Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Панов, К нелокальной теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для одного класса гиперболических систем законов сохранения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 1, 133–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/im232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:51:44

УДК 517.95

Е. Ю. Панов

К нелокальной теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для одного класса гиперболических систем законов сохранения

На пространстве симметричных матриц второго порядка рассмотрена гиперболическая система законов сохранения, содержащая в правой части оператор функционального исчисления $\tilde{f}(U)$, порожденный в общем случае лишь непрерывной скалярной функцией $f(u)$. Для таких систем определено и описано множество сингулярных энтропий, введено понятие обобщенного энтропийного решения (о.э.р.) соответствующей задачи Коши, исследованы свойства о.э.р. Выделен класс сильных о.э.р., в котором рассматриваемая задача Коши однозначно разрешима. Приведено условие на начальные данные, при котором о.э.р. всегда является сильным и, тем самым, единственно. При этом условии установлена сходимость метода “исчезающей вязкости”. Примером показано, что в общем случае о.э.р. может быть неединственным.

Библиография: 17 наименований.

Введение

Пусть L – алгебра вещественных матриц второго порядка, $X \subset L$ – подпространство симметричных матриц; ясно, что $\dim X = 3$. Определим на X скалярное умножение $(A, B) = \text{Tr}(AB)$, Tr – функционал следа. Скалярное умножение задает на X *евклидову* норму

$$\|A\|^2 = (A, A) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2,$$

λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы A (в силу симметричности вещественные).

Ниже будут использоваться следующие стандартные обозначения: $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ – диагональная матрица с элементами λ_1, λ_2 на диагонали; E – единичная матрица; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица; 0 будет обозначать, в зависимости от контекста, нулевую константу или нулевой вектор из $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим следующую систему квазилинейных законов сохранения:

$$U_t + \tilde{f}(U)_x = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$U = U(t, x) \in X$; $(t, x) \in \Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$; $\tilde{f}: X \mapsto X$, $U \mapsto \tilde{f}(U)$ – функция от матрицы U , определенная в соответствии с функциональным исчислением для симметричных матриц по некоторой скалярной вещественной функции $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00671).

Оператор функционального исчисления $\tilde{f}: X \mapsto X$ определен для любой функции $f(u)$ из алгебры всех вещественнозначных функций на $\mathbb{R}$ и при $U \in X$ соответствие $f \mapsto \tilde{f}(U)$ является гомоморфизмом алгебр. В качестве определения оператора $\tilde{f}$ можно взять следующее свойство (см., например, [1, с. 175, 176]):

если $U = Q\Lambda Q^{-1}$, где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, Q – ортогональная матрица, то $\tilde{f}(U) = Q\tilde{f}(\Lambda)Q^{-1}$, $\tilde{f}(\Lambda) = \text{diag}\{f(\lambda_1), f(\lambda_2)\}$. Иначе,

$$\tilde{f}(U) = \sum_{k=1}^2 f(\lambda_k) P_k,$$

где $P_k = P_k(U)$ – ортопроектор на одномерное собственное подпространство, порожденное собственным вектором v_k матрицы U (мы будем часто отождествлять матрицу с соответствующим оператором на $\mathbb{R}^2$); здесь v_k , $k = 1, 2$, – ортонормированный собственный базис: $Uv_k = \lambda_k v_k$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему (1) в простейшем случае $f(u) = u^2$. Пространство X состоит из симметричных матриц $U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, и система $U_t + (U^2)_x = \mathbf{0}$ может быть переписана в координатах a, b, c в форме

$$\begin{aligned} a_t + (a^2 + c^2)_x &= 0, \\ b_t + (b^2 + c^2)_x &= 0, \\ c_t + (ac + bc)_x &= 0. \end{aligned}$$

§ 1. Гиперболичность системы (1)

Как показано в [1, с. 290, 291], при сделанном предположении $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ отображение $\tilde{f}$ C^1 -гладко на X . Пусть $A(U) = d\tilde{f}(U)$ – дифференциал отображения $\tilde{f}$. Тогда для $U \in X$ $A(U) \in L(X)$, где $L(X)$ – пространство линейных операторов на X , и система (1) переписывается в эквивалентной форме:

$$U_t + A(U) \cdot U_x = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Пусть λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы $U \in X$, выписанные с учетом кратности, v_1, v_2 – соответствующий ортонормированный базис собственных векторов, $P_k = P_k(U)$ – ортопроектор на одномерное собственное подпространство, порожденное v_k , $k = 1, 2$. Тогда (см. [1, с. 290, 291]) справедлива формула

$$A(U) dU = \sum_{k,l=1}^2 \mu_{kl} P_k dU P_l, \quad (3)$$

где

$$\mu_{kl} = \mu_{kl}(U) = \begin{cases} \frac{f(\lambda_k) - f(\lambda_l)}{\lambda_k - \lambda_l}, & \lambda_k \neq \lambda_l, \\ f'(\lambda_k), & \lambda_k = \lambda_l. \end{cases} \quad (4)$$

Покажем, что при любом фиксированном $U \in X$ оператор $A(U) \in L(X)$ симметричен. Действительно, используя известное свойство следа $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $A, B \in L$, и формулу (3), получим, что для $V_1, V_2 \in X$

$$\begin{aligned} (A(U)V_1, V_2) &= \text{Tr}(A(U)V_1 \cdot V_2) = \sum_{k,l=1}^2 \mu_{kl} \text{Tr}(P_k V_1 P_l V_2) \\ &= \sum_{k,l=1}^2 \mu_{kl} \text{Tr}(V_1 P_l V_2 P_k) = \left(V_1, \sum_{k,l=1}^2 \mu_{kl} P_l V_2 P_k \right) = (V_1, A(U)V_2). \end{aligned}$$

Мы учли симметричность величин μ_{kl} : $\mu_{kl} = \mu_{lk}$.

Таким образом, система (1), (2) симметрична и, следовательно, является гиперболической в широком смысле, т.е. (см. [2, с. 23]) все собственные числа оператора $A(U) \in L(X)$ вещественны и им соответствует полный набор собственных векторов (из X). Эти собственные числа и векторы можно указать явно, исходя из представления (3).

Пусть при $1 \leq k \leq l \leq 2$ $P_{kl} \in X$ – матрица, определенная на собственном базисе v_r , $r = 1, 2$, матрицы U соотношениями

$$P_{kl}v_k = v_l, \quad P_{kl}v_l = v_k; \quad P_{kl}v_r = 0 \quad \text{при } r \neq k, l.$$

Заметим, что P_{11}, P_{22} совпадают соответственно с проекторами P_1, P_2 . Легко видеть, что матрицы P_{11}, P_{22}, P_{12} допускают представления

$$P_{11} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad P_{22} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad P_{12} = Q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

Q – ортогональная матрица со столбцами v_1, v_2 (так что $U = Q \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\} Q^{-1}$). Ясно, что P_{11}, P_{22}, P_{12} образуют ортогональный базис в X . Далее, из (3) непосредственно следуют равенства

$$A(U)P_{kl} = \mu_{kl}P_{kl}, \quad 1 \leq k \leq l \leq 2.$$

Итак, собственные числа $A(U)$ определяются формулой (4) и им соответствует приведенное выше семейство собственных векторов.

Следует отметить, что система (1) может не быть симметричной в координатах (a, b, c) (что видно уже из примера 1). Дело в том, что координаты (a, b, c) соответствуют разложению матрицы $U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ по ортогональному базису

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

который не нормирован: $\|U_1\| = \|U_2\| = 1, \|U_3\| = \sqrt{2}$. Рассматриваемая система становится симметричной после нормирования базиса $U_3 \mapsto U_3/\sqrt{2}$, что соответствует замене $c \mapsto \sqrt{2}c$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда функция $f(u)$ допускает аналитическое продолжение до целой функции на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, функциональное исчисление $U \mapsto \tilde{f}(U)$ корректно определено для всех $U \in L$ (см. [1, с. 115]) и можно определить системы вида (1) на произвольной вещественной подалгебре $X \subset L$. Однако в этой общей ситуации может нарушаться свойство гиперболичности. Действительно, рассмотрим систему (при $f(u) = u^2$)

$$U_t + (U^2)_x = 0, \quad (5)$$

где $U = U(t, x) \in X$, X – алгебра матриц $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, изоморфная $\mathbb{C}$ в силу изоморфизма $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$. Система (5) принимает в координатах a, b вид

$$\begin{aligned} a_t + (a^2 - b^2)_x &= 0, \\ b_t + (2ab)_x &= 0 \end{aligned}$$

и, как легко проверить, не является гиперболической. Тем более не будет гиперболической система (5), определенная на полной матричной алгебре L .

§ 2. Энтропии

Напомним (см. [3], [4]), что *энтропией* системы (1), (2) называется функция $p(U) \in C^1(X)$, для которой существует функция $q(U) \in C^1(X)$, называемая *поток энтропии*, такая, что для всех $U \in X$

$$\nabla q(U) = A(U) \nabla p(U). \quad (6)$$

Здесь градиент $\nabla p(U) \in X$, как обычно, определяется равенством $(\nabla p(U), H) = dp(U)H$, $H \in X$. Ясно, что (6) определяет поток $q(U)$ с точностью до аддитивной константы.

Умножая систему (2) скалярно на $\nabla p(U)$, получим, учитывая симметричность оператора $A(U)$ и равенство (6), что

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla p(U), U_t) + (\nabla p(U), A(U)U_x) = (\nabla p(U), U_t) + (A(U)\nabla p(U), U_x) \\ &= (\nabla p(U), U_t) + (\nabla q(U), U_x) = p(U)_t + q(U)_x. \end{aligned}$$

В частности, если $U = U(t, x) - C^1$ -гладкое решение системы (1), то

$$p(U)_t + q(U)_x = 0 \quad (7)$$

для любой энтропии $p(U)$ и соответствующего потока $q(U)$.

В силу консервативности системы (1) любая линейная функция $p(U) = (C, U)$, $C \in X$, является энтропией и ей соответствует поток $q(U) = (C, \tilde{f}(U))$.

Равенство (6) приводит к условию замкнутости дифференциальной формы $(\nabla p(U), A(U) dU)$, которое сводится, в общем случае, к переопределенной системе дифференциальных уравнений. Поэтому для общих систем квазилинейных законов сохранения нелинейные энтропии могут вообще отсутствовать. Однако системы вида (1) всегда обладают достаточно “богатым” набором нелинейных энтропий. Например, как будет показано ниже, являются энтропиями функции $p(U) = \text{Tr } \varphi(U)$, где $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$. Несмотря на обилие гладких энтропий, для наших целей их будет недостаточно, и мы расширим множество энтропийных функций, несколько ослабив требование гладкости.

Пусть $X_0 = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset X$ – одномерное подпространство в X , порожденное единичной матрицей E . Обозначим $\mathcal{F}$ подпространство $C^1(X \setminus X_0) \cap C(X)$, состоящее из локально липшицевых функций $p(U)$, для которых определена и непрерывна во всем X частная производная $\frac{\partial p(U)}{\partial E}$ в направлении матрицы E .

Для $p(U) \in \mathcal{F}$ градиент $\nabla p(U) \in X$ определен при $U \notin X_0$. Ниже всюду будет предполагаться, что $\nabla p(U)$ доопределен на X_0 так, что при $U = \lambda E \in X_0$

$$\nabla p(U) = \frac{\partial p(U)}{\partial E} \cdot E. \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $p(U) \in \mathcal{F}$ называется *сингулярной энтропией* системы (1), (2), если существует функция $q(U) \in \mathcal{F}$ (поток энтропии) такая, что для всех $U \in X$ выполнено соотношение (6).

Заметим, что при $U = \lambda E \in X_0$ из формул (3), (4) следует равенство $A(U) dU = f'(\lambda) dU$, и с учетом (8) условие (6) выписывается для случая $U \in X_0$ в виде

$$\frac{\partial q(U)}{\partial E} = f'(\lambda) \frac{\partial p(U)}{\partial E}. \quad (9)$$

Пусть $U = U(t, x)$ – C^1 -гладкое решение системы (1). Покажем, что для сингулярной энтропии $p(U)$ и соответствующего потока $q(U)$ равенство (7) верно в смысле распределений (в $\mathcal{D}'(\Pi)$). Справедливость равенства (7) доказывается так же, как и в гладком случае, путем умножения системы (2) на $\nabla p(U)$ с учетом тождества (6) и следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $U(t, x) \in C^1(\Pi, X)$, $p(U) \in \mathcal{F}$. Тогда

$$p(U)_t = (\nabla p(U), U_t), \quad p(U)_x = (\nabla p(U), U_x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (10)$$

Для доказательства нам понадобится следующая простая

ЛЕММА 1. Пусть $U = U(t, x) \in C^1(\Pi, X)$ – C^1 -гладкая X -значная функция. Тогда множество $\mathcal{M}$ точек $(t, x) \in \Pi$, для которых $U(t, x) \in X_0$, а $U_t(t, x)$, $U_x(t, x)$ не содержатся одновременно в X_0 , имеет нулевую меру Лебега.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}$. Тогда $U(t_0, x_0) \in X_0$, а $U_t(t_0, x_0)$, $U_x(t_0, x_0)$ не содержатся одновременно в X_0 . Пусть для определенности $U_x(t_0, x_0) \notin X_0$. Выберем гиперплоскость $H \in X$ так, чтобы $X_0 \subset H$ и $U_x(t_0, x_0) \notin H$. Тогда отображение U трансверсально к H в некоторой окрестности V точки (t_0, x_0) . Отсюда следует (см., например, [5, с.34, 35]), что $V \cap U^{-1}(H) \subset \Pi$ является подмногообразием коразмерности 1. В частности, множество $\mathcal{M} \cap V \subset V \cap U^{-1}(H)$ имеет нулевую меру Лебега. Покрывая множество $\mathcal{M}$ счетным семейством таких окрестностей V (что можно сделать благодаря 2-й аксиоме счетности), получим, что $\mathcal{M}$ имеет нулевую меру Лебега. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Так как функция $p(U)$ локально липшицева на X , то суперпозиция $p(U(t, x))$ локально липшицева на Π и, в частности, обобщенные производные $p(U)_t$, $p(U)_x$ являются локально ограниченными функциями. При этом $p(U)_t$, $p(U)_x$ совпадают почти всюду с классическими частными производными, которые существуют для почти всех (t, x) (известно, что $p(U(t, x))$ дифференцируема в точках Лебега вектор-функции $(t, x) \mapsto (p(U)_t(t, x), p(U)_x(t, x))$). Таким образом, достаточно установить, что (10) выполнено для классических производных на некотором множестве полной меры Лебега. Покажем, что при $(t, x) \notin \mathcal{M}$ функция $p(U(t, x))$ дифференцируема и справедливо (10). Так как по лемме 1 $\mathcal{M}$ имеет нулевую меру, то это завершит доказательство предложения. Для $(t, x) \notin \mathcal{M}$ возможны два случая:

- 1) $U(t, x) \notin X_0$;
- 2) $U(t, x) \in X_0$, $U_t(t, x), U_x(t, x) \in X_0$.

В первом случае $p(U)$ дифференцируема при $U = U(t, x)$. По классической теореме о дифференцируемости суперпозиции $p(U(t, x))$ дифференцируема в точке (t, x) и выполнены равенства (10). Рассмотрим второй случай. По условию $U(t, x) \in C^1(\Pi, X)$, откуда при достаточно малых $\Delta t, \Delta x$

$$\begin{aligned} U(t + \Delta t, x + \Delta x) &= U(t, x) + U_t(t, x)\Delta t + U_x(t, x)\Delta x + \alpha(t, x), \\ \|\alpha(t, x)\| &= o(|\Delta t| + |\Delta x|), \quad |\Delta t| + |\Delta x| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из локальной липшицевости функции $p(U)$ и (11) следует, что существует константа $k > 0$ такая, что при достаточно малых $\Delta t, \Delta x$

$$\begin{aligned} |p(U(t + \Delta t, x + \Delta x)) - p(U(t, x) + U_t(t, x)\Delta t + U_x(t, x)\Delta x)| \\ \leq k\|\alpha(t, x)\| = o(|\Delta t| + |\Delta x|). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, далее, что в рассматриваемом случае $U(t, x) \in X_0$, $U_t(t, x)\Delta t + U_x(t, x)\Delta x \in X_0$, и так как функция $p(U) \in \mathcal{F}$ дифференцируема в направлении X_0 (т.е. в направлении E), то

$$\begin{aligned} p(U(t, x) + U_t(t, x)\Delta t + U_x(t, x)\Delta x) &= p(U(t, x)) + \frac{\partial p}{\partial E}(U(t, x))U_t(t, x)\Delta t \\ &\quad + \frac{\partial p}{\partial E}(U(t, x))U_x(t, x)\Delta x + o(|\Delta t| + |\Delta x|). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12), (13) с учетом включений $U_t(t, x), U_x(t, x) \in X_0$ и условия (8) следует, что

$$\begin{aligned} p(U(t + \Delta t, x + \Delta x)) &= p(U(t, x)) + (\nabla p(U), U_t(t, x)) \Delta t \\ &\quad + (\nabla p(U), U_x(t, x)) \Delta x + o(|\Delta t| + |\Delta x|), \end{aligned}$$

т.е. функция $p(U(t, x))$ дифференцируема в точке (t, x) и верны равенства (10). Предложение доказано.

Пусть $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U)$ – собственные числа матрицы $U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(U) = \frac{a+b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + c^2} \in \mathcal{F}.$$

Следующая теорема описывает важный для дальнейших рассуждений класс сингулярных энтропий.

ТЕОРЕМА 1. 1) Для $\varphi_1(u), \varphi_2(u) \in C^1(\mathbb{R})$ функция $p(U) = \varphi_1(\lambda_1(U)) + \varphi_2(\lambda_2(U))$ является сингулярной энтропией системы (1), (2) с соответствующим потоком $q(U) = \psi_1(\lambda_1(U)) + \psi_2(\lambda_2(U))$, где функции $\psi_i(u)$ определены с точностью до аддитивной константы равенствами $\psi'_i(u) = \varphi'_i(u)f'(u)$, $i = 1, 2$.

2) Пусть $h(y) \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ – однородная (степени 1) функция: $h(ky) = kh(y)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $k \geq 0$. Тогда функция $p(U) = h(b - a, -2c)$ является сингулярной энтропией системы (1), (2) с потоком

$$q(U) = \begin{cases} \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot p(U), & \lambda_2 \neq \lambda_1, \\ 0, & \lambda_2 = \lambda_1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица $U \in X$ допускает представление $U = T(\theta) \times \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}T(-\theta)$, где $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица (оператор поворота на угол θ). Нам будет удобно выписать условие (6) в координатах $\lambda_1, \lambda_2, \theta$. Путем непосредственных вычислений коэффициенты a, b, c матрицы U выписываются в виде

$$a, b = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos 2\theta, \quad c = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sin 2\theta. \quad (14)$$

Далее,

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_1} = T(\theta) \text{diag}\{1, 0\}T(-\theta) = P_1, \quad \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} = T(\theta) \text{diag}\{0, 1\}T(-\theta) = P_2, \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot T(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(-\theta) = (\lambda_1 - \lambda_2) P_{12}, \quad (16)$$

где $P_1 = P_{11}$, $P_2 = P_{22}$, P_{12} – собственные векторы оператора $A(U)$ (см. § 1).

Заметим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$ при $U \notin X_0$ и из (15), (16) вытекает, что частные производные $\frac{\partial U}{\partial \lambda_1}$, $\frac{\partial U}{\partial \lambda_2}$, $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ образуют базис в X . Поэтому (6) эквивалентно следующим трем равенствам:

$$\begin{aligned} \left(\nabla q(U), \frac{\partial U}{\partial \lambda_k} \right) &= \left(A(U) \nabla p(U), \frac{\partial U}{\partial \lambda_k} \right) = \left(\nabla p(U), A(U) \frac{\partial U}{\partial \lambda_k} \right), \quad k = 1, 2; \\ \left(\nabla q(U), \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) &= \left(A(U) \nabla p(U), \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = \left(\nabla p(U), A(U) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Учитывая (15), (16) и соотношения $A(U)P_{kl} = \mu_{kl}P_{kl}$, $1 \leq k \leq l \leq 2$, где μ_{kl} определяются формулами (4), перепишем последние равенства в виде

$$\frac{\partial q(U)}{\partial \lambda_k} = f'(\lambda_k) \frac{\partial p(U)}{\partial \lambda_k}, \quad k = 1, 2; \quad (17)$$

$$\frac{\partial q(U)}{\partial \theta} = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\partial p(U)}{\partial \theta}. \quad (18)$$

Далее, ввиду (9) условие (6) при $U = \lambda E$ эквивалентно равенству

$$\frac{dq(\lambda E)}{d\lambda} = f'(\lambda) \frac{dp(\lambda E)}{d\lambda}. \quad (19)$$

Мы показали, что функция $p(U) \in \mathcal{F}$ является сингулярной энтропией, а $q(U) \in \mathcal{F}$ — соответствующим потоком тогда и только тогда, когда выполнены условия (17), (18) (при $\lambda_1 \neq \lambda_2$) и (19).

