Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О весах l -адического представления и арифметике собственных чисел Фробениуса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 1, 185–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 02:48:13

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О весах l -адического представления и арифметике собственных чисел Фробениуса

Пусть J – абсолютно простое абелево многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что $\text{Cent}(\text{End}(J \otimes \bar{k})) = \mathbb{Z}$. Если $\mathbb{Q}$ -алгебра с делением $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ расщепляется в простой точке l , то l -адическое представление определено микровесами простых классических алгебр Ли типов A_m, B_m, C_m или D_m .

Если S – поверхность типа КЗ над достаточно большим числовым полем $k \subset \mathbb{C}$ и группа Ходжа $\text{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})$ полупроста, то S имеет обыкновенную редукцию в каждой неархимедовой точке k из некоторого множества с плотностью Дирихле 1.

Если J – абсолютно простое трехмерное абелево многообразие типа IV по классификации Альберта над достаточно большим числовым полем, то J имеет обыкновенную редукцию в каждой точке из некоторого множества с плотностью Дирихле 1.

Библиография: 35 наименований.

Введение

0.1. Пусть J – абелево многообразие над числовым полем $k \subset \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Для данного простого числа l рассмотрим естественное l -адическое представление

$$\rho_l: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)).$$

Мы обозначаем через

$$\rho_l^{\wedge 2}: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(H_{\text{et}}^2(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)) = \text{GL}(\wedge^2 H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))$$

естественное l -адическое представление во вторых когомологиях $J \otimes \bar{k}$.

Напомним некоторые гипотезы и результаты, касающиеся ρ_l .

Работа написана при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00647) и Центра грантов Новосибирского государственного университета. Исследование в MSRI выполнено при частичной поддержке Национального научного фонда (грант DMS-9022140). Статья подготовлена к печати во время стажировки автора в Институте высших научных исследований (Бюр-сюр-Иветт) и в Институте математических исследований MSRI (Беркли) весной 1997 г. Автор хотел бы поблагодарить сотрудников институтов за их теплое гостеприимство и превосходные условия для работы.

0.2. ГИПОТЕЗА (Серра–Мамфорда–Тэйта [11], [19]). *Существует канонический изоморфизм алгебр Ли*

$$\mathrm{Lie\,Im}(\rho_l) \simeq \mathrm{Lie}[\mathrm{MT}(J \otimes_k \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)],$$

где $\mathrm{MT}(J \otimes_k \mathbb{C})$ – группа Мамфорда–Тэйта, ассоциированная с канонической $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа на $H^1(J \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$.

0.3. ТЕОРЕМА (Делиня [35, теорема 0.5.1b]). *Любой простой фактор g редуктивной алгебры Ли $\mathrm{Lie\,Im}(\rho_l) \otimes \mathbb{C}$ является классической алгеброй Ли типа A_m , B_m , C_m или D_m , и старший вес любого неприводимого g -подмодуля $E \subset H^1(J \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ является микровесом.*

Напомним список микровесов:

для типа A_m ($m \geq 1$) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$;

для типа B_m ($m \geq 2$) ω_m ;

для типа C_m ($m \geq 3$) ω_1 ;

для типа D_m ($m \geq 4$) $\omega_1, \omega_{m-1}, \omega_m$;

для типа E_6 ω_1, ω_6 ;

для типа E_7 ω_7 ;

здесь $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ – фундаментальные веса [4, гл. 8, §7, п. 3].

В силу теоремы Делиня следующую гипотезу можно рассматривать как слабую форму гипотезы Серра–Мамфорда–Тэйта.

0.4. ГИПОТЕЗА (о микровесах [32, гипотеза 0.4]). *Пусть J – абелево многообразие над числовым полем $k \subset \mathbb{C}$. Тогда любой простой фактор g редуктивной алгебры Ли $\mathrm{Lie\,Im}(\rho_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ является классической алгеброй Ли типа A_m , B_m , C_m или D_m , и старший вес любого неприводимого g -подмодуля $E \subset H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ является микровесом.*

0.5. Если $\mathrm{End}(J \otimes_{\bar{k}}) = \mathbb{Z}$ и $\dim_k J$ – нечетное число, то в силу хорошо известной теоремы Серра [7, п. 6.1] существует канонический изоморфизм l -адических алгебр Ли $\mathrm{Lie\,Im}(\rho_l) \simeq \mathrm{Lie}[\mathrm{MT}(J \otimes_k \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]$. В частности, гипотеза Серра–Мамфорда–Тэйта и гипотеза о микровесах верны для J . Аналогичные результаты получены для некоторых простых абелевых многообразий четных размерностей [26]–[28].

В этой статье мы доказываем следующие теоремы.

0.6. ТЕОРЕМА. *Пусть J – абсолютно простое абелево многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что $\mathrm{Cent}(\mathrm{End}(J \otimes_{\bar{k}})) = \mathbb{Z}$. Если $\mathbb{Q}$ -алгебра с делением $\mathrm{End}^0(J \otimes_{\bar{k}})$ расщепляется в простой точке l , то любой простой фактор g редуктивной алгебры Ли $\mathrm{Lie\,Im}(\rho_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ является простой алгеброй Ли типа A_m , B_m , C_m или D_m , и старший вес любого неприводимого g -подмодуля $E \subset H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ является микровесом.*

0.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Р.Пинк независимо от автора доказал гипотезу о микровесах для **всех** абелевых многообразий над числовыми полями [16, теорема (5.10), следствие (5.11)]. Его значительно более сложное доказательство основано на технике кристалльных когомологий.

0.8. Доказательство теоремы 0.6 основано на классических результатах Ж.-П.Серра [18, § 3]. Мы получаем из этих результатов и условий теоремы 0.6, что конфигурация множества Δ всех собственных чисел Фробениуса, отвечающих достаточно общей неархимедовой точке v поля k в пространстве $\Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$ (где Γ_v – мультипликативная подгруппа $\overline{\mathbb{Q}}^\times$, порожденная Δ), идентична конфигурации некоторого подмножества вершин куба в $\Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$. Поскольку доказательство элементарно и содержит красивые геометрические конструкции, некоторые из этих конструкций, вероятно, могут быть полезными при решении других диофантовых задач.

0.9. Например, пусть S – гладкая проективная поверхность типа КЗ над достаточно большим числовым полем $k \subset \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Для любого простого числа l рассмотрим естественное l -адическое представление $\rho_l^S : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(H_{\text{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l))$. Известно, что существует канонический изоморфизм алгебр Ли [25]

$$\text{Lie Im}(\rho_l^S) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}[\text{MT}(S \otimes_k \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)], \quad (0.9.1)$$

где $\text{MT}(S \otimes_k \mathbb{C})$ – группа Мамфорда–Тэйта, ассоциированная с естественной $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа на $H^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$. Этот результат существенно обобщен в [1].

Пусть $V_{\mathbb{Q}}(1)$ – ортогональное дополнение $\text{NS}(S \otimes_k \mathbb{C}) \subset H^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1))$ относительно индекса пересечения. Группа Ходжа $\text{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})$ естественным образом действует на $V_{\mathbb{Q}}$. В силу хорошо известной теоремы Ю.Г. Зархина $K = \text{End}_{\text{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})} V_{\mathbb{Q}}$ является вполне вещественным числовым полем или чисто мнимым квадратичным расширением вполне вещественного поля K_0 . Более того, K является вполне вещественным полем тогда и только тогда, когда $\text{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})$ – полупростая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа [34].

Предположим, что S имеет хорошую редукцию в неархимедовой точке v поля k . Пусть $F_{\bar{v}} \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ – элемент Фробениуса, ассоциированный с точкой $\bar{v}$ поля $\bar{k}$, лежащей над точкой v . Мы говорим, что S имеет *обыкновенную редукцию* в неархимедовой точке v поля k с полем вычетов $k(v) = \mathbb{F}_{q_v}$ характеристики $p_v \neq l$, если и только если специальный слой S_v является гладкой проективной поверхностью типа КЗ, и для любого собственного числа δ линейного оператора $\rho_l^S(F_{\bar{v}}^{-1})$ и для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$ над p_v выполняется соотношение

$$w(\delta)/w(q_v) \in \{0, 1, 2\}.$$

Пусть T – множество неархимедовых точек поля k . Напомним, что плотность Дирихле T во множестве всех неархимедовых точек k определяется как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \text{Card}(\{v \in T \mid \text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) \leq x\})$$

(если такой предел существует).

Если J – абелево многообразие размерности ≤ 2 над достаточно большим числовым полем k , то плотность Дирихле множества $\{v \mid v \text{ – неархимедова точка } k, J \text{ имеет обыкновенную редукцию в } v\}$ равна 1 согласно результату А. Огаса [15]. Это же верно для абелева многообразия без комплексного умножения при условии, что $\mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(J \otimes_k \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$ имеет тип $A_1 \times A_1 \times \cdots \times A_1$ [14] или если $\mathrm{End}(J \otimes_k \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ и $\mathrm{Lie} \, \mathrm{Hg}(J \otimes_k \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$ не имеет простых факторов типа C_r , ($r \geq 3$) [16, следствие (7.2)].

В этой статье мы выводим из (0.9.1) следующий результат.

0.10. ТЕОРЕМА. Пусть S – гладкая проективная поверхность типа КЗ над достаточно большим числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Если ранг группы Нерона–Севери $S \otimes_k \mathbb{C}$ является нечетным числом или если группа Ходжа $\mathrm{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})$ – полупростая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа, то множество всех неархимедовых точек k , в которых S имеет обыкновенную редукцию, является множеством плотности 1 по Дирихле.

При условиях теоремы 0.10 множество Δ собственных чисел Фробениуса в первых когомологиях абелева многообразия Кути–Сатаке имеет конфигурацию подмножества множества всех вершин куба в $\Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$ (для достаточно общей неархимедовой точки v поля k). Поэтому можно применить технику Р. Нута [14] в этой новой ситуации.

0.11. Напомним, что абелево многообразие J имеет обыкновенную редукцию в неархимедовой точке v поля k с полем вычетов $k(v) = \mathbb{F}_{q_v}$ характеристики p_v , если и только если специальный слой J_v минимальной модели Нерона J является абелевым многообразием и выполняются следующие эквивалентные условия:

- 1) p_v -ранг J_v равен $\dim_{k(v)} J_v$;
- 2) для любого собственного числа δ оператора $\rho_l(F_v^{-1})$, $l \neq p_v$, и для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v , выполнено соотношение

$$w(\delta)/w(q_v) \in \{0, 1\};$$

- 3) редукция по модулю p_v характеристического полинома $\mathrm{Pc}_J(\rho_l(F_v^{-1}), t)$ не делится на t^{d+1} , где $d = \dim_k J$ [8, п. 2].

Напомним, что $J \otimes \bar{k}$ – абелево многообразие типа IV по классификации Альберта, если и только если $K = \mathrm{Cent}(\mathrm{End}^0(J \otimes \bar{k}))$ является мнимым квадратичным расширением вполне вещественного поля. Более того, если $[K : \mathbb{Q}] = 2 \cdot \dim_k J$, то J – абелево многообразие СМ-типа [8, § 22].

Доказательство следующей теоремы основано на анализе разложений простых чисел в расширениях степени 3 или 6 поля $\mathbb{Q}$ (которые не являются, вообще говоря, нормальными, и поэтому в данной ситуации нет хороших симметрий) и на следующем замечательном диофантовом свойстве следа Фробениуса: если J – абелево многообразие размерности ≥ 2 над достаточно большим числовым полем k , то характеристика p_v поля вычетов $k(v)$ не делит $\mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$ для всех неархимедовых точек k , лежащих в некотором подмножестве точек с плотностью Дирихле 1 [26, теорема 0.4].

0.12. ТЕОРЕМА. Пусть J – абсолютно простое трехмерное абелево многообразие типа IV над достаточно большим числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$.

Тогда специальный слой J_v минимальной модели Нерона J является обыкновенным абелевым многообразием для любой неархимедовой точки v поля k из некоторого множества с плотностью Дирихле 1.

Доказательства результатов этой статьи содержатся в препринтах [29]–[31].

Автор благодарен Ж.-П. Серру, Д. Бертрану и И. Андре за стимулирующее обсуждение этой темы.

§ 1. Некоторые замечания об l -адическом представлении

1.1. Всюду в дальнейшем J – абелево многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V_l = H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$. Пусть G_{V_l} – алгебраическая оболочка компактной l -адической группы Ли $\text{Im}(\rho_l)$. Известно, что G_{V_l} совпадает с замыканием $\text{Im}(\rho_l)$ в топологии Зариского группы $\text{GL}(V_l)$.

Фиксируем неархимедову точку v поля k . Пусть $k(v)$ – ее поле вычетов характеристики p_v , $\bar{k}_v$ – пополнение поля k относительно топологии, индуцированной точкой v , $\bar{v}$ – продолжение v на поле $\bar{k}$, $D(\bar{v})$ – группа разложения, $I(\bar{v}) \subset \text{Gal}(\bar{k}/k)$ – группа инерции.

1.2. Предположим, что v – неархимедова точка поля k , в которой J имеет хорошую редукцию. Пусть $F_{\bar{v}} \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ – элемент Фробениуса. Известно, что характеристический полином $\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1})$ совпадает с характеристическим полиномом эндоморфизма Фробениуса π_v редукции J_v многообразия J в точке v . Обозначим через Δ множество всех собственных чисел $\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1})$ (с учетом кратностей). Пусть Γ_v – мультипликативная подгруппа $\bar{\mathbb{Q}}^\times$, порожденная Δ .

По теории Хонды–Тэйта [32] $\mathbb{Q}[\pi_v] = \prod K_i$, K_i – числовые поля. Мультипликативная группа $\mathbb{Q}[\pi_v]^\times$ определяет $\mathbb{Q}$ -тор $T_{\pi_v} = \prod R_{K_i/\mathbb{Q}}(G_{mK_i})$, где $R_{K_i/\mathbb{Q}}$ – ограничения скаляров по Вейлю. Пусть H_v – наименьшая алгебраическая подгруппа T_{π_v} , определенная над $\mathbb{Q}$, для которой $\pi_v \in H_v(\mathbb{Q})$. Как хорошо известно, H_v – группа мультипликативного типа. Связная компонента единицы в H_v называется *тором Фробениуса* T_v . Кроме того, T_v является $\mathbb{Q}$ -тором в G_{V_l} [7, п. 3b].

1.3. Обозначим через $\mathbb{C}_{p_v} = (\bar{\mathbb{Q}}_{p_v})^\wedge$ пополнение алгебраического замыкания поля $\mathbb{Q}_{p_v}$. Согласно Тэйту и Рейно существует каноническое разложение Ходжа–Тэйта

$$V_{\mathbb{C}_{p_v}} = V_{p_v} \otimes_{\mathbb{Q}_{p_v}} \mathbb{C}_{p_v} = V_{\mathbb{C}_{p_v}}(0) \oplus V_{\mathbb{C}_{p_v}}(-1)$$

и $\dim V_{\mathbb{C}_{p_v}}(0) = \dim V_{\mathbb{C}_{p_v}}(-1)$ [7, п. 4.3].

Определим морфизм алгебраических $\mathbb{C}_{p_v}$ -групп

$$h_{V_{p_v}} : G_{m\mathbb{C}_{p_v}} \rightarrow \text{GL}(V_{\mathbb{C}_{p_v}})$$

формулой

$$h_{V_{p_v}}(c)(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in V_{\mathbb{C}_{p_v}}(0), \\ c^{-1}x, & \text{если } x \in V_{\mathbb{C}_{p_v}}(-1). \end{cases}$$

Алгебраическая оболочка $\rho_{p_v}(I(\bar{v}))$ является алгебраической подгруппой $G_{V_{p_v}}$. По теореме Сена [17] 1-параметрическая подгруппа $h_{V_{p_v}}$ содержится в алгебраической оболочке $\rho_{p_v}(I(\bar{v}))$. В частности, $\text{Im}(h_{V_{p_v}}) \subset G_{V_{p_v}}(\mathbb{C}_{p_v})$.

