Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Даниелян, Об одной задаче М. А. Лаврентьева о представимости функций рядами полиномов в комплексной области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 2, 29–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/im234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:04:32

УДК 517.537

А. А. Даниелян

Об одной задаче М. А. Лаврентьева о представимости функций рядами полиномов в комплексной области

М. А. Лаврентьевым был построен пример компактного множества E в $\mathbb{C}$ такое, что E совпадает с границей области, содержащей ∞ , и любая порция E разбивает плоскость. Пусть $\{D_{n_k}\}$ и $\{D_{m_k}\}$ – две подпоследовательности ограниченных, дополнительных к E областей таких, что любая окрестность каждой точки E содержит области из обеих подпоследовательностей. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ определены в круге U , содержащем E , регулярны вне E , совпадают во всех областях из $\{D_{n_k}\}$ и всюду в U являются пределами точечно сходящихся последовательностей полиномов. Существуют ли всегда при этих условиях области из $\{D_{m_k}\}$, в которых f_1 и f_2 тождественно совпадают? На этот вопрос М. А. Лаврентьева в работе дается отрицательный ответ.

Библиография: 15 наименований.

1. Введение. Вопрос о характере функций, представимых сходящимися (поточечно) на отрезке рядами полиномов, был полностью решен классической теоремой Р. Бэра о функциях первого класса. Эта теорема послужила стимулом для начатых П. Монтелем исследований аналогичного вопроса в комплексной плоскости. В дальнейшем задачи представимости функций сходящимися рядами полиномов на общих множествах комплексной плоскости были изучены, в частности, в работах [1]–[3] в тесной взаимосвязи с известными результатами этих авторов в теории равномерных полиномиальных приближений.

Функцию, представимую на некотором множестве всюду сходящимся рядом полиномов, будем называть *предельной функцией на этом множестве* [1]. Рассмотрим предельную функцию $f(z)$, определенную в некоторой, например, односвязной области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть E – множество особых точек функции $f(z)$, т.е. множество точек неаналитичности $f(z)$. Уже Осгудом было замечено, что E – замкнутое, нигде не плотное в G множество. М. А. Лаврентьев [1] ввел класс M -множеств (определение см. в п. 2) и дал полную характеристику E , доказав, что класс множеств особых точек предельных функций совпадает с классом M -множеств. Заметим, что аналогичное решение М. А. Лаврентьев предложил также для отмеченной Монтелем смежной задачи описания множества иррегулярных точек заданной сходящейся в G последовательности полиномов $\{P_n(z)\}$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01240).

(точка $t \in G$ называется *регулярной*, если в некоторой ее окрестности полином $\{P_n(z)\}$ сходится равномерно; в противном случае t — *иррегулярная точка*).

В классе M -множеств выделяется его подкласс M^* -множеств. В этой статье важную роль играет указанный М. А. Лаврентьевым [1] пример множества $\bar{G}$, принадлежащего классу $M \setminus M^*$; множество $\bar{G}$ совпадает с границей области, содержащей ∞ , и, кроме того, любая порция $\bar{G}$ разбивает плоскость (см. п. 2).

М. А. Лаврентьев [1, теорема 27] (см. также [3, теорема 10, с. 168]) доказал, что если E — любое (замкнутое в $\mathbb{C}$) M^* -множество, то произвольная функция $f(z)$, принадлежащая первому классу Бэра на E и регулярная вне E , является предельной функцией (на всей $\mathbb{C}$). Следовательно, значения $f(z)$ в прилегающих (дополнительных) к E различных областях регулярности D_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) и на E не зависят друг от друга.

Аналогичное решение задачи о взаимосвязи между значениями предельной функции $f(z)$ в общем случае, т.е. когда множество E особых точек $f(z)$ — произвольное M -множество, невозможно [1, теоремы 25, 26]. Поэтому в [1, § 19] упоминаются вопросы о взаимосвязи между значениями $f(z)$ как в различных прилегающих к E областях регулярности D_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), так и на самом E и в этих областях. Далее, в [1, § 19] задача о взаимосвязи между значениями $f(z)$ в различных областях регулярности D_n формулируется в конкретном случае, когда множество E особых точек $f(z)$ представляет упомянутое множество $\bar{G} \in M \setminus M^*$.

Приведем формулировку этой задачи М. А. Лаврентьева [1, § 19], которая оставалась нерешенной до сих пор.

