Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О неотрицательных решениях квазилинейных эллиптических неравенств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 2, 41–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/im235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:49:26

УДК 517.9

А. А. Коньков

О неотрицательных решениях квазилинейных эллиптических неравенств

В работе изучаются решения неравенств вида

$$Lu \geq F(x, u), \quad \mathcal{L}u \geq F(x, u),$$

где

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad \mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

– дифференциальные операторы эллиптического типа, а F – некоторая функция.

Библиография: 27 наименований.

Введение

0.1. Пусть Ω – непустое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $D = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, и пусть L – дифференциальный оператор вида

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

где a_{ij} – измеримые функции такие, что $a_{ij} \equiv a_{ji}$ и для некоторых вещественных чисел $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ при всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$C_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C_2 |\xi|^2. \quad (2)$$

Мы будем также рассматривать оператор

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3)$$

где на симметрическую матрицу $\|a_{ij}(x)\|$ наложено то же условие (2).

Договоримся о следующих обозначениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-15-96177).

Под Q_r^x , S_r^x мы будем подразумевать соответственно открытый шар $Q_r^x = \{y: |y-x| < r\}$ и сферу $S_r^x = \{y: |y-x| = r\}$ радиуса r с центром в точке x . Для всякого множества $\omega \subset \mathbb{R}^n$ его замыкание обозначаем через $\bar{\omega}$, а его границу – через $\partial\omega$. Таким образом, $\overline{Q_r^x}$ – замыкание шара Q_r^x .

Если $x = 0$, то пишем Q_r , $\bar{Q}_r$ вместо Q_r^0 , $\bar{Q}_r^0$. Аналогично, пишем S_r вместо S_r^0 .

Емкостью компакта $K \subset \omega \subset \mathbb{R}^n$ относительно открытого множества ω будем называть величину

$$\text{cap}(K, \omega) = \inf \int_{\omega} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad (4)$$

где $\inf$ в правой части (4) берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ таким, что $\varphi \equiv 1$ в окрестности K . Пусть $s > 0$. Рассмотрим на компакте K всевозможные меры τ – вполне аддитивные неотрицательные функции множества, определенные на некоторой σ -алгебре подмножеств K , содержащей борелевские множества [13]. Мера τ назовем *допустимой*, если

$$\int_K \frac{d\tau(y)}{|x-y|^s} \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Положим

$$C_s(K) = \sup \tau(K),$$

где верхняя грань берется по всем допустимым мерам.

Число $C_s(K)$ назовем *s-емкостью* множества K [3].

Если $s = n - 2$, то емкости $\text{cap}(K, \mathbb{R}^n)$ и $C_s(K)$ совпадают и являются хорошо известной винеровской емкостью $\text{cap}(K)$.

Определенные выше емкости удовлетворяют следующим свойствам [2]–[4].

1) *Монотонность*. Из включений $K_1 \subset K_2$ и $\omega_2 \subset \omega_1$ следуют неравенства

$$\text{cap}(K_1, \omega_1) \leq \text{cap}(K_2, \omega_2), \quad C_s(K_1) \leq C_s(K_2).$$

2) *Полуаддитивность*:

$$\begin{aligned} \text{cap}(K_1 \cup K_2, \omega) &\leq \text{cap}(K_1, \omega) + \text{cap}(K_2, \omega), \\ C_s(K_1 \cup K_2) &\leq C_s(K_1) + C_s(K_2). \end{aligned}$$

3) *Свойство подобия*. Предположим, что множества K' и ω' получаются из множеств K и ω преобразованием подобия с коэффициентом λ , т.е. $K' = \lambda K$, $\omega' = \lambda \omega$; тогда

$$\text{cap}(K', \omega') = \lambda^{n-2} \text{cap}(K, \omega), \quad C_s(K') = \lambda^s C_s(K).$$

Константой эллиптичности ℓ оператора $\mathcal{L}$ вида (3) будем называть величину

$$\ell = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\xi|=1} \frac{\sum_{i=1}^n a_{ii}(x)}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j}.$$

Если

$$\mathcal{L} \frac{1}{|x-y|^s} \geq 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\},$$

то s -емкость всякого множества мы будем называть *верхней* для оператора $\mathcal{L}$. Легко показать [3], что при $s \geq \ell - 2$ s -емкость является верхней для $\mathcal{L}$.

Допустим, что $s > 0$, $\delta > 0$, $\nu > 1$. Для каждой точки $x \in \Omega$ обозначим

$$\mu(x; \delta, \nu) = \sup_{\rho \in (0, \delta|x|)} \rho^{1-n} \text{cap}(D \cap \overline{Q_\rho^x}, Q_{\nu\rho}^x) \quad (5)$$

и

$$\mu_s(x; \delta) = \sup_{\rho \in (0, \delta|x|)} \rho^{-1-s} C_s(D \cap \overline{Q_\rho^x}). \quad (6)$$

0.2. Нами будут изучаться неотрицательные решения эллиптических неравенств

$$Lu \geq F(x, u), \quad (7)$$

относительно правой части которых предполагается следующее:

i) F — локально ограниченная измеримая функция такая, что почти при всех $x \in \Omega$ и при всех $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ из $t_1 \leq t_2$ следует $F(x, t_1) \leq F(x, t_2)$.

Одновременно будут рассматриваться неравенства вида

$$\mathcal{L}u \geq F(x, u), \quad (8)$$

для правой части которых справедливо приведенное ниже свойство:

i') при всех $x \in \Omega$ и при всех $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ из $t_1 \leq t_2$ следует $F(x, t_1) \leq F(x, t_2)$.

Под *решением неравенства (7) в области $\omega \subset \Omega$* мы будем подразумевать функцию $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\omega) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\omega)$, удовлетворяющую для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ интегральному соотношению

$$-\int_{\omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \geq \int_{\omega} F(x, u) \varphi dx$$

(как обычно, через $W_{2,\text{loc}}^1(\omega)$ и $L_{\infty,\text{loc}}(\omega)$ мы обозначаем пространства обобщенных функций $w \in \mathcal{D}'(\omega)$ таких, что $\forall r \in (0, \infty)$ соответственно $w \in W_2^1(\omega \cap Q_r)$ и $w \in L_\infty(\omega \cap Q_r)$).

Решением неравенства (8) в области $\omega \subset \Omega$ называется функция $u \in C^2(\omega)$, удовлетворяющая неравенству (8) в классическом смысле.

Аналогично, под *решением уравнения*

$$Lu = F(x, |u|) \operatorname{sign} u \quad (9)$$

в Ω мы будем подразумевать функцию $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\Omega)$ такую, что $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} F(x, |u|) \operatorname{sign} u \varphi dx.$$

При этом будем говорить, что

$$u|_{\partial\Omega} = \psi, \quad (10)$$

где $\psi \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\Omega)$, если $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(u - \psi)\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Относительно функции F , стоящей в правой части (9), кроме свойства i) предполагается выполненным также свойство:

ii) почти при всех $x \in \Omega$ справедливо условие $F(x, 0) = 0$, а также условие выпуклости F по второму аргументу, т.е. для любых неотрицательных вещественных чисел t_1, t_2, s_1, s_2 таких, что $s_1 + s_2 = 1$,

$$F(x, s_1 t_1 + s_2 t_2) \leq s_1 F(x, t_1) + s_2 F(x, t_2). \quad (11)$$

В случае оператора $\mathcal{L}$ вида (3) *решением уравнения*

$$\mathcal{L}u = F(x, |u|) \operatorname{sign} u \quad (12)$$

в области Ω , удовлетворяющим условию (10), где $\psi \in C(\partial\Omega)$, называется функцией $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой соотношения (12) и (10) имеют место в классическом смысле.

Для правой части (12), кроме свойства i'), предполагается выполненным также свойство:

ii') при всех $x \in \Omega$ справедливо условие $F(x, 0) = 0$, а также условие выпуклости F по второму аргументу (11).

Заметим, что в случае неограниченных областей никаких условий на бесконечности ни на решения уравнений (9), (12), ни на решения неравенств (7), (8) мы накладывать не будем.

0.3. Пусть $0 \leq R_0 < R \leq \infty$, $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$, и пусть $\forall r \in (R_0, R)$ $\Omega \cap S_r \neq \emptyset$; обозначим для каждого $r \in (R_0, R)$

$$M(r; u) = \text{ess sup}_{\Omega \cap S_r} u, \quad (13)$$

где ограничение функции u на $\Omega \cap S_r$ понимается в смысле вложения пространства $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$ в $L_{2,\text{comp}}(\Omega \cap S_r)$ (см. [2, с. 58]), ess sup в правой части (13) берется по $(n-1)$ -мерной мере Лебега на сфере S_r .

В этой статье мы рассматриваем решения неравенств (7) в $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, для которых

$$M(r; u) \leq M(\rho; u) \quad \text{при } R_0 < r < \rho < R \quad (14)$$

и

$$0 < M(R_0 + 0; u). \quad (15)$$

В дополнение к сказанному будем требовать, чтобы

$$u|_{(Q_R \cap \partial\Omega) \setminus \overline{Q}_{R_0}} = 0. \quad (16)$$

При этом соотношение (16) понимается следующим образом: $\forall \varphi \in C_0^\infty(Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$ $\varphi u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$.

Аналогично, пишем

$$u|_{Q_R \cap \partial\Omega} = 0, \quad (17)$$

если $\forall \varphi \in C_0^\infty(Q_R)$ $\varphi u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega \cap Q_R)$. В частности, если $R = \infty$, то (17) превращается в условие

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (18)$$

В случае оператора $\mathcal{L}$ вида (3) под решением неравенства (8) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$ (в области $\Omega \cap Q_R$), удовлетворяющим условию (16) (условию (17)), мы всегда будем понимать функцию $u \in C^2(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}) \cap C(\overline{\Omega} \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$ (функцию $u \in C^2(\Omega \cap Q_R) \cap C(\overline{\Omega} \cap Q_R)$). Очевидно, для таких решений соотношения (8), (13), равно как и соотношение (16) (соотношение (17)), следует понимать в классическом смысле.

Для определенных выше функций $M(\cdot; u)$ справедлив принцип максимума, который мы сформулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 0.3.1. Пусть $0 \leq R_0 < r_0 < r < R \leq \infty$, и пусть u – неотрицательное решение неравенства

$$Lu \geq 0 \quad (19)$$

(неравенства

$$\mathcal{L}u \geq 0) \quad (20)$$

в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющее условию (16). Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} u &= \max\{M(r_0; u), M(r; u)\} \\ &\left(\sup_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} u = \max\{M(r_0; u), M(r; u)\} \right). \end{aligned}$$

Более того, если для некоторого $\rho \in (r_0, r)$

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} u &= M(\rho; u) \\ &\left(\sup_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} u = M(\rho; u) \right), \end{aligned} \tag{21}$$

то u – постоянная функция в области $\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартно (см. [15], [27]).

Нам также потребуется следующее определение.

Решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$m'' = z(r, m, m') \tag{22}$$

на промежутке $[R_0, R)$, удовлетворяющим начальным условиям

$$m(R_0) = m_0, \quad m'(R_0) = m_1, \tag{23}$$

мы будем называть функцию $m: [R_0, R) \rightarrow (-\infty, \infty)$, абсолютно непрерывную вместе со своей первой производной на промежутке $[R_0, R)$ (при этом в точке R_0 имеется в виду односторонняя производная), удовлетворяющую условиям (23) и такую, что почти при всех $r \in (R_0, R)$ имеет место (22).

0.4. Вопросы, рассматриваемые в этой статье, ранее исследовались рядом авторов: Вероном [16]–[18], Келлером [19], Оссерманом [20], Похожаевым [21], Левиным и Пайном [22]. Во всех этих работах существенным является то, что старшая часть уравнения есть оператор Лапласа либо, как это предполагалось в [22], на производные фундаментального решения оператора L накладываются сильные дополнительные ограничения. Эти трудности были преодолены в работе [8], в которой подробно изучен случай, когда функция F , стоящая в правой части уравнения (9), удовлетворяет неравенству $F(x, t) \geq a_0 |t|^\lambda$, $\lambda > 0$, $a_0 > 0$. Результаты [8] были обобщены в [23] на случай, когда правая часть уравнения (9) есть произвольная функция такая, что $F(x, t) \geq f(t)t \geq 0$ при $t > 0$, $x \in \Omega$, где f монотонно не убывает. При этом ни в [8], ни в [23] не учитывалось влияние на поведение решения

зависимости F от x , а также от характера сужения (расширения) на бесконечности области Ω . Исследованию этих вопросов и посвящена предлагаемая вашему вниманию статья.

Известным является то обстоятельство, что в случае дивергентных операторов с произвольными измеримыми коэффициентами не существует сколь-либо удовлетворительной барьерной техники, так как все оценки, которые при этом получаются, зависят в той или иной степени от гладкости коэффициентов оператора L . Более эффективными представляются методы, основанные на результатах работ [5], [6], благодаря которым стало возможно получать оценки в обход барьерной техники.

Несколько слов о структуре этой статьи. Статья состоит из введения и трех параграфов. Параграфы в свою очередь делятся на пункты. Нумерация формул на протяжении всей статьи сплошная. Нумерация теорем, лемм и т.п. своя в каждом пункте параграфа. При этом первая цифра означает номер параграфа, следующая – номер пункта. Если первая цифра – нуль, то это означает, что соответствующий результат следует искать во введении.

§ 1. Оценки для решений эллиптических неравенств

1.1. ТЕОРЕМА 1.1.1. Пусть размерность основного пространства $n \geq 2$, $0 \leq R_0 < R \leq \infty$, $S_{R_0} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$, и пусть $0 < a$, $1 < \sigma$, $1 < \nu$, $0 < \delta < 1$, $1 + \delta < \theta$, $0 < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$ – некоторые вещественные числа, а $\Lambda: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция такая, что $\text{supp } \Lambda \subset [\theta R_0/(1 - \delta), \infty) \cap [R_0/\sigma_4, \infty)$ и

$$\begin{aligned} \Lambda(r) \leq & \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\theta} \setminus Q_{\frac{r}{\theta}}} \mu^2(x; \delta, \nu) \\ & + r^{-n} \text{cap}(D \cap \bar{Q}_{r\sigma_2} \setminus Q_{r\sigma_3}, Q_{r\sigma_1} \setminus \bar{Q}_{r\sigma_4}) \quad \text{при } r > R_0, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\mu(x; \delta, \nu)$ определено с помощью (5). Пусть, далее, для $F: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ справедливо свойство i), и при этом $f: (R_0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция такая, что

$$f(r, t) \leq \text{ess} \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (Q_{\frac{r}{\sigma}} \cup Q_{R_0})} F(x, t) \quad \text{при } R_0 < r, \quad 0 < t, \quad (25)$$

$$f(r, t_1) \leq f(r, t_2) \quad \text{при } R_0 < r, \quad 0 < t_1 \leq t_2, \quad (26)$$

и

$$f(r, t - 0) = f(r, t) \quad \text{при } R_0 < r, \quad 0 < t. \quad (27)$$

Предположим теперь, что u – неотрицательное решение неравенства (7) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \bar{Q}_{R_0}$, удовлетворяющее условиям (14)–(16), где $M(r; u)$ определено с помощью (13).

Тогда найдутся константы $\alpha > 0$, зависящая только от n, a, σ , постоянных C_1, C_2 из неравенства (2), $\beta > 0$, зависящая только от σ , а также $\gamma > 0$, зависящая только от $n, \delta, \nu, \theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, такие, что существует определенное на всем промежутке $[R_0, R)$ решение задачи Коши

$$m'' + \frac{1+a}{r}m' = \alpha f(r, \beta m) + \gamma \Lambda(r)m, \quad (28)$$

$$m(R_0) = M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \quad (29)$$

для которого при всех $r \in (R_0, R)$ будет выполнена оценка

$$M(r; u) \geq m(r). \quad (30)$$

ТЕОРЕМА 1.1.2. Пусть размерность основного пространства $n \geq 2$, $0 \leq R_0 < R \leq \infty$, $S_{R_0} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$, и пусть $0 < a$, $1 < \sigma$, $0 < \delta$, $1 + 2\delta < \theta$, $0 < v < v_* < 1/2$, $0 < s$ – некоторые вещественные числа, а $\Lambda: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция такая, что $\text{supp } \Lambda \subset [\theta R_0, \infty) \cap [R_0/(1-2v_*), \infty)$ и

$$\Lambda(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\theta} \setminus Q_{\frac{r}{\theta}}} \mu_s^2(x; \delta) + r^{-2-s} C_s(D \cap \bar{Q}_{vr}) \quad \text{при } r > R_0, \quad (31)$$

где $\mu_s(x; \delta)$ определено с помощью (6). Пусть, далее, для $F: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ справедливо свойство i'), и при этом $f: (R_0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция такая, что имеют место (26), (27) и

$$f(r, t) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (Q_{\frac{r}{\sigma}} \cup Q_{R_0})} F(x, t) \quad \text{при } R_0 < r, \quad 0 < t. \quad (32)$$

Предположим теперь, что u – неотрицательное решение неравенства (8) в области $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющее условиям (17) и (15), где $M(r; u)$ определено с помощью (13).

Тогда если s -емкость является верхней для оператора $\mathcal{L}$ (т.е. $s \geq \ell - 2$, где ℓ – константа эллиптичности оператора $\mathcal{L}$), то найдутся постоянные $\alpha > 0$, зависящая только от n, a, σ, C_2 , $\beta > 0$, зависящая только от σ , а также $\gamma > 0$, зависящая только от $n, \delta, \theta, v, v_*, s$, такие, что существует определенное на всем промежутке $[R_0, R)$ решение задачи Коши (28), (29), для которого при всех $r \in (R_0, R)$ будет выполнена оценка (30).

Теоремы 1.1.1 и 1.1.2 вытекают из двух приведенных ниже утверждений, которые будут доказаны несколько позже (см. § 3).

ТЕОРЕМА 1.1.1'. Пусть справедливо предположение теоремы 1.1.1. Тогда найдутся константы $\alpha > 0$, зависящая только от $n, a, \sigma, C_1, C_2, \beta > 0$, зависящая только от σ , а также $\gamma > 0$, зависящая только от $n, \delta, \nu, \theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, такие, что при всех $r \in (R_0, R)$

$$\begin{aligned} M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \\ \geq \frac{1}{a} \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) (\alpha f(\xi, \beta M(\xi; u)) + \gamma \Lambda(\xi) M(\xi; u)) d\xi, \end{aligned} \quad (33)$$

где $M(r; u)$ определено с помощью (13).

ТЕОРЕМА 1.1.2'. Пусть справедливо предположение теоремы 1.1.2. Тогда если s -емкость является верхней для оператора $\mathcal{L}$, то найдутся постоянные $\alpha > 0$, зависящая только от $n, a, \sigma, C_2, \beta > 0$, зависящая только от σ , а также $\gamma > 0$, зависящая только от $n, \delta, \theta, \nu, \nu_*, s$, такие, что для функции $M(r; u)$, определенной равенством (13), при всех $r \in (R_0, R)$ имеет место (33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.1.1 и теоремы 1.1.2. Предположим, что теоремы 1.1.1' и 1.1.2' уже доказаны. Покажем, что из неравенства (33), справедливого при всех $r \in (R_0, R)$, следует существование на промежутке $[R_0, R)$ решения задачи Коши (28), (29), для которого выполнена оценка (30).

Заметим сперва, что из (27) вытекает, что для любой измеримой функции $\varphi: (R_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ функция $f(\cdot, \varphi(\cdot))$ также будет измеримой. В самом деле, для натуральных чисел k и N обозначим $\omega_{N,k} = ((k-1)/N, k/N]$. Тогда найдется вещественное число $\xi_{N,k} \in \omega_{N,k}$ такое, что функция $f(\cdot, \xi_{N,k})$ измерима. Положим

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x, \xi_{N,k}) \chi_{\omega_{N,k+1}}(\varphi(x)),$$

где χ_{ω} — характеристическая функция множества ω . Тогда f_N — измеримая функция, и в то же время $\forall x \in (R_0, \infty) \quad f_N(x) \rightarrow f(x, \varphi(x))$ при $N \rightarrow \infty$.

Построим теперь последовательность функций $m_i: [R_0, R) \rightarrow (0, \infty)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, полагая $m_0(r) \equiv M(R_0 + 0; u)$,

$$\begin{aligned} m_{i+1}(r) = M(R_0 + 0; u) \\ + \frac{1}{a} \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) (\alpha f(\xi, \beta m_i(\xi)) + \gamma \Lambda(\xi) m_i(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассуждая по индукции, несложно убедиться в том, что при всех $r \in (R_0, R)$ справедливы неравенства $M(r; u) \geq m_i(r)$ и $m_{i+1}(r) \geq m_i(r)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно также, что $m_i(R_0) = M(R_0 + 0; u)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, существует функция $m: [R_0, R) \rightarrow (0, \infty)$ такая, что $\forall r \in [R_0, R) \quad m_i(r) \rightarrow m(r)$ при $i \rightarrow \infty$. При этом для всякого $r \in (R_0, R)$ будем иметь $M(r; u) \geq m(r)$.