1.4. ЛЕММА. *Предположим, что $\text{Cent End}^0(J \otimes \bar{k})$ – вполне вещественное поле и $J(k)$ содержит все точки порядка p_v^2 в $J(\bar{k})$. Пусть $M \subset G_{V_{p_v}}$ – наименьшая нормальная алгебраическая подгруппа, для которой $\text{Im}(h_{V_{p_v}}) \subset M(\mathbb{C}_{p_v})$. Тогда каноническое представление полупростой алгебры Ли $[\text{Lie}(M)]^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_{p_v}$ в $V_{p_v} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_{p_v}$ определено микровесами классических алгебр Ли (типов A_m, B_m, C_m, D_m).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Ф. А. Богомолова [2] $\text{Lie Im}(\rho_{p_v}) = \text{Lie}(G_{V_{p_v}})$, и $G_{V_{p_v}}$ содержит группу G_m гомотетий. В силу результатов Г. Фалтингса [10] группа $G_{V_{p_v}}$ редуктивна. В рассматриваемом случае $G_{V_{p_v}}$ связна [7, предложение 3.6] и $G_{V_{p_v}} = G_m \cdot S_{V_{p_v}}$, где $S_{V_{p_v}} = [G_{V_{p_v}}, G_{V_{p_v}}]$ – коммутант $G_{V_{p_v}}$ [7, п. 1.2.2b]. Ясно, что M – связная редуктивная алгебраическая группа над $\mathbb{Q}_{p_v}$ с нетривиальной полупростой частью $M^{ss} = [M, M]$ (потому что $\text{Im}(h_{V_{p_v}})$ не содержится в $G_m(\mathbb{C}_{p_v})$); каноническое представление V_{p_v} группы M является точным. Если N – нормальная связная алгебраическая подгруппа M , определенная над $\mathbb{Q}_{p_v}$, для которой $\text{Im}(h_{V_{p_v}}) \subset N(\mathbb{C}_{p_v})$, то N – нормальная алгебраическая подгруппа $G_{V_{p_v}}$. Действительно, пусть $f: S_{V_{p_v}}^{sc} \rightarrow S_{V_{p_v}}$ – универсальное накрытие; поскольку M^{ss} – нормальная алгебраическая подгруппа $S_{V_{p_v}}$, группа $(f^{-1}(M^{ss}))^0$ является нормальной алгебраической подгруппой $S_{V_{p_v}}^{sc}$, и поэтому мы получаем разложение $S_{V_{p_v}}^{sc} = (f^{-1}(M^{ss}))^0 \times H''$, где $(f^{-1}(M^{ss}))^0$ и H'' – односвязные полупростые $\mathbb{Q}_{p_v}$ -группы; с другой стороны, $(f^{-1}(N^{ss}))^0$ – нормальная связная подгруппа $(f^{-1}(M^{ss}))^0$, поэтому мы получаем разложения $(f^{-1}(M^{ss}))^0 = (f^{-1}(N^{ss}))^0 \times H'$ и $S_{V_{p_v}}^{sc} = (f^{-1}(N^{ss}))^0 \times H' \times H''$; следовательно, N^{ss} – нормальная алгебраическая подгруппа $S_{V_{p_v}}$, и N – нормальная алгебраическая подгруппа $G_{V_{p_v}}$. Поэтому $N = M$. Действие $G_{m\mathbb{C}_{p_v}}$ на $V_{\mathbb{C}_{p_v}} = V_{p_v} \otimes_{\mathbb{Q}_{p_v}} \mathbb{C}_{p_v}$, определенное $h_{V_{p_v}}$, имеет веса 0 и -1 . В силу известных результатов Ж.-П. Серра [18, § 3] представление V_{p_v} группы M определено микровесами классических алгебр Ли. Лемма доказана.

1.5. СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что $\text{Cent End}^0(J \otimes \bar{k})$ – вполне вещественное поле. Тогда для любого простого числа l редуктивная алгебра Ли $\text{Lie Im}(\rho_l) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ имеет такой простой фактор g , что каноническое представление g в $V_l \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ определено микровесами классических алгебр Ли.*

Действительно, мы можем выбрать такую неархимедову точку v , что $p_v = l$. Заменив k некоторым конечным алгебраическим расширением, мы можем считать, что $J(k)$ содержит все точки порядка p_v^2 в $J(\bar{k})$.

§ 2. О $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантных подмножествах $\Delta \cdot \Delta$

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть J – абелево многообразие размерности ≥ 2 над числовым полем k . После замены k некоторым конечным расширением можно считать, что для абелева многообразия J и для любой неархимедовой точки v поля k из некоторого множества $S_{\text{non-Arch}}^{\text{generic}}(J, k, l)$ точек с плотностью Дирихле 1 выполняются следующие условия:*

1) для фиксированного целого числа $n \geq 2$ с условием $l^n > (2 \cdot \dim_k J)^2$ все точки l^n -кручения в $J(\bar{k})$ рациональны над k , и k содержит все корни степени l^n из единицы;

- 2) $p_v = \text{char}(k(v)) > (2 \cdot \dim_k J)^2$;
- 3) $\text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v$; p_v не разветвлено в k ;
- 4) J имеет хорошую редукцию в v ; следы Фробениуса $\text{Tr}(\rho_l(F_v^{-1}))$ и $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$ не делятся на p_v ;
- 5) Γ_v не имеет кручения, G_{V_l} связна и $\rho_l(F_v^{-1}) \in T_v(\mathbb{Q})$;
- 6) тор Фробениуса T_v является максимальным тором в G_{V_l} и

$$\text{rank}(\Gamma_v) = \dim(T_v) = \text{rank}(G_{V_l}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены k некоторым конечным расширением можно считать, что для абелева многообразия J и для k выполняется условие 1). Тогда плотность Дирихле множества $S_{\text{non-Arch}}^{\text{generic}}(J, k, l)$ всех неархимедовых точек k , удовлетворяющих условиям 2)–6), равна 1 (см. [7, лемма 2.1, предложения 3.6, (5.2.1), следствие 3.8]; [26, теорема 0.4]). Предложение доказано.

В дальнейшем мы считаем, что $v \in S_{\text{non-Arch}}^{\text{generic}}(J, k, l)$, $\text{Cent End}(J \otimes \bar{k}) = \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ -алгебра с делением $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ расщепляется в простой точке l . В этом случае $G_{V_l} = G_m \cdot S_{V_l}$, где $S_{V_l} = [G_{V_l}, G_{V_l}]$ – коммутант G_{V_l} [7, п. 1.2.2b]. Более того, по классификации Альберта [13, § 21] V_l является прямой суммой 1 или 2 копий абсолютно неприводимого симплектического или ортогонального S_{V_l} -модуля U_l .

2.2. Пусть $f: S_{V_l}^{sc} \rightarrow S_{V_l}$ – универсальное накрытие. Изогения f продолжается до изогении $f_{G_m}: G_m \times S_{V_l}^{sc} \rightarrow G_m \cdot S_{V_l} = G_{V_l}$, определенной формулой $f_{G_m}(a \times s) = a \cdot f(s)$ при $a \in G_m$, $s \in S_{V_l}^{sc}$.

Рассмотрим точную последовательность

$$1 \rightarrow \text{Ker}(f_{G_m}) \rightarrow G_m \times S_{V_l}^{sc} \rightarrow G_m \cdot S_{V_l} = G_{V_l} \rightarrow 1.$$

Она определяет точную последовательность коммутативных алгебраических $\mathbb{Q}_l$ -групп

$$1 \rightarrow \text{Ker}(f_{G_m}) \cap [f_{G_m}^{-1}(T_v)]^0 \rightarrow [f_{G_m}^{-1}(T_v)]^0 \xrightarrow{\varphi} T_v \rightarrow 1, \quad (2.2.1)$$

где $[f_{G_m}^{-1}(T_v)]^0$ – максимальный $\mathbb{Q}_l$ -подтор $G_m \times S_{V_l}^{sc}$, совпадающий со связной компонентой единицы $f_{G_m}^{-1}(T_v)$, φ является изогенией $\mathbb{Q}_l$ -торов, $\text{Ker}(f_{G_m}) \cap [f_{G_m}^{-1}(T_v)]^0 = \text{Ker}(\varphi)$ – конечная группа, изоморфная некоторой подгруппе $\text{Cent}(S_{V_l}^{sc})$. Мы перепишем последовательность (2.2.1) как

$$1 \rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow [f_{G_m}^{-1}(T_v)]^0 \xrightarrow{\varphi} T_v \rightarrow 1. \quad (2.2.2)$$

2.3. Напомним, что $S_{V_l} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ является $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -почти простой алгебраической группой тогда и только тогда, когда $S_{V_l} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ полупроста и не имеет бесконечных нормальных алгебраических $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -подгрупп, отличных от $S_{V_l} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$.

Если $S_{V_l} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ является $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -почти простой алгебраической группой, то в силу следствия 1.5 l -адическое представление ρ_l определено микровесами классических алгебр Ли.

2.4. Предположим, что $S_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ не является $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -почти простой алгебраической группой. Поскольку $S_{V_l}^{sc} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ – односвязная алгебраическая $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -группа, она является произведением двух собственных полупростых $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -подгрупп: $S_{V_l}^{sc} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l = S_1 \times S_2$. Рассмотрим канонические проекции $\text{pr}_i: G_m \times S_1 \times S_2 \rightarrow S_i$ ($i = 1, 2$) и $\text{pr}_0: G_m \times S_1 \times S_2 \rightarrow G_m$. Так как $[f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0$ – максимальный $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -подтор $G_m \times S_1 \times S_2$, мы имеем

$$\begin{aligned} [f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0 \\ = \text{pr}_0([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) \times \text{pr}_1([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) \times \text{pr}_2([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0), \end{aligned}$$

и $\text{pr}_i([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0)$ – максимальный $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -подтор S_i , ($i = 1, 2$), $\text{pr}_0([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) = G_m$. Получаем разложение

$$[f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0 = G_m \times \text{pr}_1([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) \times \text{pr}_2([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0). \quad (2.4.1)$$

Можно найти такой элемент $y_v \in ([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0)(\overline{\mathbb{Q}}_l)$, что $\varphi(y_v) = \rho_l(F_{\overline{v}}^{-1})$ (напомним, что $\rho_l(F_{\overline{v}}^{-1}) \in T_v(\mathbb{Q}) \subset T_v(\overline{\mathbb{Q}}_l)$). Поэтому разложение (2.4.1) дает разложение $y_v = \lambda \times y_{v1} \times y_{v2}$, где $\lambda \in G_m(\overline{\mathbb{Q}}_l) = \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, $y_{vi} \in \text{pr}_i([f_{G_m}^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0)(\overline{\mathbb{Q}}_l) \subset S_i(\overline{\mathbb{Q}}_l)$.

С другой стороны, $U_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l = \overline{\mathbb{Q}}_l \otimes W_1 \otimes W_2$, где W_1 – неприводимый S_1 -модуль, W_2 – неприводимый S_2 -модуль. Пусть $\rho_0: G_m \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l \rightarrow \text{GL}(\overline{\mathbb{Q}}_l) = \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, $\rho_i: S_i \rightarrow \text{GL}(W_i)$ ($i = 1, 2$) – соответствующие представления. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (G_m \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l) \times S_1 \times S_2 & \xrightarrow{\rho_0 \otimes \rho_1 \otimes \rho_2} & \text{GL}(\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes W_1 \otimes W_2) \\ \downarrow f_{G_m} & & \parallel \\ G_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l & \subset & \text{GL}(\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes W_1 \otimes W_2). \end{array} \quad (2.4.2)$$

Поскольку $f_{G_m}(y_{vi}) \in T_v(\overline{\mathbb{Q}}_l) \subset \text{GL}(U_l)(\overline{\mathbb{Q}}_l)$, то мы можем диагонализировать линейный оператор $f_{G_m}(y_{vi})$ (над $\overline{\mathbb{Q}}_l$). Пусть Δ_i – множество его собственных чисел. Коммутативная диаграмма (2.4.2) показывает, что множество Δ всех собственных чисел линейного оператора $f_{G_m}(y_v) = \varphi(y_v) = \rho_l(F_{\overline{v}}^{-1})$ равно

$$\Delta = \lambda \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2 \quad (2.4.3)$$

с естественным действием $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на Δ (напомним, что характеристический полином $\rho_l(F_{\overline{v}}^{-1})$ принадлежит $\mathbb{Z}[t]$). Пусть Γ_{Δ_i} – мультипликативная подгруппа $\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, порожденная Δ_i , $\Gamma_{\{\lambda\}} = \{\lambda^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Обозначим через $X^*(\text{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0))$ группу характеров $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -тора $\text{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0)$. Очевидно, $\Gamma_v \subset \Gamma_{\{\lambda\}} \cdot \Gamma_{\Delta_1} \cdot \Gamma_{\Delta_2}$, поэтому

$$\begin{aligned} \text{rank } \Gamma_v &\leq \sum \text{rank } X^*(\text{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0))(\text{pr}_i(y_v)) \\ &\leq \sum \text{rank } X^*(\text{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0)) \\ &= \text{rank}(G_m \times S_1 \times S_2) = \text{rank}(G_{V_l}). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Условие 2.1,6) влечет соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} X^* \left(\operatorname{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) \right) (\operatorname{pr}_i(y_v)) \\ = \operatorname{rank} X^* \left(\operatorname{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) \right). \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Поскольку существует каноническая точная последовательность

$$X^* \left(\operatorname{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) \right) \rightarrow X^* \left(\operatorname{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_L)]^0) \right) (\operatorname{pr}_i(y_v)) \rightarrow 0,$$

и $X^* \left(\operatorname{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) \right)$ не имеет кручения, мы получаем из (2.4.5), что

$$\Gamma_{\Delta_i} = X^* \left(\operatorname{pr}_i([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0) \right) (\operatorname{pr}_i(y_v))$$

не имеет кручения. Поэтому из (2.4.4) следует, что

$$\Gamma_{\{\lambda\}} \cdot \Gamma_{\Delta_1} \cdot \Gamma_{\Delta_2} = \Gamma_{\{\lambda\}} \times \Gamma_{\Delta_1} \times \Gamma_{\Delta_2}. \quad (2.4.6)$$

С другой стороны, W_i – симплектический или ортогональный S_i -модуль, поэтому $W_i^* = W_i$. Следовательно, $\Delta_i^{-1} = \Delta_i$.

Группа Галуа $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует естественным образом на Δ и на $\Delta \cdot \Delta$. Для любого элемента $\eta \in \Delta \cdot \Delta$ определим отображение $T_\eta: \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ формулой $T_\eta(\delta) = \eta\delta^{-1}$. Легко видеть, что для любого элемента $\sigma \in \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ мы имеем (с учетом кратностей) $\operatorname{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = \operatorname{Card}(T_{\sigma(\eta)}(\sigma(\Delta)) \cap \sigma(\Delta)) = \operatorname{Card}(T_{\sigma(\eta)}(\Delta) \cap \Delta)$. Поэтому для любой константы c множество $\{\eta \in \Delta \cdot \Delta \mid \operatorname{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = c\}$ является $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным. Ясно, что

$$\eta = \lambda^2 \Leftrightarrow \operatorname{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = \operatorname{Card}(\Delta).$$

Следовательно, $\lambda^2 \in \mathbb{Q}$ и λ^2 имеет абсолютную величину p_v (по условию 2.1,3) и в силу известной теоремы А. Вейля [13, § 21, теорема 4]), поэтому мы получаем равенство $\lambda^2 = \pm p_v$. Пусть ρ – комплексное сопряжение на $\overline{\mathbb{Q}}$, индуцированное некоторым вложением $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$. Согласно (2.4.6) любой элемент $\delta \in \Delta$ имеет единственное разложение $\delta = \lambda \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$, где $\delta_i \in \Delta_i$. Мы утверждаем, что

$$\rho(\lambda\delta_1\delta_2) = \lambda\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}. \quad (2.4.7)$$

Действительно, $\rho(\lambda\delta_1\delta_2) = \lambda\delta'_1\delta'_2$ для некоторого $\delta'_i \in \Delta_i$. По теореме А. Вейля и в силу соотношения 2.1, 3) имеем $\lambda\delta_1\delta_2\rho(\lambda\delta_1\delta_2) = p_v$; поэтому

$$\lambda^2\delta_1\delta_2\delta'_1\delta'_2 = p_v, \quad \lambda^4(\delta_1\delta'_1\delta_2\delta'_2)^2 = p_v^2, \quad p_v^2(\delta_1\delta'_1\delta_2\delta'_2)^2 = p_v^2, \quad (\delta_1\delta'_1\delta_2\delta'_2)^2 = 1.$$

Заметим, что $\lambda^2 = \lambda\delta_1\delta_2 \cdot \lambda\delta_1^{-1}\delta_2^{-1} \in \Gamma_v$, поэтому $\delta_1\delta'_1\delta_2\delta'_2 = \lambda\delta_1\delta_2 \times \lambda\delta'_1\delta'_2/\lambda^2 \in \Gamma_v$. Поскольку Γ_v не имеет кручения (по условию 2.1,5)), соотношение $(\delta_1\delta'_1\delta_2\delta'_2)^2 = 1$ влечет $\delta'_1\delta'_2 = (\delta_1\delta_2)^{-1}$. Таким образом, утверждение (2.4.7) доказано.