Пусть $\{D_{n_k}\}$ и $\{D_{m_k}\}$ — две подпоследовательности областей, прилегающих к $E = \bar{G}$ и таких, что любая окрестность каждой точки E содержит области из обеих подпоследовательностей. Предположим, что предельные функции f_1 и f_2 определены в круге U , содержащем E , регулярны в областях, прилегающих к E , и совпадают в каждой области из $\{D_{n_k}\}$. Существуют ли всегда при этих условиях области из $\{D_{m_k}\}$, где f_1 и f_2 тождественно совпадают?

Основная цель настоящей статьи — решить эту задачу. Ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным. Поэтому можно сказать, что если E из класса $M \setminus M^*$, а $f(z)$ — предельная функция с множеством особых точек E , то, вообще говоря, не существует взаимосвязи (в отмеченном М. А. Лаврентьевым смысле) между значениями $f(z)$ в различных ее областях регулярности D_n . Так как в [1, § 22] затронуты (исследованы) также соответствующие вопросы, связанные с предельными функциями гармонических полиномов, ниже мы отмечаем одно следствие для “гармонического” случая (ср. [1, абзац после теоремы 28]).

С помощью теоремы Бэра сначала мы доказываем лемму топологического характера, дающую на множестве Лаврентьева некую вспомогательную функцию $f(z)$ первого класса Бэра. Далее, используя полученную в [5] (см. также п. 3) характеристику функций, представимых на произвольном компакте

сходящимися и равномерно ограниченными последовательностями полиномов, устанавливаем, что функция $f(z)$ – предельная функция (на множестве Лаврентьева). Для завершения доказательства нашей основной теоремы следует воспользоваться результатами теории равномерных приближений, и здесь мы ссылаемся на общую теорему С. Н. Мергеляна [6].

Выражаю глубокую благодарность С. Н. Мергеляну за внимание к работе и полезные замечания.

2. Как обычно, ∂M означает границу множества M .

Прилегающая к замкнутому множеству F область – это ограниченная дополнительная к F область.

Порцией замкнутого множества F называется замыкание части F , принадлежащей некоторому открытому кругу, внутри которого содержится по крайней мере одна точка F .

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – замкнутое множество. Следующие определения принадлежат М. А. Лаврентьеву [1] (см. также [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Замкнутое ограниченное множество $F \subset E$ называется *элементарным подмножеством* (в [1] использован эквивалентный термин “элементарная порция”) множества E , если:

- 1) F является границей области D , содержащей точку ∞ ;
- 2) $E \setminus F \subset D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. E называется *M -множеством*, если любое замкнутое множество $F \subset E$, имеет порцию, которая является элементарным подмножеством E^1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. E называется *M^* -множеством*, если любое замкнутое множество $F \subset E$ имеет порцию, представляющую замкнутое, нигде не плотное множество, не разбивающее плоскость.

Ясно, что любое M^* -множество является, в частности, M -множеством.

Приведем краткую схему построения принадлежащего М. А. Лаврентьеву меры M -множества, не являющегося M^* -множеством (подробнее см. [1]).

Рассмотрим окружность C радиуса r , на которой отмечена некоторая ее точка z_0 . Пусть z_1 – точка, делящая пополам дугу $C \setminus \{z_0\}$, а C_1 – окружность ра-

¹В связи с тем, что любое M -множество является нигде не плотным (замкнутым) множеством, М. А. Лаврентьев заметил, что существуют компактные нигде не плотные множества, не являющиеся M -множествами: “Например, мы получим такие множества, если удалим из замкнутой области $\overline{D}$ последовательность кругов, лежащих вне друг друга и всюду плотных в D ” (см. [1, § 13]). Тем самым впервые в 1936 г. была указана конструкция знаменитого в теории аппроксимации множества, которое в дальнейшем называли “швейцарским сыром”. (Швейцарский математик Алис Рот несколько позже предлагал ту же конструкцию; ср. [7, с. 42, 89].)

диуса $r/2$, которая находится вне C и касается C в точке z_1 . Пусть z_2 и z_3 – точки, делящие пополам две дуги $C \setminus \{z_0, z_1\}$, а C_2 и C_3 – окружности одного и того же радиуса $r/2^2$, которые находятся вне C и касаются C соответственно в точках z_2 и z_3 . Продолжая этот процесс бесконечно (на k -м шаге берутся окружности радиуса $r/2^k$), получим некоторую последовательность $\{C_n\}$ касающихся C окружностей. Очевидно, что $\{C_n\}$ полностью определяется исходной окружностью C и ее точкой z_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем $\{C_n\}$ *стандартной последовательностью окружностей*, соответствующей данной окружности C и ее точке z_0 .