Переходя в (34) к пределу при $i \rightarrow \infty$, согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости получим

$$m(r) = M(R_0 + 0; u) + \frac{1}{a} \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) (\alpha f(\xi, \beta m(\xi)) + \gamma \Lambda(\xi) m(\xi)) d\xi.$$

Осталось только непосредственным дифференцированием проверить, что m является решением задачи Коши (28), (29).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.1. Если в теоремах 1.1.1, 1.1.1' потребовать, чтобы u являлось неотрицательным решением (7) во всей области $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющим условиям (17) и (15) (условие (14) будет выполнено автоматически ввиду принципа максимума), то ограничение на вещественное число δ вида $\delta < 1$ можно снять. При этом вместо включения $\text{supp } \Lambda \subset [\theta R_0/(1 - \delta), \infty) \cap [R_0/\sigma_4, \infty)$ теперь необходимо, чтобы было справедливо включение $\text{supp } \Lambda \subset [\theta R_0, \infty)$.

Точно так же, если в теоремах 1.1.2, 1.1.2' потребовать, чтобы вместо соотношения (31) было выполнено соотношение

$$\Lambda(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\theta} \setminus Q_{\frac{r}{\theta}}} \mu_s^2(x; \delta) \quad \text{при } r > R_0 \quad (35)$$

и соответственно вместо включения $\text{supp } \Lambda \subset [\theta R_0, \infty) \cap [R_0/(1 - 2v_*), \infty)$ – включение $\text{supp } \Lambda \subset [\theta R_0/(1 - 2\delta), \infty)$, где на этот раз $0 < \delta < 1/2$, $1 + 2\delta < \theta$, то обе эти теоремы остаются в силе и в случае, когда функция u является неотрицательным решением неравенства (8) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16). При этом $\gamma > 0$ будет теперь зависеть лишь от n, δ, θ, s (см. § 3).

1.2. Теоремы 1.1.1 и 1.1.2, приведенные в предыдущем пункте, позволяют получать оценки максимума модуля решений эллиптических неравенств из оценок для решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, не существует нетривиальных неотрицательных решений неравенства (7) (неравенства (8)) в области Ω , удовлетворяющих условиям (18), если всякое решение задачи Коши (28), (29) стремится к бесконечности на некотором конечном интервале $[R_0, R)$. В этом случае также имеет место единственность решения задачи Дирихле (9), (10) (задачи Дирихле (12), (10)).

Нам потребуются несколько известных утверждений из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые являются частным случаем результатов работы [24].

Мы будем рассматривать уравнения вида

$$w'' = z(r, w), \quad (36)$$

где z удовлетворяет следующему условию.

Существуют $r_*, t_* \in (0, \infty)$ такие, что на множестве $\{(r, t): r_* \leq r, t_* r \leq t\}$ выполнено неравенство

$$z(r, t) \geq rp(r) g\left(\frac{t}{r}\right),$$

где $p: [r_*, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – локально ограниченные измеримые функции, причем

$$g(t_1) \geq g(t_2) \quad \text{при} \quad t_1 \geq t_2 > 0. \quad (37)$$

Пусть

$$\int_1^\infty (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt < \infty; \quad (38)$$

определим функцию G_∞ равенством

$$G_\infty(s) = \int_s^\infty (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (39)$$

Аналогично, если

$$\int_1^\infty (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt = \infty, \quad (40)$$

положим

$$H_\infty(s) = \int_1^s (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (41)$$

Обозначим также

$$p_\sigma(r) = \operatorname{ess} \inf_{r/\sigma \leq \xi \leq r\sigma} p(\xi),$$

где $\sigma > 1$ – некоторое фиксированное вещественное число.

Наконец, введем функцию h_∞ , полагая

$$h_\infty(s) = \int_1^s \frac{dt}{g(t)}. \quad (42)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1 (см. [1]). Решение w уравнения (36), заданное на конечном промежутке $[r_*, r^*)$, называется *сингулярным решением второго рода*, если

$$\lim_{r \rightarrow r^* - 0} \sup |w'(r)| = \infty, \quad (43)$$

и называется *колеблющимся* (*неколеблющимся*), если оно имеет (не имеет) последовательность нулей, сходящуюся к r^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.2 (см. [1]). Решение уравнения (36), заданное на всем промежутке $[r_*, \infty)$, называется *правильным*, если при любом $r \in [r_*, \infty)$

$$\sup\{|w(\xi)|: \xi \geq r\} > 0.$$

Правильное решение уравнения (36) называется *колеблющимся* (*неколеблющимся*), если оно имеет (не имеет) последовательность нулей, сходящуюся к ∞ .

Нам потребуются лишь те решения уравнения (36), для которых

$$w(r_*) > t_* r_*, \quad w'(r_*) > t_*. \quad (44)$$

Ниже всегда будет предполагаться, что правая часть (36) есть неотрицательная локально ограниченная функция. В этом случае, как легко видеть, всякое решение уравнения (36), удовлетворяющее условию (44), монотонно не убывает и поэтому является неколеблющимся. Более того, (43) становится эквивалентным соотношению

$$\lim_{r \rightarrow r_* - 0} w(r) = \infty. \quad (45)$$

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть справедливо (38) и

$$\int_{r_*}^{\infty} r p_{\sigma}(r) dr = \infty. \quad (46)$$

Тогда всякое непродолжаемое решение уравнения (36), удовлетворяющее условию (44), является неколеблющимся сингулярным решением второго рода.

ТЕОРЕМА 1.2.2. Пусть имеет место (38) и

$$\int_{r_*}^{\infty} r p_{\sigma}(r) dr < \infty. \quad (47)$$

Тогда для всякого правильного решения уравнения (36), удовлетворяющего условию (44), при всех $r \geq r_*$ справедлива оценка

$$w'(r) \leq A G_{\infty}^{-1} \left(B \left(\int_r^{\infty} \xi p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (48)$$

где G_{∞}^{-1} – функция, обратная к G_{∞} , постоянные $A > 0$, $B > 0$ зависят только от σ .

ТЕОРЕМА 1.2.3. Пусть справедливы соотношения (40) и (46). Тогда для всякого правильного решения уравнения (36), удовлетворяющего условию (44), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$w(r) \geq ArH_{\infty}^{-1} \left(B \left(\int_{r_*}^r \xi p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (49)$$

где H_{∞}^{-1} – функция, обратная к H_{∞} , постоянные $A > 0$, $B > 0$ зависят только от σ .

ТЕОРЕМА 1.2.4. Пусть выполнено (40) и

$$\int_{r_*}^{\infty} \min \left\{ rp_{\sigma}(r), p_{\sigma}^{\frac{1}{2}}(r) \right\} dr = \infty.$$

Тогда для всякого правильного решения уравнения (36), удовлетворяющего условию (44), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$H_{\infty} \left(A_1 \frac{w(r)}{r} \right) + h_{\infty} \left(A_1 \frac{w(r)}{r} \right) \geq A_2 \int_{r_*}^r \min \left\{ \xi p_{\sigma}(\xi), p_{\sigma}^{\frac{1}{2}}(\xi) \right\} d\xi,$$

где постоянные $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ зависят только от σ .

1.3. В этом пункте всюду предполагается, что $R_0 > 0$ – некоторое вещественное число такое, что $S_{R_0} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$, и для правых частей соотношений (7) и (9) (соотношений (8) и (12)) справедлива оценка

$$q(r)g(t) \leq \operatorname{ess} \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\tau} \setminus (Q_{\frac{r}{\tau}} \cup Q_{R_0})} F(x, t), \quad r \in (R_0, \infty), \quad t \in (0, \infty) \quad (50)$$

(оценка

$$q(r)g(t) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\tau} \setminus (Q_{\frac{r}{\tau}} \cup Q_{R_0})} F(x, t), \quad r \in (R_0, \infty), \quad t \in (0, \infty), \quad (51)$$

где $\tau > 1$, $q: (R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – локально ограниченные измеримые функции, причем для g имеет место (37).

Кроме этого будем считать, что для F справедливо свойство i), когда речь будет идти об операторе L вида (1), либо свойство i'), когда речь будет идти об операторе $\mathcal{L}$ вида (3).

ТЕОРЕМА 1.3.1. Пусть выполнено (40) и

$$\int_{R_0}^{\infty} r q(r) dr = \infty. \quad (52)$$

Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (7) (неравенства (8)) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), найдутся константы $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от n , C_1 , C_2 , τ , такие, что для всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geqslant A H_{\infty}^{-1} \left(B \left(\int_{R_0}^r \xi q(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (53)$$

где $M(r; u)$ определено с помощью (13), H_{∞} – с помощью (41), H_{∞}^{-1} – функция, обратная к H_{∞} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того, что $u \not\equiv 0$ в Ω , по принципу максимума найдется вещественное число $R_* \geqslant R_0$ такое, что для всех $r_1 \geqslant r_2 \geqslant R_*$ $M(r_1; u) \geqslant M(r_2; u) > 0$. Без ограничения общности будем считать, что $R_* = R_0$.

Возьмем $\sigma = \tau^{\frac{1}{2}}$, и пусть

$$f(r, t) = p(r)g(t - 0), \quad r \in (R_0, \infty), \quad t \in (0, \infty), \quad (54)$$

где

$$p(r) = \sup_{\xi \in (r/\sigma, \sigma r) \cap (R_0, \infty)} q(\xi), \quad r \in (R_0, \infty).$$

Тогда для f справедливы соотношения (26), (27) и одновременно в силу (50) (в силу (51)) – неравенство (25) (неравенство (32)).

С другой стороны, $\forall r \in (R_0, \infty)$

$$p_{\sigma}(r) \geqslant \inf_{\xi \in (r/\sigma, \sigma r) \cap (R_0, \infty)} p(\xi) \geqslant q(r). \quad (55)$$

Полагая $a = 1$, $\Lambda \equiv 0$ и применяя теорему 1.1.1, когда речь идет о (7), либо теорему 1.1.2, когда речь идет о (8), имеем тем самым, что для $M(r; u)$ при всех $r \in (R_0, \infty)$ выполнено (30), где m – некоторое решение уравнения

$$m'' + \frac{2}{r} m' = \alpha f(r, \beta m), \quad (56)$$

удовлетворяющее начальным условиям (29).

С помощью замены

$$w = r m \quad (57)$$

уравнение (56) приводим к виду (36), где

$$z(r, t) = \alpha r f(r, \beta t/r). \quad (58)$$

При этом

$$w(R_0) = R_0 m(R_0), \quad w'(R_0) = m(R_0). \quad (59)$$

Далее из (54) и (58) мы видим, что при всех $r \geq R_0$, $t > 0$ справедливо неравенство

$$z(r, t) \geq \alpha r p(r) g\left(\frac{\beta t}{2r}\right).$$

Наконец, осталось заметить, что соотношения (52) и (55) влекут за собой (46), где $r_* = R_0$, и мы можем воспользоваться теоремой 1.2.3.

Из неравенства (49), учитывая (57), имеем при всех r из некоторой окрестности ∞

$$m(r) \geq A H_\infty^{-1} \left(B \left(\int_{R_0}^r \xi p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (60)$$

где постоянные $A > 0$, $B > 0$ зависят только от n , σ . В силу (55), а также того обстоятельства, что H_∞^{-1} – монотонно не убывающая функция, из (60) получаем, что при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$m(r) \geq A H_\infty^{-1} \left(B \left(\int_{R_0}^r \xi q(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Отсюда и из (30) и следует неравенство (53).

ТЕОРЕМА 1.3.2. Пусть выполнены (38) и (52). Тогда в области Ω не существует отличного от нулевого неотрицательного решения неравенства (7) (неравенства (8)), удовлетворяющего условию (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим от противного, что в Ω существует нетривиальное неотрицательное решение неравенства (7) (неравенства (8)), удовлетворяющее условию (18), и пусть σ , p и f такие же, как в доказательстве теоремы 1.3.1. Применяя теорему 1.1.1 (теорему 1.1.2), таким образом, имеем, что на всем промежутке $[R_0, \infty)$ существует решение уравнения (56), удовлетворяющее начальным условиям (29), которое с помощью замены (57) сводится к определенному на всем промежутке $[R_0, \infty)$ решению w задачи Коши (36), (59).

Но из теоремы 1.2.1 следует, что w должно быть сингулярным решением второго рода, т.е. для некоторого $r_* \in (R_0, \infty)$ должно быть выполнено соотношение (45).

Полученное противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 1.3.3. Допустим, что кроме свойства i) (свойства i')) для функции F справедливо также и свойство ii) (свойство ii')). Тогда если имеют место (38) и (52), то решение задачи Дирихле (9), (10) (задачи Дирихле (12), (10)) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим от противного, что существуют два различных решения u_1 и u_2 задачи Дирихле (9), (10) (задачи Дирихле (12), (10)). Обозначим $u = u_1 - u_2$. Без ограничения общности можно считать, что $\omega = \{x \in \Omega: u(x) > 0\} \neq \emptyset$. Функции u_1 и u_2 непрерывны в области Ω (см. [4, с. 387, теорема 4.1]). Тогда множество ω является открытым.

Очевидно, будем иметь

$$u|_{\partial\omega} = 0, \quad (61)$$

а также

$$\begin{aligned} Lu &= F(x, |u_1|) \operatorname{sign} u_1 - F(x, |u_2|) \operatorname{sign} u_2 \\ (\mathcal{L}u &= F(x, |u_1|) \operatorname{sign} u_1 - F(x, |u_2|) \operatorname{sign} u_2). \end{aligned}$$

Пусть $T_1 > T_2 > 0$ – некоторые вещественные числа. Полагая в (11) $s_1 = T_2/T_1$, $s_2 = (T_1 - T_2)/T_1$, $t_1 = T_1$, $t_2 = 0$, получим

$$F(x, T_2) \leq \frac{T_2}{T_1} F(x, T_1). \quad (62)$$

Таким образом,

$$F(x, T_1) - F(x, T_2) \geq F(x, T_1) - \frac{T_2}{T_1} F(x, T_1) = \frac{T_1 - T_2}{T_1} F(x, T_1).$$

Или, другими словами,

$$\frac{F(x, T_1) - F(x, T_2)}{T_1 - T_2} \geq \frac{1}{T_1} F(x, T_1). \quad (63)$$

Покажем, что почти при всех $x \in \Omega$ в случае, когда речь идет об уравнении (9) (при всех $x \in \Omega$ в случае, когда речь идет об уравнении (12)), и при всех $\tau_1, \tau_2 \in (-\infty, \infty)$ из $\tau_1 \geq \tau_2$ следует

$$F(x, |\tau_1|) \operatorname{sign} \tau_1 - F(x, |\tau_2|) \operatorname{sign} \tau_2 \geq 2F\left(x, \frac{1}{2}|\tau_1 - \tau_2|\right). \quad (64)$$

В самом деле, предположим сперва, что $\tau_1 > \tau_2 > 0$. Полагая в (11) $t_1 = 0$, $t_2 = \tau_1 - \tau_2$, $s_1 = s_2 = 1/2$, получим

$$F(x, \tau_1 - \tau_2) \geq 2F\left(x, \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2)\right). \quad (65)$$

В то же время если $T_1 = \tau_1$, $T_2 = \tau_1 - \tau_2$, то из (62) будем иметь

$$\frac{F(x, \tau_1 - \tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} \leq \frac{F(x, \tau_1)}{\tau_1}.$$

Из последнего неравенства, а также из неравенства (63), в котором надо взять $T_1 = \tau_1$, $T_2 = \tau_2$, следует, что

$$F(x, \tau_1) - F(x, \tau_2) \geq F(x, \tau_1 - \tau_2),$$

откуда с учетом (65) и получаем (64).

Пусть теперь $\tau_1 > 0$, $\tau_2 < 0$; тогда (64) получается непосредственно из (11), если взять $s_1 = s_2 = 1/2$, $t_1 = \tau_1$, $t_2 = |\tau_2|$.

Предположим теперь, что $\tau_2 < \tau_1 < 0$. Легко видеть, что этот случай сводится к случаю $\tau'_1 > \tau'_2 > 0$ заменой $\tau'_1 = -\tau_2$, $\tau'_2 = -\tau_1$.

В заключение остается заметить, что (64) становится очевидным, если $\tau_1 = \tau_2$, либо одно из чисел τ_1, τ_2 равно нулю.

Следовательно, $u = u_1 - u_2$ в области ω является решением неравенства

$$Lu \geq 2F\left(x, \frac{1}{2}u\right) \quad (66)$$

или неравенства

$$\mathcal{L}u \geq 2F\left(x, \frac{1}{2}u\right). \quad (67)$$

При этом измеримость правой части (66) будет иметь место в силу непрерывности по $t \in [0, \infty)$ функции $F(x, t)$ почти при всех $x \in \omega$ (см. i), ii)).

Однако согласно теореме 1.3.2 в области ω не может существовать положительное решение неравенства (66) (неравенства (67)), удовлетворяющее условию (61).

Полученное противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 1.3.4. Пусть справедливо (38) и

$$\int_{R_0}^{\infty} r q(r) dr < \infty. \quad (68)$$

Тогда для всякого неотрицательного решения неравенства (7) (неравенства (8)) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), найдутся константы $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от n, τ, C_1, C_2 , такие, что при почти всех $x \in \Omega \setminus Q_{R_0}$ (при всех $x \in \Omega \setminus Q_{R_0}$)

$$u(x) \leq AG_{\infty}^{-1} \left(B \left(\int_{|x|}^{\infty} \xi q(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (69)$$

где G_{∞} определено соотношением (39), G_{∞}^{-1} — функция, обратная к G_{∞} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем σ , p и f такими же, как и в доказательстве теоремы 1.3.1. Если $u(x) = 0$, то (69) очевидно. Имеет смысл доказывать теорему в предположении, что $u \not\equiv 0$. Согласно принципу максимума справедливо (14). Пусть для некоторого $r_* \geq R_0$ $M(r_*; u) > 0$. При этом, разумеется, должно быть выполнено (47), ибо в противном случае (см. доказательство теоремы 1.3.2) в области Ω не могло бы существовать нетривиального неотрицательного решения неравенства (7) (неравенства (8)), удовлетворяющего условию (18).

Применяя теорему 1.1.1 (теорему 1.1.2), получим, что на всем промежутке $[r_*, \infty)$ существует решение m уравнения (56), удовлетворяющее начальным условиям

$$m(r_*) = M(r_*; u), \quad m'(r_*) = 0. \quad (70)$$

С помощью замены (57) уравнение (56) сводится к уравнению (36) с правой частью, определяемой равенством (58), при этом (70) преобразуются к виду

$$w(r_*) = r_* M(r_* + 0; u), \quad w'(r_*) = M(r_* + 0; u). \quad (71)$$

Используя теорему 1.2.2, из (48), где $r = r_*$, с учетом (71) имеем

$$M(r_* + 0; u) \leq AG_{\infty}^{-1} \left(B \left(\int_{r_*}^{\infty} \xi p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Из последней оценки и из (55) ввиду того, что G_{∞}^{-1} – монотонно не убывающая функция, получим

$$M(r_* + 0; u) \leq AG_{\infty}^{-1} \left(B \left(\int_{r_*}^{\infty} \xi q(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

По принципу максимума $M(r_*; u) \leq M(r_* + 0; u)$, и теорема 1.3.4 в случае неравенства (8) полностью доказана. В случае же, когда речь идет о неравенстве (7), нами установлено, что для всякого вещественного $r_* > 0$ почти при всех $x \in \Omega \cap S_{r_*}$ (по $(n-1)$ -мерной мере Лебега на S_{r_*}) имеет место оценка (69). Покажем, что (69) также имеет место почти при всех $x \in \Omega$ по n -мерной мере Лебега. Действительно, пусть ω состоит из тех точек $x \in \Omega$, для которых не справедливо (69). В силу того, что правая часть (69) измерима, ω – измеримое по Лебегу множество. С другой стороны, как было сказано выше, $\text{mes}_{n-1}(\omega \cap S_{r_*}) = 0$ для всякого $r_* > 0$, а значит, и $\text{mes}_n(\omega) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.1. Предположим, что соотношение (50) (соотношение (51)) выполнено при всех $r, t \in (0, \infty)$. Тогда, так как постоянные $A > 0$, $B > 0$ в (69) не зависят от R_0 , ввиду произвольности выбора $R_0 > 0$ оценка (69) теоремы 1.3.4 верна почти при всех (верна при всех) $x \in \Omega$.