Перейдем к доказательству утверждений 1), 2).

1) Из гладкости функций φ_i , ψ_i , $i = 1, 2$, следует, что $p(U), q(U) \in \mathcal{F}$. Поскольку $p(U)$, $q(U)$ не зависят от θ , достаточно проверить справедливость равенств (17), (19). Так как эти равенства непосредственно следуют из условия $\psi'_i(u) = \varphi'_i(u)f'(u)$, $i = 1, 2$, первое утверждение теоремы доказано.

2) Очевидно, $p(U), q(U) \in \mathcal{F}$. Далее, из (14) следуют равенства $b - a = (\lambda_2 - \lambda_1) \cos 2\theta$, $-2c = (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\theta$, и с учетом однородности функции $h(y)$ имеем при $\xi(\theta) = h(\cos 2\theta, \sin 2\theta) \in C^1(\mathbb{R})$

$$p(U) = (\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta),$$

откуда $q(U) = (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))\xi(\theta)$. Из полученных равенств легко следует справедливость условий (17)–(19). Теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы следует, что являются сингулярными энтропиями функции

$$p(U) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2) + h(b - a, -2c), \quad (20)$$

где $\varphi_1(u), \varphi_2(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $h(y) \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ — однородная функция; при этом

$$q(U) = \psi_1(\lambda_1) + \psi_2(\lambda_2) + \mu h(b - a, -2c), \quad (21)$$

$\psi'_i(u) = \varphi'_i(u)f'(u)$, $i = 1, 2$; $\mu = \mu_{12} = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, при $\lambda_1 = \lambda_2$ значение μ можно задать произвольно, ибо в этом случае $h(b - a, -2c) = h(0, 0) = 0$.

Оказывается, в достаточно общей ситуации множество (во всяком случае C^2 -гладких вне X_0) сингулярных энтропий исчерпывается энтропиями вида (20). Точнее верна

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что функция $f(u)$ не линейна ни на каком невырожденном интервале. Тогда любая сингулярная энтропия $p(U) \in C^2(X \setminus X_0)$ допускает представление (20).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(U) \in \mathcal{F} \cap C^2(X \setminus X_0)$ – сингулярная энтропия. Вычитая из $p(U)$ постоянную $p(\mathbf{0})$, можем считать, что $p(\mathbf{0}) = 0$. Запишем сингулярную энтропию $p(U)$ и соответствующий поток $q(U)$ в координатах $\lambda_1, \lambda_2, \theta$ так, что

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = p(U), \quad q(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = q(U),$$

где $U = T(\theta) \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}T(-\theta)$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $\theta \in \mathbb{R}$. Как показано при доказательстве теоремы 1, справедливы равенства (17)–(19). В частности, из (17) следует, что при $\lambda_1 < \lambda_2$ выполнены соотношения замкнутости:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left(f'(\lambda_1) \frac{\partial p}{\partial \lambda_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(f'(\lambda_2) \frac{\partial p}{\partial \lambda_2} \right),$$

т.е.

$$(f'(\lambda_1) - f'(\lambda_2)) \frac{\partial^2 p}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = 0. \quad (22)$$

Из условия нелинейности функции $f(u)$ на невырожденных интервалах следует, что $f'(\lambda_1) \neq f'(\lambda_2)$ на открытом плотном множестве значений (λ_1, λ_2) ; тогда из (22) с учетом непрерывности $\frac{\partial^2 p}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ (что следует из условия $p(U) \in C^2(X \setminus X_0)$)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = 0.$$

Это тождество означает, что $p(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ есть сумма:

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = p_1(\lambda_1, \theta) + p_2(\lambda_2, \theta), \quad (23)$$

где $p_k(u, \theta) \in C^2(\mathbb{R}^2)$, и можно считать, что $p_k(0, \theta) = 0$ (так как в соответствии с предположением $p(\mathbf{0}) = 0$ после замены $p_k(u, \theta) \mapsto p_k(u, \theta) - p_k(0, \theta)$ равенство (23) останется верным).

Из (18), (23) следует, что при $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\frac{\partial q(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta} = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial p_1(\lambda_1, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial p_2(\lambda_2, \theta)}{\partial \theta} \right). \quad (24)$$

Далее, из (17) и (23)

$$\frac{\partial q}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = f'(\lambda_1) \frac{\partial p_1}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \theta). \quad (25)$$

Из (24), (25) вытекает соотношение замкнутости

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f'(\lambda_1) \frac{\partial p_1}{\partial \lambda_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial p_1(\lambda_1, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial p_2(\lambda_2, \theta)}{\partial \theta} \right) \right) \\ &= \left(f'(\lambda_1) - \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta \partial \lambda_1} - \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \left(\frac{\partial p_1}{\partial \theta} + \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \right) \\ &= \left(f'(\lambda_1) - \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda_1} - \frac{g}{\lambda_1 - \lambda_2} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где обозначено

$$g = g(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{\partial p_1(\lambda_1, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial p_2(\lambda_2, \theta)}{\partial \theta}.$$

Ввиду условия нелинейности функции f на невырожденных интервалах $f'(\lambda_1) - \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \neq 0$ на всюду плотном множестве значений $\lambda_1, \lambda_2, \theta$ и из (26) с учетом непрерывности функции $\frac{\partial}{\partial \lambda_1} g(\lambda_1, \lambda_2, \theta) - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} g(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} g(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} g(\lambda_1, \lambda_2, \theta),$$

т.е. для фиксированных $\lambda_2, \theta \in \mathbb{R}$ функция $\lambda_1 \rightarrow g(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ удовлетворяет при $\lambda_1 < \lambda_2$ дифференциальному уравнению $g'(\lambda_1) = g(\lambda_1)/(\lambda_1 - \lambda_2)$, откуда

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{\partial p_1(\lambda_1, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial p_2(\lambda_2, \theta)}{\partial \theta} = k \cdot (\lambda_1 - \lambda_2),$$

$k = k(\lambda_2, \theta)$. Интегрируя по переменной θ , получим представление

$$p_1(\lambda_1, \theta) + p_2(\lambda_2, \theta) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2) + \beta(\lambda_2, \theta)(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (27)$$

Полагая в (27) $\lambda_1 = 0$ и учитывая тождество $p_1(0, \theta) \equiv 0$, получим, что при $\lambda_2 > 0$

$$p_2(\lambda_2, \theta) = \alpha(0, \lambda_2) - \beta(\lambda_2, \theta) \cdot \lambda_2.$$

Из (27) следует, что $\forall \lambda_2 > \max(\lambda_1, 0)$

$$p_1(\lambda_1, \theta) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2) - \alpha(0, \lambda_2) + \beta(\lambda_2, \theta) \cdot \lambda_1. \quad (28)$$

Дифференцируя (28) по θ и λ_2 , получим, что $\frac{\partial^2 \beta}{\partial \lambda_2 \partial \theta} = 0$, откуда $\beta(\lambda_2, \theta) = \gamma(\lambda_2) + \xi(\theta)$, $\lambda_2 > 0$. Равенство (28) можно переписать тогда в виде (здесь $\lambda_2 > \max(\lambda_1, 0)$)

$$p_1(\lambda_1, \theta) = \alpha_1(\lambda_1, \lambda_2) + \xi_1(\theta) \cdot \lambda_1,$$

где $\alpha_1(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2) - \alpha(0, \lambda_2) + \gamma(\lambda_2)\lambda_1$. Сравнив левую и правую части полученного равенства, легко заметить, что функция α_1 не зависит от λ_2 : $\alpha_1 = \alpha_1(\lambda_1)$. Таким образом,

$$p_1(\lambda_1, \theta) = \alpha_1(\lambda_1) + \xi_1(\theta) \cdot \lambda_1. \quad (29)$$

Очевидно, $\alpha_1, \xi_1 \in C^2(\mathbb{R})$.

Далее, анализируя соотношение замкнутости, вытекающее из равенств (24) и

$$\frac{\partial q}{\partial \lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = f'(\lambda_2) \frac{\partial p_2}{\partial \lambda_2}(\lambda_2, \theta),$$

получим представление, аналогичное (29):

$$p_2(\lambda_2, \theta) = \alpha_2(\lambda_2) + \xi_2(\theta) \cdot \lambda_2, \quad (30)$$

$\alpha_2, \xi_2 \in C^2(\mathbb{R})$. Ввиду (23), (29), (30) при $\lambda_1 < \lambda_2$

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \alpha_1(\lambda_1) + \alpha_2(\lambda_2) + \xi_1(\theta) \cdot \lambda_1 + \xi_2(\theta) \cdot \lambda_2. \quad (31)$$

По непрерывности (31) выполнено также при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае функция $p(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = p(\lambda E)$ не зависит от θ и из (31) следует тогда, что $\xi_1(\theta) + \xi_2(\theta) \equiv \delta = \text{const}$. Поэтому (31) переписывается в виде

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta), \quad (32)$$

где $\varphi_1(\lambda) = \alpha_1(\lambda) + \delta\lambda$, $\varphi_2(\lambda) = \alpha_2(\lambda)$, $\xi(\theta) = \xi_2(\theta)$.

Далее, очевидно, что матрица U является π -периодической функцией θ , что влечет π -периодичность функции $\theta \mapsto p(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$, откуда в свою очередь следует π -периодичность $\xi(\theta)$. Поэтому имеется представление $\xi(\theta) = h(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, где h является C^2 -гладкой функцией, заданной на единичной окружности в $\mathbb{R}^2$. Распространим $h(y)$ до однородной степени 1 функции на $\mathbb{R}^2$. Очевидно, $h(y) \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Из (14) следуют равенства $b - a = (\lambda_2 - \lambda_1) \cos 2\theta$, $-2c = (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\theta$ и с учетом однородности функции $h(y)$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta) = (\lambda_2 - \lambda_1)h(\cos 2\theta, \sin 2\theta) = h(b - a, -2c).$$

Отсюда и из (32) следует требуемое представление

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2) + h(b - a, -2c).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$ утверждение теоремы 2 верно без предположения C^2 -гладкости $p(U)$. В основе доказательства снова лежат соотношения замкнутости (22), (26), понимаемые уже в смысле теории распределений. Однако здесь дополнительно потребуются некоторые тонкие результаты дифференциальной топологии (типа теоремы Морса–Сарда).

Следующее предложение (с учетом теоремы 2) показывает, что множество сингулярных энтропий в общем случае существенно шире множества гладких энтропий:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Сингулярная энтропия $p(U)$ вида (20) является C^1 -гладкой на X тогда и только тогда, когда с точностью до линейного слагаемого $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$, $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$, то $p(U) \in C^1(X)$ ввиду гладкости отображения $U \mapsto \tilde{\varphi}(U)$. Обратно, пусть $p(U) \in C^1(X)$. После вычитания из $p(U)$ подходящей линейной функции, можем считать, что $p(0) = 0$, $\nabla p(0) = 0$.

Пусть $U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = T(\theta) \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}T(-\theta)$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $\theta \in \mathbb{R}$. В соответствии с (20) имеется представление

$$p(U) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2) + h(b - a, -2c) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta), \quad (33)$$

где $\varphi_1(u), \varphi_2(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $h(y) \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ – однородная функция, $\xi(\theta) = h(\cos 2\theta, \sin 2\theta) \in C^1(\mathbb{R})$.

Положим при $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$

$$r(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = p(U) - p(\Lambda) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\xi(\theta) - \xi(0)).$$

Из равенства $\nabla p(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ следует, что $\frac{\partial r}{\partial \lambda_k}(0, 0, \theta) = 0$, $k = 1, 2$, откуда $\xi(\theta) - \xi(0) \equiv 0$. Итак, $\xi(\theta) \equiv \xi = \text{const}$ и из (33)

$$p(U) = \bar{\varphi}_1(\lambda_1) + \bar{\varphi}_2(\lambda_2), \quad (34)$$

где $\bar{\varphi}_1(u) = \varphi_1(u) - \xi u$, $\bar{\varphi}_2(u) = \varphi_2(u) + \xi u$.

Заметим, что $\bar{\varphi}_1(0) + \bar{\varphi}_2(0) = p(\mathbf{0}) = 0$ и после замены $\bar{\varphi}_1(u) \mapsto \bar{\varphi}_1(u) - \bar{\varphi}_1(0)$, $\bar{\varphi}_2(u) \mapsto \bar{\varphi}_2(u) - \bar{\varphi}_2(0)$ равенство (34) останется верным. Таким образом, можно считать, что $\bar{\varphi}_k(0) = 0$, $k = 1, 2$. Как следует из (34), при $u, v \in \mathbb{R}$

$$p(u, v) = p(\text{diag}\{u, v\}) = \begin{cases} \bar{\varphi}_1(u) + \bar{\varphi}_2(v) & \text{при } u \leq v, \\ \bar{\varphi}_1(v) + \bar{\varphi}_2(u) & \text{при } v \leq u, \end{cases}$$

и, сравнив односторонние частные производные $\frac{\partial p}{\partial u}(u-, u) = \bar{\varphi}_1'(u)$ и $\frac{\partial p}{\partial u}(u+, u) = \bar{\varphi}_2'(u)$, придем к равенству $\bar{\varphi}_1'(u) = \bar{\varphi}_2'(u)$, откуда $\bar{\varphi}_1(u) - \bar{\varphi}_2(u) \equiv \bar{\varphi}_1(0) - \bar{\varphi}_2(0) = 0$. Итак, $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ и из (34) следует, что $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$. Предложение доказано.

В дополнение к предложению 2 заметим, что, как следует из (21), поток, соответствующий энтропии $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$, имеет вид $q(U) = \text{Tr } \tilde{\psi}(U)$, где скалярная функция $\psi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ с точностью до аддитивной константы определена равенством $\psi'(u) = \varphi'(u)f'(u)$.

Исследуем вопросы, связанные с выпуклостью сингулярных энтропий. Справедливо следующее необходимое условие выпуклости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть сингулярная энтропия $p(U)$ вида (20) выпукла на X . Тогда φ_1, φ_2 – выпуклые на $\mathbb{R}$ функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r(u, v) = p(\text{diag}\{u, v\})$. Из выпуклости $p(U)$ следует, что функция $r(u, v)$ выпукла на $\mathbb{R}^2$. Ввиду (20) и однородности h имеем при $u \leq v$

$$r(u, v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v) + (v - u)h(1, 0).$$

Отсюда следует, что функция $\varphi_1(u)$ выпукла при $u \leq v$ и в силу произвольности $v \in \mathbb{R}$ она выпукла на $\mathbb{R}$. Аналогично доказывается выпуклость φ_2 . Предложение доказано.

Для энтропий вида $p(U) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2)$ утверждение предложения 3 можно уточнить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Сингулярная энтропия $p(U) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2)$ выпукла тогда и только тогда, когда функции φ_1, φ_2 выпуклы на $\mathbb{R}$ и $\varphi_1' \leq \varphi_2'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть функция $p(U)$ выпукла на X . Тогда по предложению 3 функции φ_1, φ_2 выпуклы на $\mathbb{R}$. Далее, из выпуклости $p(U)$ следует выпуклость функции $\gamma(v) = p(\text{diag}\{u-v, u+v\})$ при любом фиксированном $u \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\gamma(v) = \begin{cases} \varphi_1(u-v) + \varphi_2(u+v), & v \geq 0, \\ \varphi_1(u+v) + \varphi_2(u-v), & v \leq 0, \end{cases}$$

и односторонние производные $\gamma'(0+) = \varphi_2'(u) - \varphi_1'(u)$, $\gamma'(0-) = \varphi_1'(u) - \varphi_2'(u)$. По выпуклости $\gamma'(0+) \geq \gamma'(0-)$, откуда следует требуемое неравенство $\varphi_1' \leq \varphi_2'$.

Достаточность. Предположим, что φ_1, φ_2 — выпуклые на $\mathbb{R}$ функции и $\varphi_1' \leq \varphi_2'$. Расписывая собственные числа $\lambda_1 \leq \lambda_2$ через компоненты матрицы $U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, получим

$$p(U) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2) = \varphi_1(l-d) + \varphi_2(l+d),$$

где

$$l = l(U) = \frac{a+b}{2}, \quad d = d(U) = \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2}.$$

Пусть $U_1, U_2 \in X$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\beta = 1 - \alpha$. Ясно, что $d(U)$ — выпуклая на X функция как суперпозиция линейного отображения $U \mapsto ((a-b)/2, c) \in \mathbb{R}^2$ и евклидовой нормы на $\mathbb{R}^2$. Поэтому

$$d(\alpha U_1 + \beta U_2) \leq \alpha d(U_1) + \beta d(U_2). \quad (35)$$

Далее, при любом фиксированном $l \in \mathbb{R}$ функция $\gamma(d) = \varphi_1(l-d) + \varphi_2(l+d)$ не убывает при $d \geq 0$. Действительно, ввиду выпуклости φ_1 имеем $\varphi_1'(l+d) \geq \varphi_1'(l-d)$ и

$$\gamma'(d) = \varphi_2'(l+d) - \varphi_1'(l-d) \geq \varphi_2'(l+d) - \varphi_1'(l+d) \geq 0$$

(по условию $\varphi_1' \leq \varphi_2'$). Поэтому из (35) следует, что

$$\gamma(d(\alpha U_1 + \beta U_2)) \leq \gamma(\alpha d(U_1) + \beta d(U_2)). \quad (36)$$

При $l = l(U)$, где $U = \alpha U_1 + \beta U_2$, из (36) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} p(\alpha U_1 + \beta U_2) &\leq \varphi_1(l(U) - (\alpha d(U_1) + \beta d(U_2))) \\ &\quad + \varphi_2(l(U) + (\alpha d(U_1) + \beta d(U_2))). \end{aligned}$$

По линейности $l(U) = \alpha l(U_1) + \beta l(U_2)$, и последнее неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} p(\alpha U_1 + \beta U_2) &\leq \varphi_1(\alpha(l(U_1) - d(U_1)) + \beta(l(U_2) - d(U_2))) \\ &\quad + \varphi_2(\alpha(l(U_1) + d(U_1)) + \beta(l(U_2) + d(U_2))) \\ &= \varphi_1(\alpha \lambda_1(U_1) + \beta \lambda_1(U_2)) + \varphi_2(\alpha \lambda_2(U_1) + \beta \lambda_2(U_2)). \end{aligned} \quad (37)$$

Вследствие выпуклости функций φ_i , $i = 1, 2$,

$$\varphi_i(\alpha\lambda_i(U_1) + \beta\lambda_i(U_2)) \leq \alpha\varphi_i(\lambda_i(U_1)) + \beta\varphi_i(\lambda_i(U_2)),$$

и из (37) следует требуемое неравенство

$$\begin{aligned} p(\alpha U_1 + \beta U_2) &\leq \alpha(\varphi_1(\lambda_1(U_1)) + \varphi_2(\lambda_2(U_1))) + \beta(\varphi_1(\lambda_1(U_2)) + \varphi_2(\lambda_2(U_2))) \\ &= \alpha p(U_1) + \beta p(U_2), \end{aligned}$$

доказывающее выпуклость функции $p(U)$. Предложение полностью доказано.

В дополнение к предложению 4 заметим, что энтропия $p(U) = h(b - a, -2c)$ выпукла тогда и только тогда, когда выпукла функция $h(y)$, что ввиду однородности означает сублинейность функции h , т.е. выполнение условий однородности и субаддитивности ($h(y_1 + y_2) \leq h(y_1) + h(y_2)$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$).

§ 3. Постановка задачи Коши. Понятие обобщенного энтропийного решения

Пусть $U_0(x)$ – ограниченная измеримая функция на $\mathbb{R}$ со значениями в X : $U_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$. Рассмотрим задачу Коши для системы (1) с начальным условием

$$U(0, x) = U_0(x). \quad (38)$$

Известно (см., например, [2, гл. 1]), что для гиперболических систем квазилинейных уравнений в случае достаточно гладких входных данных в некоторой окрестности прямой $t = 0$ существует единственное C^1 -гладкое (классическое) решение соответствующей задачи Коши. Однако с ростом t , как правило, появляются разрывы решения (что связано с пересечением характеристик) и глобального классического решения в общем случае не существует. Поэтому для построения нелокальной теории задачи Коши вводятся в рассмотрение обобщенные решения. Класс обобщенных решений, связанный с пониманием системы в смысле теории распределений, оказывается слишком широким, в этом классе обычно нет единственности. Необходимы дополнительные условия. Поиск таких условий, в идеале выделяющих класс существования и единственности среди обобщенных решений рассматриваемой задачи, является одной из главных задач нелокальной теории задачи Коши для систем квазилинейных законов сохранения.