Пусть $C_0 = \Gamma_0$ – единичная окружность $|z| = 1$. Рассмотрим стандартную последовательность окружностей, соответствующую C_0 и ее точке $z_0 = 1$. Объединение этих окружностей обозначим через Γ_1 . Для любой окружности C из Γ_1 рассмотрим стандартную последовательность окружностей, соответствующую C и ее точке, в которой C касается C_0 . Обозначим объединение всех новых возникающих окружностей через Γ_2 . Для любой окружности C из Γ_2 рассмотрим стандартную последовательность окружностей, соответствующую C и ее точке, в которой C касается окружности из Γ_1 . Пусть Γ_3 – объединение всех новых возникающих окружностей. Продолжая так далее, получим множество Γ_k при любом натуральном k . Обозначим $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$. Замыкание этого множества $\bar{\Gamma}$ дает желаемый пример М. А. Лаврентьева. $\bar{\Gamma}$ не является M^* -множеством, так как каждая его порция разбивает плоскость. $\bar{\Gamma}$ является M -множеством, так как оно совпадает с границей области, содержащей точку ∞ .

Ясно, что последовательность прилегающих к $\bar{\Gamma}$ областей совпадает с совокупностью всех открытых кругов, ограниченных окружностями, входящими в Γ .

Для дальнейшего введем некоторые обозначения.

Пусть C – окружность из Γ_k ($k \geq 1$). Обозначим через $\Gamma_{k+1}(C)$ все окружности из Γ_{k+1} , касающиеся C , а через $\Gamma_{k+2}(C)$ – все окружности из Γ_{k+2} , каждая из которых касается некоторой окружности из $\Gamma_{k+1}(C)$; аналогичным образом определяется $\Gamma_m(C)$ при любом $m > k$.

Множество $\bigcup_{m=k+1}^{\infty} \Gamma_m(C)$ представляет совокупность всех окружностей, “возникающих” от окружности C .

Окружности, входящие в Γ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), будем называть *окружностями k -го “поколения”*. $\Gamma_0 = C_0$ – единственная окружность нулевого “поколения”.

3. Вкратце остановимся на некоторых результатах, связанных с тематикой настоящей работы.

Монтелем была поставлена задача (“проблема Монтеля”, см. [1]) об описании определенных в области G предельных функций $f(z)$. Она была детально исследована, в частности, в работах [1], [3], [4], причем, работа [4] содержит ее решение в терминах внутренних свойств функции $f(z)$.

Обратимся к отмеченному в п. 1 вопросу о взаимосвязи между значениями предельной функции $f(z)$ на E и в областях D_n при $E \in M \setminus M^*$. Для такой предельной функции $f(z)$ М. А. Лаврентьев [1, теорема 25] установил существование некоторой подпоследовательности односвязных областей $\{D_{n_k}\}$ таких, что регулярная в D_{n_k} функция $f_{n_k}(z) \equiv f(z)$, $z \in D_{n_k}$, ограничена и почти всюду на границе ∂D_{n_k} (в смысле конформного отображения [1, § 6]) значения $f(z)$ равны предельным значениям функции $f_{n_k}(z)$, $z \in D_{n_k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Это является необходимым условием на $f(z)$ для того, чтобы она была предельной функцией (т.е. для решения проблемы Монтеля). Из упомянутого результата работы [4] следует, что это условие вместе с еще некоторыми необходимыми условиями является также достаточным для того, чтобы $f(z)$ была предельной (соответствующее утверждение для предельных функций гармонических полиномов было получено в [1, теорема 28]). Таким образом, отмеченная взаимосвязь между значениями $f(z)$ на E и в прилегающих к E областях регулярности – одно из условий, необходимых и достаточных для того, чтобы $f(z)$ была предельной функцией. Тем самым найден ответ на упомянутый вопрос (ср. с аналогичным заключением для “гармонического” случая [1, после теоремы 28]).

Пусть $B \subset \mathbb{C}$ – произвольное открытое ограниченное множество. Вопрос об описании функций, представимых на B сходящимися и равномерно ограниченными последовательностями полиномов, был полностью решен Л. А. Рубелем и А. Л. Шилдсом [8], а в частном случае, когда B — область, был решен ранее О. Фаррелом [9].

Пусть K – произвольное компактное множество, не разделяющее плоскость; множество внутренних точек K состоит из счетного числа односвязных областей D_n . Рассмотрим задачу (см. [1]): найти описание всех тех функций $f(z)$ на K , каждая из которых представима в виде предела равномерно ограниченной последовательности полиномов.

