что многообразие модулей $\mathcal{M}(r, c_1, k)$, вообще говоря, не компактно, поэтому значения c_{top} в последней формуле зависят от рассматриваемой теории когомологий. Естественный способ придать смысл этим величинам состоит в замене некомпактного многообразия $\mathcal{M}(r, c_1, k)$ его компактификацией $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, k)$ по Гизекеру–Маруяме, которая является грубым пространством модулей полустабильных пучков с данными топологическими инвариантами. При этом статсумма (19) принимает вид (5). Мы обсуждаем этот подход в следующем параграфе.

§ 5. Исключительные расслоения в реализации случая b)

Пусть S – поверхность дель Пеццо, K – ее канонический класс. Так же, как и выше, $\mathcal{M}(r, c_1, c_2)$ обозначает многообразие модулей стабильных расслоений на S данного топологического типа, $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, c_2)$ – гизекеру компактификацию $\mathcal{M}(r, c_1, c_2)$. Стабильность понимается по Мамфорду–Такемото относительно $(-K)$. А именно, пучок E стабилен, если он не имеет кручения и для любого подпучка F пучка E , имеющего $0 < r(F) < r(E)$, справедливо неравенство

$$\mu(F) < \mu(E), \quad \text{где} \quad \mu = \frac{c_1 \cdot (-K)}{r} - \text{наклон.}$$

5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если r и $c_1 \cdot K$ взаимно просты, то $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, c_2)$ гладко.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие модулей $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, c_2)$ параметризует полустабильные по Гизекеру пучки относительно $(-K)$ данного топологического типа. Пусть E – такой пучок, т.е. $(r(E), c_1(E), c_2(E)) = (r, c_1, c_2)$, и для любого подпучка F пучка E такого, что $0 < r(F) < r$, неравенство

$$\frac{\chi(nK, F)}{r(F)} \leq \frac{\chi(nK, E)}{r}$$

выполняется при $n \gg 0$. Простое вычисление по теореме Римана–Роха показывает, что

$$\frac{\chi(nK, E)}{r(E)} = n^2 \frac{K^2}{2} + n(\mu(E) + K^2) + \frac{\chi(E)}{r(E)},$$

откуда $\mu(F) \leq \mu(E)$, что в силу взаимной простоты $r(E)$ и $c_1(E) \cdot K$ возможно только при $\mu(F) < \mu(E)$. Таким образом, любой полустабильный по Гизекеру пучок данного топологического типа стабилен, следовательно, $\text{Hom}(E, E) \cong \mathbb{C}$. С другой стороны, $\dim \text{Ext}^2(E, E) < \dim \text{Hom}(E, E)$ в силу двойственности Серра и обильности $-K$ [6], откуда $\text{Ext}^2(E, E) = 0$. Окончательно получаем, что размерность касательного пространства к $\bar{\mathcal{M}}(r, c_1, c_2)$ в точке E , равная

$$\dim \text{Ext}^1(E, E) = 1 - \chi(E, E) = 2rc_2 - (r-1)c_1^2 - r^2 + 1, \quad (20)$$

зависит только от топологических инвариантов, что означает гладкость многообразия модулей.

В этом параграфе $\mathcal{M}(r, c_1, c_2)$ интерпретируется как пространство орбит решений (18) относительно действия калибровочной группы. Мы рассматриваем корреляционную функцию (19) в предположениях (2) и (3), сделанных во введении. Равенство размерностей необходимо для того, чтобы коэффициенты степенного ряда (19) были числами, а неравенство на наклоны позволяют переписать равенство размерностей в терминах дискретных инвариантов.

5.2. ЛЕММА. *Для стабильного расслоения E с топологическими инвариантами (r, c_1, k) , удовлетворяющего неравенству на наклоны (2), равенство размерностей (3) эквивалентно условию*

$$c_1^2 - rc_1 \cdot K + r^2 + 1 = 0. \quad (21)$$

В частности, это условие не зависит от $k = c_2(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства на наклоны в силу свойств стабильности и двойственности Серра следует, что $H^0(E) = H^2(E) = 0$, откуда $\dim H^1(E)$ выражается через топологические инварианты по формуле (4).

Далее, $\dim \mathcal{M}(r, c_1, c_2) = \dim \operatorname{Ext}^1(E, E)$ вычисляется по формуле (20) в силу стабильности расслоения E . Подставляя (20) и (4) в (3), получаем требуемое.

Напомним, что пучок E называется *исключительным*, если

$$\operatorname{Hom}(E, E) \cong \mathbb{C}, \quad \operatorname{Ext}^i(E, E) = 0, \quad i > 0.$$

Известно [6], что исключительный пучок на поверхности дель Пеццо либо локально свободен, либо является пучком кручения вида $\mathcal{O}_l(d)$, где l – исключительная кривая.