Со времени опубликования фундаментальной работы Хопфа [6] основным методом исследования задачи Коши для гиперболических систем законов сохранения остается метод “исчезающей вязкости”, связанный с осуществлением предельного перехода по решениям U^ε параболических систем, получаемых заменой правой части исходной системы на член $\varepsilon \Delta U$, при стремлении “вязкости” $\varepsilon > 0$ к нулю. Из этого метода естественно вытекают дополнительные условия на обобщенные решения (например, приводимые ниже энтропийные условия Кружкова–Лакса). В

скалярном случае метод “исчезающей вязкости” для общего квазилинейного уравнения первого порядка был обоснован в работе [3], где построена нелокальная теория обобщенных энтропийных решений задачи Коши в классе ограниченных измеримых функций. Приведем соответствующее определение применительно к задаче Коши для простейшего уравнения:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (39)$$

$u = u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi$, $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (40)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *обобщенным энтропийным решением* (коротко о.э.р.) задачи Коши (39), (40), если:

а) для любой выпуклой функции $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\varphi(u)_t + \psi(u)_x \leq 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi), \quad (41)$$

где функция $\psi(u)$ (поток) с точностью до аддитивной константы определена равенством $\psi'(u) = \varphi'(u)f'(u)$;

б) $\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} u(t, \cdot) = u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Условие а) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$\int_{\Pi} [\varphi(u)g_t + \psi(u)g_x] dt dx \geq 0.$$

Полагая в условии а) $\varphi(u) = \pm u$, получим, что о.э.р. $u(t, x)$ удовлетворяет (39) в $\mathcal{D}'(\Pi)$.

Заметим также (см. [3], [8], [9]), что условие а) определения 2 эквивалентно условию

$$\text{а')} \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad |u - k|_t + ((f(u) - f(k)) \text{sign}(u - k))_x \leq 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi).$$

Известно (см. [3]), что при $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ всегда существует единственное о.э.р. задачи Коши (39), (40).

Понятие о.э.р. задачи (39), (40) определено также и в случае лишь непрерывной функции $f(u)$, нужно лишь заменить условие а) на а') или положить в (41)

$$\psi(u) = \varphi'(u)f(u) - \int_0^u f(s) d\varphi'(s) \quad (42)$$

(так что в гладком случае $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ имеем $\psi'(u) = \varphi'(u)f'(u)$).

Так как функция $\varphi(u)$ выпукла, $d\varphi'(s)$ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}$ и правая часть равенства (42) корректно определена. При этом если u_0 – точка непрерывности монотонной функции $\varphi'(s)$, то из (42) следует, что с точностью до аддитивной константы

$$\psi(u) = \varphi'(u_0)f(u) + \int_{u_0}^u (f(u) - f(s)) d\varphi'(s),$$

откуда легко вытекает непрерывность функции $\psi(u)$.

В случае $f(u) \in C(\mathbb{R})$, вообще говоря, появляется нехарактерный для гиперболических уравнений эффект бесконечности области зависимости решения от начальных данных, который при многих пространственных переменных может приводить к неединственности о.э.р. (см. [7]–[9]). Однако, как показано в [7]–[10], для рассматриваемого случая одной пространственной переменной x задача Коши всегда однозначно разрешима.

Ниже нам понадобятся также понятия обобщенного энтропийного субрешения (коротко о.э.суб.р.) и обобщенного энтропийного суперрешения (коротко о.э.супер.р.) задачи Коши (39), (40).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [8], [10]. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *о.э.суб.р.* (*о.э.супер.р.*) *задачи Коши* (39), (40), если для любой неубывающей (соответственно невозрастающей) выпуклой функции $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ выполнено условие (41); выполнено также начальное условие b) из определения 2.

Строго говоря, по сравнению с определением из [8], [10] мы здесь несколько усиливаем начальное условие. Это, однако, не нарушает справедливости следующего предложения, доказанного в [8], [10] для общего случая $f(u) \in C(\mathbb{R})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1) *Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ является о.э.р. задачи Коши* (39), (40) *тогда и только тогда, когда она является о.э.суб.р. и о.э.супер.р. задачи Коши* (39), (40) *одновременно.*

2) *Пусть $v_0(x), w_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $v_0(x) \leq w_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$; $v(t, x)$ – о.э.суб.р., а $w(t, x)$ – о.э.супер.р. задачи Коши* (39), (40) *с начальными функциями $v_0(x), w_0(x)$ соответственно. Тогда $v(t, x) \leq w(t, x)$ п.в. на Π (принцип сравнения).*

Понятие о.э.р. задачи (1), (38) определим по аналогии со скалярным случаем, взяв за основу приводимое ниже энтропийное условие Кружкова–Лакса (43). Как показано в [3], для гладких энтропий это условие естественно вытекает из идеи метода “исчезающей вязкости”. О.э.р. задачи (1), (38), построенные на базе условия (43) с гладкими энтропиями вида $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$, были рассмотрены в работах [11], [12]. При этом в [12] рассмотрен общий случай, когда X – пространство симметричных (или эрмитовых) матриц произвольного порядка (в этом случае показано, что функции вида $p(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}(U)$ являются гладкими энтропиями, и если $f(u)$ не линейна на невырожденных интервалах, то этими функциями, с точностью до линейного слагаемого, исчерпывается множество гладких энтропий).

Для наших целей будет необходимо расширить множество допустимых энтропий в условии Кружкова–Лакса до множества сингулярных энтропий. При этом мы ограничимся сингулярными энтропиями вида (20); как следует из теоремы 2 и замечания 2, это не умаляет общности, если функция $f(u)$ лежит в $C^2(\mathbb{R})$ и не линейна на невырожденных интервалах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Ограниченная измеримая X -значная функция $U = U(t, x) \in L^\infty(\Pi, X)$ называется *о.э.р. задачи Коши* (1), (38), если:

а) для любой выпуклой сингулярной энтропии $p(U) \in \mathcal{F}$ вида (20) и соответствующего потока $q(U)$

$$p(U)_t + q(U)_x \leq 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi); \quad (43)$$

$$\text{b) } \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} U(t, \cdot) = U_0 \text{ в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X). \quad (44)$$

Заметим, что ввиду (7) для классического решения $U(t, x) \in C^1(\Pi, X)$ условие (43) выполнено со знаком равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Подставляя в (43) линейные энтропии $p(U) = \pm(C, U)$, $C \in X$, получим, что о.э.р. $U(t, x)$ удовлетворяет системе (1) в смысле распределений, т.е. действительно является обобщенным решением. Здесь следует отметить, что линейную энтропию $p(U) = (C, U)$ можно записать в форме (20). Действительно, для некоторых постоянных k_1, k_2, k_3

$$p(U) = k_1(a + b) + k_2(b - a) + k_3c,$$

где a, b, c – компоненты матрицы U . Остается заметить, что $a + b = \operatorname{Tr} U = \lambda_1 + \lambda_2$ и $k_2(b - a) + k_3c = h(b - a, -2c)$ с некоторой линейной на $\mathbb{R}^2$ функцией $h(y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что класс сингулярных энтропий вида (20) инвариантен относительно преобразования подобия $U \mapsto QUQ^{-1}$ на X , Q – ортогональная матрица. Отсюда следует, что это преобразование сохраняет множество о.э.р., т.е. $QU(t, x)Q^{-1}$ является о.э.р. задачи (1), (38) с начальными данными $QU_0(x)Q^{-1}$, если $U(t, x)$ – о.э.р. этой задачи с начальными данными $U_0(x)$.

Покажем, далее, что условие (43) может быть получено методом “исчезающей вязкости” и в случае сингулярной энтропии $p(U)$. Рассмотрим параболическую аппроксимацию системы (1)

$$U_t + \tilde{f}(U)_x = \varepsilon U_{xx}, \quad \varepsilon > 0. \quad (45)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Предположим, что существует последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такая, что определено решение $U^k = U^k(t, x) \in C^2(\Pi)$ системы (45) с $\varepsilon = \varepsilon_k$ и при $k \rightarrow \infty$ последовательность U^k сходится в $L^1_{\text{loc}}(\Pi, X)$ к X -значной функции $U = U(t, x)$. Тогда $U(t, x)$ удовлетворяет условию (43) для любой выпуклой сингулярной энтропии $p(U)$ и соответствующего потока $q(U)$.*

Для доказательства нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. *Пусть $p(U) \in \mathcal{F}$ – выпуклая на X функция, $U = U(t, x) \in C^2(\Pi)$. Тогда*

$$(\nabla p(U), U_{xx}) \leq p(U)_{xx} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi);$$

здесь градиент $\nabla p(U)$ доопределен при $U \in X_0$ в соответствии с (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $R > 0$ обозначим через $B_R = \{U \in X \mid \|U\| \leq R\}$ шар радиуса R в X . Пусть $\rho(U) \in C_0^\infty(X)$, $\rho(U) \geq 0$, $\operatorname{supp} \rho \subset B_1$, $\int \rho(U) dU = 1$. При $r \in \mathbb{N}$ положим $\rho_r(U) = r^3 \rho(rU)$. Тогда $\rho_r(U) \in C_0^\infty(X)$, $\rho_r(U) \geq 0$, $\operatorname{supp} \rho_r \subset B_{1/r}$, $\int \rho_r(U) dU = 1$ (с учетом того, что $\dim X = 3$). Из приведенных

свойств следует, что при $r \rightarrow \infty$ последовательность $\rho_r(U)$ сходится в $\mathcal{D}'(X)$ к δ -функции Дирака. Рассмотрим средние функции

$$p_r(U) = (p * \rho_r)(U) = \int_X p(U - V) \rho_r(V) dV.$$

Из свойств средних функций следует, что для всех $r \in \mathbb{N}$ $p_r(U)$ – выпуклая бесконечно дифференцируемая функция и (с учетом определения класса $\mathcal{F}$) при $r \rightarrow \infty$

$$p_r(U) \rightarrow p(U), \quad (46)$$

$$\frac{\partial p_r(U)}{\partial E} \rightarrow \frac{\partial p(U)}{\partial E} \quad (47)$$

равномерно на любом компакте в X ;

$$\nabla p_r(U) \rightarrow \nabla p(U) \quad (48)$$

равномерно на любом компакте в $X \setminus X_0$.

Пусть $\mathcal{M} = \{(t, x) \in \Pi \mid U(t, x) \in X_0, U_{xx}(t, x) \notin X_0\}$. Тогда $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1 = \{(t, x) \in \Pi \mid U(t, x) \in X_0, U_x(t, x) \notin X_0\}$, $\mathcal{M}_2 = \{(t, x) \in \Pi \mid U_x(t, x) \in X_0, U_{xx}(t, x) \notin X_0\}$. Применяя лемму 1 к гладким функциям U, U_x , получим, что множества $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ имеют нулевую меру, откуда следует, что и $\mathcal{M}$ – множество нулевой меры. Покажем, что при $(t, x) \notin \mathcal{M}$ (т.е. для п.в. (t, x))

$$(\nabla p_r(U), U_{xx}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (\nabla p(U), U_{xx}), \quad U = U(t, x). \quad (49)$$

Для этого рассмотрим два возможных случая:

1) $U(t, x) \notin X_0$; в этом случае (49) непосредственно следует из предельного соотношения (48);

2) $U(t, x) \in X_0, U_{xx}(t, x) \in X_0$; тогда, как следует из последнего включения, $(\nabla p_r(U), U_{xx}) = \frac{\partial p_r(U)}{\partial E} U_{xx}$, $(\nabla p(U), U_{xx}) = \frac{\partial p(U)}{\partial E} U_{xx}$ и (49) вытекает из соотношения (47).

Далее, легко видеть, что

$$(\nabla p_r(U), U_{xx}) = p_r(U)_{xx} - d^2 p_r(U)(U_x, U_x).$$

Ввиду выпуклости p_r форма $d^2 p_r(U)(dU, dU)$ неотрицательна, и мы приходим к неравенству $(\nabla p_r(U), U_{xx}) \leq p_r(U)_{xx}$, умножая которое на неотрицательную пробную функцию $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ и интегрируя на Π с использованием формулы интегрирования по частям, получим

$$\int_\Pi (\nabla p_r(U), U_{xx}) g dt dx \leq \int_\Pi p_r(U) g_{xx} dt dx.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $r \rightarrow \infty$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости (заметим, что с учетом локальной липшицевости $p(U)$ функции $(\nabla p_r(U), U_{xx})$ ограничены равномерно по r на любом компакте в Π) из предельных соотношений (46), (49) следует

$$\int_\Pi (\nabla p(U), U_{xx}) g dt dx \leq \int_\Pi p(U) g_{xx} dt dx,$$

откуда ввиду произвольности неотрицательной пробной функции $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ получим, что $(\nabla p(U), U_{xx}) \leq p(U)_{xx}$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. По условию $\forall k \in \mathbb{N}$

$$U_t^k + \tilde{f}(U^k)_x = \varepsilon_k U_{xx}^k.$$

Умножим это равенство на $\nabla p(U^k)$. Тогда с учетом (6), предложения 1 и леммы 2 придем к неравенству

$$p(U^k)_t + q(U^k)_x \leq \varepsilon_k p(U^k)_{xx} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi),$$

умножая которое на неотрицательную пробную функцию $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ и интегрируя на Π , получим

$$- \int_{\Pi} [p(U^k)g_t + q(U^k)g_x] dt dx \leq \varepsilon_k \int_{\Pi} p(U^k)g_{xx} dt dx.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$ и принимая во внимание, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$, получаем неравенство

$$\int_{\Pi} [p(U)g_t + q(U)g_x] dt dx \geq 0,$$

эквивалентное (43) ввиду произвольности неотрицательной пробной функции $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$. Предложение доказано.

Заметим, что поток $q(U)$ определен формулой (21) и в случае лишь непрерывной функции $f(u)$, если только определить функции ψ_i , $i = 1, 2$, равенствами (42) с $\psi = \psi_i$, $\varphi = \varphi_i$. Таким образом, определение 4 корректно и в случае лишь непрерывной функции $f(u)$, что и будет ниже всюду предполагаться. В этом общем случае мы будем часто использовать следующие два технических результата.

ЛЕММА 3 (см. [8], [9]). Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\omega: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ — неубывающая субаддитивная функция. Тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$\sup_{\sigma > 0} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma + \varepsilon} \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma > 0$. Мы можем выбрать натуральное k так, что $\sigma \in ((k-1)\varepsilon, k\varepsilon]$. Так как функция $\omega(\sigma)$ не убывает, то $\omega(\sigma) \leq \omega(k\varepsilon)$ и по субаддитивности $\omega(k\varepsilon) \leq k\omega(\varepsilon)$; кроме того, $\sigma + \varepsilon \geq (k-1)\varepsilon + \varepsilon = k\varepsilon$. Следовательно,

$$\frac{\omega(\sigma)}{\sigma + \varepsilon} \leq \frac{k\omega(\varepsilon)}{k\varepsilon} = \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$\forall \sigma > 0 \quad \frac{\omega(\sigma)}{\sigma + \varepsilon} \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

что эквивалентно утверждению леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha_t + \beta_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, где $\alpha = \alpha(t, x)$, $\beta = \beta(t, x) \in L^\infty(\Pi)$; $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} \alpha(t, x) = \alpha(0, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$; $\forall \varepsilon > 0 \quad |\beta(t, x)| \leq N(\varepsilon)(\alpha(t, x) + \varepsilon)$ п.в. в Π (из этого условия следует, что $\alpha \geq 0$ п.в. на Π), $N(\varepsilon) \geq 1$. Тогда для п.в. $t > 0$ справедлива оценка

$$\int \alpha(t, x) e^{-|x|} dx \leq e^t \cdot \inf_{\varepsilon > 0} \left(\int \alpha(0, x) e^{-|x|/N(\varepsilon)} dx + 2\varepsilon N(\varepsilon) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Умножим неравенство $(\alpha + \varepsilon)_t + \beta_x \leq 0$ на неотрицательную функцию $g_\varepsilon(x) = e^{-|x|/N(\varepsilon)}$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}$. Получим, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

$$\frac{d}{dt} \int (\alpha(t, x) + \varepsilon) g_\varepsilon(x) dx \leq \int \beta(t, x) g'_\varepsilon(x) dx.$$

Ввиду оценки $|\beta(t, x)| \leq N(\varepsilon)(\alpha(t, x) + \varepsilon)$ п.в. в Π и равенства $|g'_\varepsilon(x)| = g_\varepsilon(x)/N(\varepsilon)$

$$\int \beta(t, x) g'_\varepsilon(x) dx \leq \int (\alpha(t, x) + \varepsilon) g_\varepsilon(x) dx$$

для п.в. $t > 0$, и мы приходим к соотношению $H'_\varepsilon(t) \leq H_\varepsilon(t)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, где

$$H_\varepsilon(t) = \int (\alpha(t, x) + \varepsilon) g_\varepsilon(x) dx.$$

По лемме Гронуолла тогда для п.в. $t > 0$ $H_\varepsilon(t) \leq e^t \cdot H_\varepsilon(0)$, где

$$H_\varepsilon(0) = \text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} H_\varepsilon(t) = \int (\alpha(0, x) + \varepsilon) g_\varepsilon(x) dx.$$

Далее с учетом условия $N(\varepsilon) \geq 1$ имеем $g_\varepsilon(x) \geq e^{-|x|}$ и для п.в. $t > 0$

$$\int \alpha(t, x) e^{-|x|} dx \leq H_\varepsilon(t) \leq e^t \cdot H_\varepsilon(0) = e^t \left(\int \alpha(0, x) g_\varepsilon(x) dx + \varepsilon \int g_\varepsilon(x) dx \right).$$

Так как $\int g_\varepsilon(x) dx = \int e^{-|x|/N(\varepsilon)} dx = 2N(\varepsilon)$, то мы получаем, что для п.в. $t > 0$

$$\int \alpha(t, x) e^{-|x|} dx \leq e^t \left(\int \alpha(0, x) e^{-|x|/N(\varepsilon)} dx + 2\varepsilon N(\varepsilon) \right),$$

и для завершения доказательства остается учесть произвольность $\varepsilon > 0$.

Как следует из предложения 4, функции $p(U) = \varphi(\lambda_1)$, где $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ выпукла и не возрастает, и $p(U) = \varphi(\lambda_2)$, где $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ выпукла и не убывает, являются выпуклыми энтропиями с соответствующими потоками $q(U) = \psi(\lambda_1)$, $q(U) = \psi(\lambda_2)$, где функция $\psi(u)$ определяется по $\varphi(u)$ равенством (42). Из условия (43) с указанными энтропиями и из начального условия (44) непосредственно следует

ТЕОРЕМА 3. Если $U(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (38), $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$, $\lambda_1^0(x) \leq \lambda_2^0(x)$ – собственные числа матриц $U(t, x)$, $U_0(x)$ соответственно, то функция $\lambda_2(t, x)$ является о.э.суб.р., а функция $\lambda_1(t, x)$ – о.э.супер.р. задачи Коши (39), (40) с соответствующими начальными данными $\lambda_2^0(x)$, $\lambda_1^0(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $U_0(x) = u_0(x)E$, $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Тогда о.э.р. $U(t, x)$ задачи (1), (38) имеет вид $U(t, x) = u(t, x)E$, где $u(t, x)$ – единственное о.э.р. скалярной задачи (39), (40) с начальной функцией $u_0(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$ – собственные числа матрицы $U(t, x)$. По теореме 3 функция $\lambda_2(t, x)$ является о.э.суб.р., а функция $\lambda_1(t, x)$ – о.э.супер.р. задачи Коши (39), (40) с одной и той же начальной функцией $u_0(x)$. В силу принципа сравнения из предложения 5 п.в. на Π имеем $\lambda_2(t, x) \leq \lambda_1(t, x)$. Отсюда и из условия $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$ следует равенство $\lambda_1(t, x) = \lambda_2(t, x)$ п.в. на Π , т.е. $U(t, x) = u(t, x)E$, где $u(t, x) = \lambda_1(t, x) = \lambda_2(t, x)$. Поскольку функция $u(t, x)$ является одновременно о.э.суб.р. и о.э.супер.р. задачи Коши (39), (40), то по предложению 5 $u(t, x)$ – о.э.р. задачи (39), (40) с начальной функцией $u_0(x)$. Следствие доказано.

Пусть $|U| = \sup\{\|Ux\| \mid x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ – операторная норма матрицы U ; хорошо известно, что $|U| = \max(\lambda_1, \lambda_2)$.

Из теоремы 3 вытекает следующий “принцип максимума”.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть для некоторой константы $M > 0$ $|U_0(x)| \leq M$ п.в. на $\mathbb{R}$. Тогда если $U(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (38), то $|U(t, x)| \leq M$ п.в. на Π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$, $\lambda_1^0(x) \leq \lambda_2^0(x)$ – собственные числа матриц $U(t, x)$, $U_0(x)$ соответственно. Из условия $|U_0(x)| \leq M$ п.в. на $\mathbb{R}$ следует, что $-M \leq \lambda_1^0(x)$ и $\lambda_2^0(x) \leq M$ п.в. на $\mathbb{R}$. Ясно, что постоянные функции $-M$ и M являются о.э.р. задачи (39), (40). Далее, по теореме 3 функция $\lambda_2(t, x)$ является о.э.суб.р., а функция $\lambda_1(t, x)$ – о.э.супер.р. задачи Коши (39), (40) с соответствующими начальными данными $\lambda_2^0(x)$, $\lambda_1^0(x)$. Применяя предложение 5, получим тогда, что $-M \leq \lambda_1(t, x)$, $\lambda_2(t, x) \leq M$ п.в. на Π . Это как раз и означает, что $|U(t, x)| \leq M$ п.в. на Π . Следствие доказано.