Теорема А. Вейля и (2.4.7) показывают, что

$$\lambda^2 = \lambda\delta_1\delta_2 \cdot \rho(\lambda\delta_1\delta_2) = p_v. \quad (2.4.8)$$

2.5. ТЕОРЕМА. *Предположим, что разложение $\Delta = \lambda \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2$ соответствует разложению $S_{V_l}^{sc} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l = S_1 \times S_2$, где S_1 и S_2 – полупростые алгебраические $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -группы. Тогда для любого i $\Delta_i \cdot \Delta_i$ не содержит $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантного подмножества, не равного $\{1\}$ (без учета кратностей).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\Delta_1 \cdot \Delta_1$ содержит $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантное подмножество $B \neq \{1\}$ (без учета кратностей). Очевидно,

$$\text{Card}(B) < \frac{1}{2} \cdot \text{Card}(\Delta) \cdot \text{Card}(\Delta) \leq \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \dim_k J)^2 < \frac{1}{2} \cdot l^n. \quad (2.5.1)$$

Поскольку $\Delta_2^{-1} = \Delta_2$, то мы имеем $1 \in \Delta_2 \cdot \Delta_2$, поэтому

$$\lambda^2 \cdot B \subset \lambda^2 \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_1 \subset \lambda^2 \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_2 = \Delta \cdot \Delta.$$

Следовательно, $\sum_{z \in \lambda^2 \cdot B} z \in \mathbb{Z}$.

Предположим, что p_v не делит $\sum_{z \in \lambda^2 \cdot B} z$. Тогда для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v , имеем

$$w \left(\sum_{z \in \lambda^2 \cdot B} z \right) = 0.$$

Следовательно, существует такой элемент $z_w \in \lambda^2 \cdot B$, что $w(z_w) = 0$. Поэтому для любого элемента $\delta_2 \in \Delta_2$

$$0 = w(z_w) = \frac{1}{2} \{w(z_w \delta_2^2) + w(z_w \delta_2^{-2})\}.$$

Поскольку оба слагаемые в последних скобках неотрицательные в силу соотношений $z_w \delta_2^{\pm 2} \in \Delta \cdot \Delta$, мы имеем равенства $w(z_w \delta_2^2) = w(z_w \delta_2^{-2}) = 0$. Поэтому $w(\delta_2) = 0$ для всех $w \mid p_v$. Следовательно, δ_2 – корень из 1 [35, подлемма 3.4.0]. Так как $\delta_2 \in \Delta_2$ – произвольный элемент, мы заключаем, что мультипликативная группа Γ_{Δ_2} , порожденная Δ_2 , является конечной подгруппой $\overline{\mathbb{Q}}^\times$. Мы знаем, что Γ_{Δ_2} не имеет кручения. Поэтому $\Gamma_{\Delta_2} = \{1\}$, и

$$\begin{aligned} \text{rank } \Gamma_v &\leq 1 + \text{rank } \Gamma_{\Delta_1} = 1 + \text{rank } X^*(\text{pr}_1([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0))(\text{pr}_1(y_v)) \\ &\leq 1 + \text{rank } X^*(\text{pr}_1([\varphi^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)]^0)) \\ &= 1 + \text{rank}(S_1) < \text{rank}(G_m \times S_1 \times S_2) = \text{rank}(G_{V_l}) \end{aligned}$$

вопреки условию 2.1,6).

Следовательно, p_v делит $\sum_{z \in \lambda^2 \cdot B} z$. Так как $\lambda^2 = p_v$ в силу (2.4.8) и каждый элемент $b \in B$ имеет абсолютную величину 1 в силу теоремы А.Вейля [13, § 21, теорема 4], мы получаем соотношение

$$\sum_{z \in \lambda^2 \cdot B} z = p_v \cdot b_v,$$

где $b_v \in \mathbb{Z}$ имеет абсолютную величину $\leq \text{Card}(B) < \frac{1}{2} \cdot l^n$ в силу (2.5.1).

По условию 2.1,3) p_v неразветвлено в k , и $\text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v$. Следовательно, p_v полностью распадается в k , и мы имеем

$$k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} \simeq \mathbb{Q}_{p_v} \times \cdots \times \mathbb{Q}_{p_v}. \quad (2.5.2)$$

По условию 2.1,1) k содержит все корни степени l^n из единицы. С другой стороны, известно, что $(\mathbb{Q}_{p_v}^\times)_{\text{tors}} \simeq \mathbb{Z}/(p_v - 1)\mathbb{Z}$. Из (2.5.2) следует, что $l^n | (p_v - 1)$, и поэтому

$$p_v \equiv 1 \pmod{l^n}. \quad (2.5.3)$$

По условию 2.1,1) все точки l^n -кручения в $J(\bar{k})$ рациональны над k . Следовательно, $\rho_l|_{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ тривиально $\text{mod } l^n$, и поэтому для всех $\delta \in \Delta$ мы имеем соотношение $\delta \equiv 1 \pmod{l^n}$. Это же соотношение выполняется для любого элемента $\Delta \cdot \Delta$.

Известное соотношение $\lambda^2 \cdot B \subset \Delta \cdot \Delta$ влечет

$$\sum_{z \in \lambda^2 \cdot B} z = \text{Card}(B) \pmod{l^n}. \quad (2.5.4)$$

В силу (2.5.3) мы получаем из (2.5.4), что $b_v = \text{Card}(B) \pmod{l^n}$. Ясно, что неравенства $|b_v| \leq \text{Card}(B) < \frac{1}{2} \cdot l^n$ дают соотношение $b_v = \text{Card}(B)$. Следовательно, все элементы множества $\lambda^2 \cdot B$ равны $p_v = \lambda^2$ вопреки условию $B \neq \{1\}$. Теорема доказана.

2.6. В силу условия 2.1,5) Γ_v не имеет кручения. Поэтому мы можем рассматривать канонические вложения $\Delta \subset \Gamma_v \subset \Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$. В силу следствия 1.5 существует такая простая односвязная алгебраическая $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -группа S_2 классического типа, что старший вес любого неприводимого S_2 -подмодуля в $H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ является микровесом.

2.7. ЛЕММА. *Множество Δ_2 не содержит трех различных точек, лежащих на одной аффинной прямой пространства $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что S_2 – простая группа типа A_m ($m \geq 1$). Тогда в обозначениях Н. Бурбаки

$$\omega_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i - i \cdot (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{m+1}) / (m+1),$$

группа Вейля $W(R)$ является группой всех перестановок $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m+1}\}$ [4, гл. 6, п. 4.7]; $E(\omega_r)$ – симплектическое или ортогональное представление, если и только если $r = (m+1)/2$ [4, гл. 8, таблица 1], и в этом случае

$$\begin{aligned} \omega_r &= (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{(m+1)/2} - \varepsilon_{(m+3)/2} - \cdots - \varepsilon_{m+1})/2, \\ \text{ch } E(\omega_r) &= \text{ch } E(\omega_{(m+1)/2}) = \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ a_1 + \cdots + a_{m+1} = 0}} e^{a_1 \varepsilon_1 / 2 + \cdots + a_{m+1} \varepsilon_{m+1} / 2} \\ &= \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ a_1 + \cdots + a_m \in \{\pm 1\}}} e^{a_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_{m+1}) / 2 + \cdots + a_m (\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}) / 2}. \end{aligned}$$

Так как представление S_2 в W_2 является симплектическим или ортогональным, мы имеем следующее соотношение: $\Delta_2 = \{\alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}, a_1 + \dots + a_m \in \{\pm 1\}\}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – мультипликативно независимые алгебраические числа. Поэтому элементы Δ_2 являются вершинами некоторого куба в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$. Очевидно, что никакие три такие вершины не лежат на одной аффинной прямой в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$.

Предположим, что S_2 – простая группа типа B_m ($m \geq 2$). Тогда в обозначениях Н. Бурбаки

$$\omega_m = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m)/2,$$

$$\text{ch } E(\omega_m) = \sum_{a_i \in \{\pm 1\}} e^{a_1 \varepsilon_1/2 + \dots + a_m \varepsilon_m/2}$$

[4, гл. 6, п. 4.5], поэтому можно считать, что $\Delta_2 = \{\alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}\}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – мультипликативно независимые алгебраические числа. Поэтому элементы Δ_2 являются вершинами некоторого куба в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$, и никакие три такие вершины не лежат на одной аффинной прямой в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$.

Предположим, что S_2 – простая группа типа C_m ($m \geq 2$). Тогда

$$\text{ch } E(\omega_1) = \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ i \in \{1, \dots, m\}}} e^{a_i \varepsilon_i}$$

[4, гл. 6, п. 4.6]. Поэтому можно считать, что $\Delta_2 = \{\alpha_j^{a_j} \mid a_j \in \{\pm 1\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – мультипликативно независимые алгебраические числа. Поэтому элементы Δ_2 являются вершинами некоторого куба в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$, и никакие три такие вершины не лежат на одной аффинной прямой в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$.

Предположим, что S_2 – простая группа типа D_m ($m \geq 3$). Тогда

$$\text{ch } E(\omega_1) = \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ i \in \{1, \dots, m\}}} e^{a_i \varepsilon_i},$$

$$\text{ch } E(\omega_{m-1}) = \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ \text{Card}(\{i \mid a_i = -1\}) = 1 \pmod{2}}} e^{a_1 \varepsilon_1/2 + \dots + a_m \varepsilon_m/2},$$

$$\text{ch } E(\omega_m) = \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ \text{Card}(\{i \mid a_i = -1\}) = 0 \pmod{2}}} e^{a_1 \varepsilon_1/2 + \dots + a_m \varepsilon_m/2}$$

[4, гл. 6, п. 4.8]. Поэтому можно считать, что

$$\Delta_2 = \{\alpha_j^{a_j} \mid a_j \in \{\pm 1\}, j \in \{1, \dots, m\}\},$$

или

$$\Delta_2 = \{\alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \text{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 1 \pmod{2}\},$$

или

$$\Delta_2 = \{\alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} (a_j \in \{\pm 1\}, \text{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 0 \pmod{2})\},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – мультипликативно независимые алгебраические числа. Поэтому в любом случае элементы Δ_2 являются вершинами некоторого куба в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$, и никакие три такие вершины не лежат на одной аффинной прямой в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$. Лемма доказана.

2.8. ЛЕММА. *Если $x, y, z \in \Delta$ – три различные точки, лежащие на одной аффинной прямой $L \subset \Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$, то $x = \lambda \cdot \delta'_1 \cdot \delta_2$, $y = \lambda \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$, $z = \lambda \cdot \delta''_1 \cdot \delta_2$, где $\delta'_1, \delta_1, \delta''_1 \in \Delta_1$ и $\delta_2 \in \Delta_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.4.6) мы можем рассматривать каноническую проекцию

$$\text{pr}_{\Delta_2}: \Gamma_v \otimes \mathbb{Q} = (\Gamma_{\{\lambda\}} \otimes \mathbb{Q}) \times (\Gamma_{\Delta_1} \otimes \mathbb{Q}) \times (\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}) \rightarrow \Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}.$$

Если x, y, z – различные элементы Δ , лежащие на аффинной прямой L , то $\text{pr}_{\Delta_2}(x), \text{pr}_{\Delta_2}(y), \text{pr}_{\Delta_2}(z)$ лежат на $\text{pr}_{\Delta_2}(L)$. Заметим, что если y расположен между x и z , то $\text{pr}_{\Delta_2}(y)$ расположена между $\text{pr}_{\Delta_2}(x)$ и $\text{pr}_{\Delta_2}(z)$. Если $\text{pr}_{\Delta_2}(L)$ – прямая, то $\text{pr}_{\Delta_2}(x), \text{pr}_{\Delta_2}(y), \text{pr}_{\Delta_2}(z)$ являются различными элементами $\text{pr}_{\Delta_2}(\Delta) = \Delta_2$, лежащими на аффинной прямой $\text{pr}_{\Delta_2}(L)$ вопреки лемме 2.7. Следовательно, $\text{pr}_{\Delta_2}(L)$ – единственная точка. Лемма доказана.

§ 3. Корни, веса и собственные числа Фробениуса

3.1. Мы начинаем доказательство теоремы 0.6.

Пусть R – система корней $\text{Lie Im}(\rho_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ относительно подалгебры Картана h . Мы обозначаем через $(,): h^* \times h \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ тавтологическое спаривание. Пусть R^V – дуальная система корней. Множества R и R^V инвариантны относительно естественного действия группы Вейля W . Мы определяем решетку весов $P(R)$ в h^* :

$$P(R) = \{\lambda \in h^* \mid (\lambda, \alpha^V) \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in R\}.$$

3.2. Пусть $\Omega(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)$ – множество весов $h \subset \text{Lie Im}(\rho_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$. Мы имеем $\Omega(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l) \subset P(R) \subset h^*$. Множество $\Omega(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)$ является W -инвариантным и R -насыщенным [4, гл. 8, § 7, предложения 3, 4]. Это означает, что для веса $\lambda \in \Omega(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)$ и такого корня $\alpha \in R$, что $m = (\lambda, \alpha^V) > 0$, множество $\Omega(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)$ содержит арифметическую прогрессию $\lambda, \lambda - \alpha, \dots, \lambda - m\alpha$ длины m . Если $m = (\lambda, \alpha^V) < 0$, то $\Omega(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)$ содержит арифметическую прогрессию $\lambda, \lambda + \alpha, \dots, \lambda + (-m)\alpha$ длины $(-m)$.

3.3. Напомним, что ненулевой вес $\lambda \in P(R)$ называется *микровесом* тогда и только тогда, когда $(\lambda, \alpha^V) \in \{0, 1, -1\}$ для всех $\alpha \in R$ [4, гл. 8, § 7, п. 3].

Если каноническое l -адическое представление ρ_l не определяется микровесами, то $\Omega(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)$ содержит арифметическую прогрессию типа $\lambda, \lambda - \alpha, \lambda - 2\alpha$ или $\lambda, \lambda + \alpha, \lambda + 2\alpha$. В этом случае существуют такие различные элементы $\delta \neq \delta' \neq \delta'' \in \Delta$, что $\delta^2 = \delta' \cdot \delta''$ (действительно, если $\lambda, \lambda - \alpha, \lambda - 2\alpha \in \Omega(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l)$, то $2 \cdot (\lambda - \alpha) = \lambda + (\lambda - 2\alpha)$).

3.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что δ – середина отрезка $[\delta', \delta''] \subset \Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$. Поэтому δ', δ и δ'' лежат на одной аффинной прямой $L \subset \Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$.

3.5. Рассмотрим множество $\Delta^{\text{line}} = \{(\delta', \delta, \delta'') \mid \delta \neq \delta' \neq \delta'' \in \Delta, \delta^2 = \delta' \cdot \delta''\}$. Очевидно, $\Delta^{\text{line}} \subset \Delta \times \Delta \times \Delta$ инвариантно относительно действия группы Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, так как для любого $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ мы имеем $(\sigma(\delta))^2 = \sigma(\delta^2) = \sigma(\delta') \cdot \sigma(\delta'')$.

Последнее соотношение показывает, что множество

$$B = \{\delta'/\delta, \delta''/\delta = (\delta'/\delta)^{-1} \mid (\delta', \delta, \delta'') \in \Delta^{\text{line}}\} \subset \Gamma_v$$

инвариантно относительно естественного действия $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

3.6. Пусть $(\delta', \delta, \delta'') \in \Delta^{\text{line}}$. Согласно лемме 2.8 мы имеем следующие разложения:

$$\delta' = \lambda \cdot \delta'_1 \cdot \delta_2, \quad \delta = \lambda \cdot \delta_1 \cdot \delta_2, \quad \delta'' = \lambda \cdot \delta''_1 \cdot \delta_2, \quad (3.6.1)$$

где $\delta'_1, \delta_1, \delta''_1 \in \Delta_1$, $\delta_2 \in \Delta_2$.

Пусть $b = \delta'/\delta \in B$. Тогда $b = \delta'_1/\delta_1$, и мы получаем из (3.6.1) следующие разложения: $\delta' = \lambda \cdot b \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$, $\delta = \lambda \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$, $\delta'' = \lambda \cdot b^{-1} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$. Поскольку $b \cdot \delta_1 = \delta'_1 \in \Delta_1$ и $\delta_1^{-1} \in \Delta_1$, мы имеем соотношение $b \in \Delta_1 \cdot \Delta_1$. Поэтому $B \subset \Delta_1 \cdot \Delta_1$. С другой стороны, $B \neq \{1\}$, поэтому имеется нетривиальное $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантное подмножество $B \subset \Delta_1 \cdot \Delta_1$, что противоречит теореме 2.5.

