Общероссийский математический портал

Н. С. Маркарян, Проективные структуры на комплексных кривых и система Хитчина, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 1, 123–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 11:19:45

УДК 513.6+517.6

Н. С. Маркарян

Проективные структуры на комплексных кривых и система Хитчина

Введение

Цель настоящей работы – предъявить новый подход к изучению проективных структур на комплексных кривых.

В § 1, 2 мы напомним определения и теоремы из комплексно-аналитической теории проективных структур и теории гармонических метрик на расслоениях с плоской связностью, которые понадобятся нам в дальнейшем.

В § 3 будет доказана основная теорема – описание монодромий проективных структур на комплексной кривой с помощью системы Хитчина. Эта теорема отождествляет пространство модулей проективных структур с (ко)касательным расслоением к пространству Тейхмюллера, причем нулевому сечению соответствуют фуксовы проективные структуры. Это отождествление не совпадает со стандартной параметризацией проективных структур аффинным пространством над квадратичными дифференциалами, доставляемой выбором сечения.

В § 4 мы применим основную теорему к изучению проективных структур с фуксовой монодромией. При этом мы воспользуемся теорией штробелевых дифференциалов. Будет доказана гипотеза Маскита из [2], доказательство которой недавно было анонсировано Галло [1].

В § 5 мы сформулируем один вопрос и одну гипотезу.

Я благодарен В. А. Васильеву за руководство работой и А. Н. Тюрину за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

§ 1. Проективные структуры на комплексных кривых

Пусть C – комплексная кривая рода $g > 1$.

Проективная структура на C – это выделенная система локальных проективных координат с дробно-линейными функциями перехода (определение см. в [3]). Иными словами, это комплексное отображение с невырожденным дифференциалом $\text{dev}: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ универсальной накрывающей кривой в $\mathbb{CP}^1$, эквивариантное относительно действия фундаментальной группы, причем на $\mathbb{CP}^1$ она действует автоморфизмами. Это представление фундаментальной группы кривой в группе дробно-линейных преобразований $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ называется *монодромией проективной структуры*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 [3]. *Монодромия проективной структуры*

- 1) *неприводима;*
- 2) *имеет нулевой класс Штиффеля–Уитни w_2 .*

Пространство модулей проективных структур на комплексной кривой C обозначим через $\mathcal{P}(C)$. Пространство модулей всех проективных структур на кривых рода g обозначим через $\mathcal{P}$. Пространство классов неприводимых четных представлений фундаментальной группы кривой в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ обозначим через $\mathrm{Rep}(\pi, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))$. Отображение $\mathrm{Mon}: \mathcal{P} \rightarrow \mathrm{Rep}(\pi, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))$ сопоставляет проективной структуре ее монодромию.

ТЕОРЕМА 1.1 [3]. *Пространство модулей проективных структур на комплексной кривой рода g диффеоморфно $\mathbb{C}^{3g-3}$.*

Следующая теорема – основа комплексно-аналитического подхода к теории проективных структур на кривой.

ТЕОРЕМА 1.2 [3]. *Задать на комплексной кривой проективную структуру – это задать плоскую проективную связность на расслоении 1-струй векторных полей j^1T .*

Монодромия проективной структуры при этом совпадает с монодромией плоской связности.

Если фиксировать комплексную структуру на кривой, то каждый класс представлений фундаментальной группы в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ задает проективное комплексное расслоение над ней. Пространство представлений $\mathrm{Rep}(\pi, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))$ расслаивается таким образом на классы изоморфизма проективных расслоений (см. [4]). Согласно теореме 1.2 монодромиям проективных структур на кривой отвечает лист, соответствующий проективизации расслоения 1-струй векторных полей j^1T .

Следующая лемма выделяет расслоение j^1T среди других двумерных расслоений над комплексной кривой.