Как показано в [11], [12], утверждения следствий 1, 2 справедливы и для о.э.р., построенных на базе условия (43) с гладкими энтропиями $p(U)$, в общем случае (см. [12]), когда X – пространство симметричных или эрмитовых матриц произвольного порядка.

Обозначим при $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq 1$

$$\begin{aligned} X(\alpha, \delta) &= \{U \in X \mid \lambda_2 = \lambda_1 \text{ или } \cos 2(\theta - \alpha) \geq \delta\}, \\ \dot{X}(\alpha, \delta) &= \{U \in X \mid \lambda_2 = \lambda_1 \text{ или } \cos 2(\theta - \alpha) > \delta\}. \end{aligned}$$

Здесь, как обычно, $\lambda_1 \leq \lambda_2$, θ определяются из представления $U = T(\theta) \times \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}T(-\theta)$. Рассмотрим при $e_\alpha = (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) \in \mathbb{R}^2$ плоские углы

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha, \delta) &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid (y, e_\alpha) \geq \delta\|y\|\}, \\ \dot{\Gamma}(\alpha, \delta) &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid (y, e_\alpha) > \delta\|y\|\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $\Gamma(\alpha, \delta)$ – замкнутый, а $\dot{\Gamma}(\alpha, \delta)$ – открытый угол (с добавлением вершины) величины $2 \arccos \delta$. Если a, b, c – компоненты матрицы U , то ввиду равенств $b - a = (\lambda_2 - \lambda_1) \cos 2\theta$, $-2c = (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\theta$ множества $X(\alpha, \delta)$ и $\dot{X}(\alpha, \delta)$ являются прообразами углов $\Gamma(\alpha, \delta)$ и соответственно $\dot{\Gamma}(\alpha, \delta)$ при проекции $U \mapsto (b - a, -2c)$ (в частности, $X(\alpha, \delta)$, $\dot{X}(\alpha, \delta)$ – двугранные углы в X).

Используя энтропии вида $p(U) = h(b - a, -2c)$, можно доказать следующий результат об устойчивости о.э.р. по “угловой” переменной θ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq 1$ и для п.в. $x \in \mathbb{R}$ $U_0(x) \in X(\alpha, \delta)$ ($U_0(x) \in \dot{X}(\alpha, \delta)$). Тогда если $U = U(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (38), то $U(t, x) \in X(\alpha, \delta)$ (соответственно $U(t, x) \in \dot{X}(\alpha, \delta)$) п.в. на Π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $\alpha = 0$. Общий случай сводится к рассматриваемому с помощью замены $U_0 \mapsto T(-\alpha)U_0T(\alpha)$, $U \mapsto T(-\alpha)UT(\alpha)$. При такой замене U останется о.э.р. задачи (1), (38) с начальной функцией U_0 (см. замечание 4).

Заметим далее, что энтропийное условие (43) справедливо для энтропий вида $p(U) = h(b - a, -2c)$ с лишь непрерывными сублинейными функциями $h(y)$ (где a, b, c – компоненты матрицы U). Последнее легко доказывается путем аппроксимации функции $h(y)$ последовательностью сублинейных функций $h_k(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, $k \in \mathbb{N}$. Например, можно положить (интерпретируя точки на $\mathbb{R}^2$ как комплексные числа)

$$h_k(y) = \int_{|z|=1} \bar{h}(y/z) r_k(z) ds(z) = \int_{|z|=1} \bar{h}(z) r_k(y/z) ds(z),$$

где $ds(z)$ – мера Лебега на окружности $|z| = 1$, $r_k(z)$ – последовательность неотрицательных C^∞ -гладких ядер на окружности такая, что $\text{supp } r_k \subset \{\exp(i\gamma) \mid |\gamma| \leq 1/k\}$, $\int_{|z|=1} r_k(z) ds(z) = 1$.

Ясно, что $h_k(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ – сублинейные функции и $h_k(y) \rightarrow h(y)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^2$. Пусть $p_k(U) = h_k(b - a, -2c)$ – сингулярная энтропия системы (1), $q_k(U) = \mu h_k(b - a, -2c)$ – соответствующий поток (см. формулу (21)). По условию (43) при $U = U(t, x)$ имеем $p_k(U)_t + q_k(U)_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ и в пределе при $k \rightarrow \infty$ получаем требуемое соотношение $p(U)_t + q(U)_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, где $p(U) = h(b - a, -2c)$, $q(U) = \mu h(b - a, -2c)$.

Положим $h(y) = \max(\delta \|y\| - y_1, 0)$. Тогда непрерывная функция $h(y)$ сублинейна как максимум сублинейных функций, неотрицательна и $h(y) = 0$ в точности на множестве $\Gamma(0, \delta)$.

Пусть

$$p(U) = h(b - a, -2c) = (\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta),$$

$$q(U) = \mu h(b - a, -2c) = (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))\xi(\theta), \quad \xi(\theta) = h(\cos 2\theta, \sin 2\theta).$$

Ясно, что $0 \leq \xi(\theta) \leq 1$.

Если $U = U(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (38) с начальными данными $U_0 = U_0(x)$, то в силу принципа максимума из следствия 2 $|U(t, x)| \leq M = \text{ess sup } |U_0(x)|$

п.в. на Π и для п.в. $(t, x) \in \Pi$ собственные числа $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$ матрицы U удовлетворяют условию $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x) \in [-M, M]$. Пусть

$$\omega(\sigma) = \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in [-M, M], |u - v| \leq \sigma\}$$

– модуль непрерывности функции $f(u)$ на отрезке $[-M, M]$. Ясно, что $\omega(\sigma)$ – неубывающая субаддитивная функция на $\mathbb{R}_+$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \omega(\sigma) = 0$. По лемме 3 $\forall \varepsilon > 0$

$$\omega(\lambda_2 - \lambda_1) \leq (\lambda_2 - \lambda_1 + \varepsilon)\omega(\varepsilon)/\varepsilon$$

и при п.в. $(t, x) \in \Pi$, для которых $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x) \in [-M, M]$,

$$\begin{aligned} |q(U)| &= |f(\lambda_2) - f(\lambda_1)|\xi(\theta) \leq \omega(\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta) \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}(\lambda_2 - \lambda_1 + \varepsilon)\xi(\theta) \\ &= \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}((\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta) + \varepsilon\xi(\theta)) \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}(p(U) + \varepsilon) \end{aligned}$$

(напомним, что $\xi(\theta) \leq 1$).

Пусть $N(\varepsilon) = \omega(\varepsilon)/\varepsilon + 1$. Тогда $N(\varepsilon) \geq 1$ и для п.в. $(t, x) \in \Pi$

$$|q(U(t, x))| \leq N(\varepsilon)(p(U(t, x)) + \varepsilon).$$

По условиям (43), (44) имеем также $p(U)_t + q(U)_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ и $\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} p(U(t, x)) = p(U_0(x))$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Таким образом, функции $\alpha(t, x) = p(U(t, x))$, $\beta(t, x) = q(U(t, x))$ удовлетворяют условиям леммы 4, и по этой лемме для п.в. $t > 0$

$$\int p(U(t, x))e^{-|x|} dx \leq e^t \cdot \inf_{\varepsilon > 0} \left(\int p(U_0(x))e^{-|x|/N(\varepsilon)} dx + 2\varepsilon N(\varepsilon) \right). \quad (50)$$

Так как по построению $p(U) = h(b - a, -2c) = 0$ при $(b - a, -2c) \in \Gamma(0, \delta)$, или, что то же самое, при $U \in X(0, \delta)$, а по условию $U_0(x) \in X(0, \delta)$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $\int p(U_0(x))e^{-|x|/N(\varepsilon)} dx = 0$, и из (50) следует оценка

$$\int p(U(t, x))e^{-|x|} dx \leq e^t \cdot \inf_{\varepsilon > 0} 2\varepsilon N(\varepsilon) = 0,$$

так как $\varepsilon N(\varepsilon) = \varepsilon + \omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Из этой оценки следует, что $p(U(t, x)) = 0$ п.в. на Π . С учетом свойств функции $h(y)$ это приводит к включению $U(t, x) \in X(0, \delta)$ п.в. на Π , которое и нужно было установить.

Переходя к доказательству утверждения теоремы, касающегося множества $\dot{X}(0, \delta)$, предположим, что $U_0(x) \in \dot{X}(0, \delta)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Тогда, как это уже доказано выше, $U(t, x) \in X(0, \delta)$ п.в. на Π .

Рассмотрим далее последовательность непрерывных сублинейных функций $h_k(y) = \max(\|y\| + k(\delta\|y\| - y_1), 0)$, $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что при $y \in \Gamma(0, \delta)$ (когда $\delta\|y\| - y_1 \leq 0$) $0 \leq h_k(y) \leq \|y\|$ и

$$h_k(y) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} h(y) = \begin{cases} 0, & \delta\|y\| - y_1 < 0, \\ \|y\|, & \delta\|y\| - y_1 = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Легко видеть, что $h(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y \in \dot{\Gamma}(0, \delta)$.

Положим

$$\begin{aligned} p_k(U) &= h_k(b - a, -2c) = (\lambda_2 - \lambda_1)\xi_k(\theta), \\ q_k(U) &= \mu h_k(b - a, -2c) = (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))\xi_k(\theta), \quad \xi_k(\theta) = h_k(\cos 2\theta, \sin 2\theta). \end{aligned}$$

При п.в. $(t, x) \in \Pi$, когда $U(t, x) \in X(0, \delta)$, точка $(b - a, -2c)$ принадлежит $\Gamma(0, \delta)$, и для $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеем

$$0 \leq \xi_k(\theta) = \max(1 + k(\delta - \cos 2\theta), 0) \leq 1.$$

Повторяя рассуждения из первой части доказательства, получим, что справедлива оценка вида (50), т.е. при любом $\varepsilon > 0$ для п.в. $t > 0$

$$\int p_k(U(t, x))e^{-|x|} dx \leq e^t \left(\int p_k(U_0(x))e^{-|x|/N(\varepsilon)} dx + 2\varepsilon N(\varepsilon) \right). \quad (52)$$

Далее, $U_0(x) \in \dot{X}(0, \delta)$ п.в. на $\mathbb{R}$, $U(t, x) \in X(0, \delta)$ п.в. на Π , т.е. для п.в. значений аргументов справедливы включения $(b_0 - a_0, -2c_0) \in \dot{\Gamma}(0, \delta)$ (a_0, b_0, c_0 — компоненты матрицы U_0), $(b - a, -2c) \in \Gamma(0, \delta)$. Тогда ввиду (51) при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} p_k(U_0) &= h_k(b_0 - a_0, -2c_0) \rightarrow h(b_0 - a_0, -2c_0) = 0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}, \\ p_k(U) &= h_k(b - a, -2c) \rightarrow p(U) = h(b - a, -2c) \quad \text{п.в. на } \Pi, \end{aligned}$$

и по теореме Лебега об ограниченной сходимости в пределе при $k \rightarrow \infty$ из (52) следует оценка: для п.в. $t > 0$

$$\int p(U(t, x))e^{-|x|} dx \leq 2e^t \varepsilon N(\varepsilon), \quad p(U) = h(b - a, -2c),$$

из которой ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает, что

$$\int p(U(t, x))e^{-|x|} dx = 0 \quad \text{для п.в. } t > 0.$$

Это означает, что $p(U) = h(b - a, -2c) = 0$ п.в. на Π , т.е. для п.в. значений аргументов $(b - a, -2c) \in \dot{\Gamma}(0, \delta)$, что эквивалентно включению $U \in \dot{X}(0, \delta)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $U_0 = \text{diag}\{a_0, b_0\}$ — диагональная матрица. Тогда о.э.р. задачи (1), (38) также диагонально: $U = \text{diag}\{a, b\}$ п.в. на Π .

Для доказательства нужно лишь заметить, что множество диагональных матриц есть $X(\pi/4, 0) \cap X(3\pi/4, 0)$.

§ 4. Сильные обобщенные энтропийные решения

Несмотря на довольно ограничительное условие (43), о.э.р. задачи (1), (38) может быть неединственным (см. ниже пример 2). В связи с этим в настоящем параграфе мы рассматриваем сильные о.э.р. (коротко с.о.э.р.) задачи Коши (1), (38) и показываем, что в классе с.о.э.р. задача (1), (38) однозначно разрешима. Понятие с.о.э.р. задачи (1), (38) введено впервые в [11], там же доказаны существование и единственность с.о.э.р. в случае $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$. Мы распространяем эти результаты на общий случай $f(u) \in C(\mathbb{R})$. Кроме того, показывается, что с.о.э.р. является и о.э.р. в смысле определения 4 (что естественно), и приводится одно условие, при котором с.о.э.р. является единственным о.э.р. задачи (1), (38).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. X -значная функция $U = U(t, x) \in L^\infty(\Pi, X)$ называется *с.о.э.р. задачи Коши* (1), (38), если:

C1) $U_t + \tilde{f}(U)_x = \mathbf{0}$ в $\mathcal{D}'(\Pi, X)$;

C2) собственные числа $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$ матрицы $U(t, x)$ являются о.э.р. скалярной задачи (39), (40) с начальными данными $\lambda_1^0(x)$, $\lambda_2^0(x)$ соответственно, где $\lambda_1^0(x) \leq \lambda_2^0(x)$ – собственные числа матрицы $U_0(x)$;

C3) выполнено начальное условие (44).

Покажем, что данное определение естественно в том смысле, что в случае, когда $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ и существует классическое решение $U = U(t, x) = T(\theta) \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\} T(-\theta)$ задачи (1), (38) с гладкими на Π функциями $\lambda_1 = \lambda_1(t, x)$, $\lambda_2 = \lambda_2(t, x)$, $\theta = \theta(t, x)$, оно является также и с.о.э.р. этой задачи. Для простоты предположим, что $\lambda_1 \leq \lambda_2$ (хотя доказываемое утверждение верно и без этого предположения).

Обозначим $\Lambda = \Lambda(t, x) = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда матрицу $T(\theta)$ можно представить в виде $T(\theta) = \exp(\theta S)$ и производные соответственно равны:

$$\begin{aligned} U_t &= (\exp(\theta S) \Lambda \exp(-\theta S))_t = \exp(\theta S) (\Lambda_t + [S, \Lambda] \theta_t) \exp(-\theta S); \\ \tilde{f}(U)_x &= (\exp(\theta S) \tilde{f}(\Lambda) \exp(-\theta S))_x = \exp(\theta S) (\tilde{f}(\Lambda)_x + [S, \tilde{f}(\Lambda)] \theta_x) \exp(-\theta S), \end{aligned}$$

где $[U, V] = UV - VU$ обозначает коммутатор матриц U, V . Из этих представлений следует, что

$$\mathbf{0} = T(-\theta)(U_t + \tilde{f}(U)_x)T(\theta) = \Lambda_t + \tilde{f}(\Lambda)_x + [S, \Lambda] \theta_t + [S, \tilde{f}(\Lambda)] \theta_x.$$

Распишем это тождество покомпонентно, учитывая равенства

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\Lambda) &= \operatorname{diag}\{f(\lambda_1), f(\lambda_2)\}, \quad [S, \Lambda] = (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ [S, \tilde{f}(\Lambda)] &= (f(\lambda_1) - f(\lambda_2)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получим

$$(\lambda_i)_t + f(\lambda_i)_x = 0, \quad i = 1, 2; \quad (\lambda_2 - \lambda_1) \theta_t + (f(\lambda_2) - f(\lambda_1)) \theta_x = 0.$$

В частности, функции $\lambda_i(t, x)$, $i = 1, 2$, являются классическими решениями (а значит, и о.э.р.) задачи (39), (40) с соответствующими начальными данными. Таким образом, выполнены требования определения 5 и $U(t, x)$ – с.о.э.р. задачи (1), (38).

Докажем существование и единственность с.о.э.р. задачи (1), (38). Представим начальные данные $U_0(x)$ в форме

$$U_0(x) = T(\theta_0(x)) \operatorname{diag}\{\lambda_1^0(x), \lambda_2^0(x)\} T(-\theta_0(x)),$$

где $\lambda_1^0(x) \leq \lambda_2^0(x)$ – собственные числа матрицы $U_0(x)$.

Условие C2) означает, что с.о.э.р. $U(t, x)$ должно иметь вид

$$U(t, x) = T(\theta(t, x)) \operatorname{diag}\{\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)\} T(-\theta(t, x)), \quad (53)$$

где $\lambda_1(t, x)$, $\lambda_2(t, x)$ – однозначно определенные о.э.р. скалярной задачи (39), (40) с начальными функциями $\lambda_1^0(x)$, $\lambda_2^0(x)$ соответственно. Заметим, что требование $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$ выполнено автоматически вследствие свойства монотонной зависимости о.э.р. задачи (39), (40) от начальных данных (см. [3] или предложение 5).

Неизвестная функция $\theta = \theta(t, x)$ определяется из условий C1), C3). Как будет установлено ниже, для выполнения этих условий необходимо и достаточно, чтобы функция θ являлась обобщенным решением задачи Коши для линейного уравнения

$$(A\theta)_t + (B\theta)_x = 0, \quad (54)$$

$A = A(t, x) = \lambda_2(t, x) - \lambda_1(t, x)$, $B = B(t, x) = f(\lambda_2(t, x)) - f(\lambda_1(t, x))$, с начальным условием

$$\theta(0, x) = \theta_0(x) \quad (55)$$

в смысле следующего определения (с $A(0, x) = \lambda_2^0(x) - \lambda_1^0(x)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $\theta = \theta(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *обобщенным решением* (коротко *о.р.*) задачи Коши (54), (55), если для любой пробной функции $h = h(t, x)$ из пространства $C_0^\infty(\overline{\Pi})$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\overline{\Pi} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\int_{\Pi} [A\theta h_t + B\theta h_x] dt dx + \int_{\mathbb{R}} A(0, x)\theta_0(x)h(0, x) dx = 0. \quad (56)$$

Выбирая в (56) пробные функции $h \in C_0^\infty(\Pi)$, получим, что $(A\theta)_t + (B\theta)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Равенство (56) учитывает также начальное условие (55). Точнее, (56) эквивалентно равенству $(A\theta)_t + (B\theta)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ и начальному условию (55), понимаемому в смысле *-слабой сходимости $A(t, \cdot)\theta(t, \cdot) \rightarrow A(0, \cdot)\theta_0$ в $L^\infty(\mathbb{R})$, когда t стремится к $0+$, пробегая некоторое множество полной меры. Как будет показано ниже в предложении 9, на самом деле о.р. θ удовлетворяет условию (55) “сильно”:

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x)\theta(t, x) = A(0, x)\theta_0(x) \quad \text{в} \quad L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}).$$

Докажем, что, обратно, из равенства $(A\theta)_t + (B\theta)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ и “сильного” условия (55) вытекает (56).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть функция $\theta = \theta(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} (A\theta)_t + (B\theta)_x &= 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi); \\ \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x)\theta(t, x) &= A(0, x)\theta_0(x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Тогда $\theta(t, x)$ — о.р. задачи (54), (55) в смысле определения 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = h(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$. Выберем функцию $\gamma(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\gamma(s) \geq 0$, $\operatorname{supp} \gamma \subset [0, 1]$, $\int \gamma(s) ds = 1$, и положим $\delta_\nu(s) = \nu\gamma(\nu s)$ при $\nu \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\delta_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\delta_\nu \geq 0$, $\operatorname{supp} \delta_\nu \subset [0, 1/\nu]$, $\int \delta_\nu(s) ds = 1$ (так что при $\nu \rightarrow \infty$ последовательность δ_ν сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ к δ -функции Дирака). Пусть

$$\chi_\nu(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\nu(s) ds.$$

Тогда при $t_0 > 0$

$$g_\nu(t, x) = h(t, x)\chi_\nu(t - t_0) \in C_0^\infty(\Pi)$$

и из условия $(A\theta)_t + (B\theta)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ следует интегральное равенство

$$\int_{\Pi} [A\theta(g_\nu)_t + B\theta(g_\nu)_x] dt dx = 0,$$

расписав которое, получим

$$\int_{\Pi} A(t, x)\theta(t, x)h(t, x) dx \delta_\nu(t - t_0) dt + \int_{\Pi} [A\theta h_t + B\theta h_x]\chi_\nu(t - t_0) dt dx = 0,$$

откуда в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ следует равенство

$$\int_{[t_0, \infty) \times \mathbb{R}} [A\theta h_t + B\theta h_x] dt dx + \int_{\mathbb{R}} A(t_0, x)\theta(t_0, x)h(t_0, x) dx = 0,$$

если $t_0 \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_+$ — множество точек Лебега функции $t \mapsto \int A(t, x)\theta(t, x) \times h(t, x) dx$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, $t_0 \in \mathcal{A}$, получим с учетом условия $\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x)\theta(t, x) = A(0, x)\theta_0(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (ясно, что здесь достаточно слабой сходимости), что выполнено (56) и $\theta(t, x)$ — о.р. задачи (54), (55). Предложение доказано.