Следовательно, ρ_l определено микровесами. Простой фактор типа E_6 не может появиться, потому что $E(\omega_{1,6})$ не является симплектическим или ортогональным представлением [4, гл. 8, таблица 1]. Мы исключим случай простого фактора типа E_7 в следующем параграфе.

§ 4. Исключение типа E_7

4.1. В обозначениях Н. Бурбаки [4, гл. 6, § 4] простая алгебра Ли типа E_7 имеет следующую систему корней:

$$R = \left\{ \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leq i < j \leq 6), \pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8), \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \cdot \left(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i \right) \left(\sum_{i=1}^6 \nu(i) \equiv 1 \pmod{2} \right) \right\}.$$

Базой системы корней является следующее множество:

$$\left\{ \alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7); \right. \\ \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \quad \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1; \quad \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2; \\ \left. \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3; \quad \alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4; \quad \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5 \right\}.$$

Для данного $\alpha \in R$ рассмотрим отражение

$$S_\alpha(x) = x - 2 \cdot \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \alpha.$$

Поскольку $(\alpha, \alpha) = 2$ для всех $\alpha \in R$, то мы получаем формулу $S_\alpha(x) = x - (x, \alpha) \cdot \alpha$. Эти отражения S_α ($\alpha \in R$) порождают группу Вейля $W(R)$ порядка $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

4.2. Мы хотим найти множество всех весов неприводимого симплектического представления $E(\omega_7)$ степени $56 = 2^3 \cdot 7$ [4, гл. 8, таблицы 1, 2]. Поскольку

$$\omega_7 = \varepsilon_6 + (\varepsilon_8 - \varepsilon_7)/2 = (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7)/2$$

– микровес, множество всех весов $E(\omega_7)$ совпадает с $W(R) \cdot \omega_7$ [4, гл. 8, § 7, предложение 6].

Легко найти матрицу $A = (a_{ij}) = (S_{\alpha_i}(\alpha_j))$:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 & -\alpha_4 & \alpha_4 + \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 + \alpha_5 & -\alpha_5 & \alpha_5 + \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 + \alpha_6 & -\alpha_6 & \alpha_6 + \alpha_7 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 + \alpha_7 & -\alpha_7 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим положительный вес $\varepsilon_3 + \varepsilon_6 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$ и соответствующее отражение $S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}(\alpha_1) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \\ S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}(\alpha_2) &= \alpha_2, \\ S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}(\alpha_3) &= \alpha_3, \\ S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}(\alpha_4) &= -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7, \\ S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}(\alpha_5) &= \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \\ S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}(\alpha_6) &= \alpha_6, \\ S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}(\alpha_7) &= -\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6. \end{aligned}$$

Поэтому мы получаем следующие цепочки:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \omega_7 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 \xrightarrow{S_{\varepsilon_3 + \varepsilon_6}} \\ &2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_1}} \\ &\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_3}} \\ &\alpha_2 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_5}} \\ &\alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_4}} \\ &\alpha_2 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_2 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_6}} \\
& -\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_4}} \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_2}} \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_3}} \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_4}} \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_5}} \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_6}} \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_5}} \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_6}} \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_7}} \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_4}} \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_2}} \\
& 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_5}} \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_6}} \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_3}} \\
& \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_4}} \\
& \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_5}} \\
& \alpha_2 - \alpha_5 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_3}} \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_7}} \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_3}} \\
& \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_7; \\
& \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7 \xrightarrow{S_{\alpha_7}} \\
& \alpha_2 + \alpha_5 - \alpha_7.
\end{aligned}$$

Продолжение этой процедуры приводит к старым весам или к противоположным весам. Следовательно, множество $\Omega(E(\omega_7))$ всех весов $E(\omega_7)$ равно $\frac{1}{2}\Omega \cup (-\frac{1}{2}\Omega)$, где Ω – множество всех элементов в цепочках, приведенных выше. В итоге мы получаем следующий список элементов Ω :

$$\begin{aligned}
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7; \\
& 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_7; \\
& 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_7; \\
& \alpha_2 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 + \alpha_5 - \alpha_7; \\
& \alpha_2 - \alpha_5 + \alpha_7; \\
& \alpha_2 - \alpha_5 - 2\alpha_6 - \alpha_7; \\
& \alpha_2 - \alpha_5 - \alpha_7.
\end{aligned}$$

4.3. Пусть $(x_1, \dots, x_7)$ – координаты на $\mathbb{Q}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Q}\alpha_7$ относительно $\{\alpha_1, \dots, \alpha_7\}$. Очевидно, что аффинная гиперплоскость $\{x \mid x_7 = 1\}$ содержит 27 точек $\Omega \cup (-\Omega)$ и аффинная гиперплоскость $\{x \mid x_7 = -1\}$ содержит 27 точек

$\Omega \cup (-\Omega)$. Следовательно, имеется разбиение

$$\begin{aligned} \Omega \cup (-\Omega) = & \{ \pm(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7) \} \\ & \cup \{ x \in \Omega \cup (-\Omega) \mid x_7 = -1 \} \cup \{ x \in \Omega \cup (-\Omega) \mid x_7 = 1 \}. \end{aligned}$$

Так как $W(R)$ действует транзитивно на $\Omega(E(\omega_7)) = \frac{1}{2}(\Omega \cup (-\Omega))$, мы видим, что для любого веса $\omega \in \Omega(E(\omega_7))$ существуют параллельные аффинные гиперплоскости $L_{-\omega}$, L_ω размерности 6, которые дают разбиение

$$\Omega(E(\omega_7)) = \{ \pm\omega \} \cup \{ L_{-\omega} \cap \Omega(E(\omega_7)) \} \cup \{ L_\omega \cap \Omega(E(\omega_7)) \},$$

где $\text{Card}(L_{\pm\omega} \cap \Omega(E(\omega_7))) = 27$. Эти гиперплоскости разделяют $-\omega$ и ω так, как показано ниже (где звездочки обозначают элементы $\Omega(E(\omega_7))$):

$$\begin{array}{ccccc} & & * & & * & & \\ & & | & & | & & \\ & & * \cdots * & & * \cdots * & & \\ * & & | & L_{-\omega} & | & L_\omega & | & * \\ -\omega & & | & * \cdots * & | & * \cdots * & | & \omega \\ & & | & * & | & * & | & \end{array} \quad (4.3.1)$$

4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы говорим, что подмножество $D \subset \Delta$ имеет конфигурацию типа $E_7(\omega_7)$, если и только если существуют такие 7-мерное аффинное подпространство $L \subset \Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$ и аффинный изоморфизм $f: L \simeq \mathbb{Q}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Q}\alpha_7$, что выполняются следующие условия:

- 1) $D = L \cap \Delta$;
- 2) $f(D) = \Omega(E(\omega_7))$ – система всех весов неприводимого представления $E(\omega_7)$ простой алгебры Ли типа E_7 .

4.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $S_{V_l}^{sc} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ имеет простой фактор типа E_7 , то существует подмножество $D \subset \Delta$ с конфигурацией типа $E_7(\omega_7)$.

Действительно, если Δ'_1 соответствует простому фактору типа E_7 , то, следуя п. 2.4, мы получим разложение $\Delta = \lambda \cdot \Delta'_1 \cdot \Delta''_1 \cdot \Delta_2$. Очевидно, что для любых $\delta''_1 \in \Delta''_1$, $\delta_2 \in \Delta_2$ аффинное пространство $L = (\Gamma_{\Delta'_1} \otimes \mathbb{Q}) \cdot \delta''_1 \cdot \delta_2$ содержит подмножество $D = \Delta'_1 \cdot \delta''_1 \cdot \delta_2$ с конфигурацией типа $E_7(\omega_7)$.

4.6. ЛЕММА. Если $D \subset \Delta$ имеет конфигурацию типа $E_7(\omega_7)$, то $\text{pr}_{\Delta_2}(D)$ – единственная точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Φ композицию следующих отображений:

$$\mathbb{Q}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Q}\alpha_7 \xrightarrow{f^{-1}} L \xrightarrow{\text{pr}_{\Delta_2}} \Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}.$$

Отображение Φ аффинное (возможно, вырожденное). Согласно результатам п. 2.7 $\Phi(\Omega(E(\omega_7))) = \text{pr}_{\Delta_2}(f^{-1}(\Omega(E(\omega_7)))) = \text{pr}_{\Delta_2}(D)$ – подмножество множества всех вершин куба в $\Gamma_{\Delta_2} \otimes \mathbb{Q}$. Предположим, что это подмножество содержит хотя бы две различные точки. Тогда мы получим из (4.3.1) следующую диаграмму (где

аффинные подпространства $\Phi(L_{\pm\omega})$ параллельны и разделяют вершины $\Phi(-\omega)$ и $\Phi(\omega)$):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & * & & * \\
 & & | & & | \\
 & & * \dots * & & * \dots * \\
 * & & | \Phi(L_{-\omega}) & & | \Phi(L_{\omega}) & * \\
 \Phi(-\omega) & & | & & | & \Phi(\omega) \\
 & & * \dots * & & * \dots * \\
 & & | & & | \\
 & & * & & *
 \end{array} \quad (4.6.1)$$

Поскольку все звездочки – вершины куба, мы можем найти такое ребро куба, что выполняются следующие условия:

- 1) $\Phi(-\omega)$ лежит на этом ребре;
- 2) образ $\Phi(\omega)$ относительно канонической проекции куба на это ребро не равен $\Phi(-\omega)$.

Пусть Φ' – композиция Φ и проекции куба на рассматриваемое ребро. Мы получаем из (4.6.1) следующую диаграмму:

$$\begin{array}{cccc}
 * & * & * & * \\
 \Phi'(-\omega) & \Phi'(L_{-\omega}) & \Phi'(L_{\omega}) & \Phi'(\omega)
 \end{array}$$

Следовательно, мы приходим к противоречию, так как не существует “промежуточных” вершин между двумя различными вершинами куба, лежащими на одном ребре. Лемма доказана.

4.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Предположим, что $D \subset \Delta$ имеет конфигурацию типа $E_7(\omega_7)$. Тогда для любого элемента $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ множество $\sigma(D) \subset \Delta$ имеет конфигурацию типа $E_7(\omega_7)$.

Это очевидно, так как $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на $\Gamma_v \otimes \mathbb{Q}$ как группа аффинных преобразований.

4.8. Рассмотрим множество

$\Delta^{E_7} = \{(\delta', \delta'', \dots, \delta^{(56)}) \in \Delta \times \dots \times \Delta = \Delta^{56} \mid \delta', \delta'', \dots, \delta^{(56)} \text{ – различные точки из } \Delta \text{ и множество } \{\delta', \delta'', \dots, \delta^{(56)}\} \text{ имеет конфигурацию типа } E_7(\omega_7)\}$. В силу замечания 4.7 это множество инвариантно относительно действия группы Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Следовательно, множество

$$B = \{1, \delta''/\delta', \dots, \delta^{(56)}/\delta', \delta'/\delta'', \dots, \delta^{(56)}/\delta'', \dots\} \mid (\delta', \dots, \delta^{(56)}) \in \Delta^{E_7}\}$$

инвариантно относительно естественного действия $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Согласно лемме 4.6 мы имеем следующие разложения:

$$\delta' = \lambda \cdot \delta'_1 \cdot \delta_2, \quad \delta'' = \lambda \cdot \delta''_1 \cdot \delta_2, \quad \dots, \quad \delta^{(56)} = \lambda \cdot \delta_1^{(56)} \cdot \delta_2,$$

где $\delta'_1, \delta''_1, \dots, \delta_1^{(56)} \in \Delta_1$, $\delta_2 \in \Delta_2$. Поэтому

$$B = \{1, \delta''_1/\delta'_1, \dots, \delta_1^{(56)}/\delta'_1, \delta'_1/\delta''_1, \dots, \delta_1^{(56)}/\delta''_1, \dots\} \mid (\delta', \dots, \delta^{(56)}) \in \Delta^{E_7}\}$$

является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным подмножеством $\Delta_1 \cdot \Delta_1^{-1} = \Delta_1 \cdot \Delta_1$, и $B \neq \{1\}$ вопреки теореме 2.5. Следовательно, простой фактор типа E_7 не может появиться. Теорема 0.6 доказана.

**§5. Существование обыкновенной редукции поверхности
типа КЗ: сведение задачи к случаю абелева многообразия**

5.1. В дальнейшем мы считаем, что S – гладкая проективная поверхность типа КЗ над числовым полем $k \subset \mathbb{C}$ с полупростой группой Ходжа $\mathrm{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})$. Пусть $\eta \in H^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$ – класс обильного дивизора на S . $\cup$ -произведение

$$H^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes H^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}(-2)$$

индуцирует ψ :

$$P^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \otimes P^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \mathbb{Z},$$

где $P^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$ – примитивная решетка. Форма ψ имеет сигнатуру $(2+, 19-)$. Пусть $C^+(P^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)), \psi)$ – четная алгебра Клиффорда, ассоциированная с формой ψ . Из результатов Сатаке следует, что естественная $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа на $P^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1))$ типа $(-1, 1) + (0, 0) + (1, -1)$ определяет $\mathbb{Q}$ -структуру Ходжа типа $(1, 0) + (0, 1)$ на $C^+(P^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1)), \psi)$ и абелево многообразие

$$J_{\mathbb{C}} = C^+(P^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1)), \psi) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} / C^+(P^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)), \psi)$$

размерности 2^{19} над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ [9, пп. 4.1–4.5]. Более того, заменив k некоторым конечным алгебраическим расширением, мы можем считать, что $J_{\mathbb{C}} = J \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ для некоторого абелева многообразия J над k и существует такая подалгебра C^+ в $\mathrm{End}(J)$, что $\mathbb{Z}_l[\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)]$ -алгебра $\mathrm{End}_{C^+} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l)$ изоморфна четной алгебре Клиффорда примитивного квадратичного модуля $P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$ (с естественным действием группы Галуа) [1, основная лемма 1.7.1]. В частности, мы имеем канонический изоморфизм $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей $\bigoplus \wedge^{2i} P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{C^+} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$ [9, пп. 6.6, 4.4]. Каноническое спаривание $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$\bigwedge_{20}^{20} P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)) \times P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)) \rightarrow \bigwedge_{21}^{21} P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)) = \mathbb{Q}_l$$

невырождено, поэтому мы имеем морфизмы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)) &\xrightarrow{\sim} P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))^* = \bigwedge_{20}^{20} P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)) \\ &\subset \mathrm{End}_{C^+} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_l} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \\ &= H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)^* \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)(1). \end{aligned}$$

Следовательно, существует вложение $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \subset H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l),$$

поэтому любое собственное число δ линейного оператора $\rho_l^S(F_{\bar{v}}^{-1})$ является произведением двух собственных чисел линейного оператора $\rho_l^J(F_{\bar{v}}^{-1})$, где ρ_l^J :

$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \mathrm{GL}(H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))$ – естественное l -адическое представление. Значит, мы должны доказать, что если k – достаточно большое, то плотность Дирихле множества $\{v \mid v \text{ – неархимедова точка } k, \text{ в которой } J \text{ имеет обыкновенную редукцию}\}$ равна 1.

5.2. С помощью аналогичных аргументов мы доказываем существование вложения $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $P_{\mathrm{et}}^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \subset H^1(J \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^1(J \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$, которое определяет изогению $\mathrm{MT}(J \otimes_k \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{MT}(S \otimes_k \mathbb{C})$. В силу (0.9.1) существует канонический изоморфизм алгебр Ли

$$\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_l^J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie} [\mathrm{MT}(J \otimes_k \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]. \quad (5.2.1)$$

В частности, гипотеза Серра–Мамфорда–Тэйта [11] верна для J .