В важном частном случае, когда K – круг, задача была поставлена Ф. Гартогсом [10], достаточные условия для ее решения получили М. В. Келдыш [11], С. Н. Мергелян и А. А. Талалаян [12], а полностью она была решена С. В. Колесниковым [13]. (До появления [13] автор в 1984 г. получил один результат, содержащий в себе теоремы из [11], [12], но вопрос о том, дает или нет этот результат альтернативное решение задачи, остался открытым (см. [14]).) В дальнейшем некоторые рассуждения из работы [13] были использованы также в общем случае (см. [5]).

В общем случае еще М. А. Лаврентьев [1, теорема 15] отметил необходимые условия на функцию $f(z)$, которые, как было доказано в [5], являются также достаточными. Результат допускает такую формулировку: ограниченная функция первого класса Бэра $f(z)$ на K является пределом равномерно ограниченной последовательности полиномов тогда и только тогда, когда в любой области D_n функция $f_n(z) \equiv f(z)$ ($z \in D_n$) аналитическая и почти всюду на границе ∂D_n (в смыс-

ле конформного отображения; см. [5] или [1, § 6]) значения $f(z)$ равны предельным значениям функции $f_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Отметим, что если ∂D_n — спрямляемая кривая (например, если K — круг), т.е. ситуация при упомянутом выше частном случае, решенная в [13], то слова “в смысле конформного отображения” можно опустить.

В [5, теорема 3] доказан также более общий результат, из которого непосредственно следует, например, упомянутая теорема Рубеля и Шилдса [8], а также полная характеристика всех тех функций, определенных на произвольном замкнутом $F \subset K$, каждая из которых на F является пределом равномерно ограниченной на K последовательности полиномов. Неочевидное необходимое условие на функцию опять было отмечено фактически еще в [1, теорема 13]. С другой стороны, этот результат из [5] нашел существенные применения (см. [15]) в некоторых других вопросах поточечной и так называемой одновременной аппроксимации.

4. Пусть

$$D_{n_1}, D_{n_2}, \dots, D_{n_k}, \dots, \quad (1)$$

$$D_{m_1}, D_{m_2}, \dots, D_{m_k}, \dots \quad (2)$$

— фигурирующие в сформулированной выше задаче М. А. Лаврентьева подпоследовательности областей (кругов).

Основной результат работы — следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Существует определенная в U функция $f(z)$, для которой выполняются условия:*

- 1) *всюду в U функция $f(z)$ является пределом стоящей последовательности полиномов;*
- 2) *$f(z)$ регулярна в прилегающих к $\bar{\Gamma}$ областях ($\bar{\Gamma}$ является множеством особых точек для $f(z)$);*
- 3) *$f(z)$ равна нулю в любой области из (1) и отлична от нуля во всех точках любой области из (2).*

Взяв $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = 2f(z)$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существуют определенные в U две предельные функции, $f_1(z)$ и $f_2(z)$, которые регулярны в прилегающих к $\bar{\Gamma}$ областях ($\bar{\Gamma}$ является множеством особых точек для $f_1(z)$ и $f_2(z)$), совпадают в каждой области из (1) и принимают разные значения во всех точках каждой области из (2).*

Следствие 1 дает решение задачи М. А. Лаврентьева.

Заметим, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ не только не совпадают тождественно ни в одной области из (2), но, более того, они принимают разные значения во всех точках любой области из (2).

Далее, так как $f(z)$ принимает действительные значения (см. ниже доказательство теоремы), то из следствия 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Существуют определенные в U две предельные для гармонических полиномов функции, $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, которые гармоничны в прилегающих к $\bar{\Gamma}$ областях ($\bar{\Gamma}$ – множество особых точек для них), совпадают в каждой области из (1) и принимают разные значения во всех точках каждой области из (2).

Важную роль в наших доказательствах играет следующая лемма.

ЛЕММА. Существует определенная на множестве $\bar{\Gamma}$ действительная функция $f(z)$, принадлежащая первому классу Бэра, для которой выполняются условия:

- 1) $0 \leq f(z) \leq 1$ на $\bar{\Gamma}$;
- 2) на ∂D_{n_k} ($k = 1, 2, 3, \dots$) $f(z) = 0$, кроме, быть может, некоторого счетного множества;
- 3) на ∂D_{m_k} ($k = 1, 2, 3, \dots$) $f(z) = r_k > 0$, кроме, быть может, одной точки (r_k – радиус круга D_{m_k}).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Вообще говоря, могут существовать прилегающие к $\bar{\Gamma}$ области D_n , которые не встречаются ни в (1), ни в (2). Не теряя общности, включим все такие области в (2).

Определим функцию $f(z)$ на $\bar{\Gamma}$ следующим образом.