ТЕОРЕМА 1.3.5. Пусть $\Lambda: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция такая, что для некоторых вещественных чисел $1 < \nu$, $0 < \delta$, $1 + \delta < \theta$, $0 < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$ ($0 < \delta$, $1 + 2\delta < \theta$, $0 < v < 1/2$, $\ell - 2 \leq s$, где ℓ – постоянная эллиптичности оператора $\mathcal{L}$) имеет место (24) (имеет место (31)). Тогда если

$$\int_{R_0}^{\infty} \xi \Lambda(\xi) d\xi = \infty, \quad (72)$$

то найдется постоянная $C > 0$, зависящая только от n , δ , ν , θ , σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_4 , C_1 , C_2 (только от n , δ , θ , ν , s), такая, что для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) (неравенства (20)) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq \exp \left(C \left(\int_{R_0}^r \xi \Lambda(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (73)$$

где $M(r; u)$ определено с помощью (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\sigma = \left(\min \left\{ \frac{\theta}{1 + \delta}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right\} \right)^{\frac{1}{3}},$$

а также

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta}{\sigma}, \quad \tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma}, \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma \sigma_2, \quad \tilde{\sigma}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma}, \quad \tilde{\sigma}_4 = \sigma \sigma_4$$

в случае, когда речь идет о (19), или же

$$\sigma = \left(\min \left\{ \frac{\theta}{1 + 2\delta}, \frac{1}{2\nu} \right\} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta}{\sigma}, \quad \tilde{\nu} = \sigma \nu, \quad \tilde{\nu}_* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \tilde{\nu} \right),$$

если речь идет о (20), и определим измеримую функцию $\tilde{\Lambda}: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ равенством

$$\tilde{\Lambda}(r) = \chi_{[b, \infty)}(r) \sup_{\xi \in (r/\sigma, r\sigma) \cap [R_0, \infty)} \Lambda(\xi),$$

где $b = \tilde{\theta} R_0$ в случае неравенства (19) и $b = \max\{\tilde{\theta} R_0, R_0/(1 - 2\tilde{\nu}_*)\}$ в случае (20), $\chi_{[b, \infty)}$ – характеристическая функция множества $[b, \infty)$. Тогда по свойству монотонности емкости для всех $r \in (R_0, \infty)$ имеем в случае (19)

$$\sigma^{-n} \tilde{\Lambda}(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\tilde{\theta}} \setminus Q_{\frac{r}{\tilde{\theta}}}} \mu^2(x; \delta, \nu) + r^{-n} \text{cap}(D \cap \overline{Q}_{r\tilde{\sigma}_2} \setminus Q_{r\tilde{\sigma}_3}, Q_{r\tilde{\sigma}_1} \setminus \overline{Q}_{r\tilde{\sigma}_4}),$$

где $\mu(x; \delta, \nu)$ определено с помощью (5), или же в случае (20)

$$\sigma^{-2-s} \tilde{\Lambda}(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\theta} \setminus Q_{\frac{r}{\theta}}} \mu_s^2(x; \delta) + r^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{\tilde{\nu}r}),$$

где $\mu_s(x; \delta)$ определено с помощью (6).

В то же время для всех $r \in [\sigma b, \infty)$

$$\tilde{\Lambda}_\sigma(r) \geq \inf_{\xi \in (r/\sigma, r\sigma) \cap [R_0, \infty)} \tilde{\Lambda}(\xi) \geq \Lambda(r). \quad (74)$$

Взяв в теореме 1.1.1 (в теореме 1.1.2) $a = 1$, $f \equiv 0$, с учетом замечания 1.1.1 будем иметь, что на всем промежутке $[R_0, \infty)$ существует решение уравнения

$$m'' + \frac{2}{r}m' = \gamma \tilde{\Lambda}(r)m, \quad (75)$$

удовлетворяющее условиям (29), для которого будет выполнена оценка (30).

Заменой (57) уравнение (75) преобразуется к виду

$$w'' = \gamma \tilde{\Lambda}(r)w, \quad (76)$$

при этом начальные условия (29) превращаются в (59).

В силу (72) и (74) при всех r из некоторой окрестности ∞

$$\int_{R_0}^r \xi \tilde{\Lambda}_\sigma(\xi) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^r \xi \Lambda(\xi) d\xi. \quad (77)$$

Далее, согласно теореме 1.2.3 решение задачи Коши (76), (59) при всех r из некоторой окрестности ∞ удовлетворяет оценке

$$w(r) \geq Ar \exp \left(B \left(\int_{R_0}^r \xi \tilde{\Lambda}_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

из которой, учитывая (57), имеем

$$m(r) \geq A \exp \left(B \left(\int_{R_0}^r \xi \tilde{\Lambda}_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

откуда, в свою очередь, ввиду (30) и (77) следует (73).

ТЕОРЕМА 1.3.6. Пусть в предположении теоремы 1.3.5 вместо (72) выполнено соотношение

$$\int_{R_0}^{\infty} \min \left\{ \xi \Lambda(\xi), \Lambda^{\frac{1}{2}}(\xi) \right\} d\xi = \infty. \quad (78)$$

Тогда найдется постоянная $C > 0$, зависящая только от $n, \delta, \nu, \theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$ (только от $n, \delta, \theta, \nu, s$), такая, что для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) (неравенства (20)) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq \exp \left(C \int_{R_0}^{\infty} \min \left\{ \xi \Lambda(\xi), \Lambda^{\frac{1}{2}}(\xi) \right\} d\xi \right), \quad (79)$$

где $M(r; u)$ определено соотношением (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предыдущей теоремы с той лишь разницей, что теперь вместо теоремы 1.2.3 надлежит воспользоваться теоремой 1.2.4.

ТЕОРЕМА 1.3.7. Пусть $\Lambda: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — измеримая функция такая, что имеет место (72), и для некоторых вещественных чисел $0 < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$ ($0 < \nu < 1/2$, $\ell - 2 \leq s$, где ℓ — константа эллиптичности оператора $\mathcal{L}$) при всех $r \in (R_0, \infty)$ справедливо соотношение

$$\Lambda(r) \leq r^{-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_{r\sigma_2} \setminus Q_{r\sigma_3}, Q_{r\sigma_1} \setminus \overline{Q}_{r\sigma_4}) \quad (80)$$

(соотношение

$$\Lambda(r) \leq r^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{\nu r}). \quad (81)$$

Тогда найдется постоянная $C > 0$, зависящая только от $n, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$ (только от n, ν, s), такая, что для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) (неравенства (20)) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq \exp \left(C \int_{R_0}^r \xi \Lambda(\xi) d\xi \right), \quad (82)$$

где $M(r; u)$ определено соотношением (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу монотонности емкости $\forall r \in (R_0, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{cap}(D \cap \overline{Q}_{r\sigma_2} \setminus Q_{r\sigma_3}, Q_{r\sigma_1} \setminus \overline{Q}_{r\sigma_4}) &\leq \text{cap}(\overline{Q}_{r\sigma_2} \setminus Q_{r\sigma_3}, Q_{r\sigma_1} \setminus \overline{Q}_{r\sigma_4}) = Ar^{n-2} \\ (C_s(D \cap \overline{Q}_{vr}) &\leq C_s(\overline{Q}_{vr}) = Ar^s), \end{aligned}$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от $n, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ (только от n, s, v). Таким образом, из (80) (из (81)) следует, что для $\Lambda(r)$ при всех $r \in (R_0, \infty)$ справедлива оценка

$$r^2 \Lambda(r) \leq A.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень и домножая на $\Lambda^{\frac{1}{2}}(r)$, будем, очевидно, иметь

$$r \Lambda(r) \leq A^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}}(r).$$

Поэтому $\forall r \in (R_0, \infty)$

$$\min \left\{ r \Lambda(r), \Lambda^{\frac{1}{2}}(r) \right\} \geq Br \Lambda(r), \quad (83)$$

где $B = \min \{1, A^{-\frac{1}{2}}\}$.

Из (72) и (83) следует (78). Применяя теорему 1.3.6, получим, что для всех r из некоторой окрестности ∞ справедливо (79). Снова воспользовавшись (83), получаем (82).

ТЕОРЕМА 1.3.8. Пусть

$$\int_{R_0}^{\infty} \min \{ \xi q(\xi), q^{\frac{1}{2}}(\xi) \} d\xi = \infty. \quad (84)$$

Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (7) (неравенства (8)) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), найдутся константы $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, зависящие только от n, τ, C_1, C_2 , такие, что при всех r из некоторой окрестности ∞

$$H_{\infty}(A_1 M(r; u)) + h_{\infty}(A_1 M(r; u)) \geq A_2 \int_{R_0}^r \min \{ \xi q(\xi), q^{\frac{1}{2}}(\xi) \} d\xi, \quad (85)$$

где $M(r; u)$, H_{∞} и h_{∞} определены соответственно с помощью (13), (41) и (42).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на теорему 1.2.4 и в остальном ничем не отличается от доказательства теоремы 1.3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.2. Теоремы 1.3.1, 1.3.2, 1.3.8, 1.3.4–1.3.6, а также теорема 1.3.7 в случае оператора L в дивергентной форме остаются, разумеется, в силе, если в их формулировках вместо решений соответствующих эллиптических неравенств в области Ω , удовлетворяющих условию (18), рассматривать решения этих же неравенств в области $\Omega \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющие условиям (14) и (16), где $R = \infty$. При этом в теоремах 1.3.5 и 1.3.6 следует наложить на δ дополнительное ограничение $\delta < 1$ в случае оператора L вида (1) или же $\delta < 1/2$ в случае оператора $\mathcal{L}$ вида (3) и кроме этого соотношение (31) заменить на (35) (см. замечание 1.1.1).

ПРИМЕРЫ 1.3.1. Для краткости мы будем рассматривать лишь оператор L в дивергентной форме.

1) Пусть $n = 2$, и пусть найдется $R > 0$ такое, что $D \cap S_r \neq \emptyset \quad \forall r \geq R$. Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$M(r; u) \geq r^C, \quad (86)$$

где $M(r; u)$ определено соотношением (13), постоянная $C > 0$ зависит только от C_1, C_2 .

В самом деле, возьмем в теореме 1.3.7 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1/2, \sigma_3 = 1/4, \sigma_4 = 1/8$. В силу монотонности емкости

$$\text{cap} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq \text{cap} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \right).$$

Согласно [2, с. 328, п. 9.1.2, предложение 2] правая часть последнего неравенства при всех $r \geq 4R$ не меньше некоторой константы $A > 0$. Тогда $\forall r > 4R$

$$r^{-2} \text{cap} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq \frac{A}{r^2},$$

и мы можем в (80) положить

$$\Lambda(r) = \chi_{[4R, \infty)}(r) \frac{A}{r^2},$$

где $\chi_{[4R, \infty)}$ – характеристическая функция промежутка $[4R, \infty)$. При этом (86) непосредственно получается из (82).

2) Пусть $n \geq 3, h \geq 1$. Обозначим через K_h^+ конус $\{(x', x_n) : |x'| \leq hx_n\}$, и пусть найдется $R > 0$ такое, что $\Omega \setminus Q_R$ принадлежит дополнению K_h^+ . Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка (86), где постоянная $C > 0$ зависит только от n, C_1, C_2 .

Для доказательства снова воспользуемся теоремой 1.3.7. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ такие же, как и в предыдущем пункте. При всех $r > 0$

$$\text{cap} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq Ar^{-2} \text{mes} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \right), \quad (87)$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от n .

Действительно, если K – компакт, принадлежащий ограниченному открытому множеству ω , то, как несложно показать из определения емкости и неравенства Пуанкаре,

$$\text{cap}(K, \omega) \geq A(\text{diam } \omega)^{-2} \text{mes } \omega, \quad (88)$$

где $A > 0$ – константа в неравенстве Пуанкаре для единичного шара.

При всех $r \geq 4R$ имеем, очевидно, $D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \supset K_h^+ \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}$. Поэтому из (87) получим $\forall r \geq 4R$

$$\text{cap} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq Ar^{-2} \text{mes} \left(K_h^+ \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \right) \geq Br^{n-2},$$

где $B > 0$ зависит только от n (напоминаем, что у нас $h \geq 1$).

Таким образом, в (80) можно положить

$$\Lambda(r) = \chi_{[4R, \infty)} \frac{B}{r^2}.$$

Остается применить (82), и соотношение (86) доказано.

3) Пусть $n = 3$, $0 < h < 1$, и пусть найдется $R > 0$ такое, что $\Omega \setminus Q_R$ принадлежит дополнению K_h^+ . Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq r^{C(\ln \frac{2}{h})^{-1}}, \quad (89)$$

где $M(r; u)$ определено соотношением (13), постоянная $C > 0$ зависит только от C_1, C_2 .

Обозначим через Z_d^x куб $\{y: |y_i - x_i| < d/2, i = 1, \dots, n\}$, через $C_{\delta, d}^x$ — цилиндр $\{(y', y): |y' - x'| \leq \delta, |y_n - x_n| \leq d/2\}$. Для того чтобы получить (89), заметим сперва, что если $r \geq 4R$, то

$$D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \supset K_h^+ \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \supset C_{\frac{rh}{24}, \frac{r}{12}}^x, \quad (90)$$

и одновременно с этим

$$Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \supset Z_{\frac{r}{6}}^x \supset C_{\frac{rh}{24}, \frac{r}{12}}^x, \quad (91)$$

где $x = (0, \dots, 7r/24)$.

В силу монотонности емкости из (90) будем иметь $\forall r \geq 4R$

$$\text{cap} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq \text{cap} \left(C_{\frac{rh}{24}, \frac{r}{12}}^x, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right). \quad (92)$$

Вместе с тем из (91) (см. [2, с. 327, п. 9.1.1, предложение 1]) следует, что

$$\text{cap} \left(C_{\frac{rh}{24}, \frac{r}{12}}^x, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq A \text{cap} \left(C_{\frac{rh}{24}, \frac{r}{12}}^x, Z_{\frac{r}{6}}^x \right), \quad (93)$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от r, h, x .

Из [2, с. 330, п. 9.1.3, предложение 1] имеем при $0 < 2\delta < d$

$$\text{cap}(C_{\delta, d}^x, Z_{2d}^x) \sim d \left(\ln \frac{d}{\delta} \right)^{-1} \quad (94)$$

(значок $\sim$ означает, что левая и правая части находятся в конечном отношении, не зависящем от x, d, δ). Поэтому из (92) и (93) получим $\forall r \geq 4R$

$$r^{-3} \operatorname{cap}\left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}}\right) \geq Br^{-2} \left(\ln \frac{2}{h}\right)^{-1}, \quad (95)$$

где $B > 0$ не зависит от r, h . Полагая

$$\Lambda(r) = B\chi_{[4R, \infty)}(r)r^{-2} \left(\ln \frac{2}{h}\right)^{-1},$$

из (82) будем иметь (89).

4) Пусть $n \geq 4$, $0 < h < 1$, и пусть найдется $R > 0$ такое, что $\Omega \setminus Q_R$ принадлежит дополнению K_h^+ . Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (37) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq r^{Ch^{n-3}}, \quad (96)$$

где $M(r; u)$ определено с помощью (13), $C > 0$ зависит только от n, C_1, C_2 .

Доказательство дословно повторяет рассуждения предыдущего пункта с той лишь разницей, что вместо (94) теперь следует воспользоваться соотношением

$$\operatorname{cap}(C_{\delta, d}^x, Z_{2d}^x) \sim d\delta^{n-3},$$

соответственно вместо (95) – соотношением

$$r^{-n} \operatorname{cap}\left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}}\right) \geq Br^{-2}h^{n-3},$$

где $B > 0$ зависит только от n . Таким образом, полагая

$$\Lambda(r) = B\chi_{[4R, \infty)}(r)h^{n-3}r^{-2},$$

из неравенства (82) будем иметь (96).

5) Пусть $n = 3$, $h > 0$. Обозначим через C_h^+ полубесконечный цилиндр $\{(x', x_n) : |x'| \leq h, 0 \leq x_n < \infty\}$, и пусть найдется $R > 0$ такое, что $\Omega \setminus Q_R$ принадлежит дополнению C_h^+ . Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) в Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq (\ln r)^C,$$

где $M(r; u)$ определено соотношением (13), постоянная $C > 0$ зависит только от C_1, C_2 .

Для доказательства воспользуемся теоремой 1.3.7. Возьмем $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1/2$, $\sigma_3 = 1/4$, $\sigma_4 = 1/8$, $R_* = \max\{4R, 24h\}$. Очевидно, при всех $r > R_*$

$$D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \supset C_h^+ \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \supset C_{h, \frac{r}{12}}^x, \quad (97)$$

и одновременно с этим

$$Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \supset Z_{\frac{r}{6}}^x \supset C_{h, \frac{r}{12}}^x, \quad (98)$$

где $x = (0, \dots, 7r/24)$.

Ввиду монотонности емкости из (97) будем иметь $\forall r \geq R_*$

$$\text{cap} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq \text{cap} \left(C_{h, \frac{r}{12}}^x, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right). \quad (99)$$

В то же время из (98) (см. [2, с. 327, п. 9.1.1, предложение 1]) следует, что

$$\text{cap} \left(C_{h, \frac{r}{12}}^x, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq A \text{cap} \left(C_{h, \frac{r}{12}}^x, Z_{\frac{r}{6}}^x \right), \quad (100)$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от r, h, x .

Таким образом, из (99), (100) и (94) получим $\forall r \geq R_*$

$$r^{-3} \text{cap} \left(D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \right) \geq B r^{-2} \left(\ln \frac{r}{h} \right)^{-1},$$

где $B > 0$ не зависит от r, h , и мы можем в (80) положить

$$\Lambda(r) = B \chi_{[R_*, \infty)}(r) r^{-2} \left(\ln \frac{r}{h} \right)^{-1}.$$

Доказательство завершается применением неравенства (82).

6) Пусть $n \geq 3$, $\Pi^+ = \{x: x_n = 0, 0 \leq x_{n-1} < \infty, -\infty < x_{n-2} < \infty, \dots, -\infty < x_1 < \infty\}$, и пусть найдется $R > 0$ такое, что $\Omega \setminus Q_R$ принадлежит дополнению Π^+ . Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) в Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка (86), где постоянная $C > 0$ зависит только от n, C_1, C_2 .

Действительно, при всех $r \geq 4R$

$$D \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \supset \Pi^+ \cap \overline{Q}_{\frac{r}{2}} \setminus Q_{\frac{r}{4}} \supset \Pi^+ \cap \overline{Q}_{\frac{r}{24}}^x, \quad (101)$$

и вместе с тем

$$Q_r \setminus \overline{Q}_{\frac{r}{8}} \supset Z_{\frac{r}{6}}^x \supset \Pi^+ \cap \overline{Q}_{\frac{r}{24}}^x, \quad (102)$$

где $x = (0, \dots, 7r/24, 0)$.

Из (101) ввиду монотонности емкости получим $\forall r \geq 4R$

$$\text{cap} \left(D \cap \overline{Q_{\frac{r}{2}}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q_{\frac{r}{8}}} \right) \geq \text{cap} \left(\Pi^+ \cap \overline{Q_{\frac{r}{24}}^x}, Q_r \setminus \overline{Q_{\frac{r}{8}}} \right). \quad (103)$$

В то же время из (102) (см. [2, с. 327, п. 9.1.1, предложение 1]) следует, что

$$\text{cap} \left(\Pi^+ \cap \overline{Q_{\frac{r}{24}}^x}, Q_r \setminus \overline{Q_{\frac{r}{8}}} \right) \geq A \text{cap} \left(\Pi^+ \cap \overline{Q_{\frac{r}{24}}^x}, Z_{\frac{r}{6}}^x \right), \quad (104)$$

где $A > 0$ не зависит от r, x . Но емкость, стоящая в правой части (104), при всех $r \geq 4R$, очевидно, допускает оценку

$$\text{cap} \left(\Pi^+ \cap \overline{Q_{\frac{r}{24}}^x}, Z_{\frac{r}{6}}^x \right) \geq Br^{n-2}, \quad (105)$$

где $B > 0$ зависит только от n .

В самом деле, пусть $r > 4R$, $x = (0, \dots, 7r/24, 0)$, $\varphi \in C_0^\infty \left(Z_{r/6}^x \right)$, $\varphi \equiv 1$ в окрестности множества $\Pi^+ \cap \overline{Q_{r/24}^x}$. Тогда

$$\int_{Z_{\frac{r}{6}}^x} |\nabla \varphi(y)|^2 dy \geq \int_{\Pi^+ \cap Q_{\frac{r}{24}}^x} dy' \int_{-\frac{r}{12}}^{\frac{r}{12}} \left| \frac{\partial \varphi(y', y_n)}{\partial y_n} \right|^2 dy_n.$$

Но при всех $y' \in \Pi^+ \cap Q_{r/24}^x$

$$\int_{-\frac{r}{12}}^{\frac{r}{12}} \left| \frac{\partial \varphi(y', y_n)}{\partial y_n} \right|^2 dy_n \geq \frac{24}{r}.$$

Тем самым,

$$\int_{Z_{\frac{r}{6}}^x} |\nabla \varphi(y)|^2 dy \geq \frac{24}{r} \int_{\Pi^+ \cap Q_{\frac{r}{24}}^x} dy' \geq \frac{24}{r} \text{mes}_{n-1} \left(\Pi^+ \cap Q_{\frac{r}{24}}^x \right) \geq Br^{n-2},$$

где $B > 0$ зависит только от n . Минимизируя самый левый интеграл по φ , получим (105).