5.3. По теореме Лефшеца существует канонический изоморфизм

$$\mathrm{NS}(S \otimes_k \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} [H^2(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{C})](1).$$

Обозначим через $V_{\mathbb{Q}}(1)$ пространство трансцендентных классов когомологий (ортогональное дополнение $\mathrm{NS}(S \otimes_k \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}}$ относительно $\cup$ -произведения), и пусть $d = \dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}(1) = 22 - \mathrm{rank} \, \mathrm{NS}(S \otimes_k \mathbb{C})$. Напомним, что форма ψ имеет сигнатуру $(2+, 19-)$. По теореме об индексе [12, лекция 18] ограничение ψ_0 формы ψ на $V_{\mathbb{Q}}(1)$ имеет сигнатуру $(2+, (d-2)-)$. Пусть $C^+(V_{\mathbb{Q}}(1), \psi_0)$ – четная алгебра Клиффорда, ассоциированная с формой ψ_0 . Из результатов Сатаке следует, что естественная $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа на $V_{\mathbb{Q}}(1)$ типа $(-1, 1) + (0, 0) + (1, -1)$ определяет $\mathbb{Q}$ -структуру Ходжа типа $(1, 0) + (0, 1)$ на $C^+(V_{\mathbb{Q}}(1), \psi_0)$ и абелево многообразии

$$J_{\mathbb{C}}^{\mathrm{NS}} = C^+(V_{\mathbb{Q}}(1), \psi_0) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/C^+(V_{\mathbb{Z}}(1), \psi_0)$$

размерности 2^{d-2} над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ [9, шп. 4.1–4.5]. Более того, заменив k некоторым конечным алгебраическим расширением, мы можем считать, что $J_{\mathbb{C}}^{\mathrm{NS}} = J^{\mathrm{NS}} \otimes_k \mathbb{C}$ для некоторого абелева многообразия J^{NS} над k и существует такая подалгебра C^+ в $\mathrm{End}(J^{\mathrm{NS}})$, что $\mathbb{Z}_l[\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)]$ -алгебра $\mathrm{End}_{C^+} H_{\mathrm{et}}^1(J^{\mathrm{NS}} \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l)$ изоморфна четной алгебре Клиффорда $C^+(V_{\mathbb{Z}_l}(1), \psi_{0l})$, где $V_{\mathbb{Z}_l}(1)$ – ортогональное дополнение $\mathrm{NS}(S \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Z}_l \subset H_{\mathrm{et}}^2(S \otimes \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$ (с естественным действием группы Галуа). Действительно, можно считать, что J изогенно степени J^{NS} над k [1, варианты 4.1.3, 4.1.5]. В силу [1, основная лемма 1.7.1] мы имеем канонический изоморфизм $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$\bigoplus \bigwedge^{2i} V_{\mathbb{Q}_l}(1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{C^+} H_{\mathrm{et}}^1(J^{\mathrm{NS}} \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$$

[9, шп. 6.6, 4.4].

5.4. Приведем описание группы Ходжа $\mathrm{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})$, принадлежащее Ю. Г. Зархину [34]:

$\mathbb{Q}$ -алгебра $K = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C})} V_{\mathbb{Q}}$ является вполне вещественным полем алгебраических чисел или чисто мнимым квадратичным расширением вполне вещественного поля K_0 . В первом случае $\mathrm{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C}) = R_{K/\mathbb{Q}} \mathrm{SO}(V_{\mathbb{Q}}, \Phi)$, где

$V_{\mathbb{Q}}$ рассматривается как векторное пространство над K , и форма $\Phi: V_{\mathbb{Q}} \times V_{\mathbb{Q}} \rightarrow K$, $(x, y) \rightarrow \alpha$, определена соотношением $\psi_0(ex, y) = \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e\alpha)$ для всех $e \in K$. Во втором случае $\text{Hg}(S \otimes_k \mathbb{C}) = R_{K_0/\mathbb{Q}} \text{U}(V_{\mathbb{Q}}, \Phi)$, где $\text{U}(V_{\mathbb{Q}}, \Phi)$ – унитарная группа над K_0 , ассоциированная с K -векторным пространством $V_{\mathbb{Q}}$ и формой Φ на нем (линейной по одному аргументу и полулинейной по другому).

В дальнейшем $e = [K : \mathbb{Q}]$, $d = \dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}$.

§ 6. Существование обыкновенной редукции абелева многообразия Куги–Сатаке

6.1. Предположим, что k – достаточно большое числовое поле. Для абелева многообразия J^{NS} рассмотрим естественное l -адическое представление $\rho_l: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(V_l)$, где $V_l = H_{\text{et}}^1(J^{\text{NS}} \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$. В силу (5.2.1) существует канонический изоморфизм алгебр Ли

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \xrightarrow{\sim} \text{Lie} [\text{MT}(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C})(\mathbb{Q}_l)]. \quad (6.1.1)$$

Мы хотим доказать, что $\{v \mid v \text{ – неархимедова точка } k, \text{ в которой } J^{\text{NS}} \text{ имеет обыкновенную редукцию}\}$ является множеством плотности 1 по Дирихле.

6.2. В дальнейшем мы предполагаем, что неархимедова точка v и $J = J^{\text{NS}}$ удовлетворяют условиям п. 2.1. Обозначим через Δ множество всех собственных чисел $\rho_l(F_v^{-1})$ (без учета кратностей). Пусть g_l^{ss} – полупростая часть редуктивной алгебры Ли $g_l = \text{Lie Im}(\rho_l) = \text{Lie } G_{V_l}$.

6.3. Группа Галуа $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует естественным образом на Δ , и для любой константы c множество

$$\{\eta \in \Delta \cdot \Delta \mid \text{Card}(T_{\eta}(\Delta) \cap \Delta) = c\} \text{ является } \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\text{-инвариантным.} \quad (6.3.1)$$

6.4. Рассмотрим случай $e = 1$, $d = 2m + 1$ – нечетное число. По теореме Ю.Г. Зархина (п. 5.4) $\text{Lie Hg}(S \otimes_k \mathbb{C}) \otimes \bar{\mathbb{Q}} = \text{Lie Hg}(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C}) \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ – простая алгебра Ли типа B_m ($m \geq 1$). В обозначениях [4]

$$H^1(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}} = \bigoplus E(\omega_m),$$

где $E(\omega_m)$ – спинорное представление. В силу (6.1.1) гипотеза Серра–Мамфорда–Тэйта верна для J^{NS} . Поэтому $g_l^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ – простая алгебра Ли типа B_m , и мы получаем следующее разложение $g_l^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ -модулей:

$$H_{\text{et}}^1(J^{\text{NS}} \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l = \bigoplus E(\omega_m). \quad (6.4.1)$$

Дальнейшее является модификацией основной идеи [14, п. 2.3].

Описание группы Вейля в [4, гл. 6, § 4, п. 5] показывает, что

$$\text{ch } E(\omega_m) = \sum_{a_i \in \{\pm 1\}} e^{a_1 \varepsilon_1 / 2 + \dots + a_m \varepsilon_m / 2}.$$

$$\beta = p_v \cdot b_v = 2m \pmod{l^n}. \quad (6.4.2)$$

В силу (2.5.3) мы выводим из (6.4.2), что $b_v = 2m \pmod{l^n}$. Ясно, что неравенства $|b_v| \leq 2m < 4m \leq (2 \cdot \dim_k J^{\text{NS}})^2 < l^n$ влекут соотношение $b_v = 2m$. Следовательно, $\beta = 2mp_v$, и поэтому все $\lambda^2 \alpha_j^{\pm 2} = p_v \alpha_j^{\pm 2}$ равны p_v , что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_m$. Значит, J_v^{NS} – обыкновенное абелево многообразие.

6.5. Рассмотрим случай $e = 1$, $d = 2m$ – четное число, $m \geq 2$. В силу теоремы Ю.Г. Зархина (п. 5.4) $\text{Lie Hg}(S \otimes_k \mathbb{C}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} = \text{Lie Hg}(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ – полупростая алгебра Ли типа D_m ($m \geq 2$). Поэтому можно считать, что

$$H_{\text{et}}^1(J^{\text{NS}} \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} = \bigoplus (E(\omega_{m-1}) \oplus E(\omega_m)). \quad (6.5.1)$$

Описание группы Вейля в [4, гл. 6, § 4, п. 4.8] показывает, что

$$\begin{aligned} \text{ch } E(\omega_{m-1}) &= \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ \text{Card}(\{i | a_i = -1\}) = 1 \pmod{2}}} e^{a_1 \varepsilon_1 / 2 + \dots + a_m \varepsilon_m / 2}, \\ \text{ch } E(\omega_m) &= \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ \text{Card}(\{i | a_i = -1\}) = 0 \pmod{2}}} e^{a_1 \varepsilon_1 / 2 + \dots + a_m \varepsilon_m / 2}. \end{aligned}$$

Поэтому из условий п. 6.2 и (6.5.1) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\lambda \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \text{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 1 \pmod{2}\} \\ &\cup \{\lambda \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \text{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 0 \pmod{2}\} \\ &= \{\lambda \alpha_1^{\pm 1} \dots \alpha_m^{\pm 1}\}, \end{aligned}$$

где $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ мультипликативно независимы (другими словами, эти числа порождают мультипликативную подгруппу в $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ ранга $m+1$). Поэтому мы можем доказать, что специальный слой J_v^{NS} является обыкновенным, с помощью процедуры п. 6.4.

6.6. Предположим, что K – вполне вещественное поле и $d/e = 2m+1$ – нечетное число. В силу теоремы Ю.Г. Зархина (п. 5.4) $\text{Lie Hg}(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ – полупростая алгебра Ли типа $B_m \times \dots \times B_m = B_m^e$ ($m \geq 1$).

В силу теоремы 0.3 каноническое представление $\text{Lie Hg}(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ в $H^1(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ определено микровесами классических алгебр Ли. В силу (6.1.1) каноническое представление $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ определено микровесами классических алгебр Ли. Легко видеть, что $H^1(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} = \bigoplus E(\omega_m^{(1)} + \dots + \omega_m^{(e)})$, где индекс (i) показывает, что соответствующий фундаментальный вес относится к i -му фактору [24, формулы (1.7.4), (1.7.5)]. Можно считать, что $\Delta = \{\lambda \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \dots \alpha_{me}^{\pm 1}\}$, где $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_{me}$ – мультипликативно независимые алгебраические числа. Следовательно, с помощью процедуры п. 6.4 мы можем доказать, что специальный слой J_v^{NS} является обыкновенным.

6.7. Предположим, что K – вполне вещественное поле, и $d/e = 2m$ – четное число, $m \geq 2$. По теореме Ю.Г. Зархина (п. 5.4) $\text{Lie Hg}(J^{\text{NS}} \otimes_k \mathbb{C}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ – полупростая алгебра Ли типа $D_m \times \dots \times D_m = D_m^e$ ($m \geq 2$).

Предположим, например, что $e = 2$. Тогда $\mathrm{Lie\,Hg}(J^{\mathrm{NS}} \otimes_k \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ имеет тип $D_m \times D_m$ и

$$H_{\mathrm{et}}^1(J^{\mathrm{NS}} \otimes \overline{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} = 2^{2m-1} \left(E(\omega_{m-1}^{(1)} + \omega_{m-1}^{(2)}) \oplus E(\omega_m^{(1)} + \omega_m^{(2)}) \right. \\ \left. \oplus E(\omega_{m-1}^{(1)} + \omega_m^{(2)}) \oplus E(\omega_m^{(1)} + \omega_{m-1}^{(2)}) \right)$$

[23, формулы (4.2.4), (4.2.5)]. Поэтому можно считать, что

$$\Delta = \{ \lambda \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \mathrm{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 1 \pmod{2} \} \\ \times \{ \alpha_{m+1}^{a_{m+1}} \dots \alpha_{2m}^{a_{2m}} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \mathrm{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 1 \pmod{2} \} \\ \cup \{ \lambda \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \mathrm{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 0 \pmod{2} \} \\ \times \{ \alpha_{m+1}^{a_{m+1}} \dots \alpha_{2m}^{a_{2m}} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \mathrm{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 0 \pmod{2} \} \\ \cup \{ \lambda \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \mathrm{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 1 \pmod{2} \} \\ \times \{ \alpha_{m+1}^{a_{m+1}} \dots \alpha_{2m}^{a_{2m}} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \mathrm{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 0 \pmod{2} \} \\ \cup \{ \lambda \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_m^{a_m} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \mathrm{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 0 \pmod{2} \} \\ \times \{ \alpha_{m+1}^{a_{m+1}} \dots \alpha_{2m}^{a_{2m}} \mid a_j \in \{\pm 1\}, \mathrm{Card}(\{j \mid a_j = -1\}) = 1 \pmod{2} \} \\ = \{ \lambda \alpha_1^{\pm 1} \dots \alpha_{2m}^{\pm 1} \},$$

где $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m} \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ мультипликативно независимы. Следовательно, с помощью процедуры п. 6.4 мы можем доказать, что специальный слой J_v^{NS} является обыкновенным.

Если e произвольно, то мы имеем разложение

$$H_{\mathrm{et}}^1(J^{\mathrm{NS}} \otimes \overline{k}, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} = \bigoplus_{\substack{i_1, \dots, i_e \in \{m-1, m\} \\ \mathrm{Card}(\{i_p \mid i_p = m\}) = 1 \pmod{2}}} E(\omega_{i_1}^{(1)} + \dots + \omega_{i_e}^{(e)}) \\ \times \bigoplus_{\substack{i_1, \dots, i_e \in \{m-1, m\} \\ \mathrm{Card}(\{i_p \mid i_p = m\}) = 0 \pmod{2}}} E(\omega_{i_1}^{(1)} + \dots + \omega_{i_e}^{(e)})$$

[24, п. 1.7]. Легко понять, что в этом случае $\Delta = \{ \lambda \alpha_1^{\pm 1} \dots \alpha_{me}^{\pm 1} \}$, где $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_{me} \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ мультипликативно независимы. Следовательно, с помощью процедуры п. 6.4 мы можем доказать, что специальный слой J_v^{NS} является обыкновенным. Теорема 0.10 доказана.

§ 7. Некоторые арифметические свойства собственных чисел Фробениуса

7.1. Мы начинаем доказательство теоремы 12. Пусть $g_l = \mathrm{Lie\,Im}(\rho_l)$. Мы будем обозначать через g_l^{ss} полупростую часть g_l .

7.2. ЛЕММА. Пусть J – абсолютно простое d -мерное абелево многообразие над достаточно большим числовым полем k . Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) d – простое число, $d \geq 3$;
 2) J – абелево многообразие СМ-типа, и размерность над $\mathbb{Q}$ группы Ходжа $\text{Hg}(J \otimes_k \mathbb{C})$ равна $d = \dim_k J$.

Тогда для любой неархимедовой точки v поля k из некоторого множества $S_{\text{non-Arch}}^{\text{generic}}(J, k, l)$ точек с плотностью Дирихле 1 мы можем считать, что $\Delta = \{\lambda \alpha_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, d\}$, где $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ – мультипликативно независимые алгебраические числа, $\lambda^2 = p_v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем k -поляризацию на J . Обозначим через

$$\Psi: H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \times H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow \mathbb{Q}_l(-1)$$

индуцированную невырожденную кососимметрическую форму на $H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$. Естественное разложение $G_{V_l} = G_m \cdot (G_{V_l} \cap \text{Sp}(\Psi))$ и условия п. 2.1 показывают, что $\Delta = \{\lambda \alpha_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, d\}$, где $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ – алгебраические числа [26, пп. 2.7, 2.8]. Мы должны доказать, что эти числа мультипликативно независимы. В силу 2.1,6) достаточно проверить, что $\text{rank}(G_{V_l}) = d + 1$. Напомним, что $\text{rank}(G_{V_l}) = \text{rank}(g_l)$.

Согласно классификации Альберта [13, § 21] мы имеем следующие варианты: $\text{End}^0(J \otimes \bar{k}) = \mathbb{Q}$, $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – вполне вещественное поле степени d над $\mathbb{Q}$, $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – мнимое квадратичное расширение $\mathbb{Q}$, $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – чисто мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля степени d над $\mathbb{Q}$ (СМ-поле степени $2d$ в терминологии [20, гл. 5]).

Предположим, что $\text{End}^0(J \otimes \bar{k}) = \mathbb{Q}$. В этом случае $g_l^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ – простая алгебра Ли типа C_d (см. [7, п. 6], [22]), $\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(g_l) = 1$. Поэтому $\text{rank}(g_l) = d + 1$.

Предположим, что $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – вполне вещественное поле степени d над $\mathbb{Q}$. В этом случае $g_l^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ – полупростая алгебра Ли типа $A_1 \times \dots \times A_1 = A_1^d$ [22], $\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(g_l) = 1$. Поэтому $\text{rank}(g_l) = d + 1$.

Предположим, что $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – мнимое квадратичное расширение $\mathbb{Q}$. В этом случае $g_l^{ss} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ – простая алгебра Ли типа A_{d-1} (см. [22], [6]), $\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(g_l) = 2$ [6]. Поэтому $\text{rank}(g_l) = d + 1$.

Предположим, что $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – чисто мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля степени d над $\mathbb{Q}$. В этом случае $\text{rank}(g_l) = d + 1$ [21].