Если область, ограниченная окружностью $\Gamma_0 = C_0$, входит в (2), то на C_0 положим $f(z)$ равной радиусу окружности C_0 , т.е. 1. В противном случае возьмем $f(z) = 0$ во всех тех точках окружности C_0 , которые не являются точками касания с окружностями из Γ_1 (т.е. $f(z) = 0$ на $C_0 \setminus \Gamma_1$). В тех точках множества $C_0 \cap \Gamma_1$, в которых касание происходит с областью (окружностью), входящей в (1), значение $f(z)$ возьмем опять равным нулю. А в каждой из остальных точек множества $C_0 \cap \Gamma_1$ значение $f(z)$ определим равным радиусу окружности из Γ_1 , касающейся в этой точке C_0 . Таким образом, на $\Gamma_0 = C_0$ функция $f(z)$ определена.

Допустим, что $f(z)$ определена на $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ (т.е. на $\bigcup_{j=0}^k \Gamma_j$) и определим ее на Γ_{k+1} . Достаточно определить $f(z)$ на произвольной окружности C из Γ_{k+1} . В одной точке C , а именно в точке t касания C с соответствующей окружностью из Γ_k , значение $f(z)$ уже определено. Если область, ограниченная C , входит в (2), то на $C \setminus \{t\}$ положим $f(z)$ равной радиусу C . В противном случае определим $f(z) = 0$ в тех точках из $C \setminus \{t\}$, которые не являются точками касания с окружностями из Γ_{k+2} . В тех точках множества $C \cap \Gamma_{k+2}$, в которых касание происходит с областью (окружностью), входящей в (1), значение $f(z)$ возьмем опять равным нулю. А в каждой из остальных точек множества $C \cap \Gamma_{k+2}$ значение $f(z)$ определим равным радиусу окружности из Γ_{k+2} , касающейся в этой точке C . Таким образом, $f(z)$ определена на C во всех случаях.

Итак, $f(z)$ определена на $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$. На $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ положим $f(z) = 0$.

Очевидно, что условия 1)–3) леммы удовлетворены. Кроме того,

$$0 \leq f(z) \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \quad z \in \Gamma_k, \quad k \geq 1.$$

Из последнего неравенства следует, что функция $f(z)$ непрерывна в любой точке множества $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$. Из построения функции $f(z)$ нетрудно видеть, что она непрерывна также в любой точке множества Γ , в которой она обращается в нуль.

Докажем, что функция $f(z)$ принадлежит первому классу Бэра (на $\bar{\Gamma}$). По теореме Бэра достаточно убедиться в том, что если F – любое непустое замкнутое подмножество в $\bar{\Gamma}$, то сужение $f|_F$ функции f на F имеет точку непрерывности.

Пусть непустое замкнутое подмножество $F \subset \bar{\Gamma}$ такое, что $\Gamma \cap F \neq \emptyset$ (случай $\Gamma \cap F = \emptyset$ тривиален, так как при нем будем иметь $F \subset \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$). Тогда существует наименьшее число $k_1 \geq 0$, для которого $\Gamma_{k_1} \cap F \neq \emptyset$. Пусть C_1 – некоторая окружность из Γ_{k_1} , для которой $C_1 \cap F \neq \emptyset$ (в частности, C_1 может совпадать с единственной окружностью C_0 из Γ_0).

Для окружности C_1 рассмотрим множества $\Gamma_k(C_1)$, $k > k_1$ (обозначение см. выше). Если существует $k > k_1$ такое, что $\Gamma_k(C_1) \cap (F \setminus C_1) \neq \emptyset$, то обозначим через k_2 наименьшее из этих чисел. Имеем $k_2 > k_1$, и пусть C_2 – некоторая окружность из $\Gamma_{k_2}(C_1)$, для которой $C_2 \cap (F \setminus C_1) \neq \emptyset$.

Повторим то же самое для окружности C_2 . Вообще, предполагая, что окружность C_n из $\Gamma_{k_n}(C_{n-1})$ ($k_n > k_{n-1}$) со свойством $C_n \cap (F \setminus C_{n-1}) \neq \emptyset$ найдена, рассмотрим множества $\Gamma_k(C_n)$, $k > k_n$. Если существует $k > k_n$ такое, что $\Gamma_k(C_n) \cap (F \setminus C_n) \neq \emptyset$, то обозначим через k_{n+1} наименьшее из этих чисел. Имеем $k_{n+1} > k_n$, и пусть C_{n+1} – некоторая окружность из $\Gamma_{k_{n+1}}(C_n)$, для которой $C_{n+1} \cap (F \setminus C_n) \neq \emptyset$.