ЛЕММА 1.1. *Пусть E – векторное расслоение ранга 2 над комплексной кривой и $\det E = K^{-1}$. Если E имеет сечение и на $\mathbb{P}E$ есть плоская связность, то $E \cong j^1T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сечение E не обращается в нуль. Тогда E включается в точную последовательность расслоений

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow E \rightarrow K^{-1} \rightarrow 0$$

(последний член есть K^{-1} , так как $\det E = K^{-1}$).

Эта точная последовательность задается расширением K^{-1} с помощью $\mathcal{O}$, т.е. элементом из $\mathrm{Ext}^1(K^{-1}, \mathcal{O}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, K) = H^1(K)$. Так как $H^1(K) = \mathbb{C}$ в силу двойственности Серра, есть две возможности: расширение либо тривиально, либо нетривиально. Если оно тривиально, то $E = \mathcal{O} \oplus K^{-1}$, если нетривиально, то $E = j^1T$.

Если сечение E имеет ненулевой дивизор нулей D , то E включается в точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow E \rightarrow K^{-1}(-D) \rightarrow 0.$$

Но $\dim \operatorname{Ext}^1(K^{-1}(-D), \mathcal{O}(D)) = \dim H^1(K(2D)) = 0$, т.е. все такие расширения тривиальны, значит, $E = \mathcal{O}(D) \oplus K^{-1}(-D)$, где $D > 0$.

Но на разложимых расслоениях, у которых слагаемые имеют разные степени, нет плоской проективной связности, а на j^1T – есть, что легко проверить, вычислив их классы Атьи (см. [5]).

Следовательно, $E = j^1T$.

§ 2. Гармонические метрики на расслоениях с плоской связностью

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [6]. Пусть A – голоморфное расслоение над комплексной кривой C ранга 2 и с четным классом Черна, с метрикой и унитарной связностью, согласованной с голоморфной структурой. Обозначим эту унитарную связность через ∇ , ее кривизну – через F . Пусть $\Phi \in \Omega^{1,0}(\mathfrak{sl}_2(A))$ (поле Хиггса). Тогда пара (A, Φ) удовлетворяет уравнениям Хитчина, если

$$\nabla^{0,1}\Phi = 0, \quad F_0 + [\Phi, \Phi^*] = 0,$$

где F_0 – бесследовая часть кривизны.

Уравнения Хитчина инвариантны относительно подкруток A на линейные расслоения с плоской унитарной связностью, т.е. зависят лишь от проективизации пары (A, Φ) . Пространство модулей решений уравнений Хитчина по модулю действия таких подкруток обозначим через $\mathcal{M}_C$.

ТЕОРЕМА 2.1 [7]. Пусть пара (A, Φ) удовлетворяет уравнениям Хитчина. Тогда связность $\nabla + \Phi + \Phi^*$ на A плоская. Всякая неприводимая плоская связность на проективном четном расслоении получается таким образом, что дает взаимно однозначное соответствие между пространством $\mathcal{M}_C$ и $\operatorname{Rep}(\pi, \operatorname{PSL}_2(\mathbb{C}))$.

Иными словами, на любом неприводимом расслоении с плоской связностью существует и единственна гармоническая метрика.

Заметим, что плоская связность $\nabla_{FL} = \nabla + \Phi + \Phi^*$ задает на A голоморфную структуру, вообще говоря, отличную от исходной: $\nabla_{FL}^{0,1} = \nabla^{0,1} + \Phi^*$. Обозначим расслоение с такой голоморфной структурой через E .

Согласно [6] каждая пара (A, Φ) , удовлетворяющая уравнениям Хитчина, стабильна. Обратно, каждая стабильная пара может быть единственным образом снабжена гармонической метрикой. Следовательно, пространство $\mathcal{M}_C$ есть пространство модулей стабильных проективных пар. Это позволяет ввести на $\mathcal{M}_C$ комплексную структуру. В дальнейшем мы будем рассматривать $\mathcal{M}_C$ как комплексное многообразие.