Мультипликативная независимость $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ влечет соотношение

$$\eta = \lambda^2 \Leftrightarrow \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(\Delta).$$

Следовательно, $\lambda^2 \in \mathbb{Q}$ имеет абсолютную величину p_v (по условию 2.1,3) и в силу известной теоремы Вейля [13, § 21, теорема 4]), поэтому мы имеем равенство $\lambda^2 = \pm p_v$.

Пусть ρ – комплексное сопряжение на $\bar{\mathbb{Q}}$, индуцированное некоторым вложением $\bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$. Мы утверждаем, что

$$\rho(\lambda \alpha_i) = \lambda \alpha_i^{-1}. \quad (7.2.1)$$

Действительно, по теореме Вейля $\lambda \alpha_1 \cdot \rho(\lambda \alpha_1) = p_v$ в силу соотношения 2.1,3). Предположим, что $\rho(\lambda \alpha_1) = \lambda \alpha_1$. Тогда $\lambda^2 \alpha_1^2 = p_v$, $\lambda^4 \alpha_1^4 = p_v^2$, $p_v^2 \alpha_1^4 = p_v^2$,

$\alpha_1^4 = 1$, что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d$. Предположим, что $\rho(\lambda\alpha_1) = \lambda\alpha_2$. Тогда мы имеем $\lambda^2\alpha_1\alpha_2 = p_v$, $\lambda^4\alpha_1^2\alpha_2^2 = p_v^2$, $p_v^2\alpha_1^2\alpha_2^2 = p_v^2$, $\alpha_1^2\alpha_2^2 = 1$ вопреки мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d$.

Поэтому $\rho(\lambda\alpha_1) = \lambda\alpha_1^{-1}$, и утверждение (7.2.1) доказано. С другой стороны, по теореме Вейля $p_v = \lambda\alpha_1 \cdot \rho(\lambda\alpha_1) = \lambda\alpha_1\lambda\alpha_1^{-1} = \lambda^2$. Лемма доказана.

7.3. Предположим, что неархимедова точка v удовлетворяет условиям п. 2.1. Согласно теории Хонды–Тэйта [32] p_v -число Вейля $\lambda\alpha_1$ определяет класс изогений простого абелева многообразия A над конечным полем $\mathbb{F}_{p_v}$. Поскольку $\mathbb{F}_{p_v}$ – простое поле, мы имеем соотношения

$$\text{End}^0(A) = F = \mathbb{Q}(\lambda\alpha_1);$$

для любой точки w поля F , лежащей над p_v ,

$$\frac{w(\lambda\alpha_1)}{w(p_v)} \cdot [F_w : \mathbb{Q}_{p_v}] \in \mathbb{Z}, \quad (7.3.1)$$

где F_w обозначает пополнение F относительно w ; более того, в силу леммы 7.2 F является минимальным квадратичным расширением вполне вещественного поля $F_0 = \mathbb{Q}(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1})$ [32, замечание 2].

Обозначим через F' минимальное нормальное расширение поля $\mathbb{Q}$, содержащее F .

7.4. ЛЕММА. *Имеем следующие соотношения:*

для любой точки w поля F , лежащей над p_v ,

$$\frac{w(\lambda\alpha_1)}{w(p_v)} + \frac{\rho w(\lambda\alpha_1)}{\rho w(p_v)}, \quad \left\{ (\rho w = w) \Rightarrow \frac{w(\lambda\alpha_1)}{w(p_v)} = \frac{1}{2} \right\}; \quad (7.4.1)$$

для любой точки w' поля F' , лежащей над w ,

$$\frac{w'(\lambda\alpha_1)}{w'(p_v)} = \frac{w(\lambda\alpha_1)}{w(p_v)}; \quad (7.4.2)$$

для любой точки w' поля F' , лежащей над p_v , и для любого элемента $\sigma \in \text{Gal}(F'/\mathbb{Q})$

$$\frac{w'(\lambda\alpha_1)}{w'(p_v)} = \frac{\sigma w'(\sigma(\lambda\alpha_1))}{\sigma w'(p_v)}; \quad (7.4.3)$$

для элементов $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$

$$\left\{ (\forall w' \mid p_v) \frac{w'(\delta_1)}{w'(p_v)} = \frac{w'(\delta_2)}{w'(p_v)} \right\} \Rightarrow \delta_1/\delta_2 \quad (7.4.4)$$

– корень из единицы;

$$\rho \in \text{Cent}(\text{Gal}(F'/\mathbb{Q})). \quad (7.4.5)$$

Соотношения (7.4.1)–(7.4.4) следуют из равенства Вейля $\lambda\alpha_1 \cdot \rho(\lambda\alpha_1) = p_v$ и из элементарных свойств нормирований [5], [33]. Соотношение (7.4.5) является хорошо известным свойством CM-полей [20, гл. 5, § 5.5, предложения 5.11, 5.12].

В дальнейшем мы отождествляем точку $w \mid p_v$ с нормированием, нормализованным равенством $w(p_v) = 1$, и отождествляем $w' \mid p_v$ с нормированием, нормализованным соотношением $w'(p_v) = 1$. Очевидно, что эти отождествления совместимы с действием группы Галуа на множествах нормирований и неархимедовых точек.

7.5. ЛЕММА. Пусть J – абсолютно простое абелево многообразие CM -типа над достаточно большим числовым полем k . Если $\dim_k J$ – простое число или если размерность над $\mathbb{Q}$ группы Ходжа $\mathrm{Hg}(J \otimes_k \mathbb{C})$ равна $\dim_k J$, то для любой неархимедовой точки v поля k из некоторого множества $S_{\text{non-Arch}}^{\text{generic}}(J, k, l)$ точек с плотностью Дирихле 1 специальный слой J_v минимальной модели Нерона J является обыкновенным простым абелевым многообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = \mathrm{End}^0(J \otimes \bar{k})$. Можно считать, что $K = \mathrm{End}^0(J)$, $K \subset k$, p_v неразветвлено в k , v удовлетворяет условиям п. 2.1. Из соотношения $\mathrm{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v$ следует, что p_v полностью распадается в k . Поэтому p_v полностью распадается в K : $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} \simeq \mathbb{Q}_{p_v} \times \cdots \times \mathbb{Q}_{p_v}$. Заметим, что отображение редукции $K = \mathrm{End}^0(J) \rightarrow \mathrm{End}^0(J_v)$ является вложением K в произведение полей. Это следует из факта, что $\mathrm{Pc}_J(\rho_l(F_v^{-1}), t)$ не имеет кратных корней в силу леммы 7.2 [33, лемма 1.0.3]. В частности, мы имеем вложение $K \subset F = \mathbb{Q}(\lambda_{\alpha_1})$. Поэтому $F = K$, J_v – простое абелево многообразие, и p_v полностью распадается в F : $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} \simeq \mathbb{Q}_{p_v} \times \cdots \times \mathbb{Q}_{p_v}$. С другой стороны, $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} = \bigoplus_{w|p_v} F_w$ [5, гл. 2, § 10, теорема 10.2]. Поэтому $[F_w : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1$ для всех точек w поля F , лежащих над p_v . В силу (7.3.1) $w(\lambda_{\alpha_1}) \in \{0, 1\}$ для всех точек $w \mid p_v$. Из леммы 7.4 мы получаем соотношение $w'(\lambda_{\alpha_i}^{\pm 1}) \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, d$). Поэтому J_v – обыкновенное абелево многообразие.

7.6. В дальнейшем мы считаем, что J – абсолютно простое трехмерное абелево многообразие, удовлетворяющее условиям теоремы 0.12, $K = \mathrm{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$.

7.7. ЛЕММА. Имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Pc}_J(\rho_l(F_v^{-1}), t) &= \det(t - \rho_l(F_v^{-1})) = t^6 - \mathrm{Tr}(\rho_l(F_v^{-1})) \cdot t^5 + \mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})) \cdot t^4 \\ &\quad - \mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 3}(F_v^{-1})) \cdot t^3 + \mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 4}(F_v^{-1})) \cdot t^2 - \mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 5}(F_v^{-1})) \cdot t + \det(\rho_l(F_v^{-1})), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\rho_l(F_v^{-1})) &= \lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_1}^{-1} + \lambda_{\alpha_2} + \lambda_{\alpha_2}^{-1} + \lambda_{\alpha_3} + \lambda_{\alpha_3}^{-1}, \\ \mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})) &= 3\lambda^2 + (\lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_1}^{-1})(\lambda_{\alpha_2} + \lambda_{\alpha_2}^{-1}) \\ &\quad + (\lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_1}^{-1})(\lambda_{\alpha_3} + \lambda_{\alpha_3}^{-1}) + (\lambda_{\alpha_2} + \lambda_{\alpha_2}^{-1})(\lambda_{\alpha_3} + \lambda_{\alpha_3}^{-1}), \\ \mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 3}(F_v^{-1})) &= 2\lambda^2 \cdot \mathrm{Tr}(\rho_l(F_v^{-1})) + (\lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_1}^{-1})(\lambda_{\alpha_2} + \lambda_{\alpha_2}^{-1})(\lambda_{\alpha_3} + \lambda_{\alpha_3}^{-1}). \end{aligned}$$

Это следствие элементарных вычислений.

7.8. В силу условия (2.1.4) и леммы 7.2 для неархимедовой точки $v \in S_{\text{non-Arch}}^{\text{generic}}$ мы имеем

$$\lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_1}^{-1} + \lambda_{\alpha_2} + \lambda_{\alpha_2}^{-1} + \lambda_{\alpha_3} + \lambda_{\alpha_3}^{-1} \not\equiv 0 \pmod{p_v}, \quad (7.8.1)$$

$$\begin{aligned} &(\lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_1}^{-1})(\lambda_{\alpha_2} + \lambda_{\alpha_2}^{-1}) + (\lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_1}^{-1})(\lambda_{\alpha_3} + \lambda_{\alpha_3}^{-1}) \\ &\quad + (\lambda_{\alpha_2} + \lambda_{\alpha_2}^{-1})(\lambda_{\alpha_3} + \lambda_{\alpha_3}^{-1}) \not\equiv 0 \pmod{p_v}. \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

§ 8. Случай неприводимого характеристического полинома

8.1. Мы предполагаем, что характеристический полином $P(t) = \text{Pc}_J(\rho_l(F_v^{-1}), t)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Из неприводимости $P(t)$ и леммы 7.2 следует, что $[F : \mathbb{Q}] = 6$ и отображение редукции $K = \text{End}^0(J) \rightarrow \text{End}^0(J_v) = F$ является вложением. В дальнейшем мы обозначаем через $x_0, y_0, \dots$ точки F_0 , лежащие над p_v ; через $x, \rho x$ — точки F , лежащие над x_0 ; через $x', x'' \dots$ — точки F' , лежащие над x . Напомним, что $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} = \bigoplus_{w|p_v} F_w$, $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} = \bigoplus_{w_0|p_v} F_{0w_0}$ [5, гл. 2, § 10, теорема 10.2].

Пусть F'_0 — минимальное нормальное расширение поля $\mathbb{Q}$, содержащее вполне вещественное кубическое поле $F_0 = \mathbb{Q}(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1})$. Очевидно, что $\text{Gal}(F'/\mathbb{Q})$ действует транзитивно на $\{\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}, \lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}, \lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1}\}$, где $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}, \lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}, \lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1}$ порождают F'_0 над $\mathbb{Q}$. Поэтому можно считать, что $\text{Gal}(F'/\mathbb{Q})$ содержит элемент σ порядка 3. Легко видеть, что $F = K(F_0)$. Мы имеем $K \cap F'_0 = \mathbb{Q}$, потому что F'_0 — вполне вещественное поле. Следовательно, K и F'_0 линейно разделены над $\mathbb{Q}$, $K(F'_0)$ — нормальное расширение $\mathbb{Q}$,

$$\text{Gal}(K(F'_0)/\mathbb{Q}) = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \times \text{Gal}(F'_0/\mathbb{Q}) \quad (8.1.1)$$

[3, гл. 5, § 10, п. 4, следствие 2]. Очевидно, что $F' = K(F'_0)$. Поэтому (8.1.1) дает соотношение

$$\text{Gal}(F'/\mathbb{Q}) = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \times \text{Gal}(F'_0/\mathbb{Q}) = \{1, \rho\} \times \text{Gal}(F'_0/\mathbb{Q}). \quad (8.1.2)$$

Более того, мы можем считать, что

$$\sigma(\lambda\alpha_1^n) = \lambda\alpha_2^n, \quad \sigma(\lambda\alpha_2^n) = \lambda\alpha_3^n, \quad \sigma(\lambda\alpha_3^n) = \lambda\alpha_1^n \quad (n = \pm 1). \quad (8.1.3)$$

8.2. Предположим, что x_0 — единственная точка кубического поля F_0 , лежащая над p_v . Имеем два варианта: $x = \rho x$ — единственная точка F , лежащая над p_v , или $x, \rho x$ — различные точки F , лежащие над p_v . Изображаем эти варианты следующими диаграммами:

$$x = \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v); \quad (8.2.1)$$

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v). \end{array} \quad (8.2.2)$$

8.3. Рассмотрим случай (8.2.1). В силу леммы 7.4 мы имеем $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2$, поэтому α_1^2 — корень из единицы, что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

8.4. Рассмотрим случай (8.2.2). Мы имеем $[F_x : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho x} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 3$. Из (7.3.1) следует, что $x(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$, $\rho x(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$. Предположим, что $x(\lambda\alpha_1) \in \{1/3, 2/3\}$. Тогда в силу соотношения (7.4.1) имеем $\rho x(\lambda\alpha_1) \in \{1/3, 2/3\}$. В силу (7.4.2) для любой точки x' поля F' , лежащей над p_v ,

имеем $x'(\lambda\alpha_1) \in \{1/3, 2/3\}$. Заметим, что $\lambda\alpha_1^{\pm 1}, \lambda\alpha_2^{\pm 1}, \lambda\alpha_a^{\pm 1}$ сопряжены друг другу над $\mathbb{Q}$, поэтому в силу (7.4.3) для любой точки x' поля F' имеем $x'(\lambda\alpha_{1,2,3}^{\pm 1}) \in \{1/3, 2/3\}$. Мы видим, что $(\forall x' \mid p_v) \ x'(\text{Tr}(\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}))) = x'(\sum \lambda\alpha_{1,2,3}^{\pm 1}) > 0$. Поэтому p_v делит $\text{Tr}(\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}))$, что противоречит условию 2.1,4).

Видим, что $x(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}$. В силу леммы 7.4 для любой точки x' поля F' имеем $x'(\lambda\alpha_{1,2,3}^{\pm 1}) \in \{0, 1\}$. Поэтому J_v – обыкновенное абелево многообразие.

8.5. Предположим, что x_0, y_0 – все точки кубического поля F_0 , лежащие над p_v . Заметим, что $F'_0 \neq F_0$ (иначе получили бы, что все точки $w_0 \mid p_v$ сопряжены друг другу, и число таких точек равно 1 или 3). Имеются следующие варианты:

$$x = \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow y = \rho y; \quad (8.5.1)$$

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow y = \rho y; \end{array} \quad (8.5.2)$$

$$\begin{array}{c} y \\ \downarrow \\ x = \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow \rho y; \end{array} \quad (8.5.3)$$

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow \rho y. \end{array} \quad (8.5.4)$$

8.6. Очевидно, что $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} = F_{0x_0} \oplus F_{0y_0}$. С другой стороны, $\text{Gal}(F'_0/F_0) = \{1, \tau\}$, где τ – элемент порядка 2. Мы имеем $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1} \in F_0$, поэтому

$$\begin{aligned} \tau(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}) &= \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}, \\ \tau(\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}) &= \lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1}, \\ \tau(\lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1}) &= \lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}. \end{aligned}$$

Мы хотим пополнить диаграмму $x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0$ точками поля F'_0 . Можно рассматривать только три варианта такого пополнения:

$$\tau x'_0 = x'_0 \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow y'_0 = \tau y'_0; \quad (8.6.1)$$

$$\begin{array}{ccc} x'_0 & & y'_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau x'_0 \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow \tau y'_0; \\ & & y'_0 \\ & & \downarrow \\ \tau x'_0 = x'_0 \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow \tau y'_0. \end{array} \quad (8.6.2)$$

С другой стороны, $F'_0/\mathbb{Q}$ – нормальное расширение с группой Галуа S_3 , поэтому все точки F'_0 , лежащие над p_v , сопряжены друг другу, и число таких точек равно 2, 3, 6. Мы видим, что могут появиться только диаграммы (8.6.1) и (8.6.2).