Если этот процесс продолжать бесконечно, то получим последовательность окружностей $\{C_n\}$. По построению $\{C_n\}$ ясно, что C_n и C_{n+1} можно единственным образом “соединить” друг с другом с помощью конечного числа окружностей промежуточных “поколений” (если C_n и C_{n+1} касаются друг друга, то они уже “соединены”). В итоге получим бесконечную цепь окружностей из Γ , которая начинается окружностью C_1 и в которой из любого множества Γ_k ($k \geq k_1$) фигурирует ровно одна окружность. Легко видеть, что последовательность центров этих окружностей сходится к некоторой точке t_0 . При этом $t_0 \notin \Gamma$, так как в противном случае мы пришли бы к противоречию с тем, что $\bar{\Gamma}$ – граница области, содержащей ∞ . Таким образом, $t_0 \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ и, следовательно, t_0 – точка непрерывности для $f(z)$ (на $\bar{\Gamma}$). С другой стороны, любая окружность из $\{C_n\}$ имеет непустое пересечение с F , т.е. $t_0 \in F$. Следовательно, t_0 – точка непрерывности для $f|_F$.

Если же отмеченный процесс получения окружностей прерывается, т.е. окружности $C_1, \dots, C_n$ получены, а C_{n+1} больше не существует, то при $n > 1$ это озна-

чает, что C_n – окружность из $\Gamma_{k_n}(C_{n-1})$, $k_n > k_{n-1}$, и

$$C_n \cap (F \setminus C_{n-1}) \neq \emptyset, \quad (3)$$

$$\Gamma_k(C_n) \cap (F \setminus C_n) = \emptyset \quad \text{при всех } k > k_n. \quad (4)$$

При специальном случае $n = 1$ уже не существует окружности C_2 , а это означает, что C_1 – окружность из Γ_{k_1} , $C_1 \cap F \neq \emptyset$ и выполняется (4).

Если существует $z \in F \cap (\bar{\Gamma} \setminus \Gamma)$, то именно z будет точкой непрерывности функции $f|_F$. Поэтому достаточно рассмотреть только случай, когда $F \subset \Gamma$, при котором по (4) справедливо

$$F \setminus C_n \subset \Gamma \setminus \bigcup_{k=k_n+1}^{\infty} \Gamma_k(C_n). \quad (5)$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда C_{n-1} и C_n касаются друг друга или не касаются, а также случай $n = 1$.

1) Пусть C_{n-1} и C_n касаются друг друга ($n > 1$).

Обозначим через τ точку касания C_{n-1} и C_n . По (3) существует $t \in C_n \cap (F \setminus C_{n-1})$, т.е. $t \in C_n$, $t \in F$ и $t \notin C_{n-1}$. Таким образом, существует точка $t \in F$ такая, что $t \in C_n \setminus \{\tau\}$.

Так как $\bar{\Gamma}$ – граница области, содержащей ∞ , то, как нетрудно видеть, любая точка множества $C_n \setminus \{\tau\}$ может быть предельной только для тех точек множества Γ , которые входят в $\bigcup_{k=k_n+1}^{\infty} \Gamma_k(C_n)$. Другими словами, любая точка из $C_n \setminus \{\tau\}$ не является предельной для $\Gamma \setminus \bigcup_{k=k_n+1}^{\infty} \Gamma_k(C_n)$. Из (4) следует, что

$$F \setminus C_n \subset \Gamma \setminus \bigcup_{k=k_n+1}^{\infty} \Gamma_k(C_n).$$

Это означает, что точки из $(C_n \setminus \{\tau\}) \cap F$ и, в частности, t не являются предельными точками для $F \setminus C_n$.

Если круг, ограниченный окружностью C_n , входит в (2), то на $C_n \setminus \{\tau\}$ $f(z)$ – константа и t является точкой непрерывности для $f|_{C_n \cap F}$. Отсюда с учетом предыдущего получим, что t – точка непрерывности также для $f|_F$.