Наша ближайшая задача — доказать разрешимость задачи (54), (55) в смысле определения 6 и исследовать свойства о.р. в случае произвольных коэффициентов $A, B \in L^\infty(\Pi)$ со свойствами:

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) = A(0, x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad A(0, x) \in L^\infty(\mathbb{R}); \quad (57)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |B| \leq N(\varepsilon) \cdot (A + \varepsilon) \quad \text{п.в. на } \Pi, \quad \varepsilon N(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0; \quad (58)$$

$$A_t + B_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (59)$$

Прежде всего, установим, что коэффициенты $A = \lambda_2(t, x) - \lambda_1(t, x)$, $A_0 = \lambda_2^0(x) - \lambda_1^0(x)$, $B = f(\lambda_2(t, x)) - f(\lambda_1(t, x))$ удовлетворяют условиям (57)–(59).

Ясно, что $A(0, x) \geq 0$, $A(t, x) \geq 0$. По условию b) из определения 2 имеем также

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) = A(0, x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

и, таким образом, выполнено соотношение (57). Далее, пусть $\omega(\sigma)$ – модуль непрерывности функции $f(u)$ на отрезке $[-M, M]$, $M = \operatorname{ess\,sup} |U(t, x)|$. Тогда $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x) \in [-M, M]$ п.в. на Π и по лемме 3 $\forall \varepsilon > 0$

$$|B(t, x)| \leq |f(\lambda_2) - f(\lambda_1)| \leq \omega(\lambda_2 - \lambda_1) \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}(\lambda_2 - \lambda_1 + \varepsilon) \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}(A(t, x) + \varepsilon),$$

т.е. верна оценка (58) с $N(\varepsilon) = \omega(\varepsilon)/\varepsilon$. Наконец, как следует из условия C2), в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$A_t + B_x = (\lambda_2)_t + (f(\lambda_2))_x - ((\lambda_1)_t + (f(\lambda_1))_x) = 0$$

и выполнено (59).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. 1) *Существует о.р. $\theta(t, x)$ задачи (54), (55).*

2) *Если $\theta_0(x)A(0, x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $\theta(t, x)A(t, x) = 0$ п.в. на Π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\gamma(x) \geq 0$, $\operatorname{supp} \gamma \subset [-1, 0]$, $\int \gamma(x) dx = 1$. Положим при $\nu \in \mathbb{N}$, $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$

$$\delta_\nu(\tau, \xi) = \nu^2 \gamma(\nu\tau) \cdot \gamma(\nu\xi).$$

Ясно, что $\delta_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\delta_\nu \geq 0$, $\operatorname{supp} \delta_\nu \subset [-1/\nu, 0] \times [-1/\nu, 0]$, $\int \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi = 1$ (так что при $\nu \rightarrow \infty$ последовательность δ_ν сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ к δ -функции Дирака). Аппроксимируем функции $A(t, x)$, $B(t, x)$, положив

$$A_\nu(t, x) = (A * \delta_\nu)(t, x) + \frac{1}{\nu} = \int A(t - \tau, x - \xi) \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi + \frac{1}{\nu};$$

$$B_\nu(t, x) = (B * \delta_\nu)(t, x) = \int B(t - \tau, x - \xi) \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi.$$

Заметим, что свертки $A * \delta_\nu$, $B * \delta_\nu$ корректно определены при $(t, x) \in \Pi$, так как $t - \tau \geq 0$ при $(\tau, \xi) \in \operatorname{supp} \delta_\nu$. По построению $A_\nu, B_\nu \in C^\infty(\Pi)$, $A_\nu \geq 1/\nu$ (с учетом того, что $A \geq 0$ п.в. на Π ; это непосредственно следует из условия (58)), и при $\nu \rightarrow \infty$ $A_\nu \rightarrow A$, $B_\nu \rightarrow B$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$. Из (58), (59) следуют соотношения

$$\begin{aligned} |B_\nu(t, x)| &\leq \int |B(t - \tau, x - \xi)| \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &\leq N(1/\nu) \int (A(t - \tau, x - \xi) + 1/\nu) \delta_\nu(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &= N(1/\nu) A_\nu(t, x); \end{aligned} \tag{60}$$

$$(A_\nu)_t + (B_\nu)_x = (A_t + B_x) * \delta_\nu = 0. \tag{61}$$

Пусть $C_\nu(t, x) = B_\nu(t, x)/A_\nu(t, x) \in C^\infty(\Pi)$ (напомним, что $A_\nu \geq 1/\nu$). Из (60) следует, что $|C_\nu| \leq N(1/\nu)$. Рассмотрим о.р. $\theta_\nu(t, x)$ задачи Коши

$$\theta_t + C_\nu \theta_x = 0, \quad \theta(0, x) = \theta_0(x), \quad (62)$$

которое может быть найдено методом характеристик (см., например, [2, с. 55]). Характеристики, являющиеся интегральными кривыми обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = C_\nu(t, x)$ ввиду ограниченности C_ν определены при всех $t \geq 0$. Поэтому решение $\theta_\nu(t, x)$ задачи (62), задаваемое условием постоянства на характеристиках, корректно определено во всей области Π и, очевидно, выполнен принцип максимума:

$$\forall (t, x) \in \Pi \quad |\theta_\nu(t, x)| \leq M = \|\theta_0\|_\infty. \quad (63)$$

Умножая равенство $(\theta_\nu)_t + C_\nu(\theta_\nu)_x = 0$ на A_ν , получим, что $A_\nu(\theta_\nu)_t + B_\nu(\theta_\nu)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, что с учетом (61) можно записать в дивергентной форме

$$(A_\nu \theta_\nu)_t + (B_\nu \theta_\nu)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (64)$$

Из (64) следует интегральное тождество: $\forall h = h(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$

$$\int_\Pi [A_\nu \theta_\nu h_t + B_\nu \theta_\nu h_x] dt dx + \int_{\mathbb{R}} A_\nu(0, x) \theta_0(x) h(0, x) dx = 0. \quad (65)$$

В силу оценки (63) последовательность θ_ν ограничена в $L^\infty(\Pi)$, и, следовательно, после возможного выделения подпоследовательности, $\theta_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \theta$ *-слабо в $L^\infty(\Pi)$, где $\theta = \theta(t, x) \in L^\infty(\Pi)$, $\|\theta\|_\infty \leq M$. Переходя в (65) к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ с учетом соотношений $A_\nu \rightarrow A$, $B_\nu \rightarrow B$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$, $A_\nu(0, x) \rightarrow A(0, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (что следует из (57)), получим, что предельная функция $\theta(t, x)$ удовлетворяет (56), т.е. является о.р. задачи (54), (55).

Приступая к доказательству второго утверждения, предположим, что $A(0, x)\theta_0(x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Из равенства $(A\theta)_t + (B\theta)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ следует существование непрерывного по Липшицу потенциала $Q(t, x)$, однозначно определенного условиями

$$Q_t = -B\theta, \quad Q_x = A\theta \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad Q(0, 0) = 0. \quad (66)$$

Пусть $r(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $0 < r(u) \leq 1$ при $u \neq 0$, $r(0) = 0$.

Имеем с учетом (59) равенство (в $\mathcal{D}'(\Pi)$)

$$(Ar(Q))_t + (Br(Q))_x = A(r(Q))_t + B(r(Q))_x = r'(Q) \cdot (-AB\theta + AB\theta) = 0. \quad (67)$$

Установим, что $Q \equiv 0$, откуда ввиду (66) будет следовать требуемое тождество $A\theta \equiv 0$. Покажем сначала, что $Q(0, x) \equiv 0$. Для этого выберем функции $p(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $q(t) \in C^\infty([0, +\infty))$, $q(0) = 1$, $q(t) = 0$ при $t \geq 1$, и положим в (56)

$h(t, x) = q(\nu t)p(x)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Получим равенство (учитывая, что $A(0, x)\theta_0(x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$)

$$\nu \int_{\Pi} A(t, x)\theta(t, x)p(x)q'(\nu t) dt dx = - \int_{\Pi} B(t, x)\theta(t, x)p'(x)q(\nu t) dt dx.$$

Заметим далее, что $A\theta = Q_x$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, что позволяет преобразовать интеграл в левой части этого равенства с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\nu \int_{\Pi} Q(t, x)p'(x)q'(\nu t) dt dx = \int_{\Pi} B(t, x)\theta(t, x)p'(x)q(\nu t) dt dx.$$

Учитывая непрерывность Q и свойства функции q , легко видеть, что левая часть последнего равенства сходится при $\nu \rightarrow \infty$ к $-\int_{\mathbb{R}} Q(0, x)p'(x) dx$, а правая часть оценивается по модулю величиной const/ν и стремится к нулю. Итак, $\int_{\mathbb{R}} Q(0, x)p'(x) dx = 0$ и, вследствие произвольности $p(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $Q(0, x) \equiv Q(0, 0) = 0$.

Для доказательства тождества $Q \equiv 0$ заметим, что ввиду (58) и оценки $r(Q) \leq 1$

$$|Br(Q)| \leq N(\varepsilon)(A + \varepsilon)r(Q) \leq N(\varepsilon)(Ar(Q) + \varepsilon),$$

$\varepsilon > 0$ произвольно.

Увеличив при необходимости $N(\varepsilon)$ на единицу, можем считать, что $N(\varepsilon) \geq 1$. Таким образом, функции $\alpha(t, x) = A(t, x)r(Q(t, x))$, $\beta(t, x) = B(t, x)r(Q(t, x))$ удовлетворяют условиям леммы 4 (здесь нужно учесть также равенство (67)) с $\alpha(0, x) = A(0, x)r(Q(0, x)) \equiv 0$. По лемме 4 для п.в. $t > 0$

$$\int A(t, x)r(Q(t, x))e^{-|x|} dx \leq 2e^t \inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon N(\varepsilon) = 0$$

(так как в силу (58) $\varepsilon N(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$). Это в точности означает, что п.в. на Π $A(t, x)r(Q(t, x)) = 0$ и с учетом свойства $r(Q) = 0 \Leftrightarrow Q = 0$

$$A(t, x)Q(t, x) = 0 \text{ п.в. на } \Pi. \quad (68)$$

Пусть $E = \{(t, x) \in \Pi \mid Q(t, x) \neq 0\}$. Ввиду непрерывности Q множество E открыто в Π и из (68) следует, что $A(t, x) = 0$ п.в. на E . Из оценки (58) следует также, что $B(t, x) = 0$ п.в. на E . Действительно, в силу (58) при $A(t, x) = 0$ $|B(t, x)| \leq \varepsilon N(\varepsilon)$ для п.в. (t, x) , и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0+$ получаем равенство $B(t, x) = 0$ п.в. на E .

Согласно (66) тогда $Q_t(t, x) = Q_x(t, x) = 0$ п.в. на E , и поэтому функция $Q(t, x)$ постоянна в каждой компоненте связности множества E . Так как множество таких компонент не более чем счетно и $Q \equiv 0$ на $\Pi \setminus E$, то непрерывная функция Q принимает не более чем счетное множество значений, что с учетом связности области определения Π возможно лишь в случае, когда $Q \equiv \text{const}$. Таким образом, $Q \equiv Q(0, 0) = 0$ и $Q_x(t, x) = A(t, x)\theta(t, x) = 0$ п.в. на Π . Предложение доказано.

Пусть $\rho(x) = e^{-|x|}$. Введем меры $\mu = A(0, x)\rho(x) dx$, $m = A(t, x)\rho(x) dt dx$ на $\mathbb{R}$ и Π соответственно. Согласно определению 6 в постановке задачи (54), (55) существенно поведение начальной функции $\theta_0(x)$ и решения $\theta(t, x)$ лишь на множествах, где соответственно $A(0, x) \neq 0$ и $A(t, x) \neq 0$ (здесь также нужно учесть, что, как это следует из (58), для п.в. (t, x) истинна импликация $A(t, x) = 0 \Rightarrow B(t, x) = 0$). Таким образом, можно считать, что $\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)$, $\theta \in L^\infty(\Pi, dm)$. Заметим, что предложение 8 можно переформулировать как результат о существовании и единственности о.р. задачи (54), (55) в классе $L^\infty(\Pi, dm)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Легко проследить, что в ходе доказательства предложения 8 получен также следующий принцип максимума: $\|\theta\|_{L^\infty(\Pi, dm)} \leq \|\theta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)}$.

Ниже нам понадобится

ЛЕММА 5. Множество D , состоящее из абсолютно непрерывных функций $u(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $u'(x) = A(0, x)v(x)$, $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, плотно в пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что любой линейный непрерывный функционал $l = l(u)$, $u \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, обращающийся в нуль на D , является нулевым. В соответствии с теоремой Рисса функционал l допускает представление

$$l(u) = l_h(u) = \int u(x)h(x) d\mu(x), \quad (69)$$

где $h(x) \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$.

Пусть

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(y) d\mu(y) = \int_{-\infty}^x h(y)A(0, y)\rho(y) dy.$$

Заметим, что $h(y) \in L^2(\mathbb{R}, d\mu) \subset L^1(\mathbb{R}, d\mu)$ в силу конечности меры μ , и функция $H(x)$ корректно определена. Равенство (69) можно переписать в виде $l(u) = \int u(x) dH(x)$. Если $u = u(x) \in D$, $u'(x) = A(0, x)v(x)$, где $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, то, используя формулу интегрирования по частям, получим

$$0 = l(u) = \int u(x) dH(x) = - \int H(x)A(0, x)v(x) dx. \quad (70)$$

Отсутствие внеинтегрального члена в (70) обусловлено равенствами

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \int dH(x) = l(1) = 0$$

(так как постоянные функции лежат в D) и ограниченностью функции $u(x)$, вытекающей из суммируемости ее производной.

В силу произвольности $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ в (70) имеем $H(x)A(0, x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Тогда $A(0, x) = 0$ для п.в. x из открытого (ввиду непрерывности H) множества $E = \{x \in \mathbb{R} \mid H(x) \neq 0\}$. Поэтому $H'(x) = h(x)A(0, x)\rho(x) = 0$ п.в. на E , откуда следует постоянство H на компонентах связности множества E .

Поскольку множество таких компонент не более чем счетно и $H \equiv 0$ на $\mathbb{R} \setminus E$, то непрерывная на $\mathbb{R}$ функция H принимает не более чем счетное множество значений, откуда следует, что $H \equiv \text{const}$ и $dH(x) = h(x) d\mu(x) = 0$. Ввиду (69) это означает, что функционал l нулевой. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\theta(t, x)$ – о.р. задачи (54), (55). Тогда:

- 1) $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x)\theta(t, x) = A(0, x)\theta_0(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$;
- 2) $\forall p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ функция $p(\theta(t, x))$ является о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $p(\theta_0(x))$;
- 3) если $\theta_0^k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, – ограниченная в $L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)$ последовательность функций такая, что при $k \rightarrow \infty$ $A(0, x)(\theta_0^k(x) - \theta_0(x)) \rightarrow 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $\theta^k(t, x)$ – соответствующая последовательность о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $\theta_0^k(x)$, то при $k \rightarrow \infty$ $A(t, x)(\theta^k(t, x) - \theta(t, x)) \rightarrow 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как начальная функция $\theta_0(x)$ принадлежит $L^\infty(\mathbb{R}, d\mu) \subset L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, то по лемме 5 $\forall k \in \mathbb{N}$ существует абсолютно непрерывная функция $\theta_0^k(x) \in D$, $(\theta_0^k)'(x) = A(0, x)v_0^k(x)$, $v_0^k(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, такая, что $\|\theta_0 - \theta_0^k\|_2 \leq 1/k$ (норма $\|\cdot\|_2$ здесь и ниже рассматривается в пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$). Будем также предполагать, что $\|\theta_0^k\|_\infty \leq M = \|\theta_0\|_\infty$; этой оценки можно добиться, заменив функции θ_0^k на $p(\theta_0^k)$, где $p(u) = \max(-M, \min(M, u))$ – срезающая функция (легко проверить, что необходимые свойства функций θ_0^k при такой замене сохраняются). По предложению 8 существует о.р. $v^k(t, x)$ задачи (54), (55) с начальной функцией v_0^k . Из равенства $(Av^k)_t + (Bv^k)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ следует существование непрерывного по Липшицу потенциала $\theta^k(t, x)$, определяемого соотношениями:

$$(\theta^k)_t = -Bv^k, \quad (\theta^k)_x = Av^k \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad \theta^k(0, 0) = \theta_0^k(0). \quad (71)$$

Ясно, что $\theta^k(t, x)$ является о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией, совпадающей ввиду соотношений $\theta^k(0, 0) = \theta_0^k(0)$, $(\theta^k)_x(0, x) = A(0, x)v^k(0, x) = (\theta_0^k)'(x)$ (см. (71)) с функцией θ_0^k .

Используя непрерывность по Липшицу функции θ^k и соотношение (57), получаем

- 1^k) $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x)\theta^k(t, x) = A(0, x)\theta_0^k(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$;
- 2^k) $\forall p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ функция $p(\theta^k(t, x))$ является о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $p(\theta_0^k(x))$.

Последнее условие выполнено ввиду соотношений

$$(Ap(\theta^k))_t + (Bp(\theta^k))_x = A(p(\theta^k))_t + B(p(\theta^k))_x = p'(\theta^k)(A\theta_t^k + B\theta_x^k) = 0,$$

в которых используется существование обобщенных производных θ_t^k , θ_x^k (в соболевском смысле) и равенство (59).

Умножив при $k, r \in \mathbb{N}$ равенство $A(\theta^k - \theta^r)_t + B(\theta^k - \theta^r)_x = 0$ на $2(\theta^k - \theta^r)$, получим, что в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$(A(\theta^k - \theta^r)^2)_t + (B(\theta^k - \theta^r)^2)_x = A(\theta^k - \theta^r)_t^2 + B(\theta^k - \theta^r)_x^2 = 0 \quad (72)$$

(здесь существенно используется то, что функция $\theta^k - \theta^r$ имеет обобщенные производные в соболевском смысле). Заметим, далее, что ввиду (58) при $k, r \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |B|(\theta^k - \theta^r)^2 &\leq N(\varepsilon)(A + \varepsilon)(\theta^k - \theta^r)^2 \leq N(\varepsilon)(A(\theta^k - \theta^r)^2 + \varepsilon \cdot (\theta^k - \theta^r)^2) \\ &\leq N(\varepsilon)(A(\theta^k - \theta^r)^2 + 4M^2\varepsilon) \leq \bar{N}(\varepsilon)(A(\theta^k - \theta^r)^2 + \varepsilon) \quad \text{п.в. на } \Pi, \end{aligned}$$

где $\bar{N}(\varepsilon) = \max(4M^2, 1)N(\varepsilon) + 1$ (единица добавлена, чтобы удовлетворить условию $\bar{N}(\varepsilon) \geq 1$).

Учитывая также (72), заключаем, что функции $\alpha(t, x) = A \cdot (\theta^k - \theta^r)^2$, $\beta(t, x) = B \cdot (\theta^k - \theta^r)^2$ удовлетворяют условиям леммы 4 с $N(\varepsilon) = \bar{N}(\varepsilon)$, $\alpha(0, x) = A(0, x) \times (\theta_0^k(x) - \theta_0^r(x))^2$. По лемме 4 для п.в. $t > 0$

$$\int A(t, x) \left(\theta^k(t, x) - \theta^r(t, x) \right)^2 \rho(x) dx \leq e^t \omega_{k,r}, \quad (73)$$

где

$$\omega_{k,r} = \inf_{\varepsilon > 0} \left(\int A(0, x) (\theta_0^k(x) - \theta_0^r(x))^2 e^{-|x|/\bar{N}(\varepsilon)} dx + 2\varepsilon \bar{N}(\varepsilon) \right). \quad (74)$$

По построению при $k \rightarrow \infty$ последовательность θ_0^k сходится в $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ к функции θ_0 , и ввиду ограниченности этой последовательности ($\|\theta_0^k\|_\infty \leq M$) $\theta_0^k \rightarrow \theta_0$ также в пространствах $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\varepsilon)$, $d\mu_\varepsilon = A(0, x) e^{-|x|/\bar{N}(\varepsilon)} dx$ для всех $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$F_{k,r} = \int A(0, x) (\theta_0^k(x) - \theta_0^r(x))^2 e^{-|x|/\bar{N}(\varepsilon)} dx \xrightarrow{k,r \rightarrow \infty} 0,$$

и из (74) следует, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\limsup_{k,r \rightarrow \infty} \omega_{k,r} \leq \lim_{k,r \rightarrow \infty} F_{k,r} + 2\varepsilon \bar{N}(\varepsilon) = 2\varepsilon \bar{N}(\varepsilon).$$

Из (58) следует, что $\varepsilon \bar{N}(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Поэтому $\lim_{k,r \rightarrow \infty} \omega_{k,r} = 0$ и из (73) вытекает, что последовательность $\theta^k(t, x)$ является фундаментальной в пространствах $L^2([0, T] \times \mathbb{R}, dm)$, $T > 0$. По критерию Коши эта последовательность сходится в указанных пространствах к некоторой функции $\bar{\theta} = \bar{\theta}(t, x)$. Покажем, что $\bar{\theta} = \theta$ в $L^\infty(\Pi, dm)$. Так как в силу принципа максимума (см. замечание 5) последовательность $\theta_k(t, x)$ ограничена в $L^\infty(\Pi, dm)$, то $\bar{\theta}(t, x) \in L^\infty(\Pi, dm)$ и можно считать, что $\bar{\theta}(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ ("исправив" при необходимости $\bar{\theta}$ на множестве нулевой m -меры). Далее, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в интегральном тождестве (56) с $\theta = \theta^k$, $\theta_0 = \theta_0^k$, получим, что $\bar{\theta}(t, x)$ — о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $\theta_0(x)$ и вследствие единственности о.р. $\bar{\theta} = \theta$ в $L^\infty(\Pi, dm)$, что и требовалось установить.