Таким образом, при всех $r \geq 4R$ из (103)–(105) будем иметь

$$\text{cap} \left(D \cap \overline{Q_{\frac{r}{2}}} \setminus Q_{\frac{r}{4}}, Q_r \setminus \overline{Q_{\frac{r}{8}}} \right) \geq br^{n-2},$$

где постоянная $b > 0$ зависит только от n . Полагая в (82)

$$\Lambda(r) = b\chi_{[4R, \infty)} r^{-2},$$

получаем (86).

7) Пусть $n \geq 2$, $h > 0$. Обозначим через Y_h двугранный угол $\{x: |x_n| < hx_{n-1}\}$, и пусть найдется $R > 0$ такое, что $\Omega \setminus Q_R$ принадлежит Y_h . Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq r^{\frac{C}{h}}, \quad (106)$$

где $M(r; u)$ определено соотношением (13), постоянная $C > 0$ зависит только от n, C_1, C_2 .

Если $h \geq 1/4$, то (106) следует из (86) (см. п. 6) для случая $n \geq 3$ и п. 1) для случая $n = 2$). Поэтому можно считать, что $h < 1/4$. Положим в теореме 1.3.6 $\delta = 1/2$, $\nu = \theta = 2$, и пусть $x \in \Omega \setminus Q_{4R}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, зависящее только от n и такое, что

$$\text{mes}(D \cap Q_{2h|x|}^x) \geq \varepsilon(h|x|)^n.$$

Таким образом, из (88) следует, что

$$\mu(x; \delta, \nu) \geq B(h|x|)^{-1},$$

где $\mu(x; \delta, \nu)$ определено с помощью (5), постоянная $B > 0$ зависит только от n . Откуда, в свою очередь, получаем $\forall r > 4R$

$$\inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\theta} \setminus Q_{\frac{r}{\theta}}} \mu^2(x; \delta, \nu) \geq B^2(2hr)^{-2}.$$

Тем самым, (24) будет выполнено, если взять

$$\Lambda(r) = B^2 \chi_{[4R, \infty)}(r)(2hr)^{-2}.$$

Остается воспользоваться неравенством (79), и оценка (106) доказана.

8) Пусть $n \geq 2$, $h > 0$. Обозначим через Γ_h слой $\{(x', x_n): |x_n| < h, -\infty < x_i < \infty, i = 1, \dots, n-1\}$, и пусть найдется $R > 0$ такое, что $\Omega \setminus Q_R$ принадлежит Γ_h . Тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (19) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq e^{\frac{C}{h}r}, \quad (107)$$

где $M(r; u)$ определено соотношением (13), постоянная $C > 0$ зависит только от n, C_1, C_2 .

Неравенство (107) совпадает с аналогичным результатом, приведенным в [3, с. 47, § 6, теорема 6.1]. Ниже мы покажем, что (107) может быть также получено из теоремы 1.3.5, что, в частности, свидетельствует о точности оценки (73).

В самом деле, положим в теореме 1.3.5 $\delta = 1/2$, $\nu = \theta = 2$, и пусть $R_* = \max\{4R, 4h\}$, $x \in \Omega \setminus \overline{Q}_{R_*}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, зависящее только от n , такое, что

$$\text{mes}(D \cap Q_{2h}^x) \geq \varepsilon h^n.$$

При этом, очевидно, $2h < \delta|x|$. Таким образом, из (88) следует, что

$$\mu(x; \delta, \nu) \geq Bh^{-1}, \quad (108)$$

где $\mu(x; \delta, \nu)$ определено соотношением (5), постоянная $B > 0$ зависит только от n .

Далее, из (108) имеем $\forall r > 3R_*$

$$\inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\theta} \setminus Q_{\frac{r}{\theta}}} \mu^2(x; \delta, \nu) \geq B^2 h^{-2}.$$

Поэтому неравенство (24) будет выполнено, если взять

$$\Lambda(r) = B^2 h^{-2} \chi_{(3R_*, \infty)}(r).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться (73).

9) Пусть $n \geq 3$, и пусть для некоторых вещественных чисел $0 < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$ найдется измеримая функция $\Lambda: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такая, что имеют место (80) и (72). Тогда из теоремы 1.3.7 следует, что в Ω не существует отличного от тождественного нуля ограниченного неотрицательного решения неравенства (19), удовлетворяющего условию (18).

В частности, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{cap}(D_i)}{A^{i(n-2)}} = \infty, \quad (109)$$

где $A > 1$, $D_i = D \cap \{x: A^i \leq |x| \leq A^{i+1}\}$, $i = 1, 2, \dots$, то, полагая $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = A^{-1}$, $\sigma_3 = A^{-3}$, $\sigma_4 = A^{-4}$,

$$\Lambda(r) = \sum_{j=1}^{\infty} r^{-n} \text{cap}(D_{j-2}) \chi_{[A^j, A^{j+1})}(r),$$

нетрудно убедиться в том, что оба соотношения (80) и (72) будут выполнены.

В то же время хорошо известно (см. [14, гл. 5, § 1, п. 1, с. 345, теорема 5.1]), что (109) является необходимым и достаточным условием отсутствия в области Ω ограниченной положительной гармонической функции, равной нулю на $\partial\Omega$. Последнее обстоятельство в определенной степени свидетельствует о точности условия (72).

10) Пусть $L = \triangle$, $R_0 \geq 2$, $\lambda \geq 0$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}_{R_0}$, $g(t) = t \ln^\lambda(1+t)$ и

$$c(x) = |x|^s, \quad (110)$$

где s – некоторое вещественное число. Положим $F(x, t) = c(x)g(t)$. Очевидно, соотношение (50) будет выполнено, если взять

$$q(r) = 2^{-|s|} r^s. \quad (111)$$

В то же время (38) выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda > 2$, а (52) эквивалентно неравенству $s \geq -2$. Таким образом, из теоремы 1.3.2 имеем при $\lambda > 2$ и $s \geq -2$, что всякое неотрицательное решение (7) в области Ω , удовлетворяющее условию (18), тождественно равно нулю, более того, как следует из теоремы 1.3.3, в этом случае решение задачи Дирихле (9), (10) будет единственным.

Покажем теперь, что если $0 \leq \lambda \leq 2$, то в Ω существует положительное решение (7), удовлетворяющее условию (18), какое бы значение ни принимало вещественное число s .

Пусть сперва $\lambda = 2$, $s = -2$. Чтобы угадать упомянутое выше решение, воспользуемся оценкой (85), которая в нашем случае приобретает вид

$$M(r; u) \geq e^{r^A},$$

где $A > 0$ – некоторая постоянная, зависящая только от n . Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$u(x) = e^{|x|^B} - e^{R_0^B}$$

при $B \geq 2$ и будет искомым решением.

Пусть $\lambda = 2$, $s > -2$; тогда (85) перепишется следующим образом:

$$M(r; u) \geq e^{e^{Ar^{s/2+1}}},$$

где $A > 0$ зависит только от n, s . Полагая

$$u(x) = e^{e^{B|x|^{s/2+1}}} - e^{e^{BR_0^{s/2+1}}},$$

получаем, что при $B \geq \max\{2, 4/(s+2)\}$ функция u является положительным решением (7), (18).

Пусть $0 \leq \lambda < 2$, $s > -2$; тогда из (53) будем иметь, что для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения (7), (18) при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq e^{Ar^{(s+2)/(2-\lambda)}},$$

где $A > 0$ зависит только от n, s, λ . В качестве примера такого решения возьмем

$$u(x) = e^{B|x|^{(s+2)/(2-\lambda)}} - e^{BR_0^{(s+2)/(2-\lambda)}},$$

где

$$B \geq \max \left\{ 2, 2^{\lambda/(2-\lambda)} \left(\frac{2-\lambda}{s+2} \right)^{2/(2-\lambda)} \right\}.$$

Пусть $0 \leq \lambda < 2$, $s = -2$; тогда (85) превращается в неравенство

$$M(r; u) \geq e^{A(\ln r)^{2/(2-\lambda)}},$$

где $A > 0$ зависит только от n, λ . При этом

$$u(x) = e^{B(\ln |x|)^{2/(2-\lambda)}} - e^{B(\ln R_0)^{2/(2-\lambda)}},$$

где

$$B \geq \max \left\{ 2, 2^{\lambda/2-1}(2-\lambda) \right\},$$

доставляет пример положительного решения (7), (18).

Если, наконец, $0 \leq \lambda \leq 2$, $s < -2$, то в качестве нужного нам решения можно взять

$$u(x) = e^{e^{B|x|}|s|/2+1}} - e^{e^{BR_0^{|s|/2+1}}},$$

где $B \geq \max \{2, 4/(2+|s|)\}$.

Несколько более сложными рассуждениями мы могли бы также показать, что в случае $0 \leq \lambda \leq 2$ при любом значении s решение задачи Дирихле (9), (10) не является единственным.

1.4. Пусть $\tau > 1$, $R_0 > 0$, $S_{R_0} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$. В этом пункте будут рассматриваться неравенства

$$Lu \geq c(x)u^\lambda, \quad (112)$$

$$\mathcal{L}u \geq c(x)u^\lambda \quad (113)$$

и соответственно уравнения

$$Lu = c(x)u^\lambda \operatorname{sign} u, \quad (114)$$

$$\mathcal{L}u = c(x)u^\lambda \operatorname{sign} u, \quad (115)$$

где $c: \Omega \rightarrow [R_0, \infty)$ – некоторая функция, которая в случае (112) и (114) предполагается локально ограниченной и измеримой.

Будем также считать, что для измеримой функции $q: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ при всех $r \in (R_0, \infty)$ выполнено соотношение

$$q(r) \leq \operatorname{ess} \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\tau} \setminus (Q_{\frac{r}{\tau}} \cup Q_{R_0})} c(x),$$

когда речь будет идти о (112) и (114), либо соотношение

$$q(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\tau} \setminus (Q_{\frac{r}{\tau}} \cup Q_{R_0})} c(x),$$

когда речь будет идти о (113) и (115).

СЛЕДСТВИЕ 1.4.1. Пусть имеет место (52); тогда найдется постоянная $A > 0$, зависящая только от $n, \tau, \lambda, C_1, C_2$, такая, что для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (112) (неравенства (113)), удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$M(r; u) \geq A \left(\int_{R_0}^r \xi q(\xi) d\xi \right)^{1/(1-\lambda)}, \quad (116)$$

если $0 \leq \lambda < 1$, и оценка

$$M(r; u) \geq \exp \left(A \left(\int_{R_0}^r \xi q(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (117)$$

если $\lambda = 1$, где $M(r; u)$ определено соотношением (13).

СЛЕДСТВИЕ 1.4.2. Пусть $\lambda > 1$ и при этом выполнено (52); тогда решение задачи Дирихле (114), (10) (задачи Дирихле (115), (10)) единственно. Более того, в этом случае всякое неотрицательное решение неравенства (112) (неравенства (113)) в области Ω , удовлетворяющее условию (18), тождественно равно нулю.

СЛЕДСТВИЕ 1.4.3. Пусть $\lambda > 1$ и при этом имеет место (68); тогда найдется постоянная $A > 0$, зависящая только от $n, \tau, \lambda, C_1, C_2$, такая, что для всякого неотрицательного решения неравенства (112) (неравенства (113)) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при почти всех $x \in \Omega \setminus Q_{R_0}$ (при всех $x \in \Omega \setminus Q_{R_0}$)

$$u(x) \leq A \left(\int_{|x|}^{\infty} \xi q(\xi) d\xi \right)^{-1/(\lambda-1)}. \quad (118)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4.4. Допустим, что $\lambda = 1$ и справедливо (84); тогда найдется постоянная $A > 0$, зависящая только от $n, \tau, \lambda, C_1, C_2$, такая, что для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения неравенства (112) (неравенства (113)) в области Ω , удовлетворяющего условию (18), при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq \exp \left(A \int_{R_0}^r \min \left\{ \xi q(\xi), q^{\frac{1}{2}}(\xi) \right\} d\xi \right), \quad (119)$$

где $M(r; u)$ определено с помощью (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА непосредственно получаются из результатов предыдущего пункта.

ПРИМЕРЫ 1.4.1. Во всех приведенных ниже примерах предполагается, что $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}_{R_0}$, $L = \triangle$.

1) Пусть $n \geq 3$, функции s и q определены соотношениями (110) и (111). Предположим сперва, что $0 < \lambda < 1$, $-2 < s$; тогда, подставляя (111) в (116), будем иметь, что для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения (112), (18) при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq Ar^\sigma, \quad (120)$$

где $\sigma = (s + 2)/(1 - \lambda) > 0$, постоянная $A > 0$ зависит только от n, λ .

Покажем, что в Ω существует положительное решение (112), удовлетворяющее условию (18) и такое, что при $r \rightarrow \infty$ левая и правая части (120) находятся в конечном отношении. Для этого достаточно взять

$$u(x) = (\sigma(\sigma + n - 2))^{-1/(1-\lambda)} (|x|^\sigma - R_0^\sigma).$$

Пусть, далее, $0 < \lambda < 1$, $s = -2$; тогда оценка (116) принимает вид

$$M(r; u) \geq A(\ln r)^{1/(1-\lambda)}, \quad (121)$$

где $A > 0$ зависит только от n, λ . Несложно убедиться в том, что

$$u(x) = (\ln |x|)^{1/(1-\lambda)} - (\ln R_0)^{1/(1-\lambda)}$$

является положительным решением (112), (18), для которого обе части (121) при $r \rightarrow \infty$ находятся в конечном отношении.

Пусть $\lambda = 1$, $-2 < s$; тогда для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения (112), (18) согласно следствию 1.4.4 при всех r из некоторой окрестности ∞

$$M(r; u) \geq e^{Ar^{(s+2)/2}}, \quad (122)$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от n, s .

Хотя бы одно такое решение существует, причем правая часть (122) наводит на мысль искать его в виде

$$u(x) = e^{B|x|^{(s+2)/2}} - e^{BR_0^{(s+2)/2}}.$$

При этом непосредственные вычисления показывают, что u будет искомым решением, если $B \geq 2/(s + 2)$.

Пусть $\lambda = 1$, $s = -2$; тогда (119) превращается в неравенство

$$M(r; u) \geq r^A,$$

где $A > 0$ зависит только от n . Несложно убедиться в том, что

$$u(x) = |x|^B - R_0^B$$

при $B \geq 1$ будет положительным решением (112), (18).

Предположим, что $\lambda > 1$, $s \geq -2$; тогда из следствия 1.4.2 получаем, что решение задачи Дирихле (114), (10) единственно, и кроме этого в области Ω всякое неотрицательное решение неравенства (112), удовлетворяющее условию (18), тождественно равно нулю.

В случае $s < -2$ в Ω всегда существует положительное решение (112), (18), каким бы ни было значение $\lambda \geq 0$.

Если $s < -2$ и одновременно с этим $\lambda > 1$, то для всякого такого решения из (118) почти при всех $x \in \Omega$ будем иметь

$$u(x) \leq A|x|^{-(s+2)/(\lambda-1)}, \quad (123)$$

где $A > 0$ зависит только от n , λ , s . Полагая

$$u(x) = |x|^{-(s+2)/(\lambda-1)} - R_0^{-(s+2)/(\lambda-1)},$$

непосредственным дифференцированием устанавливаем, что u будет искомым решением. При этом, очевидно, обе части (123) будут находиться в конечном отношении, когда $|x| \rightarrow \infty$.

В свою очередь, если $s < -2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, то в качестве нужного нам решения можно взять

$$u(x) = e^{B|x|^{(|s|+2)/2}} - e^{BR_0^{(|s|+2)/2}},$$

где $B \geq 2/(|s| + 2)$.

Более того, из рассуждений, приведенных в [25], следует, что соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{c(x)}{|x|^{n-2}} dx < \infty, \quad c(x) \geq 0, \quad (124)$$

которое в нашем случае эквивалентно неравенству $s < -2$, гарантирует существование у уравнения (114) в области Ω ограниченного положительного решения, удовлетворяющего условию (18).

2) В качестве примера применения оценки (117) рассмотрим случай $\lambda = 1$, и одновременно с этим $c(x) = 1$ при $x \in \Omega$ и соответственно $q(r) = 1$ при $r \geq R_0$. Тогда из (117) для всякого не равного тождественно нулю решения (112), (18) при всех r из некоторой окрестности ∞ имеем

$$M(r; u) \geq e^{Ar},$$

где $A > 0$ зависит только от n . Легко проверить, что

$$u(x) = e^{B|x|} - e^{BR_0},$$

где $B \geq 1$, и будет указанным выше решением.

3) Пусть $n \geq 3$, $R_0 > e^2$,

$$c(x) = \frac{1}{4}|x|^{-2} \ln^{-1+\varepsilon} |x| \quad \text{при } |x| \geq R_0.$$

Если $\varepsilon \geq 0$, $\lambda > 1$, то из следствия 1.4.2 вытекает, что в Ω не существует отличного от тождественного нуля неотрицательного решения неравенства (112), удовлетворяющего условию (18), и решение задачи Дирихле (114), (10) является единственным.

Предположим, что $\varepsilon < 0$; тогда выполнено (124), поэтому в области Ω при любом $\lambda \geq 0$ существует ограниченное положительное решение (112), (18).

При $0 \leq \lambda \leq 1$ независимо от того, какое значение принимает ε , в Ω также существует положительное решение (112), (18). В качестве такого решения можно, например, взять

$$u(x) = e^{(\ln |x|)^{(1+|\varepsilon|)/2}} - e^{(\ln R_0)^{(1+|\varepsilon|)/2}}.$$

Определим $q: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ равенством

$$q(r) = \begin{cases} 0, & R_0 \leq r < 2R_0, \\ \frac{1}{16}r^{-2} \ln^{-1+\varepsilon} (2^{-\text{sign}(-1+\varepsilon)}r), & 2R_0 \leq r. \end{cases}$$

Учитывая (119), в случае $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0$ для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения (112), (18) получаем оценку

$$M(r; u) \geq (\ln r)^A,$$

где r изменяется в некоторой окрестности ∞ , $A > 0$ зависит только от n . В качестве примера такого решения можно привести функцию

$$u(x) = (\ln |x|)^B - (\ln R_0)^B,$$

где $B \geq 1$.

Аналогично, если $\lambda = 1$, $0 < \varepsilon < 1$, то неравенство (119) принимает вид

$$M(r; u) \geq e^{A(\ln r)^\varepsilon},$$

где $A > 0$ зависит только от n , ε . Непосредственным дифференцированием убеждаемся в том, что

$$u(x) = e^{\frac{1}{\varepsilon}(\ln |x|)^\varepsilon} - e^{\frac{1}{\varepsilon}(\ln R_0)^\varepsilon}$$

будет положительным решением (112), (18).

Линейный случай $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1$ рассмотрен в п. 1).

В случае $\lambda = 1$, $\varepsilon > 1$ из (119) получаем, что для всякого не равного тождественно нулю неотрицательного решения (112), (18) при всех r из некоторой окрестности ∞ имеет место неравенство

$$M(r; u) \geq e^{A(\ln r)^{(1+\varepsilon)/2}},$$

где $A > 0$ зависит только от n, ε . Нетрудно видеть, что

$$u(x) = e^{B(\ln |x|)^{(1+\varepsilon)/2}} - e^{B(\ln R_0)^{(1+\varepsilon)/2}},$$

где $B \geq 1$, является примером вышеупомянутого решения.

Далее, если $0 \leq \lambda < 1$, $\varepsilon = 0$, то из (116) получим

$$M(r; u) \geq A(\ln \ln r)^{1/(1-\lambda)}, \quad (125)$$

где $A > 0$ зависит только от n, λ . Полагая

$$u(x) = (\ln \ln |x|)^{1/(1-\lambda)} - (\ln \ln R_0)^{1/(1-\lambda)},$$

непосредственно проверяем, что u является положительным решением (112), (18), для которого обе части (125) при $r \rightarrow \infty$ находятся в конечном отношении.