Рассмотрим в категории когерентных пучков на S полную подкатегорию

$$\mathcal{O}^\perp = \{F: \operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}, F) = 0\}.$$

Наше наблюдение состоит в следующем.

5.3. ТЕОРЕМА. *Пусть исключительное расслоение E на S удовлетворяет неравенству на наклоны (2); тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- i) $E \in \mathcal{O}^\perp$;
- ii) *при любом $k \geq c_2(E)$ для многообразия модулей $\bar{\mathcal{M}}(r(E), c_1(E), k)$ справедливо равенство размерностей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [6], что исключительные расслоения на S стабильны по Мамфорду–Такемото относительно $-K_S$. Следовательно, как и в доказательстве предыдущей леммы, $H^0(E) = H^2(E) = 0$. Но тогда принадлежность расслоения E подкатегории $\mathcal{O}^\perp$ равносильна тому, что $H^1(E) = 0$. Это же эквивалентно равенству размерностей (3) для E , поскольку в силу исключительности $\dim \bar{\mathcal{M}}(r(E), c_1(E), c_2(E)) = 0$. Отметим, что не существует полустабильных пучков, имеющих топологические инварианты $(r(E), c_1(E), k)$ для $k < c_2(E)$, поскольку формула (20) дает для них отрицательную размерность многообразия модулей. Наконец, в силу предыдущей леммы, справедливость равенства размерностей не зависит от k , что завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ. Каждое исключительное расслоение из $\mathcal{O}^\perp$, удовлетворяющее неравенству на наклоны, дает корреляционную функцию для математического тестирования гипотезы S -двойственности.

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях предыдущей теоремы все многообразия модулей $\bar{\mathcal{M}}(r(E), c_1(E), k)$, $k \geq c_2(E)$, являются гладкими. Действительно, для исключительного расслоения E числа $r(E)$ и $c_1(E) \cdot K$ взаимно просты (см. [6]).

5.4. ПРИМЕР. $S = \mathbb{P}^2$. На проективной плоскости исключительные расслоения, лежащие в подкатегории $\mathcal{O}^\perp$, образуют последовательность E_n такую, что $E_{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$, $E_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$, а остальные расслоения определяются из точных троек

$$0 \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \text{Hom}(E_n, E_{n+1}) \otimes E_n \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow 0. \quad (22)$$

Здесь $\text{Hom}(E_n, E_{n+1}) \cong \text{Hom}(E_{n-1}, E_n)^*$ и оба морфизма расслоений канонические. Отметим, что $E_1 \cong \Omega\mathbb{P}^2(1) \cong T\mathbb{P}^2(-2)$ и при $n = 0$ тройка (22) является точной последовательностью Эйлера, подкрученной на (-2) .

Условие (21), эквивалентное равенству размерностей, имеет следующую интерпретацию: пара чисел (r, c_1) удовлетворяет (21) тогда и только тогда, когда тройка $(r, -c_1, 1)$ является решением уравнения Маркова

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \quad (23)$$

поскольку $c_1 \cdot K = -3c_1$.

Выпишем несколько пар (r, c_1) в предположении, что $r > -c_1$:

$$(2, -1), (5, -2), (13, -5), (34, -13), (89, -34), (233, -89), \dots$$

Пара, следующая за (r, c_1) в этой последовательности, имеет вид $(3r + c_1, -r)$, что согласуется с перестройками решений уравнения (23), состоящими в переходе ко второму корню квадратного уравнения по одной из переменных (в нашем случае $-c_1$) при фиксированных двух остальных (см., например, [2]). Как известно (см. [2]), ранги исключительных расслоений на $\mathbb{P}^2$, составляющих виток спирали, образуют решение уравнения (23). И наоборот, для любого решения этого уравнения существует бесконечно много (за счет подкрутки) витков с такими рангами расслоений. При этом перестройки спиралей согласуются с перестройками решений уравнения (23). Множество решений с фиксированным значением 1 третьей переменной соответствует множеству витков вида $(E_n, E_{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$. При этом если $r(E_n) = r_n$, то $c_1(E_n) = -r_{n-1}$.