Рассмотрим отображение $\det_C: \mathcal{M}_C \rightarrow H^0(C, K_C^2)$, заданное как $(A, \Phi) \mapsto \det \Phi$.

ТЕОРЕМА 2.2. 1) $\det_C$ – голоморфное отображение.

2) Пусть $H^0(C, K_C^2) \ni \phi \neq 0$. Пусть $p: \tilde{C} \rightarrow C$ есть двулистное накрытие кривой C , заданное двузначной 1-формой $\sqrt{\phi}$. Тогда $\text{Jac}(\tilde{C})/\text{Jac}(C)$ вкладывается в $\det_C^{-1}(\phi)$, т.е. $i_\phi: \text{Jac}(\tilde{C})/\text{Jac}(C) \rightarrow \det_C^{-1}(\phi)$.

3) Если $\phi \in H^0(C, K_C^2)$ имеет простые нули, то i_ϕ – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) – см. [6].

2), 3). Пусть $\pi: S \rightarrow C$ – линейчатая поверхность, тотальное пространство проективного расслоения $\mathbb{P}A$. Пусть L – линейное расслоение на S такое, что $\pi_* L = A$. Поле Хиггса задается сечением расслоения $\pi^* K_C \otimes L^2$. Обозначим дивизор, соответствующий этому сечению, через D .

Вообще говоря, D может содержать слои расслоения $\pi: S \rightarrow C$. Обозначим через $\tilde{C}'$ невертикальную компоненту дивизора: $D = \tilde{C}' + D_v$, где $D_v = \pi^* D_d$, где D_d – некоторый дивизор точек на C . Дивизор ветвления двулистного накрытия $\tilde{C}'$ есть $D_{\text{ram}} = (\phi)_0 - 2D_d$. Расслоение A равно прямому образу $\pi_*(L|_{\tilde{C}'})$, и $\deg(L|_{\tilde{C}'}) = \deg A + \frac{1}{2} \deg D_{\text{ram}} = \deg A + 2g - 2 - D_v$.

Отображение i_ϕ задается с помощью обратной конструкции. Если $p: \tilde{C} \rightarrow C$ – двулистное накрытие, определенное $\sqrt{\phi}$, то

$$i_\phi: \text{Pic}^0(\tilde{C}) \ni L \mapsto p_* L,$$

а поле Хиггса получается из 1-формы $\sqrt{\phi}$ на C . В этом случае $D_v = 0$, следовательно, $\deg A = -2g + 2$, т.е. $\mathbb{P}A$ – четное проективное расслоение. Проверку стабильности пары $(p_* L, p_* \sqrt{\phi})$ мы оставляем читателю.

§ 3. Основная теорема

Прежде чем формулировать теорему, напомним обозначения.

$\mathcal{M}_C$ – пространство модулей четных проективных стабильных пар (A, Φ) на комплексной кривой C ; $\det_C$ – отображение из $\mathcal{M}_C$ в $H^0(C, K_C^2)$, $\det_C: (A, \Phi) \mapsto \det_C \Phi$. Если $0 \neq \phi \in H^0(C, K_C^2)$, то $\tilde{C}$ обозначает двулистную накрывающую C , заданную двузначной 1-формой $\sqrt{\phi}$, которая является голоморфной 1-формой на $\tilde{C}$. Через σ обозначим инволюцию на $\tilde{C}$: $C = \tilde{C}/\sigma$. Через $\text{Rep}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$ мы обозначили пространство классов четных неприводимых представлений фундаментальной группы кривой в $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Теорема 2.1 отождествляет это пространство с $\mathcal{M}_C$. Это отождествление не голоморфно относительно естественных комплексных структур, имеющих на $\text{Rep}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$ и $\mathcal{M}_C$.

ТЕОРЕМА 3.1. Образ отображения $\text{Mon}: P(C) \rightarrow \text{Rep}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{C})) = \mathcal{M}_C$ есть сечение отображения $\det_C$.