В силу (73) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — некоторое множество нулевой меры,

$$A(t, \cdot) (\theta^k(t, \cdot) - \theta(t, \cdot)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}, \rho(x) dx),$$

причем сходимость равномерная на любом отрезке $t \in [0, T] \setminus \mathcal{E}$. Поэтому в пределе при $k \rightarrow \infty$ из свойства 1^k вытекает утверждение 1).

Далее, $\forall p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ при $k \rightarrow \infty$ $A \cdot (p(\theta^k) - p(\theta)) \rightarrow 0$, $B \cdot (p(\theta^k) - p(\theta)) \rightarrow 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$ (второе предельное соотношение следует из первого с учетом ограниченности θ^k и импликации $A = 0 \Rightarrow B = 0$, истинной п.в. на Π). Это позволяет перейти к пределу в интегральном тождестве, соответствующем 2^k , и получить утверждение 2).

Для доказательства утверждения 3) заметим, что ввиду 2) функция $(\theta^k - \theta)^2$ является о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $(\theta_0^k - \theta_0)^2$. Рассуждая так же, как при выводе соотношения (73), (74), получим оценку

$$\int A(t, x) (\theta^k(t, x) - \theta(t, x))^2 \rho(x) dx \leq e^t \omega_k, \quad (75)$$

где

$$\omega_k = \inf_{\varepsilon > 0} \left(\int A(0, x) (\theta_0^k(x) - \theta_0(x))^2 e^{-|x|/\overline{N}(\varepsilon)} dx + 2\varepsilon \overline{N}(\varepsilon) \right),$$

$\overline{N}(\varepsilon) = \text{const } N(\varepsilon) + 1$. По условию $A(0, x) (\theta_0^k(x) - \theta_0(x)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и, значит,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int A(0, x) (\theta_0^k(x) - \theta_0(x))^2 e^{-|x|/\overline{N}(\varepsilon)} dx = 0.$$

Отсюда в свою очередь следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = 0$ (см. выше рассуждения для последовательности $\omega_{k,r}$), и из оценки (75) вытекает требуемое предельное соотношение: $A(t, x) (\theta^k(t, x) - \theta(t, x)) \rightarrow 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$. Предложение полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\theta_1 = \theta_1(t, x)$, $\theta_2 = \theta_2(t, x)$ — о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $\theta_1^0 = \theta_1^0(x)$, $\theta_2^0 = \theta_2^0(x)$ соответственно. Тогда из произведение $\theta_1 \theta_2$ также является о.р. этой задачи с начальной функцией $\theta_1^0 \theta_2^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по свойству 2) из предложения 9 функция $2\theta_1 \theta_2 = (\theta_1 + \theta_2)^2 - (\theta_1)^2 - (\theta_2)^2$ является о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $2\theta_1^0 \theta_2^0 = (\theta_1^0 + \theta_2^0)^2 - (\theta_1^0)^2 - (\theta_2^0)^2$.

Заметим, что определяющее условие (56) имеет смысл и для неограниченных функций $\theta(t, x)$, $\theta_0(x)$ таких, что $A(0, x) \theta_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $A\theta, B\theta \in L^1_{\text{loc}}(\Pi)$. Это обстоятельство позволяет распространить определение 6 о.р. задачи (54), (55) на этот общий случай. Мы будем предполагать, что $A(0, x) \theta_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, и ограничим класс о.р. дополнительным требованием $A\theta, B\theta \in L^\infty(\Pi)$. Многие свойства о.р. сохраняют силу и в неограниченном случае. В частности, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $\theta = \theta(t, x)$ — о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией $\theta_0(x)$. Тогда:

1) о.р. θ единственно: если $\theta_0(x) A(0, x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $\theta(t, x) A(t, x) = 0$ п.в. на Π ;

2) если $p(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $|p(u)| \leq \text{const}(|u| + 1)$, то функция $p(\theta(t, x))$ является о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $p(\theta_0(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность о.р. задачи (54), (55) доказывается точно так же, как в предложении 8.

Приступая к доказательству второго утверждения, положим

$$u_k^0(x) = \begin{cases} 1, & |\theta_0(x)| \leq k, \\ 0, & |\theta_0(x)| > k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $u_k(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ – о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией $u_k^0(x)$. В силу принципа максимума можно считать, что $|u_k(t, x)| \leq 1$ (более того, применяя свойство 2) из предложения 9 с функцией $p(u) = u(1 - u)$, получим, что $A(t, x)u_k(t, x)(1 - u_k(t, x)) = 0$ п.в. на Π , и можно считать $u_k(t, x)$ характеристической функцией некоторого множества). По построению последовательность $u_k^0(x) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и ввиду свойства 3) из предложения 9 при $k \rightarrow \infty$

$$A(t, x)(u_k(t, x) - 1) \rightarrow 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\Pi). \quad (76)$$

Заметим далее, что если $u = u(t, x)$ – ограниченное о.р. задачи (54), (55), то $u\theta$ также является о.р. этой задачи с соответствующими начальными данными (ср. со следствием 4). Если решение $u(t, x)$ непрерывно по Липшицу, то это следует из соотношения

$$(Au\theta)_t + (Bu\theta)_x = ((Au)_t + (Bu)_x)\theta + ((A\theta)_t + (B\theta)_x)u \quad \text{в } D'(\Pi),$$

в котором используется существование обобщенных производных u_t, u_x (в соболевском смысле) и равенство (59). Общий случай разбирается с помощью аппроксимации (в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$) функции $u(t, x)$, ограниченной в $L^\infty(\Pi)$ последовательностью Липшиц-непрерывных решений, которую можно построить так же, как это сделано в ходе доказательства предложения 9.

Таким образом, функции $\theta_k = u_k\theta$ являются о.р. задачи (54), (55) с ограниченными начальными данными $\theta_k^0 = u_k^0\theta_0$, $|\theta_k^0| \leq k$, $k \in \mathbb{N}$. Ввиду единственности θ_k должно совпадать с ограниченным о.р. Итак, $\theta_k \in L^\infty(\Pi, dm)$ и по принципу максимума $\|\theta_k\|_\infty \leq k$.

Пусть $p(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $|p(u)| \leq \text{const}(|u| + 1)$. По свойству 2) из предложения 9 для всех $k \in \mathbb{N}$ функция $p(\theta_k)$ – о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией $p(\theta_k^0)$. Далее, как следует из (76), $A\theta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A\theta$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$ и (может быть, после выделения подпоследовательности) можно считать, что $A\theta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A\theta$ п.в. на Π . Тогда:

$$\begin{aligned} Ap(\theta_k) &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Ap(\theta), \quad Bp(\theta_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Bp(\theta) \quad \text{п.в. на } \Pi; \\ |Ap(\theta_k)| &\leq cA(|\theta_k| + 1) \leq cA(|\theta| + 1) \in L^\infty(\Pi), \\ |Bp(\theta_k)| &\leq c|B|(|\theta| + 1) \in L^\infty(\Pi), \quad c = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Ясно также, что

$$\begin{aligned} Ap(\theta_k^0) &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Ap(\theta_0) \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}, \\ |Ap(\theta_k^0)| &\leq cA(|\theta_k^0| + 1) \leq cA(|\theta_0| + 1) \in L^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости мы можем тогда перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$ в интегральном тождестве (56), соответствующем о.р. $p(\theta_k)$. В результате получим, что $p(\theta)$ является о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $p(\theta_0)$, что и нужно было установить. Предложение доказано.

В дополнение к предложению 10 заметим, что в случае, когда начальная функция $\theta_0(x)$ неограничена, о.р. задачи (54), (55) может не существовать (даже если $A(0, x)\theta_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$), а о.р. рассматриваются в широком классе $A\theta, B\theta \in L^1_{\text{loc}}(\Pi)$. Однако можно определить о.р. θ тем требованием, что $p(\theta)$ – ограниченное о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $p(\theta_0)$, где $p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ – некоторая фиксированная ограниченная и строго монотонная функция. Легко проверить, что данное определение не зависит от выбора функции $p(u)$ и для соответствующих о.р. справедливы те же результаты, что и в ограниченном случае.

Возвратимся к исследованию задачи (1), (38). Верна следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\theta = \theta(t, x)$ – о.р. задачи (54), (55) (существующее по предложению 8). Тогда X -значная функция $U(t, x)$, определенная равенством (53), является единственным с.о.э.р. задачи (1), (38).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено в начале параграфа, для выполнения требования С2) определения 5 необходимо и достаточно, чтобы матрица $U = U(t, x)$ имела вид (53). Далее, пусть

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ c_0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Ввиду (14)

$$a, b = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos 2\theta, \quad c = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sin 2\theta, \quad (77)$$

$$a_0, b_0 = \frac{\lambda_1^0 + \lambda_2^0}{2} \pm \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{2} \cos 2\theta_0, \quad c_0 = \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{2} \sin 2\theta_0. \quad (78)$$

Компоненты матрицы $\tilde{f}(U)$ выписываются аналогично (77) с заменой λ_1, λ_2 на $f(\lambda_1), f(\lambda_2)$, и требование С1) определения 5 эквивалентно скалярным равенствам

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos 2\theta \right)_t + \left(\frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2} \pm \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{2} \cos 2\theta \right)_x &= 0; \\ \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sin 2\theta \right)_t + \left(\frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{2} \sin 2\theta \right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Поскольку λ_1, λ_2 – о.р. задачи (39), (40), то

$$\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)_t + \left(\frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2} \right)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi)$$

и (79) сводится к двум равенствам (в $\mathcal{D}'(\Pi)$):

$$(A \cos 2\theta)_t + (B \cos 2\theta)_x = 0, \quad (A \sin 2\theta)_t + (B \sin 2\theta)_x = 0. \quad (80)$$

Если $\theta = \theta(t, x)$ – о.р. задачи (54), (55), то согласно утверждению 2) предложения 9 с $p(u) = \cos 2u, \sin 2u$ равенства (80) действительно верны и, значит, $U(t, x)$ удовлетворяет системе (1) в смысле распределений. Далее, из представлений (77), (78) в силу первого утверждения предложения 9 и начального условия (40) для $u = \lambda_1, \lambda_2$ вытекает, что X -значная функция $U(t, x)$ удовлетворяет предельному соотношению (44). Итак, $U(t, x)$ – с.о.э.р. задачи (1), (38). Обратно, если $U(t, x)$ – с.о.э.р. задачи (1), (38), то верны равенства (80). Далее, как следует из (44), представлений (77), (78) и начального условия (40) для $u = \lambda_1, \lambda_2$, справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) \cos 2\theta(t, x) &= A(0, x) \cos 2\theta_0(x), \\ \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) \sin 2\theta(t, x) &= A(0, x) \sin 2\theta_0(x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

По предложению 7 из (80) и из этих соотношений следует, что функции $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ являются о.р. задачи (54), (55) с начальными данными $\cos 2\theta_0, \sin 2\theta_0$ соответственно. Согласно второму утверждению предложения 8 функции $A \cos 2\theta, A \sin 2\theta$ определены однозначно (заметим, что ввиду (78) величины $A(0, x) \cos 2\theta_0(x), A(0, x) \sin 2\theta_0(x)$ однозначно определяются по $U_0(x)$), откуда с учетом (77) вытекает единственность с.о.э.р. $U(t, x)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *С.о.э.р. задачи (1), (38) является о.э.р. этой задачи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать, что для любой выпуклой сингулярной энтропии $p(U)$ вида (20) выполнено соотношение (43). Представим $p(U)$ в виде (33):

$$p(U) = \varphi_1(\lambda_1) + \varphi_2(\lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta), \quad (81)$$

где функции $\varphi_1(u), \varphi_2(u) \in C^1(\mathbb{R})$ выпуклы в силу предложения 3, $\xi(\theta) \in C^1(\mathbb{R})$. Как следует из (21) (здесь $h(b - a, -2c) = (\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta)$),

$$q(U) = \psi_1(\lambda_1) + \psi_2(\lambda_2) + (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))\xi(\theta), \quad (82)$$

где функции $\psi_1(u), \psi_2(u)$ определяются в общем случае условием (42). Представим с.о.э.р. задачи (1), (38) в виде (53). По определению 5 $\lambda_i(t, x)$ – о.э.р. скалярной задачи (39), (40) с начальными данными $\lambda_i^0(x)$, $i = 1, 2$, и ввиду (41)

$$\varphi_i(\lambda_i)_t + \psi_i(\lambda_i)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (83)$$

Далее, как следует из теоремы 5, $\theta = \theta(t, x)$ – о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией $\theta_0(x)$. Согласно второму утверждению из предложения 9 функция $\xi(\theta)$ – также о.р. задачи (54), (55) с соответствующей начальной функцией. В частности,

$$((\lambda_2 - \lambda_1)\xi(\theta))_t + ((f(\lambda_2) - f(\lambda_1))\xi(\theta))_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (84)$$

Для завершения доказательства остается заметить, что ввиду (81), (82) $p(U)_t + q(U)_x$ есть сумма левых частей соотношений (83) и (84) и, таким образом,

$p(U)_t + q(U)_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, т.е. выполнено определяющее условие (43) и $U(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (38). Теорема доказана.

Из теорем 5, 6, в частности, следует существование о.э.р. задачи (1), (38). Покажем, что в случае, когда X -значная начальная функция $U_0(x)$ удовлетворяет условию:

С) при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ $U_0(x) \in \dot{X}(\alpha, 0)$ п.в. на $\mathbb{R}$,
верна также единственность о.э.р.

В следующих 4-х частных случаях: $\alpha = 0, \pi/2, \pi/4, 3\pi/4$, условие С) означает соответственно, что $a_0 - b_0 = c_0 = 0$ или: 1) $a_0 < b_0$; 2) $a_0 > b_0$; 3) $c_0 < 0$; 4) $c_0 > 0$ п.в. на $\mathbb{R}$.

Нам понадобится следующая простая

ЛЕММА 6. Пусть $u = u(t, x)$ – о.э.суб.р. или о.э.супер.р. скалярной задачи Коши (39), (40), удовлетворяющие уравнению (39) в смысле распределений. Тогда $u(t, x)$ – о.э.р. задачи (39), (40).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $u(t, x)$ – о.э.суб.р. задачи (39), (40). Для о.э.супер.р. доказательство аналогично.

Обозначим $M = \|u\|_\infty$. Возьмем произвольную выпуклую функцию $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$, и пусть $\psi(u)$ определяется равенством (42). Если $C = \max_{[-M, M]} |\varphi'(u)|$ и $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) + Cu$, то $\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) - Cu$, и легко видеть, что с точностью до аддитивной константы $\psi(u) = \bar{\psi}(u) - Cf(u)$, где функция $\bar{\psi}(u)$ определяется равенством (42) по функции $\bar{\varphi}(u)$. Ясно, что в определении 3 существенно поведение функции $\varphi(u)$ только на отрезке $[-M, M]$, и так как по построению функция $\bar{\varphi}(u)$ выпукла и не убывает на $[-M, M]$, то по определению 3 о.э.суб.р.

$$\bar{\varphi}(u)_t + \bar{\psi}(u)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Далее, по условию леммы

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi)$$

и ввиду равенств $\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) - Cu$, $\psi(u) = \bar{\psi}(u) - Cf(u)$

$$\varphi(u)_t + \psi(u)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Таким образом, выполнено условие (41) для произвольной выпуклой функции $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ и, значит, $u(t, x)$ – о.э.р. задачи (39), (40). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7. При выполнении условия С) о.э.р. $U(t, x)$ задачи (1), (38) является с.о.э.р. и тем самым единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя преобразование $U \mapsto T(-\alpha)UT(\alpha)$, сведем теорему к случаю $\alpha = 0$. Мы учитываем, что такое преобразование сохраняет класс о.р. задачи (1), (38) (см. замечание 4) и, очевидно, класс с.о.э.р.

Пусть $U(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (38). По замечанию 3 $U_t + \tilde{f}(U)_x = \mathbf{0}$ в $\mathcal{D}'(\Pi, X)$. С учетом формул (79) это эквивалентно следующим трем равенствам (в $\mathcal{D}'(\Pi)$):

$$(\lambda_1 + \lambda_2)_t + (f(\lambda_1) + f(\lambda_2))_x = 0, \quad (85)$$

$$((\lambda_2 - \lambda_1) \cos 2\theta)_t + ((f(\lambda_2) - f(\lambda_1)) \cos 2\theta)_x = 0, \quad (86)$$

$$((\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\theta)_t + ((f(\lambda_2) - f(\lambda_1)) \sin 2\theta)_x = 0. \quad (87)$$

Здесь функции $\lambda_1 = \lambda_1(t, x)$, $\lambda_2 = \lambda_2(t, x)$, $\theta = \theta(t, x)$ определяются из представления $U = T(\theta) \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}T(-\theta)$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Обозначим $A = A(t, x) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cos 2\theta$, $B = B(t, x) = (f(\lambda_2) - f(\lambda_1)) \cos 2\theta$. Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \in L^\infty(\Pi)$, имеем $A, B \in L^\infty(\Pi)$. По теореме 4 $U(t, x) \in \dot{X}(0, 0)$ п.в. на Π . Это означает, что $\cos 2\theta > 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2$ п.в. на Π ; в частности, $A \geq 0$ п.в. на Π . Можно также считать, что $\cos 2\theta > 0$ п.в. на Π (например, положив $\theta = 0$ при $\lambda_1 = \lambda_2$).

Из начального условия (44) следует предельное соотношение

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) = A(0, x) = (\lambda_2^0 - \lambda_1^0) \cos 2\theta^0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Ввиду (86) имеем также $A_t + B_x = 0$. Далее, пусть $\omega(\sigma)$ – модуль непрерывности функции $f(u)$ на отрезке $[-M, M]$, $M = \operatorname{ess\,sup}|U(t, x)|$. Тогда $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x) \in [-M, M]$ п.в. на Π и по лемме 3 $\forall \varepsilon > 0$ п.в. на Π

$$\begin{aligned} |B(t, x)| &= |f(\lambda_2) - f(\lambda_1)| \cos 2\theta \leq \omega(\lambda_2 - \lambda_1) \cos 2\theta \\ &\leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} (\lambda_2 - \lambda_1 + \varepsilon) \cos 2\theta \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} ((\lambda_2 - \lambda_1) \cos 2\theta + \varepsilon) \\ &= N(\varepsilon)(A(t, x) + \varepsilon), \quad N(\varepsilon) = \omega(\varepsilon)/\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для функций A, B выполнены условия (57)–(59). По (87) $(A \operatorname{tg} 2\theta)_t + (B \operatorname{tg} 2\theta)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ (напомним, что $\cos 2\theta > 0$ п.в. на Π и функция $\operatorname{tg} 2\theta$ корректно определена) и из начального условия (44) следует соотношение (заметим, что $A \operatorname{tg} 2\theta = -2c$, $A \operatorname{tg} 2\theta^0 = -2c_0$)

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A \operatorname{tg} 2\theta = A(0, x) \operatorname{tg} 2\theta^0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Таким образом, (возможно, неограниченная) функция $\operatorname{tg} 2\theta$ – о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией $\operatorname{tg} 2\theta^0$, причем $A \operatorname{tg} 2\theta, B \operatorname{tg} 2\theta \in L^\infty(\Pi)$.

По предложению 10 функция $u = 1/\cos 2\theta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}$ также является о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией $1/\cos 2\theta^0$. Тогда $(Au)_t + (Bu)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, т.е.

$$(\lambda_2 - \lambda_1)_t + (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Из этого равенства и (85) следует, что при $i = 1, 2$

$$(\lambda_i)_t + (f(\lambda_i))_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (88)$$

По теореме 3 функция $\lambda_2(t, x)$ является о.э.суб.р., а функция $\lambda_1(t, x)$ – о.э.супер.р. задачи Коши (39), (40) с соответствующими начальными данными $\lambda_2^0(x)$, $\lambda_1^0(x)$, и ввиду (88) эти функции удовлетворяют уравнению (39) в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Применяя лемму 6, получим тогда, что функции $\lambda_i(t, x)$ являются о.э.р. задачи (39), (40) с начальными данными $\lambda_i^0(x)$, $i = 1, 2$. Таким образом, справедливо условие С2) из определения 5, и поскольку условия С1), С3) непосредственно следуют из того, что $U(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (38), то $U(t, x)$ является с.о.э.р. этой задачи, единственным в силу теоремы 5. Теорема доказана.

Покажем, что в условии С) теоремы 7 нельзя заменить множество $\dot{X}(\alpha, 0)$ на $X(\alpha, 0)$.