Расслоения $E_n = \bar{\mathcal{M}}(r_n, -r_{n-1}, c_2(E_n))$ являются начальными точками последовательностей многообразий модулей $\bar{\mathcal{M}}(r_n, -r_{n-1}, k)$, $k \geq c_2(E_n)$. Таким об-

разом, мы имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) & \text{Hilb}^1(\mathbb{P}^2) & \text{Hilb}^2(\mathbb{P}^2) & \dots & Z_{-1} - \text{многочлен степени } \leq 4 & & \\
 & \parallel & & & & & \\
 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) & \mathbb{P}^2 & \text{Hilb}^2(\mathbb{P}^2) & \dots & Z_0 = 1 + q & & \\
 \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) & \bar{\mathcal{M}}(2, -1, 2) & \bar{\mathcal{M}}(2, -1, 3) & \dots & Z_1 = q + 13q^4 + 729q^5 & & \\
 & & & & + 85025q^6 + 15650066q^7 + \dots & & \\
 E_2 & \bar{\mathcal{M}}(5, -2, 5) & \bar{\mathcal{M}}(5, -2, 6) & \dots & & & \\
 E_3 & \bar{\mathcal{M}}(13, -5, 19) & \bar{\mathcal{M}}(13, -5, 20) & \dots & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & &
 \end{array}$$

Каждая строка этой диаграммы определяет по формуле (19) корреляционную функцию Z_n . Все, что известно на данный момент об этих функциях, написано в правой колонке. С другой стороны, расслоения, образующие первый столбец, связаны точными тройками (22).

ВОПРОС. Существуют ли преобразования строк данной диаграммы, обобщающие перестройки исключительных расслоений (22)?

ГИПОТЕЗА. Если такие преобразования существуют, то можно по двум известным корреляционным функциям вычислить все остальные.

Отметим, что первые семь коэффициентов ряда Z_1 вычислены в [3] с помощью формулы Ботта. К сожалению, авторам этой работы не удалось получить общую формулу или рекуррентные соотношения на коэффициенты ввиду сложности комбинаторной структуры неподвижных компонент действия тора на $\bar{\mathcal{M}}(2, -1, k)$. Способ вычисления реализован на компьютере с использованием MAPLE V.3. В первой же части работы [3] дано конструктивное описание многообразий модулей $\bar{\mathcal{M}}(2, -1, k)$. Аналогичное описание всех $\bar{\mathcal{M}}(r_n, -r_{n-1}, k)$, а также некоторых многообразий модулей полустабильных пучков на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ получено в [8], что дает тонкость этих многообразий модулей и существование универсальных семейств.

5.5. ЗАМЕЧАНИЕ. 1) На проективной плоскости неравенство на наклоны, как нетрудно проверить, выполнено для любого исключительного расслоения из $\mathcal{O}^\perp$. Однако в общем случае это не так. Например, пучки $\mathcal{O}(-1, m)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ лежат в $\mathcal{O}^\perp$ и имеют наклоны $2(m-1)$.

2) Последовательность расслоений E_n из предыдущего примера является частным случаем системы расслоений, порожденной исключительной парой, которая определяется так: пара (E_i, E_{i+1}) является правой перестройкой пары (E_{i-1}, E_i) и левой перестройкой пары (E_{i+1}, E_{i+2}) (по поводу перестроек см., например, [60]). При этом если сама пара лежит в $\mathcal{O}^\perp$, то и вся система, порожденная этой парой,

лежит в $\mathcal{O}^\perp$. Таким образом, возникает диаграмма многообразий модулей, аналогичная вышеприведенной (в силу неравенства на наклоны диаграмма может быть ограничена с одной или с двух сторон). В этом случае имеют место те же вопрос и гипотеза, что и выше.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. VII, VIII. М.: Мир, 1978.
2. Gorodentsev A. L., Rudakov A. N. Exceptional Vector Bundles on Projective Spaces // Duke Math. J. 1987. V. 54. P. 115–130.
3. Gorodentsev A. L., Leenson M. I. How to calculate the correlation function in twisted SYM $N = 2$, $N_f = 4$ QFT on projective plane. Preprint MPI 96-49.
4. Donaldson S., Kronheimer P. The Geometry of Four-Manifolds. Oxford: Clarendon Press, 1990.
5. Клячко А. А. Модули векторных расслоений и числа классов // Функцион. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 1. С. 81–83.
6. Кулешов С. А., Орлов Д. О. Исключительные пучки на поверхностях дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 53–87.
7. Kuleshov S. A. Moduli Space of Bundles on a Quadric. Warwick Preprints: 18/1996.
8. Kuleshov S. A. Moduli Space of sheaves necessary for testing S -duality conjecture. Preprint MPI 97-32.
9. Montonen C., Olive D. Magnetic monopoles as gauge particle // Phys. Lett. B. 1977. V. 72. P. 117–132.
10. Пидстригач В. Я., Тюрин А. Н. Инварианты гладкой структуры алгебраической поверхности, задаваемые оператором Дирака // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 52. № 2. С. 279–371.
11. Тюрин Н. А. Необходимое и достаточное условия деформации B -монополя в инстантон // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 211–224.
12. Vafa G., Witten E. A strong coupling test of S -duality // Nucl. Phys. B. 1995. V. 431. P. 3–77.
13. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.

Поступило в редакцию
2.X.1997