Если $\phi \neq 0$, то пересечение $\det_C^{-1}(\phi) \cap \text{Im Mon}$ равно $i_\phi(\exp(-\sqrt{\phi}))$, где $\sqrt{\phi} - (0, 1)$ -форма на $\tilde{C}$, $\exp$ – экспоненциальное отображение $H^{0,1} \rightarrow H^1(\mathcal{O}^*)$ на $\tilde{C}$, а i_ϕ – вложение из теоремы 2.2.

$\det_C^{-1}(0) \cap \text{Im Mon}$ есть стабильная пара $\left(\mathbb{P}(K^{-\frac{1}{2}} \oplus K^{\frac{1}{2}}), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, соответствующая фуксовой проективной структуре, которая получается из представления кривой фактором действия фуксовой группы на верхней полуплоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(A, \Phi) \in \mathcal{M}$ лежит в образе Mon, где A определено по модулю умножения на линейное расслоение. По теореме 1.2 $\mathbb{P}E$ есть $\mathbb{P}j^1T$. Выберем A так, чтобы это равенство стало верным на уровне векторных расслоений (это можно сделать, так как A и j^1T имеют первый класс Черна одинаковой четности).

Из доказательства теоремы 2.2 следует, что $A = \pi_*L$, где L – линейное расслоение на некоторой кривой $\tilde{C}'$, а $\pi: \tilde{C}' \rightarrow C$ – проекция; при этом дивизор ветвления D_{ram} содержится в дивизоре нулей $\phi = \det \Phi$. Так как $E = j^1T$, то оно имеет сечение. Это сечение поднимается до (не голоморфного) сечения L на $\tilde{C}'$. Это сечение голоморфно относительно $(0, 1)$ -связности $\nabla_{FL}^{0,1} = \nabla^{0,1} + \Phi^*$. На кривой $\tilde{C}'$ этот оператор превращается в $\nabla^{0,1} + \sqrt{\phi}$, где $\sqrt{\phi}$ – замкнутая $(0, 1)$ -форма на кривой $\tilde{C}'$.

Расслоение L с оператором $\nabla^{0,1} + \sqrt{\phi}$ в качестве голоморфной структуры изоморфно $L' = L \otimes \exp(\sqrt{\phi})$. По условию этот пучок имеет сечение,

$$\deg L' = \deg L = \deg \left(\det A + \frac{1}{2} D_{\text{ram}} \right) = -2g + 2 + \frac{1}{2} \deg D_{\text{ram}}.$$

Если $\deg D_{\text{ram}} < 4g - 4$, то $\deg L' < 0$, и он не может иметь сечений. Следовательно, $D_{\text{ram}} = (\phi)_0$ и $\tilde{C}' = \tilde{C}$.

Так как L' имеет степень 0 и имеет сечение, то $L \otimes \exp(\sqrt{\phi}) = L' = \mathcal{O}$, следовательно, $L = \exp(-\sqrt{\phi})$, что и требовалось доказать.

Обратно, $i_\phi(\exp(-\sqrt{\phi})) = F$ имеет детерминант, равный K^{-1} . Построим сечение расслоения F , голоморфное относительно $\nabla_{FL}^{(0,1)}$. Введем на $L = \exp(-\sqrt{\phi})$ плоскую унитарную связность и обозначим через f локально плоское сечение L . Тогда (неголоморфное) сечение L , заданное как $f \cdot \int (-2 \text{Im } \sqrt{\phi})$, спускается до голоморфного сечения F . Следовательно, по лемме 1.1 $F = j^1T$. Значит, согласно теореме 1.2 $i_\phi(\exp(-\sqrt{\phi}))$ лежит в образе Mon, что и требовалось доказать.

Доказательство для случая $\phi = 0$ следует из подробного описания фуксовых представлений в [6, гл. 11] и из теоремы 1.1, которая показывает, что $\text{Im Mon} \cap \det_C^{-1}(0)$ состоит из одной точки.