Наконец, если $0 \leq \lambda < 1$, $0 < \varepsilon$, то из (116) будем иметь

$$M(r; u) \geq A(\ln r)^{\varepsilon/(1-\lambda)}, \quad (126)$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от n, λ, ε . Очевидно также, что в этом случае функция

$$u(x) = \left(\frac{1-\lambda}{\varepsilon} \right)^{1/(1-\lambda)} \left((\ln |x|)^{\varepsilon/(1-\lambda)} - (\ln R_0)^{\varepsilon/(1-\lambda)} \right)$$

будет положительным решением (112), (18) таким, что при $r \rightarrow \infty$ левая и правая части (126) находятся в конечном отношении.

§ 2. Редукция теоремы 1.1.1' к бесконечно гладкому случаю

В этом параграфе будет показано, что если теорему 1.1.1' удастся доказать при дополнительном предположении, что область Ω имеет бесконечно гладкую границу, а коэффициенты a_{ij} оператора L , правая часть F неравенства (7) и само решение u являются бесконечно гладкими функциями, то эта теорема будет справедлива и в самом общем случае.

Прежде всего заметим, что теорему 1.1.1' достаточно доказывать в предположении, что в (14) имеет место строгое неравенство. Действительно, пусть

$$\{r \in (R_0, R): \exists \rho \in (r, R) \quad M(r; u) = M(\rho; u)\} \neq \emptyset$$

и

$$R_* = \sup\{r \in (R_0, R) : \exists \rho \in (r, R) \quad M(r; u) = M(\rho; u)\}.$$

Тогда, учитывая (14) и (15), из леммы 0.3.1 получим, что для некоторой постоянной $A > 0$ почти при всех $x \in \Omega \cap Q_{R_*} \setminus \overline{Q}_{R_0}$ $u(x) = A$. Отсюда ввиду неотрицательности правой части (7) будем иметь $F(x, A) = 0$ почти при всех $x \in \Omega \cap Q_{R_*} \setminus \overline{Q}_{R_0}$, а так как в теореме 1.1.1' всегда можно считать, что $\beta \leq 1$, то из (25) и (26) получим $f(r, \beta A) = 0$ при $r \in (R_0, R_*)$.

Далее, в силу того, что $A > 0$, имеем

$$\forall r \in (R_0, R_*) \quad \Lambda(r) = 0. \quad (127)$$

В самом деле, если $R_0 < r < \max\{\theta R_0/(1 - \delta), R_0/\sigma_4\}$, то это утверждение очевидно.

Пусть $\max\{\theta R_0/(1 - \delta), R_0/\sigma_4\} \leq r < R_*$; тогда найдется $x \in \Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r/\theta}$ такой, что $\overline{Q}_{\delta|x|}^x \subset Q_r \setminus \overline{Q}_{R_0}$. Но из (16) следует, что

$$A \in \overset{\circ}{W}_2^1 \left((Q_r \setminus \overline{Q}_{R_0}) \setminus (D \cap \overline{Q}_{\delta|x|}^x) \right).$$

Таким образом, согласно [2, гл. 9, § 9.2, с. 331] $\text{sap} \left(D \cap \overline{Q}_{\delta|x|}^x, Q_r \setminus \overline{Q}_{R_0} \right) = 0$. Тем самым мы доказали, что $\mu(x; \delta, \nu) = 0$. Аналогично, из (16) вытекает, что $\text{sap} \left(D \cap \overline{Q}_{r\sigma_2} \setminus Q_{r\sigma_3}, Q_{r\sigma_1} \setminus \overline{Q}_{r\sigma_4} \right) = 0$, поэтому для получения (127) остается только воспользоваться соотношением (24).

Предположим, что $r \in (R_0, R_*)$; тогда соотношение (33), очевидно, справедливо, поскольку обе части (33) в этом случае тождественно равны нулю.

Пусть $R_0 < R_* < R$; тогда $M(r; u) < M(\rho; u)$ для любых $R_* \leq r < \rho < R$, и при этом (33), разумеется, будет выполнено для всех $r \in (R_0, R)$, если для всех $r \in (R_*, R)$ удастся доказать неравенство

$$\begin{aligned} & M(r; u) - M(R_* + 0; u) \\ & \geq \frac{1}{a} \int_{R_*}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) (\alpha f(\xi, \beta M(\xi; u)) + \gamma \Lambda(\xi) M(\xi; u)) d\xi. \end{aligned}$$

Последнее обстоятельство и позволяет завершить наше рассуждение.

2.1. Допустим, что $F: \Omega \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ удовлетворяет условию i). Определим функцию $\tilde{F}: \Omega \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, полагая $\tilde{F}(x, t) = F(x, t - 0)$. Правая часть последнего равенства при этом определена почти при всех $x \in \Omega$, так как почти при всех $x \in \Omega$ $F(x, t)$ монотонно не убывает по t .

Для каждого $h > 0$ построим функцию $\tilde{F}_h: \Omega \times (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, полагая в случае $t \geq 0$

$$\tilde{F}_h(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{h} \tilde{F}(x, +0), & 0 \leq t \leq h, \\ \tilde{F}(x, t - h), & h < t, \end{cases}$$

и продолжая $\tilde{F}_h$ для отрицательных t нечетным образом: $\tilde{F}_h(x, -t) = -\tilde{F}_h(x, t)$.

Наконец, обозначим через F_h функцию, полученную в результате усреднения $\tilde{F}_h$ по Стеклову по второму аргументу:

$$F_h(x, t) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\left(\frac{\tau - t}{h}\right) \tilde{F}_h(x, \tau) d\tau,$$

где $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$ – неотрицательная четная функция такая, что $\text{supp } \omega \subset [-1, 1]$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) d\tau = 1.$$

Для каждого фиксированного $h > 0$ почти при всех $x \in \Omega$ и при всех $t > 0$ будем, очевидно, иметь

$$F_h(x, t) \leq F(x, t). \quad (128)$$

Пусть $0 \leq R_0 < r_0 < r < R$, и предположим, что u – неотрицательное решение (7) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющее условиям (14)–(16) (при этом без ограничения общности можно считать, что в (14) имеет место строгое неравенство). Рассмотрим решение задачи Дирихле

$$Lu_h = F_h(x, u_h) \quad \text{при } x \in \Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}, \quad (129)$$

$$u_h|_{\partial(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})} = u. \quad (130)$$

Как известно (см. [5, гл. 5, теоремы 2.1, 3.3]), u_h существует и является решением вариационной задачи

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} \Phi_h(x, v) dx &\rightarrow \infty, \\ v - u &\in \mathring{W}_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}), \end{aligned}$$

где

$$\Phi_h(x, t) = \int_0^t F_h(x, \tau) d\tau.$$

Почти при всех $x \in \Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$

$$u(x) \leq u_h(x). \quad (131)$$

В самом деле, пусть $\varphi(x) = u(x) - u_h(x)$, если $u(x) > u_h(x)$, и $\varphi(x) = 0$, если $u(x) \leq u_h(x)$. Ввиду (130) $\varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$. Возьмем φ в качестве пробной функции; тогда, вычитая из интегрального неравенства, соответствующего (7), интегральное тождество, соответствующее (129), будем иметь

$$-\int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial(u - u_h)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \geq \int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} (F(x, u) - F_h(x, u_h)) \varphi dx.$$

Из (128), а также из определения функции φ следует, что интеграл, стоящий в правой части полученного соотношения, есть неотрицательная величина, поэтому

$$\int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \leq 0.$$

Отсюда, учитывая (2), получаем $\varphi \equiv 0$, что и доказывает (131).

Тогда u_h – неотрицательная функция такая, что для любого $\rho \in [r_0, r)$

$$0 < M(\rho; u) \leq M(\rho; u_h). \quad (132)$$

Действительно, если $\rho = r_0$, то ввиду (130)

$$M(r_0; u) = M(r_0; u_h).$$

Пусть $\rho \in (r_0, r)$; тогда из (14) согласно лемме 0.3.1 будем иметь

$$M(\rho; u) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{r_0}} u. \quad (133)$$

В то же время из предшествовавших рассуждений следует, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{r_0}} u_h \geq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{r_0}} u.$$

Таким образом, в силу строгого неравенства $M(\rho; u) > M(r_0; u)$ находим

$$\operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{r_0}} u_h > M(r_0; u_h).$$

Поэтому, снова применяя лемму 0.3.1, мы можем утверждать, что

$$M(\rho; u_h) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{r_0}} u_h. \quad (134)$$

Тем самым ввиду (131) завершаем доказательство (132).

Заметим, что из (134) и леммы 0.3.1 следует также, что при всех $r_0 < \rho_1 < \rho_2 < r$

$$M(\rho_1; u_h) < M(\rho_2; u_h).$$

Пусть теперь $\sigma > 1$, $f: (R_0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция, для которой справедливы соотношения (25)–(27). Определим функцию $f_h: (R_0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, полагая

$$f_h(r, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq h, \\ f(r, t - h), & h < t. \end{cases} \quad (135)$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$f_h(r, t) \leq \operatorname{ess} \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (Q_{\frac{r}{\sigma}} \cup Q_{R_0})} F_h(x, t) \quad \text{при } R_0 < r, \quad 0 < t, \quad (136)$$

$$f_h(r, t_1) \leq f_h(r, t_2) \quad \text{при } R_0 < r, \quad 0 < t_1 \leq t_2, \quad (137)$$

$$f_h(r, t - 0) = f_h(r, t) \quad \text{при } R_0 < r, \quad 0 < t.$$

Кроме этого, очевидно, f_h является измеримой функцией, причем локально ограниченной ввиду (136).

Предположим, что для решения u_h задачи Дирихле (129), (130) справедлива теорема 1.1.1'. Иными словами, пусть для всякого $\rho \in (r_0, r)$

$$\begin{aligned} & M(\rho; u_h) - M(r_0 + 0; u_h) \\ & \geq \frac{1}{a} \int_{r_0}^{\rho} \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{\rho} \right)^a \right) (\alpha f_h(\xi, \beta M(\xi; u_h)) + \gamma \tilde{\Lambda}(\xi) M(\xi; u_h)) d\xi, \end{aligned} \quad (138)$$

где

$$\tilde{\Lambda}(\xi) = \chi_{[b, \infty)}(\xi) \Lambda(\xi), \quad (139)$$

$b = \max\{\theta r_0 / (1 - \delta), r_0 / \sigma_4\}$, $\chi_{[b, \infty)}$ — характеристическая функция интервала $[b, \infty)$, δ , θ и σ_4 — вещественные числа, а Λ — измеримая функция, удовлетворяющие условиям теоремы 1.1.1.

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & M(r; u) - M(r_0 + 0; u) \\ & \geq \frac{1}{a} \int_{r_0}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) (\alpha f(\xi, \beta M(\xi; u)) + \gamma \tilde{\Lambda}(\xi) M(\xi; u)) d\xi. \end{aligned} \quad (140)$$

В самом деле, из (130) следует, что $M(r; u) = M(r; u_h)$. В то же время из (132) получаем $M(r_0 + 0; u) \leq M(r_0 + 0; u_h)$. Далее, из (134) и леммы 0.3.1 будем иметь

$$M(r - 0; u_h) = M(r; u_h).$$

Поэтому, устремляя в (138) ρ к r , с учетом (132) и (137) находим

$$\begin{aligned} & M(r; u) - M(r_0 + 0; u) \\ & \geq \frac{1}{a} \int_{r_0}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) (\alpha f_h(\xi, \beta M(\xi; u)) + \gamma \tilde{\Lambda}(\xi) M(\xi; u)) d\xi. \end{aligned} \quad (141)$$

Из (135), (26) и (27) непосредственно видно, что при всех $R_0 < r$, $0 < t$

$$\begin{aligned} & f_h(r, t) \leq f(r, t), \\ & \lim_{h \rightarrow +0} f_h(r, t) = f(r, t). \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы доказать соотношение (140), надо в (141) перейти к пределу при $h \rightarrow +0$ и воспользоваться теоремой Лебега об ограниченной сходимости.

В свою очередь, в пределе при $r_0 \rightarrow R_0 + 0$ из (140) получаем (33).

2.2. Из рассуждений предыдущего пункта становится ясно, что теорему 1.1.1' достаточно доказывать в случае, когда вместо неравенства (7) рассматривается уравнение

$$Lu = F(x, u), \quad (142)$$

правая часть которого помимо свойства i) удовлетворяет также условию: почти при всех $x \in \Omega$ $F(x, t)$ является бесконечно гладкой по $t \in (-\infty, \infty)$ функцией такой, что

$$F(x, t) \geq 0 \quad \text{при } t \geq 0, \quad (143)$$

$$F(x, -t) = -F(x, t). \quad (144)$$

В этом пункте будет показано, что в дополнение ко всему сказанному теореме 1.1.1' достаточно доказывать в предположении, что Ω является областью с бесконечно гладкой границей.

Действительно, пусть $0 \leq R_0 < r_0 < r < R$, u – неотрицательное решение уравнения (142) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющее условиям (14)–(16). Предположим также, что $\tilde{\psi}_k \in \mathring{W}_2^1(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность функций такая, что $\text{dist}(\text{supp } \tilde{\psi}_k, \partial\Omega) > 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - \tilde{\psi}_k\|_{W_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})} = 0.$$

Определим функции $\psi_k \in \mathring{W}_2^1(\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$, $k = 1, 2, \dots$, равенством

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 0, & \tilde{\psi}_k(x) \leq 0, \\ \min\{\tilde{\psi}_k(x), u(x)\}, & 0 < \tilde{\psi}_k(x). \end{cases}$$

Тогда $\psi_k \rightarrow u$ при $k \rightarrow \infty$ почти всюду в $\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$. В то же время последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в норме пространства $W_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$, поэтому некоторая ее подпоследовательность сходится слабо в $W_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$, а также сильно в $L_2(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$ к функции u . Для простоты будем обозначать эту подпоследовательность также через $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$. При этом, очевидно, будем иметь для всех $x \in \Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$

$$0 \leq \psi_k(x) \leq u(x), \quad (145)$$

и кроме этого $\text{dist}(\text{supp } \psi_k, \partial\Omega) > 0$, $k = 1, 2, \dots$

Возьмем, далее, последовательность областей с бесконечно гладкими границами $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что $\text{dist}(\Omega_k, \partial\Omega) > 0$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\text{supp } \psi_k \subset \Omega_k$, $k = 1, 2, \dots$, и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$.

Для каждого натурального k рассмотрим решение v_k задачи Дирихле

$$Lv_k = F(x, v_k) \quad \text{при } x \in \Omega_k \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}, \quad (146)$$

$$v_k|_{\partial(\Omega_k \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})} = \psi_k. \quad (147)$$

Ввиду неравенства (145) из принципа максимума будем иметь

$$v_k(x) \leq u(x) \quad (148)$$

почти при всех $x \in \Omega_k \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$. В то же время ввиду (143), (144) и неотрицательности ψ_k на множестве $\Omega_k \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$ из принципа максимума вытекает, что $v_k(x) \geq 0$ почти при всех $x \in \Omega_k \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$. Наконец, в силу условия $\text{supp } \psi_k \subset \Omega_k$ из (147) получим

$$v_k|_{(\partial\Omega_k) \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} = 0. \quad (149)$$

Продолжим v_k на множество $\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$, полагая $v_k(x) = 0$ при $x \notin \Omega_k$.

Как следует из [4, гл. 5, § 2, с. 362, теорема 2.1], решение задачи Дирихле (146), (147), которое можно отождествить с решением соответствующей вариационной задачи, ограничено в норме пространства $W_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$ некоторой константой, не зависящей от k , так как аналогичное утверждение справедливо относительно функций ψ_k . Тогда из последовательности $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$ и сильно в $L_2(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$ к некоторой функции $v \in W_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$. Чтобы не загромождать индексов, мы будем обозначать эту подпоследовательность также через $\{v_k\}_{k=1}^\infty$.

Докажем, что v является решением краевой задачи

$$Lv = F(x, v) \quad \text{при } x \in \Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}, \quad (150)$$

$$v|_{\partial(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})} = u. \quad (151)$$

Тогда ввиду единственности решения (150), (151) будем иметь $v \equiv u$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$. Найдется натуральное число k_0 такое, что для всех $k \geq k_0$ $\text{supp } \varphi \subset \Omega_k \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$. Тогда для всех $k \geq k_0$

$$-\int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} F(x, v_k) \varphi dx. \quad (152)$$

В пределе при $k \rightarrow \infty$ (152) превращается в интегральное тождество

$$-\int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}} F(x, v) \varphi dx. \quad (153)$$

Действительно, левая часть (152) при $k \rightarrow \infty$ стремится к левой части (153) ввиду того обстоятельства, что $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к v слабо в $W_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$, в то время как правая часть (152) стремится к правой части (153) согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости. Следовательно, v удовлетворяет уравнению (150). Покажем, что для v справедливо также и краевое условие (151). В самом деле, в силу (147) для всякого натурального k $v_k - \psi_k \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$, причем

$v_k - \psi_k$ ограничены в норме пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$ некоторой константой, не зависящей от k , но тогда существует подпоследовательность $\{v_{k_s} - \psi_{k_s}\}_{s=1}^\infty$ последовательности $\{v_k - \psi_k\}_{k=1}^\infty$, сходящаяся слабо в $\mathring{W}_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$, а также сильно в $L_2(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$ к некоторой функции из $\mathring{W}_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$. В то же время $\{v_{k_s} - \psi_{k_s}\}_{s=1}^\infty$ сходится в $L_2(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$ к $v - u$, следовательно, $v - u \in \mathring{W}_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$, и (151) доказано. Таким образом, $v \equiv u$, а значит, $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к функции u слабо в $W_2^1(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$ и сильно в $L_2(\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0})$. В частности, $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к u почти всюду в $\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$.

Возьмем $\rho_0 \in (r_0, r)$. Из неравенства (148) в этом случае будем иметь для всякого $\rho \in (\rho_0, r)$

$$\sup_{\Omega_k \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{\rho_0}} v_k \rightarrow \sup_{\Omega \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{\rho_0}} u = \sup_{\Omega \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{r_0}} u \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (154)$$

Заметим, что решения краевых задач (146), (147), а также (150), (151), непрерывны по Гёльдеру соответственно в $\Omega_k \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$ и в $\Omega \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$ (см. [4, гл. 5, § 4, с. 374, теорема 4.1]), причем v_k , $k = 1, 2, \dots$, ввиду (149) будут непрерывны по Гёльдеру вплоть до части границы $(\partial\Omega_k) \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$ области $\Omega_k \cap Q_r \setminus \overline{Q}_{r_0}$. По этой причине в (154) мы имеем право писать $\sup$ вместо ess sup .

Предположим, что $r_1 \in (\rho_0, r)$. По условию имеем $M(r_1; u) > M(\rho_0; u)$, таким образом, из (154) и (133) следует, что найдется натуральное число k_1 такое, что для всякого $k \geq k_1$

$$\sup_{\Omega_k \cap Q_{r_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_0}} v_k > M(\rho_0; u).$$

Одновременно с этим из (148) получаем

$$M(\rho_0; v_k) \leq M(\rho_0; u),$$

поэтому при всех $k \geq k_1$

$$\sup_{\Omega_k \cap Q_{r_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_0}} v_k > M(\rho_0; v_k).$$

Из леммы 0.3.1 и последнего неравенства, в свою очередь, находим для любых $\rho \in [r_1, r)$, $k \geq k_1$

$$M(\rho; v_k) = \sup_{\Omega_k \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{\rho_0}} v_k. \quad (155)$$

Тем самым, для любых $r_1 \leq \rho_1 \leq \rho_2 < r$ будем иметь

$$M(\rho_1; v_k) \leq M(\rho_2; v_k).$$

Пусть $D_k = \mathbb{R}^n \setminus \Omega_k$, $k = 1, 2, \dots$, и $\tilde{\Lambda}$ определена с помощью (139), где $b = \max\{\theta r_1/(1-\delta), r_1/\sigma_4\}$. Из (24) и включения $D_k \subset D$ следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(\tau) &\leq \inf_{x \in \Omega_k \cap Q_{\tau\theta} \setminus Q_{\frac{\tau}{\theta}}} \mu_k^2(x; \delta, \nu) \\ &\quad + \tau^{-n} \operatorname{cap}(D_k \cap \overline{Q}_{\tau\sigma_2} \setminus Q_{\tau\sigma_3}, Q_{\tau\sigma_1} \setminus \overline{Q}_{\tau\sigma_4}) \quad \text{при } \tau > r_1, \end{aligned}$$

где

$$\mu_k(x; \delta, \nu) = \sup_{\xi \in (0, \delta|x|)} \xi^{1-n} \operatorname{cap}(D_k \cap \overline{Q}_\xi^x, Q_{\nu\xi}^x).$$

Предположим, что для всех $k \geq k_1$, $\rho \in (r_1, r)$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} M(\rho; v_k) - M(r_1; v_k) \\ \geq \frac{1}{a} \int_{r_1}^{\rho} \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^a\right) (\alpha f(\xi, \beta M(\xi; v_k)) + \gamma \tilde{\Lambda}(\xi) M(\xi; v_k)) d\xi, \end{aligned} \quad (156)$$

где $f, a, \alpha, \beta, \gamma$ такие же, как в теореме 1.1.1.