В случае (8.6.1) мы имеем $\tau \in \text{Stab}(x'_0) \cap \text{Stab}(y'_0)$. Поэтому $\{1, \sigma, \sigma^2\}$ действует транзитивно на $\{x'_0, y'_0\}$. Это невозможно. Следовательно, мы имеем только один вариант (8.6.2).

8.7. Рассмотрим случай (8.5.1). В силу леммы 7.4 имеем $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2 = y(\lambda\alpha_1^{\pm 1})$, поэтому α_1^2 – корень из единицы, что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

8.8. Рассмотрим случай (8.5.2) и часть пополнения диаграммы (8.6.2) точками поля F' :

$$\begin{array}{ccccccc} x' & \rightarrow & x & & y'_0 & \leftarrow & y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tau x'_0 = x'_0 & \rightarrow & x_0 & \rightarrow & (p_v) & \leftarrow & y_0 \leftarrow y = \rho y \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \rho x' & \rightarrow & \rho x & & \tau y'_0 & \leftarrow & \tau y' \end{array} \quad (8.8.1)$$

Имеем $2 = [F'_{0x'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F'_{0y'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F'_{0\tau y'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}]$, $F'_{0x'_0} = F'_0 \otimes_{F_0} F_{0x_0}$, поэтому

$$[F_{0x_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1, \quad [F_{0y_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 2. \quad (8.8.2)$$

С другой стороны,

$$F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} = F_x \oplus F_{\rho x} \oplus F_y, \quad F_x \oplus F_{\rho x} = F \otimes_{F_0} F_{0x_0}, \quad F_y = F \otimes_{F_0} F_{0y_0},$$

поэтому (8.8.2) влечет $[F_x : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho x} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1$, $[F_y : \mathbb{Q}_{p_v}] = 4$. В силу (7.3.1) и (7.4.1) имеем $x(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}$, $\rho x(\lambda\alpha_1) = 1 - x(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}$, $y(\lambda\alpha_1) = 1/2$. Поэтому $x'(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}$, $\rho x'(\lambda\alpha_1) = 1 - x'(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}$, $y'(\lambda\alpha_1) = \tau y'(\lambda\alpha_1) = 1/2$.

В ситуации (8.8.1) можно считать, что $y'_0 = \sigma x'_0$, $\tau y'_0 = \sigma y'_0$. Поэтому можно считать, что $y' = \sigma x'$, $\sigma y'$ лежит над $\sigma y'_0 = \tau y'_0$. Соотношение (7.4.3) влечет $1/2 = y'(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = \sigma y'(\sigma(\lambda\alpha_1^{\pm 1})) = \sigma y'(\lambda\alpha_2^{\pm 1})$. С другой стороны, $\sigma y'(\lambda\alpha_2^{\pm 1}) = 1/2$ влечет

$$\sigma y'(\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}) \geq \inf \{ \sigma y'(\lambda\alpha_2), \sigma y'(\lambda\alpha_2^{-1}) \} = 1/2.$$

Диаграмма (8.8.1) показывает, что $\sigma y'$ лежит над $\tau y'_0$. Поэтому мы получаем соотношение

$$\tau y'_0(\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}) \geq 1/2. \quad (8.8.3)$$

Более того, $1/2 = y'(\lambda\alpha_1^{\pm 1})$ влечет $1/2 = \tau y'(\tau(\lambda\alpha_1^{\pm 1})) = \tau y'(\lambda\alpha_1^{\pm 1})$. Поэтому получаем соотношение

$$\tau y'_0(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}) \geq 1/2. \quad (8.8.4)$$

Тогда (7.8.2) дает соотношение

$$\begin{aligned} & \tau y'_0((\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1})(\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}) + (\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1})(\lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1}) \\ & + (\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1})(\lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1})) = 0, \end{aligned}$$

что противоречит соотношениям (8.8.3) и (8.8.4) (заметим, что $\lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1}$ – целое алгебраическое число в F'_0 , поэтому $\tau y'_0(\lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1}) \geq 0$).

8.9. Рассмотрим случай (8.5.3). В этой ситуации $2 = [F'_{0x'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F'_{0y'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F'_{0\tau y'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}]$, $F'_{0x'_0} = F'_0 \otimes_{F_0} F_{0x_0}$, поэтому

$$[F_{0x_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1, \quad [F_{0y_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 2. \quad (8.9.1)$$

Имеем $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} = F_x \oplus F_y \oplus F_{\rho y}$, $F_x = F \otimes_{F_0} F_{0x_0}$, $F_y \oplus F_{\rho y} = F \otimes_{F_0} F_{0y_0}$, поэтому (8.9.1) влечет $[F_x : \mathbb{Q}_{p_v}] = 2$, $[F_y : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho y} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 2$.

В силу (7.3.1) и (7.4.1) имеем $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2$, $y(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) \in \{0, 1/2, 1\}$. Если $y(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2$, то в силу (7.4.4) α_1^2 – корень из единицы, что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Поэтому $y(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) \in \{0, 1\}$. Можно считать, что y' лежит над y'_0 . В силу (8.1.2) $\text{Gal}(F'/\mathbb{Q}) = \{1, \rho\} \times \text{Gal}(F'_0/\mathbb{Q})$. Легко видеть, что в этом случае

$$\text{Gal}(F'/F) = \text{Gal}(F'_0/F_0) = \{1, \tau\}. \quad (8.9.2)$$

С другой стороны, $\tau|_F = 1$ в силу (8.9.2). В частности,

$$\tau(\lambda\alpha_1) = \lambda\alpha_1. \quad (8.9.3)$$

Следовательно,

$$\tau(\lambda\alpha_2) = \lambda\alpha_3, \quad \tau(\lambda\alpha_3) = \lambda\alpha_2. \quad (8.9.4)$$

Действительно, имеем $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ в $S_3 = \text{Gal}(F'_0/\mathbb{Q})$, поэтому из (8.1.2), (8.1.3), (8.9.3) следует, что

$$\tau(\lambda\alpha_2) = \tau\sigma(\lambda\alpha_1) = \sigma^2\tau(\lambda\alpha_1) = \sigma^2(\lambda\alpha_1) = \lambda\alpha_3.$$

Рассмотрим часть пополнения диаграммы (8.6.2) точками F и F' :

$$\begin{array}{ccccc} & \rho x = x & & y'_0 & \leftarrow & y' & \rightarrow & y \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\ x' & & & x_0 & \rightarrow & (p_v) & \leftarrow & y_0 \\ & \searrow & & \nearrow & & \nwarrow & & \nearrow \\ & \tau x'_0 = x'_0 & & \rho y & \leftarrow & \rho \tau y' & \rightarrow & \tau y'_0 \end{array}$$

Заметим, что $y' \neq \rho y'$. С другой стороны, $\text{Gal}(F'/\mathbb{Q})$ действует транзитивно на множестве $\{x' \mid p_v\}$. Поэтому $x' = \gamma y'$ для некоторого $\gamma \in \text{Gal}(F'/\mathbb{Q})$. В силу (7.4.5) $x' = \gamma y' \neq \gamma \rho y' = \rho \gamma y' = \rho x'$. Поэтому получаем объединение следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccccccc} & \rho x & & & & & \\ & \parallel & & & & & \\ & x & & & & & \\ & \nearrow & \uparrow & \searrow & & & \\ x' & & \rho x' & & x_0 & \rightarrow & (p_v) \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & & & \\ & x'_0 & & & \rho y' & \nearrow & y'_0 \\ & \parallel & & & \searrow & & (p_v) \\ & \tau x'_0 & & & \rho y & \leftarrow & \rho \tau y' \rightarrow \tau y'_0 \end{array} \quad (8.9.5)$$

8.10. Из (8.9.2) следует, что $\{x', \tau x'\}$ – множество всех точек поля F' , лежащих над x . Из диаграммы (8.9.5) видно, что $\tau x' = \rho x'$. Поэтому

$$x' = \rho \tau x'. \quad (8.10.1)$$

Выводим из (7.2.1), (8.10.1), (8.9.3), (8.9.4) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x'(\lambda \alpha_1) &= \rho \tau x'(\lambda \alpha_1) = x'(\rho \tau(\lambda \alpha_1)) = x'(\rho(\lambda \alpha_1)) = x'(\lambda \alpha_1^{-1}), \\ x'(\lambda \alpha_2) &= \rho \tau x'(\lambda \alpha_2) = x'(\rho \tau(\lambda \alpha_2)) = x'(\rho(\lambda \alpha_3)) = x'(\lambda \alpha_3^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, $x'(\alpha_1^2) = 0$, $x'(\alpha_2 \alpha_3) = 0$. Соотношение $\lambda^2 = p_v$ влечет

$$\sigma((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2, \quad \tau((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x'((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) &= 0, & \sigma x'((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) &= 0, & \sigma^2 x'((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) &= 0, \\ \tau x'((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) &= 0, & \rho x'((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{-2}) &= 0, & \rho x'((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) &= 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\text{Gal}(F'/\mathbb{Q})x' = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \rho, \rho\sigma\rho\sigma^2, \rho\tau, \rho\tau\sigma, \rho\tau\sigma^2\}x',$$

поэтому для любой точки w' поля F' , лежащей над p_v , имеем соотношение $w'((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) = 0$. Следовательно, для всех $w' \mid p_v$

$$|(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2|_{w'} = 1. \quad (8.10.2)$$

Пусть u' – неархимедова точка F' , не лежащая над p_v . Тогда соотношение Вейля

$$(\lambda \alpha_1 \lambda \alpha_2 \lambda \alpha_3)^2 \rho(\lambda \alpha_1 \lambda \alpha_2 \lambda \alpha_3)^2 = p_v^6 \quad (8.10.3)$$

влечет соотношение

$$u'((\lambda \alpha_1 \lambda \alpha_2 \lambda \alpha_3)^2) + u'(\rho(\lambda \alpha_1 \lambda \alpha_2 \lambda \alpha_3)^2) = 0. \quad (8.10.4)$$

Напомним, что $\lambda \alpha_i^{\pm 1}$ – целые алгебраические числа. Следовательно, оба слагаемые в (8.10.4) неотрицательны. Поэтому $u'((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2) = 0$,

$$|(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2|_{u'} = 1. \quad (8.10.5)$$

С другой стороны, (8.10.3) влечет соотношение

$$|(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2|_{\infty} = 1 \quad (8.10.6)$$

для любой архимедовой точки ∞ поля F' . Напомним следующий элементарный результат.

8.11. ЛЕММА [3, гл. 2, § 18, лемма 18.2]. Пусть α – такое алгебраическое число, что $|\alpha| = 1$ для всех норм $|\cdot|: \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда α – корень из единицы.

8.12. Мы выводим из леммы 8.11 и (8.10.2), (8.10.5), (8.10.6), что $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2$ – корень из единицы; это противоречит мультипликативной независимости λ , α_1 , α_2 , α_3 .

8.13. Рассмотрим случай (8.5.4). В этой ситуации $2 = [F'_{0x'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F'_{0y'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F'_{0\tau y'_0} : \mathbb{Q}_{p_v}]$, $F'_{0x'_0} = F'_0 \otimes_{F_0} F_{0x_0}$, поэтому

$$[F_{0x_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1, \quad [F_{0y_0} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 2. \quad (8.13.1)$$

Имеем $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} = F_x \oplus F_{\rho x} \oplus F_y \oplus F_{\rho y}$, $F_x \oplus F_{\rho x} = F \otimes_{F_0} F_{0x_0}$, $F_y \oplus F_{\rho y} = F \otimes_{F_0} F_{0y_0}$, поэтому (8.13.1) влечет $[F_x : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho x} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1$, $[F_y : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho y} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 2$. В силу (7.3.1) и (7.4.1) имеем

$$\begin{aligned} x(\lambda \alpha_1) &\in \{0, 1\}, & \rho x(\lambda \alpha_1) &= 1 - x(\lambda \alpha_1) \in \{0, 1\}, \\ y(\lambda \alpha_1) &\in \{0, 1/2, 1\}, & \rho y(\lambda \alpha_1) &= 1 - y(\lambda \alpha_1) \in \{0, 1/2, 1\}. \end{aligned}$$

Если $y(\lambda \alpha_1) \in \{0, 1\}$, то J_v – обыкновенное абелево многообразие.

8.14. Далее можно считать, что $y(\lambda \alpha_1) = 1/2$.

Рассмотрим часть пополнения диаграммы (8.6.2) точками поля F' :

$$\begin{array}{ccccccc} & & y'_0 & \leftarrow & y' & & \\ & & \downarrow & & & & \\ x' & \rightarrow & x'_0 & \rightarrow & (p_v) & \leftarrow & \tau y'_0 \leftarrow \tau y' \end{array} \quad (8.14.1)$$

С другой стороны, пополнение диаграммы (8.5.4) точками поля F' дает диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} x' & \rightarrow & x & & y & \leftarrow & y' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \rho x' & \rightarrow & \rho x & \rightarrow & x_0 & \rightarrow & (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow \rho y \leftarrow \rho y' \end{array} \quad (8.14.2)$$

Выводим из (7.4.2) и (8.14.2), что

$$x'(\lambda \alpha_1^{\pm 1}) \in \{0, 1\}, \quad \rho x'(\lambda \alpha_1^{\pm 1}) \in \{0, 1\}, \quad y'(\lambda \alpha_1^{\pm 1}) = 1/2.$$

В ситуации (8.14.1) можно считать, что $y'_0 = \sigma x'_0$, $\tau y'_0 = \sigma y'_0$. Поэтому можно считать, что $y' = \sigma x'$, $\sigma y'$ лежит над $\tau y'_0$. Соотношение (7.4.3) влечет $1/2 = y'(\lambda \alpha_1^{\pm 1}) = \sigma y'(\sigma(\lambda \alpha_1^{\pm 1})) = \sigma y'(\lambda \alpha_2^{\pm 1})$. Поэтому

$$\sigma y'(\lambda \alpha_2 + \lambda \alpha_2^{-1}) \geq \inf \{ \sigma y'(\lambda \alpha_2), \sigma y'(\lambda \alpha_2^{-1}) \} = 1/2.$$

С другой стороны, $\sigma y'$ лежит над $\tau y'_0$. Поэтому получаем

$$\tau y'_0(\lambda \alpha_2 + \lambda \alpha_2^{-1}) \geq 1/2. \quad (8.14.3)$$

Далее, $1/2 = y'(\lambda\alpha_1^{\pm 1})$ влечет $1/2 = \tau y'(\tau(\lambda\alpha_1^{\pm 1})) = \tau y'(\lambda\alpha_1^{\pm 1})$. Из (8.14.1) следует, что $\tau y'$ лежит над $\tau y'_0$, поэтому получаем соотношение

$$\tau y'_0(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}) \geq 1/2. \quad (8.14.4)$$

Ясно, что (8.14.3) и (8.14.4) противоречат (7.8.2).

8.15. Предположим, что x_0, y_0, z_0 – все точки кубического поля F_0 , лежащие над p_v . Можно считать, что имеются следующие варианты:

$$\begin{array}{ccccccc} & & y_0 & \leftarrow & y = \rho y & & \\ & & \downarrow & & & & \\ x = \rho x & \rightarrow & x_0 & \rightarrow & (p_v) & \leftarrow & z_0 \leftarrow z = \rho z; \end{array} \quad (8.15.1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & x & & y_0 & \leftarrow & y = \rho y \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \rho x & \rightarrow & x_0 & \rightarrow & (p_v) & \leftarrow & z_0 \leftarrow z = \rho z; \end{array} \quad (8.15.2)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & \rightarrow & y_0 & \leftarrow & \rho y \\ & & & & \downarrow & & \\ x = \rho x & \rightarrow & x_0 & \rightarrow & (p_v) & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & z & \rightarrow & z_0 & \leftarrow & \rho z; \end{array} \quad (8.15.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & x & & y & \rightarrow & y_0 \leftarrow \rho y \\ & & \searrow & & & & \downarrow \\ & & & & x_0 & \rightarrow & (p_v) \\ & & \nearrow & & & & \uparrow \\ \rho x & & z & \rightarrow & z_0 & \leftarrow & \rho z \end{array} \quad (8.15.4)$$

8.16. Рассмотрим случай (8.15.1). В силу леммы 7.4 имеем $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = y(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = z(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2$, поэтому α_1^2 – корень из единицы, что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

8.17. Рассмотрим случай (8.15.2). Имеем $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} = F_x \oplus F_{\rho x} \oplus F_y \oplus F_z$, $[F_y : \mathbb{Q}_{p_v}]$ и $[F_z : \mathbb{Q}_{p_v}]$ – четные числа в силу соотношений $y = \rho y, z = \rho z$ [15], поэтому $[F_x : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho x} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1, [F_y : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_z : \mathbb{Q}_{p_v}] = 2$. Следовательно,

$$x(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}, \quad \rho x(\lambda\alpha_1) = 1 - x(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}, \quad y(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = z(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2.$$

8.18. Предположим, что $F_0/\mathbb{Q}$ – нормальное расширение с группой Галуа $\{1, \sigma, \sigma^2\}$. Рассмотрим часть пополнения диаграммы (8.15.2) точками F' :

$$\begin{array}{ccccccc} x' & \rightarrow & x & & y_0 & \leftarrow & y = \rho y \leftarrow y' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \rho x' & \rightarrow & \rho x & \rightarrow & x_0 & \rightarrow & (p_v) \leftarrow z_0 \leftarrow z = \rho z \leftarrow z' \end{array}$$

Можно считать, что $z_0 = \sigma y_0$ и $z' = \sigma y'$.