Теорема 3.1 позволяет отождествить множество проективных структур на комплексной кривой $\mathcal{P}(C)$ с (анти)голоморфными квадратичными дифференциалами на ней. Заметим, что получающаяся таким образом комплексная структура на $P(C)$ не совпадает с естественной комплексной структурой на этом пространстве, описанной в [3]. Это отождествление близко к “экспоненциальным” координатам на пространстве Тейхмюллера из [6, гл. 11].

§ 4. Проективные структуры с фуксовой монодромией и штребелевы дифференциалы

Пусть на комплексной кривой C задана проективная структура p с вещественной монодромией. Это значит, что на каждой проективной карте задана вещественная структура и функции перехода вещественны и дробно-линейны. Так как функции перехода сохраняют вещественную структуру на картах, точки, вещественные в одной проективной координате, вещественны также и в другой, т.е. имеет смысл говорить о “вещественных” точках комплексной кривой $C_{\mathbb{R}}(p)$.

$C_{\mathbb{R}}(p)$ – замкнутое подмногообразие размерности 1 в C , значит, это набор окружностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Целой ламинацией* назовем набор непересекающихся, несамопересекающихся, нестягиваемых, неориентированных замкнутых кривых на C с натуральными весами с точностью до гомотопии. Две целые ламинации считаются *эквивалентными*, если одна получается из другой заменой двух гомотопных друг другу кривых с весами i и j на одну, гомотопную им, с весом $i + j$. Множество всех целых ламинаций обозначим через $\mathcal{L}$. Элемент из $\mathcal{L}$ можно умножить на натуральное число $x \in \mathbb{N}$: все веса увеличиваются в x раз.

Целую ламинацию, соответствующую вещественной проективной структуре p , обозначим через $l(p)$.

Если монодромия проективной структуры p – фуксова группа, то такая проективная структура полностью определяется монодромией и $l(p)$ (определение фуксовой группы см. в [8]).

ТЕОРЕМА 4.1 [9]. *Если $p \in P$ – проективная структура на некоторой комплексной кривой с фуксовой монодромией, то $l(p) \in 2 \cdot \mathcal{L}$.*

По любой целой ламинации L и любому фуксовому представлению $x \in \text{Rep}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$ можно единственным образом построить проективную структуру $p \in \mathcal{P}$ такую, что $\text{Mon}(p) = x$ и $l(p) = 2L$ (“grafting procedure” или конструкция Маскита–Хейлаха–Терстона–Сулливана).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Квадратичный дифференциал $\phi \in H^0(C, K_C^2)$ на комплексной кривой назовем *целым*, если:

- 1) ϕ штребелев (см. [10]), т.е. у слоения, локально заданного уравнением

$$\text{Re} \int \sqrt{\phi} = \text{const},$$

все листы компактны;

- 2) высоты всех цилиндрических областей этого слоения имеют целую высоту относительно меры $|d \text{Re} \int \sqrt{\phi}|$.

Если дан целый квадратичный дифференциал ϕ , то сопоставим каждой цилиндрической области замкнутую кривую, гомотопную любому листу слоения в этой области с весом, равным высоте цилиндра. Полученную целую ламинацию обозначим через $l(\phi)$.

ТЕОРЕМА 4.2 [10, § 20], [11]. Пусть C – комплексная кривая, L – целая ламинация. Тогда существует и единствен целый квадратичный дифференциал ϕ такой, что $l(\phi) = L$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть p – проективная структура на комплексной кривой C с фуксовой монодромией и $\det_C \circ \text{Mon}(p) = \phi \in H^0(C, K_C^2)$.