ПРИМЕР 2 (неединственность о.э.р.). Пусть $f(u) = u^2$. Тогда система (1) при $U = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ имеет вид (см. пример 1)

$$\begin{aligned} a_t + (a^2 + c^2)_x &= 0, \\ b_t + (b^2 + c^2)_x &= 0, \\ c_t + (ac + bc)_x &= 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Рассмотрим для этой системы задачу о распаде разрыва:

$$U_0(x) = \begin{cases} U_+, & x \geq 0, \\ U_-, & x < 0, \end{cases} \quad (90)$$

где $U_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е.

$$a_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad b_0(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad c_0(x) \equiv 0.$$

Очевидно представление

$$U_0(x) = T(\theta^0) \operatorname{diag}\{0, 1\} T(-\theta^0), \quad \text{где } \theta^0(x) = \begin{cases} \pi/2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

из которого следует, что $\cos 2(\theta^0 - \pi/4) \equiv 0$, таким образом, справедливо условие $U_0(x) \in X(\pi/4, 0)$.

Пусть $U_1(t, x)$ – с.о.э.р. задачи (89), (90). Поскольку собственные числа матрицы $U_0(x)$ постоянны: $\lambda_1^0 \equiv 0$, $\lambda_2^0 \equiv 1$, то собственные числа матрицы $U_1(t, x)$ также постоянны: $\lambda_1 \equiv 0$, $\lambda_2 \equiv 1$, как о.э.р. скалярной задачи (39), (40) с постоянными начальными данными λ_1^0 , λ_2^0 . Таким образом, имеется представление

$U_1(t, x) = T(\theta) \operatorname{diag}\{0, 1\}T(-\theta)$, где “угловая” переменная $\theta = \theta(t, x)$ ввиду теоремы 5 определяется как о.р. задачи (54), (55). Для нашего примера уравнение (54) дает $\theta_t + \theta_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, откуда $\theta(t, x) = \theta^0(x - t)$ п.в. на Π . Отсюда следует, что $U_1(t, x) \equiv U_0(x - t)$. По теореме 6 $U_1(t, x)$ является о.э.р. задачи (89), (90).

Пусть, далее, $a(t, x)$, $b(t, x)$ – о.э.р. задачи Коши для скалярного уравнения $u_t + (u^2)_x = 0$ (уравнения Хопфа) с начальными функциями $a_0(x)$, $b_0(x)$ соответственно. Легко проверить, что

$$a(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/(2t), & 0 \leq x < 2t, \\ 1, & x \geq 2t, \end{cases} \quad b(t, x) = \begin{cases} 1, & x < t, \\ 0, & x \geq t, \end{cases}$$

и, как показано в работе [6] (см. также [3]), решения $a(t, x)$, $b(t, x)$ являются пределами в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$ семейства классических решений $a^\varepsilon(t, x)$, $b^\varepsilon(t, x)$ задачи Коши для уравнения Бюргерса $u_t + (u^2)_x = \varepsilon u_{xx}$ при стремлении “вязкости” ε к нулю. Тогда при $U_2(t, x) = \operatorname{diag}\{a(t, x), b(t, x)\}$, $U^\varepsilon(t, x) = \operatorname{diag}\{a^\varepsilon(t, x), b^\varepsilon(t, x)\}$ X -значная функция $U^\varepsilon(t, x)$ является C^2 -гладким решением параболической системы (45) и $U^\varepsilon(t, x) \rightarrow U_2(t, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi, X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В соответствии с предложением 6 $U_2(t, x)$ удовлетворяет энтропийному условию (43) для любой выпуклой сингулярной энтропии $p(U) \in \mathcal{F}$, и поскольку справедливость начального условия (44) очевидна, то $U_2(t, x)$ также является о.э.р. задачи (89), (90).

Итак, $U_1(t, x)$, $U_2(t, x)$ – два различных о.э.р. задачи (89), (90).

Полученные выше результаты применимы и к исследованию некоторых (2×2) -систем законов сохранения. Рассмотрим, например, задачу Коши для системы

$$\begin{cases} b_t + (g(r)b)_x = 0, \\ c_t + (g(r)c)_x = 0, \end{cases} \quad r = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad (91)$$

где $g(r)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, $rg(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0$, с начальным условием

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} b(t, x) = b_0 = b_0(x), \quad \operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} c(t, x) = c_0 = c_0(x), \quad (92)$$

$b_0, c_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Будем называть вектор-функцию $(b, c) \in L^\infty(\Pi, \mathbb{R}^2)$ с.о.э.р. задачи Коши (91), (92), если она удовлетворяет системе (91) в смысле распределений, начальному условию (92) и следующему дополнительному условию: функция $u = r(t, x) = \sqrt{b^2 + c^2}$ является о.э.р. скалярной задачи (39), (40) с $f(u) = g(|u|)u$ и начальными данными $u_0(x) = r_0(x) = \sqrt{b_0^2 + c_0^2}$. Заметим, что из условий, наложенных на функцию $g(r)$, следует, что $f(u) \in C(\mathbb{R})$.

Положим $U_0 = U_0(x) = \begin{pmatrix} -b_0 & c_0 \\ c_0 & b_0 \end{pmatrix}$ и рассмотрим с.о.э.р. $U = U(t, x)$ задачи (1), (38). По определению 5 собственные числа $\lambda_1(t, x) \leq \lambda_2(t, x)$ матрицы $U(t, x)$ являются о.э.р. скалярной задачи (39), (40) с начальными данными $\lambda_1^0(x) = -r_0(x)$, $\lambda_2^0(x) = r_0(x)$ соответственно. Ввиду нечетности функции $f(u) = g(|u|)u$

п.в. на Π имеем $\lambda_2(t, x) = -\lambda_1(t, x)$ и, значит, $\text{Tr } U(t, x) = 0$. Это означает, что решение U имеет вид $U = \begin{pmatrix} -b & c \\ c & b \end{pmatrix}$, при этом $\lambda_2(t, x) = -\lambda_1(t, x) = r(t, x)$. По определению 5 $U_t + \tilde{f}(U)_x = 0$ в $D'(\Pi, X)$, и с учетом равенства $\tilde{f}(U) = g(r)U$ имеем $U_t + (g(r)U)_x = 0$, т.е. функции $b = b(t, x)$, $c = c(t, x)$ удовлетворяют системе (91) в смысле распределений. По построению функция $r(t, x)$ является о.э.р. скалярной задачи (39), (40) с начальными данными $r_0(x)$. Наконец, начальное условие (92) следует из (38). Таким образом, вектор-функция (b, c) – с.о.э.р. задачи (91), (92). Обратно, если функции $b = b(t, x)$, $c = c(t, x)$ образуют с.о.э.р. задачи (91), (92), то X -значная функция $U = \begin{pmatrix} -b & c \\ c & b \end{pmatrix}$ является, очевидно, с.о.э.р. задачи (1), (38) с начальными данными $U_0 = U_0(x) = \begin{pmatrix} -b_0 & c_0 \\ c_0 & b_0 \end{pmatrix}$.

Мы показали, что с.о.э.р. задачи (91), (92) сводятся к с.о.э.р. задачи (1), (38). В частности, из теоремы 5 вытекает существование и единственность с.о.э.р. задачи (91), (92).

§ 5. Обоснование метода исчезающей вязкости

Предположим, что функция $f(u)$ принадлежит $C^1(\mathbb{R})$ и не линейна на невырожденных интервалах. Выберем последовательность $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и рассмотрим последовательность $U_k = U_k(t, x) \in C^2(\Pi, X) \cap L^\infty(\Pi, X)$ решений задачи Коши для параболической системы (45) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ с начальными данными $U_k^0(x)$. Допустим также, что последовательность U_k^0 ограничена в $L^\infty(\mathbb{R}, X)$, $U_k^0 \rightarrow U_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$, и для X -значной функции $U_0(x)$ выполнено условие С). Целью настоящего параграфа является доказательство того, что при сделанных предположениях последовательность U_k сходится в $L^1_{\text{loc}}(\Pi, X)$ к с.о.э.р. исходной задачи (1), (38). Мы будем также считать, что в условии С) $\alpha = 0$. Общий случай сводится к случаю $\alpha = 0$ с помощью замены $U \mapsto T(-\alpha)UT(\alpha)$.

Установим, прежде всего, что для решений задачи (45), (38) справедлив принцип максимума:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\varepsilon > 0$, $U = U(t, x) \in C^2(\Pi, X) \cap L^\infty(\Pi, X)$ – решение задачи Коши (45), (38). Тогда для $(t, x) \in \Pi$ $|U(t, x)| \leq M = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |U_0(x)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $M_1 = |U|_\infty = \sup_{(t, x) \in \Pi} |U(t, x)|$. Пусть при $r > 2$ $\varphi_r(u) = |u|^r$, $\psi_r(u) = \int_0^u f'(s) \varphi'_r(s) ds$.

Если $N = \max_{|u| \leq M_1} |f'(u)|$, то при $|u| \leq M_1$ с учетом равенства $\varphi'_r(s) = r|s|^{r-1} \text{sign } s$ имеем оценку

$$|\psi_r(u)| \leq N \int_0^{|u|} \varphi'_r(s) ds = N \varphi_r(u). \quad (93)$$

Как следует из теоремы 1, предложений 2 и 4, функция $p_r(U) = \text{Tr } \tilde{\varphi}_r(U)$ является C^1 -гладкой выпуклой энтропией системы (1) с потоком $q_r(U) = \text{Tr } \tilde{\psi}_r(U)$. По лемме 2 тогда

$$p_r(U)_t + q_r(U)_x \leq \varepsilon p_r(U)_{xx} \quad \text{в } D'(\Pi). \quad (94)$$

Выберем функцию $h(x) \in C^2(\mathbb{R})$ так, что $|h'(x)| \leq 1$, $|h''(x)| \leq 1$ всюду на $\mathbb{R}$, $h(x) = |x|$ при $|x| \geq 1$, и положим $g(x) = e^{-h(x)}$. Тогда $g(x) \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $g(x) \geq 0$ и

$$|g'(x)| = |h'(x)|g(x) \leq g(x), \quad |g''(x)| \leq ((h'(x))^2 + |h''(x)|)g(x) \leq 2g(x). \quad (95)$$

Умножим неравенство (94) на функцию $g(x)$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}$. Получим, что в $D'(\mathbb{R}_+)$

$$\frac{d}{dt} \int p_r(U(t, x))g(x) dx \leq \int q_r(U(t, x))g'(x) dx + \varepsilon \int p_r(U(t, x))g''(x) dx,$$

откуда с учетом оценок (95)

$$\frac{d}{dt} \int p_r(U(t, x))g(x) dx \leq \int |q_r(U(t, x))|g(x) dx + 2\varepsilon \int p_r(U(t, x))g(x) dx. \quad (96)$$

Поскольку $|U(t, x)| \leq M_1$, то ввиду (93) $|q_r(U(t, x))| \leq Np_r(U(t, x))$ и из (96) вытекает, что функция $F_r(t) = \int p_r(U(t, x))g(x) dx$ удовлетворяет в $D'(\mathbb{R}_+)$ соотношению $F'_r(t) \leq C \cdot F_r(t)$, $C = (N + 2\varepsilon)$.

По лемме Гронуолла $F_r(t) \leq F_r(0)e^{Ct}$, где $F_r(0) = \int p_r(U_0(x))g(x) dx \leq \text{const} \cdot M^r$. Последняя оценка следует из того, что $p_r(U_0) = |\lambda_1^0|^r + |\lambda_2^0|^r$, а собственные числа $\lambda_1^0 = \lambda_1^0(x)$, $\lambda_2^0 = \lambda_2^0(x)$ начальной матрицы $U_0 = U_0(x)$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$ лежат в отрезке $[-M, M]$ ввиду условия $|U_0(x)| \leq M$ п.в. на $\mathbb{R}$. Итак, $\forall t > 0$ $F_r(t) \leq \text{const} \cdot e^{Ct} M^r$, откуда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} (F_r(t))^{1/r} \leq M. \quad (97)$$

Заметим, далее, что $F_r(t) = \int (|\lambda_1(t, x)|^r + |\lambda_2(t, x)|^r)g(x) dx$, где $\lambda_1(t, x)$, $\lambda_2(t, x)$ – собственные числа матрицы $U(t, x)$ и, как легко видеть, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (F_r(t))^{1/r} = \max(\|\lambda_1(t, \cdot)\|_\infty, \|\lambda_2(t, \cdot)\|_\infty) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |U(t, x)|.$$

Из (97) вытекает тогда требуемая оценка $|U(t, x)| \leq M$. Предложение доказано.

Заметим, что при достаточно гладких начальных данных и функции $f(u)$ действительно существует единственное классическое решение задачи (45), (38). Это с учетом предложения 11 следует из результатов монографии [13].

Нам потребуется далее понятие *мерозначной функции*. Пусть Ω – некоторая область в $\mathbb{R}^N$. Мерозначная функция со значениями в $\mathbb{R}^m$ – это слабо измеримое отображение $x \rightarrow \nu_x$ области Ω в пространство $\text{Prob}_0(\mathbb{R}^m)$ вероятностных борелевских мер с компактным носителем на $\mathbb{R}^m$. Слабая измеримость ν_x означает, что $\forall p(\xi) \in C(\mathbb{R}^m)$ функция $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} p(\xi) d\nu_x(\xi)$ измерима на Ω .

Мерозначная функция ν_x называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что для п.в. $x \in \Omega$ $\text{supp } \nu_x$ лежит в шаре $\|\xi\| \leq M$. Минимальное из таких M будем обозначать $\|\nu_x\|_\infty$.

Наконец, мерозначные функции вида $\nu_x(\xi) = \delta(\xi - u(x))$, $u(x) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ($\delta(\xi - u)$ – мера Дирака в точке $u \in \mathbb{R}^m$), называются *регулярными* и отождествляются с соответствующими функциями $u(x)$. Таким образом, имеется естественное вложение $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \subset MV(\Omega, \mathbb{R}^m)$, где $MV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ – множество ограниченных мерозначных функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^m$.

Мерозначные функции естественно возникают как слабые пределы ограниченных последовательностей из $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ в смысле следующего результата Тартара (см. [14]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $u_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, – ограниченная в $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ последовательность, $\|u_k\|_\infty \leq M$. Тогда существуют ограниченная мерозначная функция $\nu_x \in MV(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\|\nu_x\|_\infty \leq M$, и подпоследовательность $u_r(x) = u_{k_r}(x)$ последовательности u_k такие, что $\forall p(\xi) \in C(\mathbb{R}^m)$

$$p(u_r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} p(\xi) d\nu_x(\xi) \quad \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(\Omega); \quad (98)$$

при этом мерозначная функция ν_x регулярна: $\nu_x(\xi) = \delta(\xi - u)$, $u = u(x) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, тогда и только тогда, когда $u_r \rightarrow u$ в $L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (сильно).

В дополнение к предложению 12 заметим, что, обратно, любая ограниченная мерозначная функция может быть получена как предел ограниченной последовательности из $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ в смысле предельного соотношения (98).

Предложение 12 позволяет осуществить предельный переход по последовательности решений U_k параболической задачи (45), (38), используя лишь содержащуюся в предложении 11 априорную оценку $|U_k| \leq M$. В результате такого предельного перехода получим ограниченную мерозначную функцию $\nu_{t,x} \in MV(\Pi, X)$ такую, что $\|\nu_{t,x}\|_\infty \leq M$ и (возможно, после выделения подпоследовательности, за которой мы сохраним прежнее обозначение U_k) $\forall p(U) \in C(X)$

$$p(U_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_X p(U) d\nu_{t,x}(U) \quad \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(\Pi). \quad (99)$$

Для предельной мерозначной функции $\nu_{t,x}$ справедлива следующая

ТЕОРЕМА 8. Пусть $p(U)$ – выпуклая сингулярная энтропия системы (1), $q(U)$ – соответствующий поток. Тогда $\forall g = g(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, $g(t, x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} \left[\left(\int_X p(U) d\nu_{t,x}(U) \right) g_t + \left(\int_X q(U) d\nu_{t,x}(U) \right) g_x \right] dt dx \\ & + \int_{\mathbb{R}} p(U_0(x)) g(0, x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (100)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 для всех $k \in \mathbb{N}$

$$p(U_k)_t + q(U_k)_x \leq \varepsilon_k p(U_k)_{xx} \quad \text{в } D'(\Pi).$$

Умножив это неравенство на неотрицательную пробную функцию $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\int_{\Pi} [p(U_k)g_t + q(U_k)g_x + \varepsilon_k p(U_k)g_{xx}] dt dx + \int_{\mathbb{R}} p(U_k^0(x))g(0, x) dx \geq 0,$$

откуда в пределе при $k \rightarrow \infty$ с учетом (99), предельного соотношения $U_k^0(x) \rightarrow U_0$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, X)$ и условия $\varepsilon_k \rightarrow 0$ получим соотношение (100). Теорема доказана.

Выбирая в (100) неотрицательные пробные функции из $C_0^\infty(\Pi)$, получим, что для выпуклых сингулярных энтропий $p(U)$

$$\left(\int_X p(U) d\nu_{t,x}(U) \right)_t + \left(\int_X q(U) d\nu_{t,x}(U) \right)_x \leq 0 \quad \text{в } D'(\Pi), \quad (101)$$

т.е. мерозначная функция $\nu_{t,x}$ удовлетворяет энтропийному условию (43) “в среднем”. Из соотношения (101) с линейными энтропиями $p(U) = \pm(C, U)$ вытекает, в частности, равенство

$$\left(\int_X U d\nu_{t,x}(U) \right)_t + \left(\int_X \tilde{f}(U) d\nu_{t,x}(U) \right)_x = 0 \quad \text{в } D'(\Pi, X), \quad (102)$$

которое означает, что $\nu_{t,x}$ удовлетворяет “в среднем” системе (1).

Покажем, что из (100) можно получить также начальное условие $\nu_{0,x}(U) = \delta(U - U_0(x))$ в смысле следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Имеем*

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} \int |U - U_0(x)| d\nu_{t,x}(U) = 0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\Pi). \quad (103)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathcal{A}$ множество, состоящее из значений $t > 0$, являющихся точками Лебега функций

$$t \mapsto F(t, p, h) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X p(U) d\nu_{t,x}(U) \right) h(x) dx$$

для всех $p(U) \in C(X)$, $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Из сепарабельности пространств $C(X)$, $L^1(\mathbb{R})$ и непрерывной зависимости $F(t, p, h)$ от $p(U) \in C(X)$, $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ легко следует, что $\mathcal{A}$ – множество полной меры в $\mathbb{R}_+$. Пусть $\tau \in \mathcal{A}$, $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$h(x) \geq 0$. Возьмем в соотношении (100) $g(t, x) = h(x)(1 - \chi_k(t - \tau))$, где последовательность $\chi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, аппроксимирующая характеристическую функцию интервала $(0, +\infty)$, определена при доказательстве предложения 7. Получим, после элементарных преобразований, что

$$\begin{aligned} & - \int_{\Pi} \left(\int_X p(U) d\nu_{t,x}(U) \right) h(x) \delta_k(t - \tau) dt dx \\ & + \int_{\Pi} \left(\int_X q(U) d\nu_{t,x}(U) \right) h'(x) \chi_k(t - \tau) dt dx \\ & + \int_{\mathbb{R}} p(U_0(x)) h(x) dx \geq 0, \end{aligned} \quad (104)$$

здесь $\delta_k(t) = \chi'_k(t)$ (см. доказательство предложения 7). Из (104) с учетом того, что τ – точка Лебега функции $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_X p(U) d\nu_{t,x}(U) \right) h(x) dx$, в пределе при $k \rightarrow \infty$ следует соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X p(U) d\nu_{\tau,x}(U) - p(U_0(x)) \right) h(x) dx \\ & \leq \int_{[0,\tau] \times \mathbb{R}} \left(\int_X |q(U)| d\nu_{t,x}(U) \right) |h'(x)| dt dx \leq \text{const} \cdot \|h'\|_1 \tau, \\ & \limsup_{\tau \rightarrow 0+, \tau \in \mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X p(U) d\nu_{\tau,x}(U) - p(U_0(x)) \right) h(x) dx \leq 0. \end{aligned} \quad (105)$$

Здесь при фиксированном $\tau \in \mathcal{A}$ мерозначная функция $\nu_x = \nu_{\tau,x} \in \text{MV}(\mathbb{R}, X)$ задается условием: $\forall p(U) \in C(X)$, $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$

$$F(\tau, p, h) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X p(U) d\nu_x(U) \right) h(x) dx.$$

Покажем, что это условие корректно определяет мерозначную функцию ν_x и при этом $\|\nu_x\|_{\infty} \leq M$. Действительно, при $p(U) \in C(X)$ функционал $h \mapsto F(\tau, p, h)$ линеен и непрерывен на $L^1(\mathbb{R})$ и, значит, существует функция $r_p(x) \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ такая, что $F(\tau, p, h) = \int r_p(x) h(x) dx$. Из непрерывной зависимости $F(\tau, p, h)$ по параметру $p(U) \in C(X)$ следует также непрерывность линейного отображения $p \mapsto r_p$ из $C(X)$ в $L^{\infty}(\mathbb{R})$. Ввиду этой непрерывности и сепарабельности $C(X)$ множество $\mathcal{B}$ общих точек Лебега семейства функций $r_p(x)$, $p \in C(X)$, является множеством полной меры на $\mathbb{R}$ и при $x \in \mathcal{B}$ линейный функционал $p \mapsto r_p(x)$ непрерывен на $C(X)$. При этом, как непосредственно следует из вида $F(t, p, h)$, $r_p(x) \geq 0$ при $p \geq 0$ и $r_p(x) = 1$ при $p \equiv 1$. По теореме Рисса–Маркова об общем виде непрерывных линейных функционалов на $C(X)$ существует мера $\nu = \nu_x \in \text{Prob}_0(X)$ такая, что $r_p(x) = \int_X p(U) d\nu_x(U)$. Из измеримости функций $r_p(x)$ следует слабая измеримость отображения $x \mapsto \nu_x$. Далее, если функция $p(U) \in C(X)$ равна нулю в шаре $\{|U| \leq M\}$, то ввиду оценки $\|\nu_{t,x}\|_{\infty} \leq M$ имеем $F(\tau, p, h) = 0$ для всех $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$, откуда сразу следует, что

$$r_p(x) = \int_X p(U) d\nu_x(U) = 0, \quad x \in \mathcal{B}.$$

Последнее означает, что $\text{supp } \nu_x$ лежит в шаре $\{|U| \leq M\}$.