Из соотношений (7.4.2), (7.4.3) следует, что

$$1/2 = y'(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = z'(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = \sigma y'(\sigma(\lambda\alpha_1^{\pm 1})) = z'(\lambda\alpha_2^{\pm 1}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} z_0(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}) &\geq \inf \{z'(\lambda\alpha_1), z'(\lambda\alpha_1^{-1})\} = 1/2, \\ z_0(\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}) &\geq 1/2, \end{aligned}$$

что противоречит (7.8.2).

8.19. Предположим, что $F'_0 \neq F_0$. В этом случае $\text{Gal}(F'_0/F_0) = \{1, \tau\}$, где τ – элемент порядка 2 в $S_3 = \text{Gal}(F'_0/\mathbb{Q})$. Очевидно, $\text{Card}(\{w'_0 \mid p_v\}) \in \{3, 6\}$. Поэтому пополнение диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & y_0 & & \\ & & \downarrow & & \\ x_0 & \rightarrow & (p_v) & \leftarrow & z_0 \end{array}$$

точками F'_0 является одним из следующих вариантов:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & y_0 & \leftarrow & y'_0 \\ & & & & \downarrow & & \\ x'_0 & \rightarrow & x_0 & \rightarrow & (p_v) & \leftarrow & z_0 \leftarrow z'_0 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccccccc} x'_0 & & y'_0 & \rightarrow & y_0 & \leftarrow & \tau y'_0 \\ & \searrow & & & \downarrow & & \\ & & x_0 & \rightarrow & (p_v) & & \\ & \nearrow & & & \uparrow & & \\ \tau x'_0 & & z'_0 & \rightarrow & z_0 & \leftarrow & \tau z'_0 \end{array}$$

В любом случае можно считать, что $z'_0 = \sigma y'_0$.

Имеем

$$\begin{aligned} z'_0(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}) &\geq \inf \{z'(\lambda\alpha_1), z'(\lambda\alpha_1^{-1})\} = 1/2, \\ y'_0(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}) &\geq \inf \{y'(\lambda\alpha_1), y'(\lambda\alpha_1^{-1})\} = 1/2, \end{aligned}$$

поэтому

$$z'_0(\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}) = \sigma y'_0(\sigma(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1})) = y'_0(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}) \geq 1/2,$$

что противоречит (7.8.2).

8.20. Рассмотрим случай (8.15.3). В этой ситуации

$$x(\lambda\alpha_1) = 1/2, \quad y(\lambda\alpha_1) = 1 - \rho y(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}, \quad z(\lambda\alpha_1) = 1 - \rho z(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}.$$

8.21. Предположим, что $F'_0 = F_0$. В этом случае $F = F'$, поэтому $F/\mathbb{Q}$ – нормальное расширение, и в точности пять точек, $x = \rho x$, $y = \rho y$, $z = \rho z$, сопряжены друг другу, что противоречит соотношению $6 = \text{Card}(\text{Gal}(F/\mathbb{Q}))$.

8.22. Предположим, что $F'_0 \neq F_0$. Тогда пополнение диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & y_0 & \\ & \downarrow & \\ x_0 & \rightarrow (p_v) & \leftarrow z_0 \end{array}$$

точками F'_0 является одним из следующих вариантов:

$$\begin{array}{ccccccc} & & y_0 & \leftarrow & y'_0 = \tau y'_0 & & \\ & & \downarrow & & & & \\ x'_0 = \tau x'_0 & \rightarrow & x_0 & \rightarrow & (p_v) & \leftarrow & z_0 \leftarrow z'_0 = \tau z'_0 \end{array} \quad (8.22.1)$$

и

$$\begin{array}{ccccccc} x'_0 & & y'_0 & \rightarrow & y_0 & \leftarrow & \tau y'_0 \\ & \searrow & & & \downarrow & & \\ & & x_0 & \rightarrow & (p_v) & & \\ & \nearrow & & & \uparrow & & \\ \tau x'_0 & & z'_0 & \rightarrow & z_0 & \leftarrow & \tau z'_0 \end{array} \quad (8.22.2)$$

потому что все точки $w'_0 \mid (p_v)$ сопряжены относительно действия $\text{Gal}(F'_0/F_0) = S_3$, и число таких точек равно 3 или 6.

8.23. Рассмотрим случай (8.22.1). Мы имеем $x' \mid x \Rightarrow x'(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2$. Поэтому $x'_0(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}) \geq 1/2$. Можно считать, что $y'_0 = \sigma x'_0$. Поэтому $\sigma x'_0(\sigma(\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1})) \geq 1/2$ и

$$y'_0(\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1}) \geq 1/2. \quad (8.23.1)$$

С другой стороны, $\tau y'_0 = y'_0$, поэтому (8.23.1) влечет

$$1/2 \leq \tau y'_0(\tau(\lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_2^{-1})) = y'_0(\lambda\alpha_3 + \lambda\alpha_3^{-1}),$$

что противоречит (7.8.2).

8.24. Рассмотрим случай (8.22.2). Точки $w' \mid p_v$ сопряжены друг другу относительно действия $\text{Gal}(F'/\mathbb{Q}) = \{1, \rho\} \times S_3$. В силу (8.9.2)

$$\text{Gal}(F'/F) = \text{Gal}(F'_0/F_0) = \{1, \tau\}.$$

Поэтому $\{x', \tau x'\}$ – множество всех точек поля F' , лежащих над $x = \rho x$. С другой стороны, $y' \neq \rho y'$ (потому что $y' \mid y$ и $\rho y' \mid \rho y$ ($y \neq \rho y$)) и $x' = \gamma y'$ для некоторого $\gamma \in \text{Gal}(F'/\mathbb{Q})$. Поэтому $x' = \gamma y' \neq \gamma \rho y' = \rho \gamma y' = \rho x'$. Следовательно, $\tau x' = \rho x'$, $x' = \rho \tau x'$. Мы получаем соотношение (8.10.1) в новой ситуации. Поэтому мы можем исключить этот вариант с помощью процедуры пп. 8.10–8.12.

8.25. Рассмотрим случай (8.15.4). Имеем

$$[F_x : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho x} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_y : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho y} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_z : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho z} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1,$$

поэтому для любого $w \mid p_v$ $w(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}$. Следовательно, J_v – обыкновенное абелево многообразие.

§9. Случай приводимого характеристического полинома

9.1. Предположим, что характеристический полином $P(t) = \text{Pc}_J(\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}), t)$ приводим над полем $\mathbb{Q}$. Из соотношения (7.2.1) следует, что $\text{Pc}_J(\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}), t)$ – произведение трех неприводимых полиномов над $\mathbb{Q}$ или $\text{Pc}_J(\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}), t) = P(t) \cdot Q(t)$, где $P(t), Q(t)$ неприводимы над $\mathbb{Q}$, $\deg P(t) = 4$, $\deg Q(t) = 2$.

9.2. Если $\text{Pc}_J(\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}), t)$ – произведение трех неприводимых полиномов над $\mathbb{Q}$, то J_v изогенно произведению трех обыкновенных эллиптических кривых. Это следует из теории Хонды–Тэйта [32], [33, лемма 1.0.3].

9.3. Предположим, что $\text{Pc}_J(\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}), t) = P(t) \cdot Q(t)$. Можно считать, что $\lambda\alpha_3^{\pm 1}$ – корень $Q(t)$, $\lambda\alpha_1^{\pm 1}, \lambda\alpha_2^{\pm 1}$ – корни $P(t)$. В этом случае J_v изогенно произведению $A \times E$, где A определено в п. 7.3, и E – обыкновенная эллиптическая кривая, $\text{End}^0(A) = F = \mathbb{Q}(\lambda\alpha_1)$, $\text{End}^0(E) = \mathbb{Q}(\lambda\alpha_3)$ [33, лемма 1.0.3].

Из неприводимости $P(t)$ и леммы 7.2 следует, что $[F : \mathbb{Q}] = 4$.

9.4. Предположим, что x_0 – единственная точка квадратичного поля F_0 , лежащая над p_v . Мы имеем два варианта пополнения диаграммы $x_0 \rightarrow (p_v)$ точками поля F :

$$x = \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \quad (9.4.1)$$

и

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \end{array} \quad (9.4.2)$$

9.5. Рассмотрим случай (9.4.1). В силу леммы 7.4 $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2$, поэтому α_1^2 – корень из единицы, что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

9.6. Рассмотрим случай (9.4.2). Мы имеем $[F_x : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho x} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 2$. В силу (7.3.1) $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) \in \{0, 1/2, 1\}$. Предположим, что $x(\lambda\alpha_1) = 1/2$. Тогда $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2$, $\rho x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2$ и α_1^2 – корень из единицы, что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Следовательно, $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) \in \{0, 1\}$, $\rho x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) \in \{0, 1\}$ и J_v – обыкновенное абелево многообразие.

9.7. Предположим, что x_0, y_0 – различные точки поля F_0 , лежащие над p_v . Мы имеем следующие варианты:

$$x = \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow y = \rho y; \quad (9.7.1)$$

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) \leftarrow y_0 \leftarrow y = \rho y; \end{array} \quad (9.7.2)$$

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho x \rightarrow x_0 \rightarrow (p_v) & \leftarrow & y_0 \leftarrow \rho y \end{array} \quad (9.7.3)$$

9.8. Рассмотрим случай (9.7.1). В силу леммы 7.4 имеем $x(\lambda\alpha_1^{\pm 1}) = 1/2 = y(\lambda\alpha_1^{\pm 1})$, поэтому α_1^2 – корень из единицы, что противоречит мультипликативной независимости $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

9.9. Рассмотрим случай (9.7.2). Из неприводимости $P(t)$, $Q(t)$ и леммы 7.2 следует, что $[F : \mathbb{Q}] = 4$, и отображение редукции $K = \text{End}^0(J) \rightarrow \text{End}^0(J_v) = F \oplus \mathbb{Q}(\lambda\alpha_3)$ дает вложения $K = \text{End}^0(J) \subset F$, $K = \text{End}^0(J) \subset \mathbb{Q}(\lambda\alpha_3)$. Легко видеть, что $F = K(F_0)$. Мы имеем $K \cap F_0 = \mathbb{Q}$, потому что F_0 – вполне вещественное поле. Следовательно, K и F_0 линейно разделены над $\mathbb{Q}$, $K(F_0)$ – нормальное расширение $\mathbb{Q}$ степени 4 [3, гл. 5, § 10, п. 4, следствие 2]. С другой стороны, из соотношения $F' = F$ следует, что все точки $w \mid p_v$ сопряжены относительно действия $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$, поэтому число таких точек равно 2 или 4, что противоречит (9.7.2).

9.10. Рассмотрим случай (9.7.3). Имеем $[F_x : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho x} : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_y : \mathbb{Q}_{p_v}] = [F_{\rho y} : \mathbb{Q}_{p_v}] = 1$, поэтому для любого $w \mid p_v$ $w(\lambda\alpha_1) \in \{0, 1\}$. Следовательно, J_v – обыкновенное абелево многообразие. Теорема 0.12 доказана.

Список литературы

1. *André Y.* On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties // *Math. Ann.* 1996. V. 305. P. 205–248.
2. *Bogomolov F. A.* Sur l'algebricité des représentations l -adiques // *C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I Math.* 1980. V. 290. P. 701–703.
3. *Бурбаки Н.* Алгебра. Гл. 4–6. М.: Наука, 1965.
4. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир; гл. 1–3 (1976), гл. 4–6 (1972), гл. 7–8 (1978).
5. Algebraic number theory (Proc. International Conf., Brighton, 1965) / Eds. J. W. S. Cassels, A. Frohlich. Academic Press, London, and Thompson, Washington, D.C., 1967.
6. *Chi W.* On the l -adic representations attached to simple abelian varieties of type IV // *Bull. Austral. Math. Soc.* 1991. V. 44. P. 71–78.
7. *Chi W.* l -adic and λ -adic representations associated to abelian varieties defined over number fields // *Amer. J. Math.* 1992. V. 114. P. 315–353.
8. *Deligne P.* Variétés abéliennes ordinaires sur un corps fini // *Invent. Math.* 1969. V. 8. P. 238–243.
9. *Deligne P.* La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$ // *Invent. Math.* 1972. V. 15. P. 206–226.
10. *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // *Invent. Math.* 1983. V. 73. P. 349–366.
11. *Mumford D.* Families of abelian varieties // *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966. V. 9. P. 347–352.
12. *Mumford D.* Lectures on curves on an algebraic surface. Princeton – N. J.: Princeton Univ. Press, 1966.
13. *Mumford D. (in collaboration with C. P. Ramanujam)* Abelian varieties. London: Tata Inst. Fund. Res., Bombay, and Oxford Univ. Press, 1970.
14. *Noot R.* Abelian varieties – Galois representation and properties of ordinary reduction // *Compositio Mathematica*. 1995. V. 97. P. 161–171.
15. *Ogus A.* Hodge cycles and crystalline cohomology. Hodge cycles, motives, and Shimura varieties // *Lecture Notes in Math.* V. 900. Berlin: Springer-Verlag, 1982. P. 357–414.
16. *Pink R.* l -adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford–Tate conjecture // Preprint Universität Mannheim 11/1997.
17. *Sen S.* Lie algebras of Galois groups arising from Hodge–Tate modules // *Ann. Math.* 1973. V. 97. № 2. P. 160–170.
18. *Serre J.-P.* Groupes algébriques associés aux modules de Hodge–Tate // *Astérisque* 1979. V. 65. P. 155–188.
19. *Serre J.-P.* Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations l -adiques // *Proc. of Symposia in Pure Math.* 1994. V. 55, Part 1. P. 377–400.

20. *Shimura G.* Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1971.
21. *Танкеев С. Г.* Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 1. С. 155–170.
22. *Танкеев С. Г.* Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности над числовыми полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 6. С. 1214–1227.
23. *Танкеев С. Г.* Поверхности типа $K3$ над числовыми полями и l -адические представления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 6. С. 1252–1271.
24. *Танкеев С. Г.* Абелевы многообразия Куги–Сатаке и l -адические представления // Изв. РАН. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 877–889.
25. *Танкеев С. Г.* Поверхности типа $K3$ над числовыми полями и гипотеза Мамфорда–Тэйта. II // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 3. С. 179–206.
26. *Танкеев С. Г.* О следах Фробениуса // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 165–200.
27. *Tankeev S. G.* Frobenius traces and minuscule weights. Preprint of the Warwick University 39/1996.
28. *Tankeev S. G.* Frobenius traces and minuscule weights. II. Preprint of the Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette: IHES/M/97/20.
29. *Tankeev S. G.* On the existence of ordinary reductions of a simple abelian threefold of type IV. Preprint of the Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette) IHES/M/97/21.
30. *Tankeev S. G.* On the existence of ordinary reductions of a $K3$ surface over a number field. Preprint of the Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette) IHES/M/97/27.
31. *Tankeev S. G.* On weights of l -adic representation. Preprint of the Mathematical Sciences Research Institute. Berkeley, 1997–047.
32. *Tate J.* Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda). Séminaire Bourbaki 1968/69, Exposé 352 // Lecture Notes in Math. V. 179. Berlin: Springer-Verlag, 1971. P. 95–110.
33. *Зархин Ю. Г.* Абелевы многообразия, l -адические представления и SL_2 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 294–308.
34. *Zarhin Yu. G.* Hodge group of $K3$ surface // J. für die reine und angew. Math. 1983. V. 341. P. 193–220.
35. *Зархин Ю. Г.* Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 264–304.

Владимирский государственный университет,
ул. Горького, 87, Владимир, 600026, Россия.
E-mail: tankeev-rtf@vpti.vladimir.su

Поступило в редакцию
20.VII.1997