Тогда:

- 1) $-\frac{4\phi}{\pi^2}$ – целый квадратичный дифференциал;
- 2) $l(p) = 2l(-\frac{4\phi}{\pi^2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство модулей фуксовых представлений есть пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Его вложение в $\mathcal{M}_C$ описано в [6, гл. 11]. Образ вложения состоит из пар $(\mathbb{P}(K^{-\frac{1}{2}} \oplus K^{\frac{1}{2}}), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \phi & 0 \end{pmatrix})$. Пересечения $\mathcal{T} \cap \det_C^{-1}(\phi)$ есть образ единицы при отображении i_ϕ из теоремы 2.2.

Наша задача – описать пересечения образа отображения монодромии Im Mon с пространством фуксовых представлений $\mathcal{T}$. Как следует из теоремы 3.1, $\text{Im Mon} \cap \det_C^{-1}(\phi) = i_\phi(\exp(-\sqrt{\phi}))$, с другой стороны, $\mathcal{T} \cap \det_C^{-1}(\phi) = i_\phi(\emptyset)$. Следовательно, $\det_C(\mathcal{T} \cap \text{Im Mon})$ состоит из тех ϕ , для которых $\exp(-\sqrt{\phi}) = \emptyset$.

1) Из точной экспоненциальной последовательности следует, что равенство $\exp(-\sqrt{\phi}) = \emptyset$ эквивалентно тому, что форма $\text{Re}(-\frac{\overline{\sqrt{\phi}}}{\pi i})$ представляет целый класс в $H^1(\tilde{C})/H^1(C)$.

Рассмотрим неоднозначную вещественную функцию δ на C :

$$\delta(x) = \int_{p^{-1}(x)}^{\sigma p^{-1}(x)} \text{Re}\left(-\frac{\overline{\sqrt{\phi}}}{\pi i}\right),$$

где $p: \tilde{C} \rightarrow C$ – проекция, σ – инволюция на $\tilde{C}$. Так как форма целая, то δ определена с точностью до знака и сдвига на целое число, $\delta: C \rightarrow \mathbb{R}/(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_2)$. Функция δ постоянна вдоль слоев слоения, заданного $-\frac{4\phi}{\pi^2}$, следовательно, квадратичный дифференциал штребелев.

Если x – особая точка слоения, то значения $\delta(x)$ содержат 0. Поэтому $\delta^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ есть объединения цилиндрических областей высоты $1/2$. Значит, $-\frac{4\phi}{\pi^2}$ – целый квадратичный дифференциал.

(Фактически мы доказали, что квадратичный дифференциал ϕ цел тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2} \text{Re} \sqrt{\phi}$ представляет целый класс в $H^1(\tilde{C})/H^1(C)$.)

2) Выясним, как устроено множество $C_{\mathbb{R}}(p)$. Напомним, что на $\mathbb{P}^1 T$ задана плоская связность и вещественная структура.

Точкам $C_{\mathbb{R}}(p)$ соответствуют те точки C , где проективизация сечения $j^1 T$ пересекает вещественную окружность в $\mathbb{P}^1 T$. Мы (не голоморфно) отождествили $\mathbb{P}^1 T$ с $\mathbb{P}(K^{-\frac{1}{2}} \oplus K^{\frac{1}{2}})$, при этом вещественная окружность в $\mathbb{P}(K^{-\frac{1}{2}} \oplus K^{\frac{1}{2}})$ есть точки вида $(u, \bar{u})$ (см. [6, гл. 10]).

Проективизация сечения $j^1 T$ в координатах $\mathbb{P}(K^{-\frac{1}{2}} \oplus K^{\frac{1}{2}})$ записывается в виде $(\cos \frac{\pi\delta}{2}, i \sin \frac{\pi\delta}{2} \cdot \sqrt{\phi})$, где δ – функция из п. 1) доказательства. Таким образом,

если θ – угол между проективизацией сечения и точкой $(1, 0)$ в $\mathbb{P}(K^{-\frac{1}{2}} \oplus K^{\frac{1}{2}})$ в гармонической метрике, то $\operatorname{tg} \theta = |\sqrt{\phi}| \operatorname{tg} \frac{\delta\pi}{2}$. $C_{\mathbb{R}}(p)$ – это те точки комплексной кривой, где $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Оставшуюся часть доказательства разобьем на две леммы.