Из (155), (133) и (154) будем иметь для любого $\rho \in [r_1, r)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(\rho; v_k) = M(\rho; u).$$

При этом ввиду (148) для всякого натурального k

$$M(\rho; v_k) \leq M(\rho; u).$$

Таким образом, учитывая (27), из (156) по теореме Лебега об ограниченной сходимости при $k \rightarrow \infty$ находим

$$\begin{aligned} M(\rho; u) - M(r_1; u) \\ \geq \frac{1}{a} \int_{r_1}^{\rho} \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^a\right) (\alpha f(\xi, \beta M(\xi; u)) + \gamma \tilde{\Lambda}(\xi) M(\xi; u)) d\xi. \end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\rho \rightarrow r - 0$, получим

$$\begin{aligned} M(r; u) - M(r_1; u) \\ \geq \frac{1}{a} \int_{r_1}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r}\right)^a\right) (\alpha f(\xi, \beta M(\xi; u)) + \gamma \tilde{\Lambda}(\xi) M(\xi; u)) d\xi. \end{aligned} \quad (157)$$

Наконец, устремляя в (157) $r_1 \rightarrow R_0 + 0$, завершаем доказательство (33).

2.3. Предположим, что $0 \leq R_0 < R < \infty$, функция F такая же, как в предыдущем пункте, Ω_k – одна из областей с бесконечно гладкой границей, введенных в п. 2.1. На протяжении всего этого пункта мы будем считать k фиксированным, хотя и произвольным натуральным числом. Пусть u – неотрицательное решение уравнения (142) в $\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющее условиям (14), (15), а также условию

$$u|_{(Q_R \cap \partial\Omega_k) \setminus \overline{Q}_{R_0}} = 0. \quad (158)$$

Разумеется, мы можем считать без ограничения общности, что в (14) имеет место строгое неравенство.

Полагая $\varepsilon = \text{dist}(\Omega_k, \partial\Omega)$, будем иметь, что $F(x, t)$ определена при всех x из ε -окрестности Ω_k^ε множества Ω_k .

Возьмем натуральное число $m_0 > 1/\varepsilon$. Для всех $m \geq m_0$ определим бесконечно дифференцируемые функции $F_m : \Omega_k \times (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, усредняя F по Стеклову по первому аргументу:

$$F_m(x, t) = \int_{\Omega_k^\varepsilon} \omega_m(y - x) F(y, t) dy, \quad (159)$$

где $\omega_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – неотрицательная четная функция такая, что $\text{supp } \omega_m \subset Q_{1/m}$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_m(y) dy = 1. \quad (160)$$

Определим также функции a_{ij}^m равенством

$$a_{ij}^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_m(y - x) a_{ij}(y) dy.$$

Рассмотрим решения z_m , $m \geq m_0$, краевых задач

$$L_m z_m = F_m(x, z_m) \quad \text{при } x \in \Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}, \quad (161)$$

$$z_m|_{\partial(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})} = u, \quad (162)$$

где

$$L_m = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}^m(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Из (158) и (162) будем иметь

$$z_m|_{(\partial\Omega_k) \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} = 0.$$

Очевидно, z_m – бесконечно гладкие в области $\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$ функции вплоть до части границы этой области $(\partial\Omega_k) \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$. Ввиду неотрицательности функции u

из принципа максимума получаем, что z_m также должны быть неотрицательными в $\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$.

Для любых вещественных чисел r_0, r_1 , удовлетворяющих неравенству $R_0 < r_0 < r < R$, найдется постоянная $\zeta > 0$, не зависящая от m , такая, что решения краевых задач (161), (162) ограничены в норме пространства Гёльдера $C_{0,\zeta}(\overline{\Omega_k \cap Q_r \setminus Q_{r_0}})$ некоторой константой, не зависящей от m (см. [4, гл. 5, § 4, с. 374, теорема 4.1]). Кроме этого последовательность $\{z_m\}_{m=m_0}^\infty$ ограничена в норме пространства $W_2^1(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$ (см. [4, гл. 5, § 2, с. 363]). Тогда из $\{z_m\}_{m=m_0}^\infty$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W_2^1(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$ и сильно в $C(\overline{\Omega_k \cap Q_r \setminus Q_{r_0}})$. Более того, можно добиться, чтобы некоторая подпоследовательность последовательности $\{z_m\}_{m=m_0}^\infty$ для всякого компакта $K \subset Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$ сходилась к функции $z \in W_2^1(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}) \cap C(\overline{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}})$ слабо в $W_2^1(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$ и сильно в $C(\overline{\Omega_k \cap K})$. Чтобы не загромождать индексов, будем обозначать эту подпоследовательность также через $\{z_m\}_{m=m_0}^\infty$.

Докажем, что $z \equiv u$. Для этого надо показать, что z является решением задачи Дирихле

$$Lz = F(x, z) \quad \text{при } x \in \Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}, \quad (163)$$

$$z|_{\partial(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})} = u. \quad (164)$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0})$, согласно (161) будем иметь

$$-\int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} a_{ij}^m(x) \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} F_m(x, z_m) \varphi dx. \quad (165)$$

При $m \rightarrow \infty$ (165) превращается в интегральное тождество

$$-\int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} F(x, z) \varphi dx. \quad (166)$$

Чтобы доказать последнее утверждение, вычтем из левой части (165) левую часть (166):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} a_{ij}^m(x) \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &= \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} a_{ij}(x) \frac{\partial(z - z_m)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &+ \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}} (a_{ij}(x) - a_{ij}^m(x)) \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое, стоящее в правой части последнего тождества, стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ в силу слабой сходимости $\{z_m\}_{m=m_0}^\infty$ в $W_2^1(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}})$ к z . Оценивая второе слагаемое по Коши–Буняковскому, получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}}} (a_{ij}(x) - a_{ij}^m(x)) \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \right| \\ & \leq C \|\nabla z_m\|_{L_2(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}})} \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij} - a_{ij}^m\|_{L_2(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}})}, \end{aligned}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от $\|\varphi\|_{C^1(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}})}$. Правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ ввиду того, что $\{z_m\}_{m=m_0}^\infty$ – ограниченная в норме пространства $W_2^1(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}})$ последовательность, а $a_{ij}^m \rightarrow a_{ij}$ в $L_2(\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}})$. Таким образом, левая часть (165) стремится к левой части (166) при $m \rightarrow \infty$.

Возьмем компактное множество $K \subset \Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}}$ такое, что $\text{supp } \varphi \subset K$, $\text{dist}(\text{supp } \varphi, \Omega_k \setminus K) > 0$, и пусть натуральное число m_1 удовлетворяет неравенствам $m_1 \geq m_0$ и $\text{dist}(\text{supp } \varphi, \Omega_k \setminus K) > 1/m_1$. Вычитая из правой части (165) правую часть (166), согласно (159) и (160) будем иметь при всех $m \geq m_1$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}}} F_m(x, z_m(x)) \varphi(x) dx - \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}}} F(x, z(x)) \varphi(x) dx \\ & = \int_K dx \varphi(x) \int_K dy \omega_m(y - x) F(y, z_m(x)) \\ & \quad - \int_K dx \varphi(x) \int_K dy \omega_m(y - x) F(x, z(x)). \end{aligned} \quad (167)$$

Ввиду очевидного равенства

$$\begin{aligned} & \int_K dx \varphi(x) \int_K dy \omega_m(y - x) F(y, z_m(x)) \\ & = \int_K dx \int_K dy \varphi(y) \omega_m(x - y) F(x, z_m(y)), \end{aligned}$$

которое получается, если поменять порядок интегрирования и при этом переобозначить x за y и наоборот, соотношение (167) может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}}} F_m(x, z_m(x)) \varphi(x) dx - \int_{\Omega_k \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}}} F(x, z(x)) \varphi(x) dx \\ & = \int_K dx \int_K dy \omega_m(y - x) (\varphi(y) F(x, z_m(y)) - \varphi(x) F(x, z(x))). \end{aligned} \quad (168)$$

Но $\{z_m\}_{m=m_1}^\infty$ — ограниченная в норме пространства $C(K)$ последовательность, точно так же и z ограничена в норме $C(K)$, поэтому по свойству i) найдется постоянная $A > 0$, не зависящая от m и x , такая, что для любого $m \geq m_1$ почти при всех $x \in K$

$$F(x, z(x)) + \sup_{\xi \in K} F(x, z_m(\xi)) \leq A. \quad (169)$$

Тогда ввиду (160) почти при всех $x \in K$

$$\left| \int_K dy \omega_m(y-x) (\varphi(y)F(x, z_m(y)) - \varphi(x)F(x, z(x))) \right| \leq A \|\varphi\|_{C(K)}.$$

По условию почти при всех $x \in K$ функция $F(x, t)$ является бесконечно гладкой по аргументу $t \in (-\infty, \infty)$. Для любых $x, y \in K$ будем, очевидно, иметь при $m \geq m_1$

$$\begin{aligned} & \omega_m(y-x) |\varphi(y)F(x, z_m(y)) - \varphi(x)F(x, z(x))| \\ & \leq \omega_m(y-x) F(x, z_m(y)) |\varphi(y) - \varphi(x)| \\ & \quad + \omega_m(y-x) |\varphi(x)(F(x, z_m(y)) - F(x, z(x)))| \\ & \leq \omega_m(y-x) \sup_{\xi \in K} F(x, z_m(\xi)) \sup_{\xi \in Q_{\frac{1}{m}}^x} |\varphi(\xi) - \varphi(x)| \\ & \quad + \omega_m(y-x) |\varphi(x)| \sup_{\xi \in Q_{\frac{1}{m}}^x} |F(x, z_m(\xi)) - F(x, z(x))|. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (160) и (169), получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_K dy \omega_m(y-x) (\varphi(y)F(x, z_m(y)) - \varphi(x)F(x, z(x))) \right| \\ & \leq A \sup_{\xi \in Q_{\frac{1}{m}}^x} |\varphi(\xi) - \varphi(x)| + |\varphi(x)| \sup_{\xi \in Q_{\frac{1}{m}}^x} |F(x, z_m(\xi)) - F(x, z(x))|, \end{aligned}$$

правая часть которой почти при всех $x \in K$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

Таким образом, по теореме Лебега об ограниченной сходимости правая часть (168) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, а значит, $z \equiv u$ в силу единственности решения задачи Дирихле (163), (164).

Предположим, что $R_0 < r_0 < r_1 < r < R$. Тогда $M(\xi; z_m) \rightarrow M(\xi; u)$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in [r_0, r]$. Так как $M(r_1; u) > M(r_0; u)$, то найдется натуральное число $m_2 \geq m_1$ такое, что $\forall m \geq m_2$ $M(r_1; z_m) > M(r_0; z_m)$. Из последнего неравенства и леммы 0.3.1 получим $M(\rho; z_m) > M(r_1; z_m) \quad \forall \rho \in (r_1, R)$, поэтому при всех $m \geq m_2$ и $\rho \in (r_1, R)$

$$M(\rho; z_m) = \sup_{\Omega_k \cap Q_\rho \setminus \overline{Q}_{r_1}} z_m.$$

В частности, для любого $m \geq m_2$ из $r_1 \leq \rho_1 < \rho_2 < R$ следует

$$M(\rho_1; z_m) < M(\rho_2; z_m).$$

Пусть $f: (R_0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция, для которой имеют место (25)–(27), и пусть m_2 в дополнение к вышесказанному удовлетворяет условиям $1/m_2 \leq r_1(1/\sqrt{\sigma} - 1/\sigma)$ и $1/m_2 \leq r_1 - R_0$. Тогда при всех $m \geq m_2$, $\rho > r_1$ и $t > 0$

$$f(\rho, t) \leq \inf_{x \in \Omega_k \cap Q_{\rho/\sqrt{\sigma}} \setminus (Q_{\rho/\sqrt{\sigma}} \cup Q_{r_1})} F_m(x, t).$$

Допустим, что $\forall m \geq m_2$

$$\begin{aligned} M(r; z_m) - M(r_1; z_m) \\ \geq \frac{1}{a} \int_{r_1}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) (\alpha f(\xi, \beta M(\xi; z_m)) + \gamma \tilde{\Lambda}(\xi) M(\xi; z_m)) d\xi, \end{aligned}$$

где $\tilde{\Lambda}$ определено соотношением (139), в котором $b = \max\{\theta r_1/(1 - \delta), r_1/\sigma_4\}$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, по теореме Лебега об ограниченной сходимости получаем (157), откуда, в свою очередь, при $r_1 \rightarrow R_0 + 0$ получаем (33).

§ 3. Доказательство теоремы 1.1.1' и теоремы 1.1.2'

3.1. Как было показано в предыдущем параграфе, теорему 1.1.1' достаточно доказывать в предположении, что область Ω имеет бесконечно гладкую границу, функция F , стоящая в правой части (7), и коэффициенты a_{ij} оператора L являются бесконечно гладкими, а само решение неравенства (7) есть непрерывная в $\overline{\Omega \cap Q_R} \setminus \overline{Q_{R_0}}$ и бесконечно гладкая в $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}}$ вплоть до части границы $(Q_R \setminus \overline{Q_{R_0}}) \cap \partial\Omega$ этого множества функция. Кроме этого без ограничения общности можно считать, что $0 < R_0$ и в (14) имеет место строгое неравенство. Последнее утверждение относится также и к теореме 1.1.2'. Заметим, что в случае теоремы 1.1.2' условие (14) выполнено автоматически в силу принципа максимума.

Соотношение (33) будет доказано, если при всех $r \in (R_0, R)$ удастся одновременно получить два неравенства:

$$M(r; u) - M(R_0; u) \geq \frac{2\alpha}{a} \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) f(\xi; \beta M(\xi; u)) d\xi, \quad (170)$$

$$M(r; u) - M(R_0; u) \geq \frac{2\gamma}{a} \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{r} \right)^a \right) \Lambda(\xi) M(\xi; u) d\xi. \quad (171)$$

Действительно, складывая (170) и (171), будем иметь (33).

Далее, при $a \geq 1$ для любого $\eta \in [0, 1]$ справедлива оценка

$$1 - \eta^a \leq a(1 - \eta). \quad (172)$$

В самом деле, в точке $\eta = 1$ значения обеих частей (172) совпадают, в то время как при всех $\eta \in [0, 1]$ производная правой части (172) не превосходит производную левой части.

Очевидно также, что если $0 < a < 1$, то для любого $\eta \in [0, 1]$ $1 - \eta^a \leq 1 - \eta$. Таким образом, при всех $\xi \in [R_0, r]$ будем иметь

$$1 - \left(\frac{\xi}{r}\right)^a \leq a\left(1 - \frac{\xi}{r}\right)$$

в случае $a \geq 1$ и

$$1 - \left(\frac{\xi}{r}\right)^a \leq 1 - \frac{\xi}{r}$$

в случае $0 < a < 1$.

Из всего сказанного следует, что (170) и (171) будут доказаны, если для некоторых $\alpha_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$ при всех $r \in (R_0, R)$ удастся доказать неравенства

$$M(r; u) - M(R_0; u) \geq \alpha_0 \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \frac{\xi}{r}\right) f(\xi; \beta M(\xi; u)) d\xi, \quad (173)$$

$$M(r; u) - M(R_0; u) \geq \gamma_0 \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \frac{\xi}{r}\right) \Lambda(\xi) M(\xi; u) d\xi. \quad (174)$$

При этом постоянные $\alpha_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$ в (173) и (174), вообще говоря, отличаются от соответствующих постоянных $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ в (170) и (171), в то время как $\beta > 0$ остается прежней.

3.2. В этом пункте будет получено (173) одновременно как в случае теоремы 1.1.1', так и в случае теоремы 1.1.2'.

Пусть $\sigma > 1$ – константа из предпосылки теоремы 1.1.1 (теоремы 1.1.2). Положим $\tau = \sqrt{\sigma}$,

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \tau}, \quad (175)$$

$$A = \max \left\{ 2\tau, \frac{16\tau}{\tau - 1}, \frac{2}{\varepsilon} \right\}, \quad (176)$$

$$\beta = \frac{1}{2} A^{-2}. \quad (177)$$

Нам потребуются следующие два известных результата.

ЛЕММА 3.2.1 (см. [5], а также [3]). Пусть u – неотрицательное решение уравнения $Lu = 0$ в области ω , расположенной в шаре $Q_r^{x_0}$, имеющей предельные точки на границе шара и содержащей точку x_0 . Допустим, что u обращается в нуль на той части границы области ω , которая расположена строго внутри шара $Q_r^{x_0}$. Тогда существует константа σ_0 , зависящая только от C_1, C_2, n , такая, что если

$$\text{mes } \omega < \sigma_0 r^n,$$

то

$$\sup_{\omega} u > \exp \left(\varepsilon_0 r^{\frac{n}{n-1}} / (\text{mes } \omega)^{\frac{1}{n-1}} \right) u(x_0),$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – константа, зависящая только от C_1, C_2, n .

Из принципа максимума следует, что эта лемма справедлива и для решения неравенства $Lu \geq 0$.

ЛЕММА 3.2.2 (см. [6], короткое доказательство приведено в [7, с. 516]). Пусть ω – открытое множество, расположенное между сферами $S_{r_1}^{x_0}$ и $S_{r_2}^{x_0}$, $0 < r_1 < r_2$; скажем, что $(n-1)$ -мерная поверхность Σ , лежащая между $S_{r_1}^{x_0}$ и $S_{r_2}^{x_0}$, разделяет сферы $S_{r_1}^{x_0}$ и $S_{r_2}^{x_0}$ в ω , если всякая непрерывная кривая, один конец которой принадлежит $S_{r_1}^{x_0}$, другой – $S_{r_2}^{x_0}$, а внутренние точки лежат в ω (коль скоро такая кривая существует), необходимо пересекает Σ .

Пусть в ω определена симметрическая матрица $\|a_{ij}\|$, $a_{ij} \in C^\infty$, и квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ удовлетворяет неравенству (2). Тогда существует константа $b_0 > 0$, зависящая только от C_1, C_2, n , такая, что для любой функции $v \in C^2(\omega)$ найдется кусочно гладкая поверхность Σ , разделяющая $S_{r_1}^{x_0}$ и $S_{r_2}^{x_0}$ в ω , причем

$$b_0 \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right| ds \leq \frac{\text{osc } v \text{ mes } \omega}{(r_1 - r_2)^2},$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – производная по конормали, определяемой матрицей $\|a_{ij}\|$.

ЛЕММА 3.2.3. Пусть $R_0 \leq r_1 < r_2 < R$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (7) (неравенства (8)) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16). Пусть также $M(r_2; u) \leq A^2 M(r_1; u)$. Тогда существует постоянная $b > 0$, зависящая только от A, C_1, C_2, n (только от C_2, n), такая, что

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b(r_1 - r_2)^2 \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}} F(x, \beta M(r_2; u)). \quad (178)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва случай оператора L в дивергентной форме. Разумеется (см. выше), функцию u можно считать классическим решением (7), (16).

Пусть $x_0 \in S_{(r_1+r_2)/2}$, $u(x_0) = M((r_1 + r_2)/2; u)$, и пусть сначала

$$M(r_2; u) \leq \frac{3}{2} M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right). \quad (179)$$

Положим

$$v(x) = u(x) - 2M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right) + M(r_2; u);$$

тогда, очевидно,

$$v(x_0) = M(r_2; u) - M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right), \quad (180)$$

$$\sup_{\Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}} v = 2 \left(M(r_2; u) - M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right) \right). \quad (181)$$

Рассмотрим открытое множество $\omega = \{x \in \Omega: v(x) > 0\}$. Ввиду (180) и того обстоятельства, что в (14) соблюдается строгое неравенство, получим $x_0 \in \omega$. Найдется постоянная $\tau_0 > 0$, зависящая только от C_1, C_2, n , такая, что

$$\text{mes} \left(\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0} \right) \geq \tau_0 (r_2 - r_1)^n. \quad (182)$$

В противном случае согласно лемме 3.2.1 было бы

$$\sup_{\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0}} v > 2v(x_0),$$

что находится в противоречии с (180) и (181).

Далее, следуя [5], [8], докажем справедливость неравенства

$$\begin{aligned} \omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \setminus Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0} \overset{\text{osc}}{v} \\ \geq \frac{b_0 (r_2 - r_1)^2}{16 \text{mes} \left(\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \setminus Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0} \right)} \int_{\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0}} F(x, u(x)) dx, \end{aligned} \quad (183)$$

где b_0 — постоянная из леммы 3.2.2.