Если круг, ограниченный окружностью C_n , входит в (1), то найдется замкнутая дуга $\gamma \subset C_n$ с концами τ_1 и τ_2 такая, что $t \in \gamma$, $\tau \notin \gamma$ и $f(\tau_1) = f(\tau_2) = 0$. Если $\gamma \cap F \neq \emptyset$ – совершенное множество, то в некоторой его точке z функция $f(z)$ обращается в нуль (на C_n функция $f(z)$ равна нулю, кроме, быть может, некоторого счетного множества, а $\gamma \cap F$ имеет мощность континуума). Эта точка будет точкой непрерывности для $f(z)$ (на $\bar{\Gamma}$) и, значит, также для $f|_F$. Если же $\gamma \cap F$ не является совершенным множеством, то оно имеет изолированную точку z_0 , которая, очевидно, будет точкой непрерывности для $f|_{\gamma \cap F}$. Если к тому же $f(z_0) = 0$

и, в частности, z_0 совпадает с τ_1 или с τ_2 , то опять будем иметь, что z_0 — точка непрерывности для $f|_F$. Иначе $f(z_0) \neq 0$ и z_0 — внутренняя точка дуги γ , откуда, учитывая, что z_0 не является предельной для $F \setminus C_n$, легко видеть, что в некоторой (круговой) окрестности z_0 функции $f|_F$ и $f|_{\gamma \cap F}$ тождественны. Это означает, что z_0 — точка непрерывности для $f|_F$.

2) Пусть C_{n-1} и C_n не касаются друг друга ($n > 1$).

Ясно, что $C_n \cap F = C_n \cap (F \setminus C_{n-1})$ и ввиду (3) существует $t \in C_n \cap F$. Пусть C' — окружность из $\Gamma_{k_n-1}(C_{n-1})$, касающаяся C_n , и τ — точка касания. Соотношение $\tau \in F$ невозможно, потому что оно противоречило бы выбору числа k_n . Поэтому $\tau \notin F$, $C_n \cap F \subset C_n \setminus \{\tau\}$ и, в частности, $t \in C_n \setminus \{\tau\}$.

Таким образом, остается повторить рассуждения случая 1). В силу условия $C_n \cap F \subset C_n \setminus \{\tau\}$ заключительная часть доказательства (когда предполагается, что круг, ограниченный окружностью C_n , входит в (1)) здесь даже упрощается.

3) Рассмотрим, наконец, случай $n = 1$, который только формально отличается от предыдущих.

Имеем окружность C_1 из Γ_{k_1} , для которой $C_1 \cap F \neq \emptyset$ и выполняется (4) при $n = 1$. Пусть C' — окружность из Γ_{k_1-1} , касающаяся C_1 , и пусть τ — точка касания. Как и выше, имеем $\tau \notin F$, $C_1 \cap F \subset C_1 \setminus \{\tau\}$ и любая точка из $(C_1 \setminus \{\tau\}) \cap F = C_1 \cap F$ не является предельной точкой для $F \setminus C_1$. Следовательно, существование точки непрерывности для $f|_F$ можно установить аналогично случаю 2). В тривиальном случае, когда C_1 совпадает с $\Gamma_0 = C_0$ (тогда окружности C' не существует), будем иметь $F \neq \emptyset$, $F \subset C_0$, и очевидно, что существует искомая точка непрерывности для $f|_f$.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Напомним, что если некоторая прилегающая к $\bar{\Gamma}$ область D_n не встречается ни в (1), ни в (2), то, как и выше, включаем ее в последовательность (2). Обозначим $K = \bar{\Gamma} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, где $\{D_n\}$ — последовательность всех прилегающих к $\bar{\Gamma}$ областей. K — компактное множество со связным дополнением. Очевидно, что можно построить жордановы области $\{G_n\}$ со спрямляемыми границами, для которых $K \subset G_{n+1} \subset \bar{G}_{n+1} \subset G_n \subset \bar{G}_n \subset U$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = K$. Обозначим

$$H_n = \bar{U} \setminus G_n, \quad B_n = \left\{ z = x + iy \in H_n; \quad x > 0, \quad 0 < y < \frac{1}{n} \right\}, \quad L_n = H_n \setminus B_n.$$

Ясно, что L_n — компактное множество со связным дополнением, $K \cap L_n = \emptyset$, $K \cup L_n$ — компактное множество со связным дополнением и $K \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \bar{U}$.

Определим в $\bar{U}$ функцию $f(z)$ следующим образом. На $\bar{\Gamma}$ она равна функции, полученной в лемме. Если область D_m входит в (2), то в D_m полагаем $f(z)$ равным радиусу круга D_m , а во всех областях, входящих в (1), возьмем $f(z) = 0$. Таким

образом, $f(z)$ определена на K . Возьмем $f(z) = -1$ на $\bar{U} \setminus K$. Ясно, что $\bar{U}$ – множество особых точек функции $f(z)$. Отметим, что $f(z)$ принимает действительные значения.

Функция $f(z)$ ограничена на K , на $\bar{U}$ принадлежит первому классу Бэра, аналитична на $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, причем в любой области D_n граничные значения $f(z)$ совпадают с ее значениями на ∂D_n почти всюду. По теореме 2 из [5] эти условия являются необходимыми и достаточными для представимости $f(z)$ на K в виде предела сходящейся и равномерно ограниченной на K последовательности полиномов. Следовательно, существует равномерно ограниченная на K последовательность полиномов $\{Q_n(z)\}$, сходящаяся к $f(z)$ всюду на K .