ЛЕММА 4.1. $l(p) \geq 2l(-\frac{4\phi}{\pi^2})$, т.е. $2l(-\frac{4\phi}{\pi^2})$ можно представить как поднабор в $l(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно п. 1) доказательства теоремы 4.3 $C \setminus \delta^{-1}(\mathbb{Z})$ есть объединение цилиндров высоты 1. Покажем, что на каждом таком цилиндре лежит по крайней мере две “вещественные” кривые. Пусть $r = \delta^{-1}(0, 1)$ – такой цилиндр. Рассмотрим на нем окружность $\delta^{-1}(\frac{1}{2})$. На ней $\theta = \pi$, а по краям цилиндра $\theta = 0$. Следовательно, на $\delta^{-1}(0, \frac{1}{2})$ и на $\delta^{-1}(\frac{1}{2}, 1)$ угол θ принимает значения $\frac{\pi}{2}$, т.е. там есть точки из $C_{\mathbb{R}}(p)$. Значит, на каждом цилиндре лежат по меньшей мере две кривые из $C_{\mathbb{R}}(p)$.

ЛЕММА 4.2. *Имеем*

$$l(p) = 2l\left(-\frac{4\phi}{\pi^2}\right).$$

По теореме 4.1 связные компоненты пространства модулей проективных структур с фуксовыми монодромиями нумеруются множеством $\mathcal{L}$ (так как пространство фуксовых представлений связно). Теорема 4.3 дает нам другое взаимно однозначное соответствие между этими двумя множествами. Сравнение этих двух соответствий дает некоторый изоморфизм множества $\mathcal{L}$ с собой. Согласно лемме 4.1 оно неубывающее относительно естественного порядка на $\mathcal{L}$. Следовательно, этот изоморфизм тривиален.

ЗАМЕЧАНИЕ. Желательно было бы получить прямое доказательство леммы 4.2, не использующее теоремы 4.1.

Теоремы 4.2 и 4.3 сразу дают положительный ответ на вопрос, поставленный Маскитом в [2]: для всякой ли комплексной структуры на римановой поверхности и целой ламинации L существует такая проективная структура p с фуксовой монодромией, согласованная с данной комплексной, что $l(p) = 2L$?

§5. Гипотезы и вопросы

Как мы уже видели, пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ вкладывается в $\mathcal{M}_C$ как пространство модулей фуксовых представлений фундаментальной группы. Отображение $\det_C$ дает параметризацию $\mathcal{T}$ квадратичными дифференциалами на фиксированной комплексной кривой, причем нулю соответствует сама эта кривая [6, гл. 11]. Обозначим это (не голоморфное) отождествление через $\gamma_C: \mathcal{T} \rightarrow H^0(C, K_C^2)$. На $H^0(C, K_C^2)$ есть комплексная структура, отличная от обычной комплексной структуры на $\mathcal{T}$.

Таким образом, на $\mathcal{T}$ возникает семейство комплексных структур, зависящих от комплексной кривой, т.е. от точки $\mathcal{T}$.

По аналогии с конструкцией твисторного многообразия [12] можно построить “твисторное пространство Тейхмюллера” $\mathcal{T}\mathcal{T}$. Это пространство снабжено проекцией $p: \mathcal{T}\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, слой над точкой есть пространство квадратичных дифференциалов. На $\mathcal{T}\mathcal{T}$ введем “твисторную” почти комплексную структуру, вдоль слоев p она совпадает с комплексной структурой на $H^0(C, K_C^2)$, а по нормали происходит из стандартной комплексной структуры на $\mathcal{T}$.