Действительно, по лемме 3.2.2 найдется гиперповерхность Σ , разделяющая $S_{(r_2-r_1)/4}^{x_0}$ и $S_{(r_2-r_1)/2}^{x_0}$ в $\omega \cap Q_{(r_2-r_1)/2}^{x_0} \setminus Q_{(r_2-r_1)/4}^{x_0}$, причем

$$\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \setminus Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0} \overset{\text{osc}}{v} \geq \frac{b_0 (r_2 - r_1)^2}{16 \text{mes} \left(\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \setminus Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0} \right)} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right| ds. \quad (184)$$

Поверхность Σ разбивает $\omega \cap Q_{(r_2-r_1)/2}^{x_0}$ на два подмножества ω_1 и ω_2 , одно из которых (пусть это будет ω_1) содержит $\omega \cap Q_{(r_2-r_1)/4}^{x_0}$. Ввиду положительности функции v в ω_1 , очевидно, будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{(\partial \omega_1) \setminus \Sigma} \leq 0,$$

где ν – внешняя по отношению к области ω_1 кономаль, определяемая матрицей коэффициентов оператора L . Поэтому

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \geq \int_{\partial \omega_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds.$$

Таким образом, из (184) получаем

$$\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \text{osc}_{Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0}} v \geq \frac{b_0(r_2-r_1)^2}{16 \text{mes} \left(\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \setminus Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0} \right)} \int_{\partial \omega_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds.$$

Вместе с тем, используя формулу Грина, находим

$$\int_{\partial \omega_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = \int_{\omega_1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) dx \geq \int_{\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0}} F(x, u(x)) dx$$

(последнее неравенство является следствием включения $\omega \cap Q_{(r_2-r_1)/4}^{x_0} \subset \omega_1$ и неравенства $Lv \geq F(x, u)$, которое в свою очередь эквивалентно (7) в силу того, что функции u и v отличаются лишь на константу).

Тем самым показана справедливость (183).

Далее, из (177), (179) и (14) ввиду условия $M(r_2; u) \leq A^2 M(r_1; u)$ при всех $x \in \omega \cap Q_{(r_2-r_1)/4}^{x_0}$ будем иметь $u(x) \geq M((r_1+r_2)/2; u)/2 \geq \beta M(r_2; u)$, поэтому

$$\int_{\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0}} F(x, u(x)) dx \geq \text{mes} \left(\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0} \right) \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}} F(x, \beta M(r_2; u)).$$

Заметим также, что

$$\text{mes} \left(\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \setminus Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0} \right) \leq 2^{-n} V_1 (r_2 - r_1)^n,$$

где V_1 – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, из (183), (182) и двух последних соотношений следует оценка

$$\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \text{osc}_{Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0}} v \geq 2^{n-4} \frac{b_0 \tau_0}{V_1} (r_2 - r_1)^2 \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}} F(x, \beta M(r_2; u)), \quad (185)$$

из которой, учитывая (181) и очевидное неравенство

$$\sup_{\Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}} v \geq \omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \text{osc}_{Q_{\frac{r_2-r_1}{4}}^{x_0}} v, \quad (186)$$

получаем (178).

Пусть теперь

$$M(r_2; u) > \frac{3}{2}M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right). \quad (187)$$

Положим на этот раз

$$v(x) = u(x) - \frac{1}{2}M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right). \quad (188)$$

Тогда

$$v(x_0) = \frac{1}{2}M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right) > 0, \quad (189)$$

$$\sup_{\Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}} v = M(r_2; u) - \frac{1}{2}M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right). \quad (190)$$

Пусть ω то же, что и ранее, но только для новой функции v , т.е. $\omega = \{x \in \Omega : v(x) > 0\}$. Ввиду (189) $x_0 \in \omega$. Найдется константа $\tau_0 > 0$, зависящая только от A, C_1, C_2, n , такая, что имеет место (182), ибо в противном случае согласно лемме 3.2.1 было бы

$$\sup_{\omega \cap Q_{\frac{r_2 - r_1}{4}}^{x_0}} v > 2A^2 v(x_0),$$

что противоречило бы (189), (190) и неравенству

$$M(r_2; u) \leq A^2 M(r_1; u) < A^2 M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right).$$

Повторяя дословно приведенные выше рассуждения, снова приходим к оценке (185), из которой в силу (190) и (186) получаем

$$\begin{aligned} & M(r_2; u) - \frac{1}{2}M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right) \\ & \geq 2^{n-4} \frac{b_0 \tau_0}{V_1} (r_2 - r_1)^2 \inf_{x \in \Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}} F(x, \beta M(r_2; u)). \end{aligned}$$

Осталось, наконец, заметить, что ввиду (187)

$$2\left(M(r_2; u) - M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right)\right) \geq M(r_2; u) - \frac{1}{2}M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right),$$

и соотношение (178) доказано.

Перейдем теперь к случаю недивергентного оператора $\mathcal{L}$. Пусть, как и ранее, $x_0 \in S_{(r_1+r_2)/2}$, $u(x_0) = M((r_1 + r_2)/2; u)$, и пусть функция v определена равенством (188) и при этом $\omega = \{x \in \Omega: v(x) > 0\}$. Определим также функцию $w: \overline{Q_{(r_2-r_1)/2}^{x_0}} \rightarrow [0, \infty)$, полагая

$$w(x) = \frac{1}{2nC_2} |x - x_0|^2 \inf_{y \in \Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}} F(y, \beta M(r_2; u)), \quad (191)$$

и пусть

$$\lambda = \sup_{\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} (v - w).$$

Тогда вследствие того, что

$$v(x_0) - w(x_0) = \frac{1}{2} M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right),$$

будем иметь

$$\lambda \geq \frac{1}{2} M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right) > 0. \quad (192)$$

С другой стороны,

$$\sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} v - \lambda = \sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} w. \quad (193)$$

Действительно, неравенство

$$\sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} v - \lambda \leq \sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} w$$

вытекает из определения λ . Докажем, что

$$\sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} v - \lambda \geq \sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} w.$$

Предположим, что это не так. Тогда найдется $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda)$ такое, что

$$\sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} v < \sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} w + \tilde{\lambda}. \quad (194)$$

Рассмотрим функцию $\tilde{w}(x) = w(x) + \tilde{\lambda}$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$\mathcal{L}(v - \tilde{w}) \geq 0$$

в $\omega \cap Q_{(r_2-r_1)/2}^{x_0}$. В то же время из (194) и неотрицательности функции $\tilde{w}$ в $Q_{(r_2-r_1)/2}^{x_0}$ имеем

$$(v - \tilde{w}) \Big|_{\partial \left(\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0} \right)} \leq 0$$

(заметим, что $\tilde{w}(x)$ принимает одно и то же значение во всех точках $x \in S_{(r_2-r_1)/2}^{x_0}$). Итак, используя принцип максимума, получим при всех $x \in \omega \cap Q_{(r_2-r_1)/2}^{x_0}$

$$v(x) - \tilde{w}(x) \leq 0,$$

или, другими словами,

$$\tilde{\lambda} \geq \sup_{\omega \cap Q_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} (v - w).$$

Полученное противоречие доказывает (193), из которого в свою очередь с учетом (192) и очевидного неравенства

$$M(r_2; u) - \frac{1}{2} M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right) \geq \sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} v$$

получаем

$$M(r_2; u) - M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}; u\right) \geq \sup_{\omega \cap S_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{x_0}} w,$$

откуда в силу (14) и (191) следует (178).

Всюду ниже под f мы подразумеваем измеримую функцию $f : (R_0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, для которой выполнены соотношения (25)–(27). Одновременно под α_0 мы будем подразумевать величину

$$\alpha_0 = \min \left\{ \frac{b(\tau - 1)}{A\tau}, \frac{b(\tau - 1)^2}{A}, \frac{b}{4\tau} \right\}, \quad (195)$$

где $b > 0$ – константа из леммы 3.2.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.1. *Предположим, что $R_0 \leq r_1 < r_2 < R$, $\max\{R_0, r_2/\sigma\} < \xi_* < \min\{r_2, \sigma r_1\}$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (7) (неравенства (8)) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16). Пусть также $M(r_2; u) \leq A^2 M(r_1; u)$. Тогда*

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b(r_2 - r_1)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)),$$

где постоянная $b > 0$ такая же, как в лемме 3.2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно получается из леммы 3.2.3.

ЛЕММА 3.2.4. Пусть $R_0 \leq \rho < \rho_0 < R$, $\tau\rho \leq \rho_0$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (7) (неравенства (8)) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16). Пусть также $M(\rho_0; u) \leq A^2 M(\rho; u)$. Тогда

$$M(\rho_0; u) - M(\rho; u) \geq A\alpha_0 \int_{\rho}^{\rho_0} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (196)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\rho_i = \rho_0/\tau^i$, $i = 1, 2, \dots$, и пусть k – максимальное целое число такое, что $\rho_k \geq \rho$ (напоминаем, что в начале п. 3.1 мы условились всюду в этом параграфе считать вещественное число R_0 положительным, а стало быть и $\rho > 0$). Ввиду условия $\tau\rho \leq \rho_0$ имеем, очевидно, $k \geq 1$. Для всякого целого числа $1 \leq i \leq k-1$ найдется $\xi_* \in (\rho_i, \rho_{i-1})$ такое, что

$$\int_{\rho_i}^{\rho_{i-1}} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq (\rho_{i-1} - \rho_i) \xi_* f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)).$$

С другой стороны, ввиду того, что

$$\xi_* \leq \rho_{i-1} = \frac{\tau}{\tau-1}(\rho_{i-1} - \rho_i),$$

из (176), (195) и следствия 3.2.1 будем иметь

$$\begin{aligned} M(\rho_{i-1}; u) - M(\rho_i; u) &\geq b(\rho_{i-1} - \rho_i)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)) \\ &\geq A\alpha_0(\rho_{i-1} - \rho_i) \xi_* f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)). \end{aligned}$$

Тем самым, для всех натуральных чисел i таких, что $1 \leq i \leq k-1$, получим

$$M(\rho_{i-1}; u) - M(\rho_i; u) \geq A\alpha_0 \int_{\rho_i}^{\rho_{i-1}} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (197)$$

Аналогично, найдется $\xi_* \in (\rho, \rho_{k-1})$ такое, что

$$\int_{\rho}^{\rho_{k-1}} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq (\rho_{k-1} - \rho) \xi_* f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)).$$

В то же время согласно (176), (195) и неравенству

$$\xi_* \leq \rho_{k-1} \leq \frac{\tau}{\tau-1}(\rho_{k-1} - \rho)$$

из следствия 3.2.1 имеем

$$\begin{aligned} M(\rho_{k-1}; u) - M(\rho; u) &\geq b(\rho_{k-1} - \rho)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)) \\ &\geq A\alpha_0(\rho_{k-1} - \rho) \xi_* f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)), \end{aligned}$$

поэтому

$$M(\rho_{k-1}; u) - M(\rho; u) \geq A\alpha_0 \int_{\rho}^{\rho_{k-1}} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (198)$$

Таким образом, суммируя (197) при всех натуральных i от единицы до $k-1$ включительно, а также (198), получаем (196).

ЛЕММА 3.2.5. Пусть $R_0 \leq \rho_1 < \rho_0 < R$, $\tau\rho_1 \leq \rho_0$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (7) (неравенства (8)) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16) и таким, что $AM(\rho_1; u) = M(\rho_0; u)$ и

$$M(\rho_1; u) - M(R_0; u) \geq \alpha_0 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi \left(1 - \frac{\xi}{\rho_1}\right) f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (199)$$

Тогда

$$M(\rho_0; u) - M(\rho_1; u) \geq \frac{\tau - 1}{4\tau} A\alpha_0 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (200)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сперва, что $\tau R_0 \geq \rho_1$. Найдется $\xi_* \in (R_0, \rho_1)$ такое, что

$$\int_{R_0}^{\rho_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq (\rho_1 - R_0) \xi_* f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)).$$

Учитывая (176) и (195), из следствия 3.2.1 находим

$$\begin{aligned} M(\tau\rho_1; u) - M(\rho_1; u) &\geq b(\tau - 1)^2 \rho_1^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)) \\ &\geq A\alpha_0(\rho_1 - R_0) \xi_* f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$M(\tau\rho_1; u) - M(\rho_1; u) \geq A\alpha_0 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi, \quad (201)$$

что является даже несколько более сильным неравенством, чем (200).

Предположим теперь, что $\tau R_0 < \rho_1$ и при этом

$$\frac{1}{2} \int_{R_0}^{\rho_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq \int_{R_0}^{\rho_1/\tau} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi.$$

Из соотношения (199) получим

$$M(\rho_1; u) - M(R_0; u) \geq \alpha_0 \frac{\tau - 1}{\tau} \int_{R_0}^{\rho_1/\tau} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi;$$

отсюда и из предыдущего неравенства будем иметь

$$M(\rho_1; u) - M(R_0; u) \geq \alpha_0 \frac{\tau - 1}{2\tau} \int_{R_0}^{\rho_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (202)$$

Но

$$M(\rho_0; u) - M(\rho_1; u) = (A - 1)M(\rho_1; u) \geq \frac{A}{2}M(\rho_1; u).$$

Таким образом, (200) немедленно следует из (202).

Пусть, наконец, $\tau R_0 < \rho_1$ и при этом

$$\frac{1}{2} \int_{R_0}^{\rho_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq \int_{\rho_1/\tau}^{\rho_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (203)$$

Тогда, повторяя дословно рассуждения, которые ранее привели нас к (201), с той лишь разницей, что вместо R_0 теперь всюду следует писать ρ_1/τ , получим

$$M(\tau \rho_1; u) - M(\rho_1; u) \geq A\alpha_0 \int_{\rho_1/\tau}^{\rho_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

откуда ввиду (203) и вытекает оценка (200).

ЛЕММА 3.2.6. Пусть $R_0 < r_1 < r_0 < R$, $r_0 \leq \tau r_1$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (7) (неравенства (8)) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \bar{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16) и таким, что $AM(r_1; u) = M(r_0; u)$. Пусть также для всякого $r \in (R_0, r_1)$ имеет место (173). Тогда

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq 2\alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (204)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку мы считаем, что в (14) имеет место строгое неравенство, то найдется натуральное число m такое, что

$$A^m M(R_0; u) \geq M(r_1; u), \quad A^{m-1} M(R_0; u) < M(r_1; u).$$

Доказательство леммы будем вести индукцией по этому числу m .

База индукции. Пусть $m = 1$; тогда $A^2 M(R_0; u) \geq M(r_0; u)$. Предположим сначала, что $\tau R_0 \geq r_0$. Найдется $\xi_* \in (R_0, r_0)$ такое, что

$$\int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq (r_0 - R_0) \xi_*^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)),$$

откуда ввиду очевидного неравенства

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \xi_*^2 \leq \tau(r_0 - r_1) \leq \tau(r_0 - R_0)$$

получим

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq \tau(r_0 - R_0)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)).$$

В то же время согласно (195) и следствию 3.2.1

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(R_0; u) &\geq b(r_0 - R_0)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)) \\ &\geq 4\alpha_0 \tau (r_0 - R_0)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$M(r_0; u) - M(R_0; u) \geq 4\alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (205)$$

Но ввиду того, что $M(r_0; u) = AM(r_1; u)$, $A > 2$, имеем

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) > \frac{1}{2} M(r_0; u) > \frac{1}{2} (M(r_0; u) - M(R_0; u)),$$

поэтому (204) немедленно следует из (205).

Пусть теперь $\tau R_0 < r_0$; тогда, применяя лемму 3.2.4, находим

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(R_0; u) &\geq A\alpha_0 \int_{R_0}^{r_0} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \\ &\geq \frac{A\alpha_0}{\tau} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi; \end{aligned}$$

отсюда и из (176) вновь получаем (204).

Шаг индукции. Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех натуральных чисел $m < m_0$. Докажем, что оно будет также справедливо и для $m = m_0$.

Построим конечную последовательность вещественных чисел $\{r_i\}_{i=2}^{m_0}$, исходя из равенства $A^i M(r_i; u) = M(r_0; u)$. Очевидно, что такая последовательность существует и удовлетворяет соотношению $R_0 < r_m < r_{m-1} < \dots < r_1$. По определению числа m будем иметь $AM(R_0; u) \geq M(r_m; u)$. Обозначим $r_{m+1} = R_0$.

Допустим сначала, что

$$\frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq \int_{r_1}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (206)$$

Заметим, что все рассуждения, приведшие к (205), проходят и в случае $R_0 = r_1$. Поэтому будем иметь

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq 4\alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{r_1}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

откуда, учитывая (206), получаем (204).

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq \int_{R_0}^{r_1} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

и пусть $k \in \{1, \dots, m\}$ – максимальное число такое, что для всякого натурального i , удовлетворяющего неравенству $1 \leq i \leq k$, выполнены соотношения: $\tau r_i \geq r_{i-1}$,

$$\frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_{i-1}} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq \int_{R_0}^{r_i} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \quad (207)$$

и

$$r_{i-1} - r_i \leq \varepsilon^{i-1} (r_0 - r_1). \quad (208)$$

Тогда обязательно должен иметь место хотя бы один из случаев, приведенных ниже в пп. 1) – 4).

1) Справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_k} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq \int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi, \quad (209)$$

и одновременно $\tau r_{k+1} < r_k$. Применяя лемму 3.2.4, получим

$$\begin{aligned} M(r_k; u) - M(r_{k+1}; u) &\geq A\alpha_0 \int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \\ &\geq A\alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi, \end{aligned}$$

откуда ввиду (209) и (207) находим

$$M(r_k; u) - M(r_{k+1}; u) \geq \frac{A\alpha_0}{2^{k+1}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi.$$

Но согласно определению r_i , $i = 2, \dots, k+1$,

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq A^k (M(r_k; u) - M(r_{k+1}; u)). \quad (210)$$

Тем самым,

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \left(\frac{A}{2} \right)^{k+1} \alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

откуда ввиду неравенства $A > 2$ и следует (204).

2) Справедливы неравенства $\tau r_{k+1} \geq r_k$ и

$$r_k - r_{k+1} > \varepsilon^k (r_0 - r_1). \quad (211)$$

В случае $r_{k+1} > R_0$ будем иметь $M(r_k; u) = AM(r_{k+1}; u)$. Таким образом, согласно предположению индукции выполнена оценка

$$M(r_k; u) - M(r_{k+1}; u) \geq 2\alpha_0 \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{1}{r_k} \right) \int_{R_0}^{r_k} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (212)$$

В случае же, когда $r_{k+1} = R_0$, дословно повторяя рассуждения, в результате которых было получено (205), с той лишь разницей, что теперь вместо r_0 надлежит всюду писать r_k , а вместо r_1 — писать r_{k+1} , снова приходим к (212).

Далее, из (211) следует, что

$$\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{1}{r_k} > \varepsilon^k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right);$$

отсюда, а также из (212), (210) и (207) будем иметь

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq 2\alpha_0 \left(\frac{A\varepsilon}{2} \right)^k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi.$$

Осталось заметить, что $A\varepsilon/2 \geq 1$, и (204) доказано.

3) Справедливы неравенство (209) и неравенство

$$r_k - r_{k+1} \leq \varepsilon^k (r_0 - r_1). \quad (213)$$

Найдется вещественное число $\xi_* \in (r_{k+1}, r_k)$ такое, что

$$\int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq (r_k - r_{k+1}) \xi_*^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)),$$

откуда в силу (207), (209), (213) и того обстоятельства, что

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \xi_*^2 \leq r_0 - r_1,$$

находим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \\ & \leq 2^{k+1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \\ & \leq 2^{k+1} (r_k - r_{k+1}) (r_0 - r_1) f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)) \\ & \leq 2^{k+1} \varepsilon^k (r_0 - r_1)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)). \end{aligned} \quad (214)$$

В то же время из (208) и (213), очевидно, вытекает, что

$$r_1 - r_{k+1} \leq \frac{\varepsilon(r_0 - r_1)}{1 - \varepsilon},$$

поэтому из (175), а также из условия $\tau r_1 \geq r_0$ получим $\tau r_{k+1} \geq r_1$. Таким образом, согласно следствию 3.2.1 и соотношению (195)

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(r_1; u) &\geq b(r_0 - r_1)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)) \\ &\geq 4\alpha_0(r_0 - r_1)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)). \end{aligned} \quad (215)$$

Далее, ввиду (175) $2\varepsilon < 1$, поэтому из (214) и (215) непосредственно следует (204).

4) Справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_k} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq \int_{R_0}^{r_{k+1}} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi, \quad (216)$$

и одновременно $\tau r_{k+1} < r_k$. Тогда по лемме 3.2.5 имеем

$$\begin{aligned} M(r_k; u) - M(r_{k+1}; u) &\geq \frac{\tau - 1}{4\tau} A\alpha_0 \int_{R_0}^{r_{k+1}} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \\ &\geq \frac{\tau - 1}{4\tau} A\alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_{k+1}} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi, \end{aligned}$$

а значит, согласно (216), (207) и (210) выполнена оценка

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\tau - 1}{4\tau} \left(\frac{A}{2} \right)^{k+1} \alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

из которой в силу равенства (176) получаем (204). Тем самым, лемма 3.2.6 полностью доказана.