По теореме С. Н. Мергеляна [6] о равномерно полиномиальных приближениях для любого n существует полином $P_n(z)$, для которого выполняется

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{1}{n} \quad \text{на } L_n, \quad |Q_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{n} \quad \text{на } K.$$

Таким образом, $\{P_n(z)\}$ сходится к $f(z)$ всюду в U . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что полученная в доказательстве последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ также равномерно ограничена на $\bar{U}$. В частности, это означает, что сходящаяся в U последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ не имеет иррегулярных точек, лежащих в $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2 (без ссылок на [5]). Пусть $f(x, y) = f(z)$ ($z = x + iy$) – функция, определенная в круге $\bar{U}$ в начале доказательства теоремы, а L_n – определенное там же множество. Согласно лемме $f(x, y)$ – ограниченная функция первого класса Бэра на $\bar{U}$, и поэтому существует равномерно ограниченная на $\bar{U}$ последовательность непрерывных действительных функций $\{f_n(x, y)\}$, сходящаяся к $f(x, y)$ всюду на $\bar{U}$. По теореме Уолша–Лебега (см. [7]) существует гармонический полином $U_n(x, y)$, для которого выполняются неравенства

$$|f(x, y) - U_n(x, y)| < \frac{1}{n} \quad \text{на } \partial L_n, \quad |f_n(x, y) - U_n(x, y)| < \frac{1}{n} \quad \text{на } \bar{U}.$$

Ясно, что $\{U_n(x, y)\}$ сходится к $f(x, y)$ всюду в U , а функции $f_1(x, y) = f(x, y)$ и $f_2(x, y) = 2f(x, y)$ удовлетворяют всем требованиям следствия 2, что завершает доказательство.

Список литературы

1. *Lavrentieff M.* Sur les fonctions d'une variable complexe representables par des series de polynomes // Actual. Sci. et Industr. 1936. V. 441. Fasc. 5. P. 1–62. [Р у с. п е р.: Лаврентьев М. А. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1990. С. 149–185.].
2. *Hartogs F., Rosenthal A.* Über Folgen analytischer Functionen // Math. Ann. 1928. B. 100. S. 212–263.

3. Мергелян С. Н. О некоторых классах множеств и их приложениях // Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука, 1961. С. 133–172.
4. Мергелян С. Н., Даниелян А. А. О последовательностях полиномов, сходящихся на множествах типа F_σ // Докл. АН АрмССР. 1988. Т. 86. №2. С. 54–56.
5. Даниелян А. А. О представлении функций последовательностями равномерно ограниченных полиномов на компактных множествах комплексной плоскости // Изв. АН АрмССР. Математика. 1986. Т. 21. №4. С. 345–357.
6. Мергелян С. Н. Равномерное приближение функций комплексного переменного // УМН. 1952. Т. 7. №2. С. 31–122.
7. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
8. Rubel L. A., Shields A. L. Bounded approximation by polynomials // Acta Math. 1964. V. 112. P. 145–162.
9. Farrel O. J. An approximation by polynomials to a function analytic in a simply connected region // Bull. Amer. Math. Soc. 1935. V. 41. P. 707–711.
10. Hartogs F. Über die Grenzfunktionen beschränkter Folgen von analytischen Functionen // Math. Ann. 1928. B. 98. S. 164–178.
11. Keldysch M. Sur les suites de polynomes bornes dans leur ensemble // Матем. сб. 1935. Т. 42. С. 719–724.
12. Мергелян С. Н., Талалаян А. А. Об одном классе точечно-разрывных функций // ДАН АрмССР. 1961. Т. 32. С. 183–187.
13. Колесников С. В. Об одной теореме М. В. Келдыша, касающейся поточечной сходимости последовательности полиномов // Матем. сб. 1984. Т. 124 (166). С. 568–570.
14. Даниелян А. А. О функциях первого класса Бэра, определенных на компактных множествах // Докл. расш. засед. семинара Инст. прикл. матем. им. И. Н. Векуа. Тбилиси, 1985. Т. 1. С. 64–67.
15. Даниелян А. А. О некоторых задачах, возникающих из проблемы Рубеля об одновременной аппроксимации // Докл. РАН. 1995. Т. 341. С. 10–12.

Московский авиационный институт,
факультет прикладной математики

Поступило в редакцию
2.XII.1996