ВОПРОС. *Интегрируема ли эта почти комплексная структура на $\mathcal{T}\mathcal{T}$?*

На $\mathcal{T}\mathcal{T}$ имеется слоение, происходящее из плоской связности на расслоения p (все слои p – одно и то же гладкое многообразие). Листы слоения нумеруются точками $\mathcal{T}$: лист, соответствующий $x \in \mathcal{T}$, состоит из точек вида $\mathcal{T}_x = (t, \gamma_t(x))$, где t – точка $\mathcal{T}$, т.е. комплексная кривая, а $\gamma_t(x)$ – квадратичный дифференциал на ней.

С другой стороны, на пространстве модулей проективных структур, которое по теореме 3.1 есть $\mathcal{T}\mathcal{T}$, имеется другое слоение. А именно, в книге Терстона [13] описан способ деформации проективной структуры, соответствующей метрике постоянной кривизны по измеримой геодезической ламинации. Все такие деформации фиксированной поверхности с метрикой постоянной кривизны замечают в пространстве модулей проективных структур подмногообразие половинной размерности. Варьируя метрику постоянной кривизны, получаем слоение в пространстве модулей проективных структур, т.е. в $\mathcal{T}\mathcal{T}$. Назовем это слоение *терстоновым*.

ГИПОТЕЗА. *Слой терстонова слоения, соответствующий деформациям проективной структуры, получающейся из метрики постоянной кривизны $x \in \mathcal{T}$, есть $\mathcal{T}_x$.*

Эта гипотеза подтверждается тем наблюдением, что все проективные структуры с фуксовыми монодромиями, лежащие как на $\mathcal{T}_x$, так и на листе терстонова слоения, имеют одну и ту же монодromию.

Каждый слой расслоения p , т.е. квадратичные дифференциалы, отождествляются с множеством измеримых слоений на поверхности рода g с особенностями с точностью до изотопии (см. [14]). Это дает на $\mathcal{T}\mathcal{T}$ “горизонтальное” слоение.

ГИПОТЕЗА-ВОПРОС. *Поднимается ли “горизонтальное” слоение при отображении Мон с некоторого слоения на $\text{Rep}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{C}))$?*

Список литературы

1. Gallo D. Deforming real projective structures // Ann. Acad. Sci. Fenn. Mathematica. 1997. V. 22. P. 3–14.
2. Maskit B. On a class of Kleinian groups // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1969. V. 442. P. 3–8.
3. Тюрин А. Н. О периодах квадратичных дифференциалов // УМН. 1978. Т. 33. №6. С. 149–195.
4. Gunning R. Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton University Press, 1967.

5. *Atiyah M. F.* Complex analytic connections in fibre bundles // Trans. Amer Math. Soc. 1957. V. 85. № 1. P. 181–207.
6. *Hitchin N. Y.* The self-duality equation on a Riemann surface // Proc. London Math. Soc. (3). 1987. V. 55. P. 59–126.
7. *Donaldson S. K.* Twisted harmonic maps and self-duality equation // Proc. London Math. Soc. (3). 1987. V. 55. P. 127–131.
8. *Bers L.* Uniformisation. Moduli and Kleinian groups // Bull. London Math. Soc. 1972. V. 4. P. 257–300.
9. *Goldman W. M.* Projective structures with Fuchsian monodromy // J. Diff. Geom. 1987. V. 25. P. 297–326.
10. *Strebel K.* Quadratic Differentials. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
11. *Wolf M.* On the existence of Jenkins–Strebel differentials using harmonic maps from surfaces to graphs // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1995. V. 20. P. 269–278.
12. *Атья М.* Геометрия и физика узлов. Дополнение. М.: Мир, 1995.
13. *Thurston W. P.* Topology and geometry of 3-manifolds. Princeton lectures, 1978–79.
14. *Hubbard J., Masur H.* Quadratic differentials and foliations // Acta Math. 1979. V. 142. P. 221–274.

Поступило в редакцию

15.V.1998