Итак, ν_x – ограниченная мерозначная функция из $MV(\mathbb{R}X)$, $\|\nu_x\|_\infty \leq M$, и по построению справедливо определяющее условие

$$F(\tau, p, h) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X p(U) d\nu_x(U) \right) h(x) dx.$$

Взяв в (105) линейные энтропии $p(U) = \pm(C, U)$, получим, что $\forall h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h(x) \geq 0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+, \tau \in \mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X U d\nu_{\tau, x}(U) - U_0(x) \right) h(x) dx = 0. \quad (106)$$

Поскольку линейная оболочка неотрицательных функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$ плотна в $L^1(\mathbb{R})$, то из (106) следует, что

$$\int_X U d\nu_{\tau, x}(U) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0+, \tau \in \mathcal{A}} U_0(x) \quad * \text{-слабо в } L^\infty(\mathbb{R}, X). \quad (107)$$

Далее, из (105) при $p(U) = \text{Tr } U^2 = \|U\|^2$ следует, что

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0+, \tau \in \mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X \|U\|^2 d\nu_{\tau, x}(U) \right) h(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|U_0(x)\|^2 h(x) dx$$

и ввиду (107)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+, \tau \in \mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X (U, U_0(x)) d\nu_{\tau, x}(U) \right) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \|U_0(x)\|^2 h(x) dx.$$

С учетом этих соотношений

$$\begin{aligned} & \limsup_{\tau \rightarrow 0+, \tau \in \mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}} \int_X \|U - U_0(x)\|^2 d\nu_{\tau, x}(U) h(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|U_0(x)\|^2 h(x) dx + \limsup_{\tau \rightarrow 0+, \tau \in \mathcal{A}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_X \|U\|^2 d\nu_{\tau, x}(U) h(x) dx \right. \\ & \quad \left. - 2 \int_{\mathbb{R}} \int_X (U, U_0(x)) d\nu_{\tau, x}(U) h(x) dx \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда ввиду произвольности $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h(x) \geq 0$, и эквивалентности евклидовой нормы $\|\cdot\|$ на X операторной норме $|\cdot|$ следует (103). Предложение доказано.

Соотношения (101), (103) означают, что $\nu_{t, x}$ является мерозначным решением (коротко м.р.) задачи Коши (1), (38) в смысле ДиПерна [15]. Ниже мы установим, что м.р. $\nu_{t, x}$ регулярно: $\nu_{t, x}(U) = \delta(U - U(t, x))$, $U(t, x) \in L^\infty(\Pi, X)$. В силу предложения 12 отсюда будет следовать сильная сходимость последовательности U_k к $U = U(t, x)$.

Пусть H^{-1} – пространство Соболева $H_2^{-1}(\mathbb{R}^2)$ (определение и основные свойства пространств Соболева H_p^s с произвольными вещественными показателями s можно найти, например, в монографии [16]). Обозначим $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$ пространство, состоящее из распределений $u \in D'(\Pi)$ таких, что $ug \in H^{-1}$ для всех $g \in C_0^\infty(\Pi)$. Топология на $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$ задается полунормами $\|ug\|_{H^{-1}}$, $g \in C_0^\infty(\Pi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Для любой выпуклой сингулярной энтропии $p(U)$ и соответствующего потока $q(U)$ последовательность распределений $p(U_k)_t + q(U_k)_x$ предкомпактна в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что последовательность распределений $l_k = p(U_k)_t + q(U_k)_x$ ограничена в $H_{\infty}^{-1}(\Pi)$ ввиду ограниченности в $L^{\infty}(\Pi)$ функций $p(U_k)$, $q(U_k)$. Из результатов Мюра (см. лемму 28 в [14]) тогда следует, что для доказательства предложения достаточно найти представление $l_k = \alpha_k - \beta_k$, в котором последовательность α_k предкомпактна в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$, а β_k ограничена в $\mathcal{M}(\Pi)$, где $\mathcal{M}(\Pi)$ – пространство локально конечных борелевских мер на Π с топологией, порожденной полунормами $\beta \mapsto \text{var}(g\beta)$, $g \in C_0^{\infty}(\Pi)$.

Положим $l_k = \alpha_k - \beta_k$, где $\alpha_k = \varepsilon_k p(U_k)_{xx}$, и покажем, что данное представление удовлетворит требуемым условиям. Из леммы 2 следует, что распределение $\beta_k \geq 0$ в $D'(\Pi)$ и, значит, является неотрицательной локально конечной борелевской мерой на Π . Если $g = g(t, x) \in C_0^{\infty}(\Pi)$, $g \geq 0$, то из равенства $-\beta_k = p(U_k)_t + q(U_k)_x - \varepsilon_k p(U_k)_{xx}$ следует, что

$$\langle \beta_k, g \rangle = \int_{\Pi} g(t, x) d\beta_k(t, x) = \int_{\Pi} [p(U_k)g_t + q(U_k)g_x - \varepsilon_k p(U_k)g_{xx}] dt dx$$

и с учетом оценки $|U_k| \leq M$ величина $\text{var}(g\beta_k) = \int_{\Pi} g(t, x) d\beta_k(t, x)$ ограничена по $k \in \mathbb{N}$. Это означает ограниченность последовательности β_k в пространстве $\mathcal{M}(\Pi)$. Покажем далее, что при $k \rightarrow \infty$ последовательность α_k стремится к нулю в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$. По предположению 1 $p(U_k)_x = (\nabla p(U_k), (U_k)_x)$ и

$$\alpha_k = \varepsilon_k p(U_k)_{xx} = \sqrt{\varepsilon_k} (\nabla p(U_k), \sqrt{\varepsilon_k} (U_k)_x)_x.$$

Поэтому для доказательства того, что $\alpha_k \rightarrow 0$ в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$, достаточно установить ограниченность последовательности $\sqrt{\varepsilon_k} (U_k)_x$ в $L_{\text{loc}}^2(\Pi, X)$. Для этого возьмем энтропию $p_0(U) = \text{Tr } U^2/2 = \|U\|^2/2$. Пусть $q_0(U)$ – соответствующий поток. Умножая равенство $(U_k)_t + \tilde{f}(U_k)_x = \varepsilon_k (U_k)_{xx}$ скалярно на $\nabla p_0(U_k) = U_k$, получим соотношение

$$p_0(U_k)_t + q_0(U_k)_x = \varepsilon_k p_0(U_k)_{xx} - \varepsilon_k \|(U_k)_x\|^2,$$

из которого путем умножения на неотрицательную пробную функцию $g = g(t, x) \in C_0^{\infty}(\Pi)$ и интегрирования по частям получается равенство

$$\varepsilon_k \int_{\Pi} \|(U_k)_x\|^2 g(t, x) dt dx = \int_{\Pi} [p_0(U_k)g_t + q_0(U_k)g_x + \varepsilon_k p_0(U_k)g_{xx}] dt dx$$

и ввиду оценки $|U_k| \leq M$

$$\varepsilon_k \int_{\Pi} \|(U_k)_x\|^2 g(t, x) dt dx \leq c,$$

где $c = c(g)$ – константа, не зависящая от k . Это как раз и означает, что последовательность $\sqrt{\varepsilon_k}(U_k)_x$ ограничена в $L^2_{\text{loc}}(\Pi, X)$. Мы установили, что последовательность α_k стремится к нулю и, значит, предкомпактна в $H^{-1}_{\text{loc}}(\Pi)$. Предложение доказано.

Из предложения 14 в соответствии с теорией компенсированной компактности вытекают следующие коммутационные соотношения Тартара–Мюра (см. [14], [17]): для п.в. $(t, x) \in \Pi$

$$\begin{aligned} \int_X [p_1(U)q_2(U) - p_2(U)q_1(U)] d\nu_{t,x}(U) &= \int_X p_1(U) d\nu_{t,x}(U) \int_X q_2(U) d\nu_{t,x}(U) \\ &\quad - \int_X p_2(U) d\nu_{t,x}(U) \int_X q_1(U) d\nu_{t,x}(U), \end{aligned} \quad (108)$$

справедливые для любой пары выпуклых сингулярных энтропий p_1, p_2 с соответствующими потоками q_1, q_2 . Эти соотношения позволяют установить следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U)$ – собственные числа матрицы U . Тогда для п.в. $(t, x) \in \Pi$ функции $\lambda_1(U), \lambda_2(U)$ постоянны на замкнутом носителе $\text{supp } \nu_{t,x}$ меры $\nu_{t,x}(U)$: $\lambda_i(U) = \lambda_i(t, x)$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение, касающееся функции $\lambda_2(U)$, для $\lambda_1(U)$ доказательство аналогично.

Пусть $\tilde{\nu}_{t,x} \in \text{MV}(\Pi, \mathbb{R})$ – скалярная мерозначная функция, определенная условием $\tilde{\nu}_{t,x} = \lambda_2^* \nu_{t,x}$, где $\lambda_2^* \nu_{t,x}$ обозначает образ меры $\nu_{t,x}$ при отображении $U \mapsto \lambda_2(U)$. Ясно, что для доказательства теоремы нужно установить регулярность $\tilde{\nu}_{t,x}$. Из (108) при $p_1(U) = \varphi_1(\lambda_2(U))$, $p_2(U) = \varphi_2(\lambda_2(U))$, где $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda) \in C^1(\mathbb{R})$ – неубывающие выпуклые функции, следует коммутационное соотношение: для п.в. $(t, x) \in \Pi$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} [\varphi_1(\lambda)\psi_2(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\psi_1(\lambda)] d\tilde{\nu}_{t,x}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\lambda) d\tilde{\nu}_{t,x}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \psi_2(\lambda) d\tilde{\nu}_{t,x}(\lambda) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(\lambda) d\tilde{\nu}_{t,x}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \psi_1(\lambda) d\tilde{\nu}_{t,x}(\lambda), \end{aligned} \quad (109)$$

где $\psi_i(\lambda) = f'(\lambda)\varphi'_i(\lambda)$, $i = 1, 2$. Так как линейная оболочка неубывающих выпуклых функций плотна в $C^1(\mathbb{R})$, то (109) выполнено для всех $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda) \in C^1(\mathbb{R})$. Как показано в [14], при нашем предположении о нелинейности функции f на невырожденных интервалах, из условия (109) вытекает регулярность $\tilde{\nu}_{t,x}$: $\tilde{\nu}_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_2(t, x))$ для п.в. $(t, x) \in \Pi$, $\lambda_2(t, x) \in L^\infty(\Pi)$. Теорема доказана.

Из теоремы 9 следует, что п.в. на Π носители мер $\nu_{t,x}$ лежат во множествах $\lambda_i(U) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_i = \text{const}$, которые являются окружностями в X радиуса $(\lambda_2 - \lambda_1)/2$, задаваемыми параметрически (с угловым параметром θ) равенствами (77).

Заметим также, что, обратно, для таких мерозначных функций $\nu_{t,x}$ выполнены условия (108) для всех пар сингулярных энтропий вида (20). Поэтому из метода

компенсированной компактности нельзя извлечь большей информации, чем содержащейся в теореме 9. Для доказательства регулярности $\nu_{t,x}$ необходимо использовать также регулярность начальных данных и условие С). Из условия С) вытекает следующее ограничение на носители мер $\nu_{t,x}$, являющееся мерозначным аналогом теоремы 4 (при $\alpha = \delta = 0$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Для п.в. $(t, x) \in \Pi$ $\text{supp } \nu_{t,x} \subset \dot{X}(0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 4 при $\alpha = \delta = 0$. Просто нужно энтропийное условие (43) заменить на мерозначный аналог этого условия (101), так что всюду в доказательстве величины вида $p_k(U(t, x))$, $q_k(U(t, x))$ заменяются интегралами $\int_X p_k(U) d\nu_{t,x}(U)$, $\int_X q_k(U) d\nu_{t,x}(U)$.

Мы готовы приступить к доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА 10. М.р. $\nu_{t,x}$ регулярно: $\nu_{t,x}(U) = \delta(U - U(t, x))$, где $U(t, x)$ – с.о.э.р. задачи (1), (38). При этом последовательность $U_k(t, x)$ сходится при $k \rightarrow \infty$ к $U(t, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi, X)$ (без выделения подпоследовательности).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $\lambda_i = \lambda_i(t, x)$, $i = 1, 2$, определены в соответствии с теоремой 9. Выписывая равенство (102) покомпонентно с использованием формул (77), получим, что в $D'(\Pi)$

$$\left((\lambda_2 - \lambda_1) \int_X \cos 2\theta d\nu_{t,x}(U) \right)_t + \left((f(\lambda_2) - f(\lambda_1)) \int_X \cos 2\theta d\nu_{t,x}(U) \right)_x = 0, \quad (110)$$

$$\left((\lambda_2 - \lambda_1) \int_X \sin 2\theta d\nu_{t,x}(U) \right)_t + \left((f(\lambda_2) - f(\lambda_1)) \int_X \sin 2\theta d\nu_{t,x}(U) \right)_x = 0. \quad (111)$$

Мы учли то обстоятельство, что ввиду теоремы 9 для п.в. (t, x) $\lambda_i(U) = \lambda_i(t, x)$ на носителе меры $\nu_{t,x}(U)$, что позволяет выносить величины λ_i за знаки интегралов по этой мере. Заметим также, что функции $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ корректно определены и непрерывны на X при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (здесь $\theta = \theta(U)$, как обычно, определяется из разложения $U = T(\theta) \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}T(-\theta)$).

Обозначим

$$I_1 = I_1(t, x) = \int_X \cos 2\theta d\nu_{t,x}(U), \quad I_2 = I_2(t, x) = \int_X \sin 2\theta d\nu_{t,x}(U).$$

Из предложения 15 непосредственно следует, что $I_1 > 0$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть $A = A(t, x) = (\lambda_2 - \lambda_1)I_1$, $B = B(t, x) = (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))I_1$. Так же, как при доказательстве теоремы 7, устанавливается, что для функций A, B выполнены условия (57)–(59). Здесь нужно учесть (110) и предельное соотношение

$$\text{ess } \lim_{t \rightarrow 0+} A(t, x) = A(0, x) = (\lambda_2^0 - \lambda_1^0) \cos 2\theta^0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

следующее из начального условия (103). По (111) $(AI_2/I_1)_t + (BI_2/I_1)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Напомним, что $I_1 > 0$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и функция I_2/I_1 корректно определена

(при $\lambda_1 = \lambda_2$ значение этой функции не играет роли). Из начального условия (103) следует соотношение (заметим, что $AI_2/I_1 = -2 \int_X c \, d\nu_{t,x}(U)$, $A \operatorname{tg} 2\theta^0 = -2c_0$)

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} AI_2/I_1 = A(0, x) \operatorname{tg} 2\theta^0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Таким образом, функция I_2/I_1 является (возможно, неограниченным) о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией $\operatorname{tg} 2\theta^0$, причем $AI_2/I_1, BI_2/I_1 \in L^\infty(\Pi)$.

По предложению 10 функция $u = \sqrt{1 + (I_2/I_1)^2}$ также является о.р. задачи (54), (55) с начальной функцией $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta^0} = 1/\cos 2\theta^0$. Тогда $(Au)_t + (Bu)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, т.е.

$$((\lambda_2 - \lambda_1)I)_t + ((f(\lambda_2) - f(\lambda_1))I)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad (112)$$

где $I = \sqrt{(I_1)^2 + (I_2)^2}$. Далее, из энтропийного условия (101) с выпуклой сингулярной энтропией $p(U) = \lambda_2(U) - \lambda_1(U)$ и потоком $q(U) = f(\lambda_2(U)) - f(\lambda_1(U))$ следует, что

$$(\lambda_2 - \lambda_1)_t + (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

откуда ввиду (112)

$$((\lambda_2 - \lambda_1)(1 - I))_t + ((f(\lambda_2) - f(\lambda_1))(1 - I))_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (113)$$

По неравенству Йенсена

$$(I_1)^2 + (I_2)^2 \leq \int_X \cos^2 2\theta \, d\nu_{t,x}(U) + \int_X \sin^2 2\theta \, d\nu_{t,x}(U) = 1,$$

откуда следует неотрицательность функции $\alpha = \alpha(t, x) = (\lambda_2 - \lambda_1)(1 - I)$. При этом

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} (\lambda_2 - \lambda_1)(1 - I) = (\lambda_2^0 - \lambda_1^0)(1 - \sqrt{\cos^2 2\theta_0 + \sin^2 2\theta_0}) = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Пусть $\beta = \beta(t, x) = (f(\lambda_2) - f(\lambda_1))(1 - I)$. Тогда из гладкости функции f следует оценка $|\beta| \leq \operatorname{const} \cdot \alpha$. Далее ввиду (113) $\alpha_t + \beta_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Таким образом, функции α, β удовлетворяют предположениям леммы 4 с $\alpha(0, x) \equiv 0$. По этой лемме $\alpha(t, x) = 0$ п.в. на Π , и поскольку при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ равенство

$$I = \left(\int_X \cos 2\theta \, d\nu_{t,x}(U) \right)^2 + \left(\int_X \sin 2\theta \, d\nu_{t,x}(U) \right)^2 = 1$$

возможно лишь в случае, когда функции $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ постоянны на носителе меры $\nu_{t,x}(U)$, то мы приходим к заключению, что для п.в. (t, x) функции $(\lambda_2 - \lambda_1) \cos 2\theta$ и $(\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\theta$ постоянны на носителе $\nu_{t,x}$. Ввиду равенств (77) отсюда следует постоянство на $\operatorname{supp} \nu_{t,x}$ координат a, b и c (для п.в. (t, x)) и, значит, регулярность мерозначной функции $\nu_{t,x}$. Итак, $\nu_{t,x}(U) = \delta(U - U(t, x))$. По предложению 12 последовательность U_k сходится к $U(t, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi, X)$. Поскольку условия (101), (103) сводятся в регулярном случае к условиям (43), (44) для $U(t, x)$, то $U(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (38). Далее, по теореме 7 о.э.р. $U(t, x)$ единственно и совпадает с с.о.э.р. задачи (1), (38). В частности, предельная функция $U(t, x)$ последовательности U_k определяется однозначно и не зависит от выбора подпоследовательности. Отсюда следует сходимость исходной последовательности U_k (без выделения подпоследовательности). Теорема полностью доказана.

В заключение автор выражает признательность С. Н. Кружкову за обсуждение работы.

Список литературы

1. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. 2-е изд. М.: Наука, 1978.
3. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
4. Lax P. D. // Shock waves and entropy, contributions to Nonlinear Functional Analysis / Ed. E. A. Zarantonello. Academic Press, 1971. P. 603–634.
5. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
6. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.
7. Кружков С. Н., Панов Е. Ю. Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных // ДАН СССР 1990. Т. 314. № 1. С. 79–84.
8. Kruzhkov S. N., Panov E. Yu. Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order // Annali Univ. Ferrara-Sez. 1994. V. 15. P. 31–53.
9. Панов Е. Ю. О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 107–148.
10. Бенилан Ф., Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка с непрерывными нелинейностями // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 2. С. 151–154.
11. Панов Е. Ю. Об одном классе систем квазилинейных законов сохранения // Матем. сб. 1997. № 5. С. 85–112.
12. Панов Е. Ю. Обобщенные решения задачи Коши для некоторых классов гиперболических систем первого порядка // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. № 6. С. 75–77.
13. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
14. Tartar L. Compensated compactness and applications to partial differential equations. Research notes in mathematics, nonlinear analysis, and mechanics. Heriot-Watt Symposium. 1979. V. 4. P. 136–212.
15. DiPerna R. J. Measure-valued solutions to conservation laws // Arch. Rational Mech. Anal. 1985. V. 88. P. 223–270.
16. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.
17. Murat F. Compacité par compensation // Ann. Scuola Norm. sup. Pisa. 1978. V. 5. P. 489–507.

Новгородский государственный
университет

Поступило в редакцию
3.VII.1997