Доказательство неравенства (173). Предположим, что $r \in (R_0, R)$, и пусть m – минимальное натуральное число такое, что $A^m M(R_0; u) \geq M(r; u)$. Такое число существует ввиду условия $M(R_0; u) > 0$. Доказательство неравенства (173) будем вести индукцией по этому числу m .

База индукции. Пусть $m = 1$, т.е. $AM(R_0; u) \geq M(r; u)$. Рассмотрим сперва случай $\tau R_0 \geq r$. Очевидно, найдется $\xi_* \in (R_0, r)$ такое, что

$$\int_{R_0}^r \xi \left(1 - \frac{\xi}{r} \right) f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \leq (r - R_0) \xi_* \left(1 - \frac{\xi_*}{r} \right) f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)).$$

В то же время из (195), следствия 3.2.1 и тривиальной оценки

$$\xi_* \left(1 - \frac{\xi_*}{r} \right) \leq r - R_0$$

имеем

$$\begin{aligned} M(r; u) - M(R_0; u) &\geq b(r - R_0)^2 f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)) \\ &\geq \alpha_0(r - R_0) \xi_* \left(1 - \frac{\xi_*}{r}\right) f(\xi_*, \beta M(\xi_*; u)), \end{aligned}$$

откуда и получается (173).

Предположим теперь, что $\tau R_0 < r$. Тогда по лемме 3.2.4

$$\begin{aligned} M(r; u) - M(R_0; u) &\geq A\alpha_0 \int_{R_0}^r \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \\ &\geq \alpha_0 \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \frac{\xi}{r}\right) f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \end{aligned}$$

Шаг индукции. Пусть (173) выполнено для всех натуральных $m < m_0$; тогда оно выполнено и для $m = m_0$. Докажем это.

Возьмем $r_1 \in (R_0, r)$ такое, что $AM(r_1; u) = M(r; u)$. Согласно предположению индукции

$$M(r_1; u) - M(R_0; u) \geq \alpha_0 \int_{R_0}^{r_1} \xi \left(1 - \frac{\xi}{r_1}\right) f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi. \quad (217)$$

Таким образом, если нам удастся доказать неравенство

$$\begin{aligned} M(r; u) - M(r_1; u) &\geq \alpha_0 \int_{r_1}^r \xi \left(1 - \frac{\xi}{r}\right) f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \\ &\quad + \alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \int_{R_0}^{r_1} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi, \end{aligned} \quad (218)$$

то, складывая (217) и (218), моментально получим (173).

В свою очередь, если мы установим справедливость двух оценок:

$$M(r; u) - M(r_1; u) \geq 2\alpha_0 \int_{r_1}^r \xi \left(1 - \frac{\xi}{r}\right) f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \quad (219)$$

и

$$M(r; u) - M(r_1; u) \geq 2\alpha_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \int_{R_0}^{r_1} \xi^2 f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi, \quad (220)$$

то, складывая их, очевидно, будем иметь (218).

Предположим сначала, что $\tau r_1 < r$. Тогда по лемме 3.2.4

$$M(r; u) - M(r_1; u) \geq A\alpha_0 \int_{r_1}^r \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

откуда непосредственно следует неравенство (219). С другой стороны, по лемме 3.2.5

$$M(r; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\tau - 1}{4\tau} A\alpha_0 \int_{R_0}^{r_1} \xi f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

откуда получаем (220).

В случае же $\tau r_1 \geq r$ доказательство (219) дословно повторяет доказательство базы индукции, в то время как (220) вытекает из леммы 3.2.6. Тем самым неравенство (173) полностью доказано.

3.3. Целью этого пункта является получение оценки (174) в случае дифференциального оператора L в дивергентной форме. Тем самым теорема 1.1.1' будет полностью доказана.

Пусть $\nu, \delta, \theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – константы из предпосылки теоремы 1.1.1. Возьмем в качестве τ произвольное вещественное число такое, что $1 + \delta < \tau < \theta$, и поделим ε и A соответственно с помощью (175) и (176). Существует вещественное число η , удовлетворяющее неравенствам: $1 < \eta \leq \nu$, $0 < \delta < 1/\eta$, $1 + \delta\eta < \tau$ и $\tau/(1 - \delta\eta) < \theta/(1 - \delta)$. Зафиксируем на протяжении настоящего пункта какое-то одно подобное значение η . Очевидно, η будет зависеть только от δ, θ, τ . В свою очередь, τ зависит только от δ, θ . Наконец, положим $\zeta = \min\{\theta/\tau, \tau/(1 + \delta\eta)\}$. В силу всего ранее сказанного $\zeta > 1$.

ЛЕММА 3.3.1. Пусть $x^0 \in \Omega$, $\rho > 0$, а $u \in C^2(\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}) \cap C(\overline{\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}})$ является неотрицательным решением неравенства (19) в области $\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}$, удовлетворяющим условию

$$u|_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \cap \partial\Omega} = 0. \quad (221)$$

Тогда

$$\sup_{\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}} u - u(x^0) \geq b_1 \rho^{2-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q_{\rho}^{x^0}}, Q_{\eta\rho}^{x^0}) \sup_{\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}} u, \quad (222)$$

где постоянная $b_1 > 0$ зависит только от n, η, C_1, C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G(x, y)$ – функция Грина оператора L вида (1) в области $\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}$, т.е.

$$\begin{aligned} LG(x, y) &= \delta(x - y) \quad \text{при } x, y \in \Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}, \\ G(x, y) &= 0 \quad \text{при } x \in \partial(\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}), \quad y \in \Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}. \end{aligned}$$

Тогда для всякого $y \in \Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}$ будем иметь

$$u(y) = \int_{\partial(\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0})} u(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x + \int_{\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}} G(x, y) Lu(x) dx, \quad (223)$$

где ν_x – внешняя по отношению к $\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}$ координатная нормаль в точке $x \in \partial(\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0})$, определяемая матрицей $\|a_{ij}(x)\|$, dS_x – элемент $(n - 1)$ -мерного объема границы области $\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}$.

Ввиду (19), (221), а также того обстоятельства, что $G(x, y) \leq 0$ при $x, y \in \Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}$, из (223) будем иметь для любого $y \in \Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x^0}$

$$u(y) \leq \int_{\Omega \cap S_{\eta\rho}^{x^0}} u(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x \leq \max_{\Omega \cap S_{\eta\rho}^{x^0}} u \int_{\Omega \cap S_{\eta\rho}^{x^0}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x. \quad (224)$$

По известному свойству функции Грина для всякого $y \in \Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x_0}$

$$\int_{\partial(\Omega \cap Q_{\eta\rho}^{x_0})} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x = 1.$$

Тем самым,

$$\int_{\Omega \cap S_{\eta\rho}^{x_0}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x = 1 - \int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \cap \partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x,$$

и из (224) получим

$$\max_{\Omega \cap S_{\eta\rho}^{x_0}} u - u(y) \geq \max_{\Omega \cap S_{\eta\rho}^{x_0}} u \int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \cap \partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x. \quad (225)$$

Возьмем $y \in S_{\sqrt{\eta}\rho}^{x_0}$ такой, что

$$u(y) = \max_{\Omega \cap S_{\sqrt{\eta}\rho}^{x_0}} u, \quad (226)$$

и для этого y оценим снизу значение интеграла, стоящего в правой части (225).

Рассмотрим решение задачи Дирихле

$$Lv = 0 \quad \text{в } Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}}), \quad (227)$$

$$v|_{D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}}} = 1, \quad v|_{S_{\eta\rho}^{x_0}} = 0. \quad (228)$$

Ввиду неравенства

$$\int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}})} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \geq C_1 \int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}})} |\nabla v|^2 dx$$

из определения емкости (4) находим

$$\int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}})} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \geq C_1 \operatorname{cap} (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}}, Q_{\eta\rho}^{x_0}). \quad (229)$$

Если $\operatorname{cap} (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}}, Q_{\eta\rho}^{x_0}) = 0$, то доказательство (222) не представляет никакого труда. Таким образом, мы можем считать, что

$$\operatorname{cap} (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}}, Q_{\eta\rho}^{x_0}) > 0.$$

Тогда из (229) следует, что v не равно константе в $Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}})$.

Обозначим

$$m = \max_{S_{\sqrt{\eta\rho}}^{x^0}} v.$$

Согласно принципу максимума

$$m = \max_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \setminus Q_{\sqrt{\eta\rho}}^{x^0}} v,$$

причем $0 < m < 1$, и $v(x) < m$ для всякого $x \in \overline{Q_{\eta\rho}^{x^0}} \setminus Q_{\sqrt{\eta\rho}}^{x^0}$. Поэтому множество $K = \{x \in \overline{Q_{\eta\rho}^{x^0}} : v(x) \geq m\}$ принадлежит замкнутому шару $\overline{Q_{\sqrt{\eta\rho}}^{x^0}}$. Одновременно с этим $D \cap \overline{Q_{\rho}^{x^0}} \subset K$.

Следуя рассуждениям, приведенным в работе [9], покажем, что

$$m \geq b_2 \rho^{2-n} \operatorname{cap} \left(D \cap \overline{Q_{\rho}^{x^0}}, Q_{\eta\rho}^{x^0} \right), \quad (230)$$

где постоянная $b_2 > 0$ зависит только от n, η, C_1, C_2 .

Положим

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} v(x), & x \in Q_{\eta\rho}^{x^0} \setminus K, \\ 1, & x \in K. \end{cases}$$

Определенная таким образом функция $\tilde{v}$ будет являться решением задачи Дирихле

$$L\tilde{v} = 0 \quad \text{в } Q_{\eta\rho}^{x^0} \setminus K, \quad (231)$$

$$\tilde{v}|_K = 1, \quad \tilde{v}|_{S_{\eta\rho}^{x^0}} = 0. \quad (232)$$

Согласно вариационному принципу

$$\int_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} dx = \inf \int_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx,$$

где $\inf$ в правой части берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(Q_{\eta\rho}^{x^0})$, равным единице в некоторой окрестности множества K . Для всякой такой функции φ в силу условия эллиптичности (2)

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} dx &\leq \int_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &\leq C_2 \int_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \setminus K} |\nabla \varphi|^2 dx. \end{aligned}$$

Минимизируя по φ правую часть последнего неравенства, получим

$$\int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} dx \leq C_2 \operatorname{cap} \left(K, Q_{\eta\rho}^{x_0} \right). \quad (233)$$

Учитывая (231) и (232), будем иметь

$$\int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} dx = \int_{\partial K} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu_x} dS_x = \frac{1}{m} \int_{\partial K} \frac{\partial v}{\partial \nu_x} dS_x,$$

где ν_x — внешняя по отношению к области $Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus K$ конормаль в точке $x \in \partial K$, определяемая матрицей $\|a_{ij}(x)\|$.

Точно так же из (227) и (228) следует, что

$$\int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}})} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\partial(D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}})} \frac{\partial v}{\partial \nu_x} dS_x = \int_{\partial K} \frac{\partial v}{\partial \nu_x} dS_x.$$

Поэтому

$$m \int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} dx = \int_{Q_{\eta\rho}^{x_0} \setminus (D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}})} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx,$$

откуда ввиду (229) и (233) получаем

$$m \geq \frac{C_1 \operatorname{cap} \left(D \cap \overline{Q_\rho^{x_0}}, Q_{\eta\rho}^{x_0} \right)}{C_2 \operatorname{cap} \left(K, Q_{\eta\rho}^{x_0} \right)}. \quad (234)$$

Из последнего неравенства и очевидной оценки

$$\operatorname{cap} \left(K, Q_{\eta\rho}^{x_0} \right) \leq \operatorname{cap} \left(\overline{Q_{\sqrt{\eta\rho}}^{x_0}}, Q_{\eta\rho}^{x_0} \right) \leq b_3 \rho^{n-2},$$

где $b_3 > 0$ зависит только от n, η , и вытекает (230).

Заметим, что всюду выше мы без ограничения общности можем считать, что компакт K имеет бесконечно гладкую границу. Если это не так, то по теореме Сарда [10] найдется вещественное число $m' \in (m, 1)$, сколь угодно близкое к m и такое, что компакт $K' = \left\{ x \in \overline{Q_{\eta\rho}^{x_0}} : v(x) \geq m' \right\}$ имеет бесконечно гладкую границу. Повторяя все приведенные ранее рассуждения с заменой m на m' , K на K' , а затем устремляя m' к m , опять приходим к (230).

Далее, несложно показать, что

$$\min_{S_{\sqrt{\eta\rho}}^{x_0}} v > b_4 m,$$

где постоянная $b_4 > 0$ зависит только от n, η, C_1, C_2 . Действительно, покроем $S_{\sqrt{\eta}\rho}^{x^0}$ конечным числом шаров радиусами $(\sqrt{\eta} - 1)\rho/2$, центры которых принадлежат $S_{\sqrt{\eta}\rho}^{x^0}$. Разумеется, можно добиться, чтобы число этих шаров не превосходило некоторой константы, зависящей только от n, η . Согласно неравенству Харнака [26] на каждом из указанных шаров отношение минимального значения функции v к максимальному не менее некоторой положительной величины, зависящей только от n, C_1, C_2 .

Таким образом, из (230) будем иметь

$$v(y) \geq b_1 \rho^{2-n} \operatorname{cap} \left(D \cap \overline{Q_\rho^{x^0}}, Q_{\eta\rho}^{x^0} \right), \quad (235)$$

где $y \in S_{\sqrt{\eta}\rho}^{x^0}$ удовлетворяет соотношению (226), $b_1 = b_2 b_4$.

Ограничивая функцию v на область $Q_{\eta\rho}^{x^0} \cap \Omega$ и применяя формулу Грина, получим, учитывая (227), (228), а также то обстоятельство, что в силу принципа максимума

$$v|_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \cap \partial\Omega} \leq 1,$$

следующую оценку:

$$v(y) = \int_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \cap \partial\Omega} v(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x \leq \int_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \cap \partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x.$$

Поэтому ввиду (235) имеем

$$\int_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \cap \partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x \geq b_1 \rho^{2-n} \operatorname{cap} \left(D \cap \overline{Q_\rho^{x^0}}, Q_{\eta\rho}^{x^0} \right);$$

отсюда, а также из (225) находим

$$\max_{S_{\eta\rho}^{x^0} \cap \Omega} u - u(y) \geq b_1 \rho^{2-n} \operatorname{cap} \left(D \cap \overline{Q_\rho^{x^0}}, Q_{\eta\rho}^{x^0} \right) \max_{S_{\eta\rho}^{x^0} \cap \Omega} u.$$

Осталось заметить, что в соответствии с принципом максимума

$$\max_{S_{\eta\rho}^{x^0} \cap \Omega} u = \sup_{Q_{\eta\rho}^{x^0} \cap \Omega} u$$

и

$$u(y) = \max_{S_{\sqrt{\eta}\rho}^{x^0} \cap \Omega} u \geq u(x^0),$$

и доказательство неравенства (222) полностью завершено.

ЛЕММА 3.3.2. Пусть $0 < \rho_4 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$, $0 < k_1 < 1$, $0 < k_2 < 1$, $\rho_2 \leq k_1 \rho_1$, $k_2 \rho_1 \leq \rho_4 \leq k_1 \rho_3$, и пусть функция $u \in C^2(\Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) \cap C(\overline{\Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus Q_{\rho_4}})$ является неотрицательным решением неравенства (19) в области $\Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}$, удовлетворяющим условиям (14) и

$$u|_{(\partial\Omega) \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}} = 0.$$

Тогда

$$M(\rho_1; u) - M(\rho_2; u) \geq b_5 \rho_1^{2-n} \text{cap}(D \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) M(\rho_1; u), \quad (236)$$

где постоянная $b_5 > 0$ зависит только от n, k_1, k_2, C_1, C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОЙ леммы во многом сходно с доказательством леммы 3.3.1. Обозначим $\Pi_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n): x_n \geq 0\}$, $\Pi_- = \{x = (x_1, \dots, x_n): x_n \leq 0\}$, $D_+ = D \cap \Pi_+$, $D_- = D \cap \Pi_-$. Пусть $G(x, y)$ – функция Грина оператора L вида (1) в области $\Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}$, т.е.

$$\begin{aligned} LG(x, y) &= \delta(x - y) \quad \text{при } x, y \in \Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}, \\ G(x, y) &= 0 \quad \text{при } x \in \partial(\Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}), \quad y \in \Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}. \end{aligned}$$

Повторяя дословно вывод формулы (225), с учетом неравенства $M(\rho_4; u) \leq M(\rho_1; u)$ будем иметь для любого $y \in \Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}$

$$M(\rho_1; u) - u(y) \geq M(\rho_1; u) \int_{(\partial\Omega) \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x, \quad (237)$$

где ν_x – внешняя по отношению к области $\Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}$ кономаль в точке $x \in (\partial\Omega) \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}$, определяемая матрицей $\|a_{ij}(x)\|$, dS_x – элемент $(n-1)$ -мерного объема гиперповерхности $(\partial\Omega) \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}$.

Положим $K_+ = \{x: \text{dist}(x, \Pi_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}) \leq (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4\}$. Несложно увидеть, что ∂K_+ представляет собой связное множество и $K_+ \subset \overline{Q}_{\sqrt{k_1}\rho_1} \setminus Q_{\sqrt{k_1}\rho_3}$. Из последнего включения, в частности, имеем

$$\text{cap}(K_+, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) \leq \text{cap}(\overline{Q}_{\sqrt{k_1}\rho_1} \setminus Q_{\sqrt{k_1}\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) \leq b_6 \rho_1^{n-2}, \quad (238)$$

где постоянная $b_6 > 0$ зависит только от n, k_1, k_2 .

Пусть $y \in \Omega \cap S_{\rho_2 + (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4}$ такой, что

$$u(y) = \max_{\Omega \cap S_{\rho_2 + (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4}} u. \quad (239)$$

Оценим для этого u значение интеграла, стоящего в правой части (237). Рассмотрим решение v задачи Дирихле

$$\begin{aligned} Lv = 0 \quad & \text{в } Q_{\rho_1} \setminus (D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}) \setminus \overline{Q}_{\rho_4}, \\ v|_{D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}} = 1, \quad & v|_{S_{\rho_1}} = v|_{S_{\rho_4}} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$m = \max_{\partial K_+} v.$$

Согласно принципу максимума $0 \leq m \leq 1$. Найдется постоянная $b_7 > 0$, зависящая только от n, k_1, k_2, C_1, C_2 , такая, что

$$m \geq b_7 \rho_1^{2-n} \operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}). \quad (240)$$

В самом деле, если

$$\operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) = 0,$$

то неравенство (240) очевидно. Пусть

$$\operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) > 0;$$

тогда v на множестве $Q_{\rho_1} \setminus (D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}) \setminus \overline{Q}_{\rho_4}$ не равно тождественно константе, поэтому $0 < m < 1$, и $v(x) < m$ для всякого $x \in Q_{\rho_1} \setminus (K_+ \cup \overline{Q}_{\rho_4})$. Таким образом, множество $K = \{x \in Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4} : v(x) \geq m\}$ принадлежит K_+ . Одновременно с этим $D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3} \subset K$. Повторяя дословно рассуждения, приведшие к (234), получим

$$m \geq \frac{C_1 \operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4})}{C_2 \operatorname{cap}(K, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4})}, \quad (241)$$

откуда и следует (240) ввиду (238) и тривиальной оценки

$$\operatorname{cap}(K, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) \leq \operatorname{cap}(K_+, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}).$$

Как уже было сказано, ∂K_+ — связное множество, причем

$$S_{\rho_2 + (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4} \cap \partial K_+ \neq \emptyset,$$

и функция v удовлетворяет уравнению $Lv = 0$ в $((\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4)$ -окрестности множества $S_{\rho_2 + (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4} \cup \partial K_+$. Покроем $S_{\rho_2 + (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4} \cup \partial K_+$ конечным числом шаров радиусами $(\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4/2$, центры которых принадлежат множеству $S_{\rho_2 + (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4} \cup \partial K_+$, добившись при этом, чтобы общее количество этих шаров

не превышало некоторой константы, зависящей только от n, k_1, k_2 (такая константа, разумеется, существует). На каждом из указанных выше шаров по теореме Харнака [26] отношение минимального значения функции v к максимальному не меньше некоторого положительного числа, зависящего только от n, C_1, C_2 . Тогда найдется постоянная $b_8 > 0$, зависящая лишь от n, k_1, k_2, C_1, C_2 , такая, что

$$v(y) \geq b_8 m,$$

где $y \in \Omega \cap S_{\rho_2 + (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4}$ удовлетворяет соотношению (239). Тем самым, из (240) будем иметь

$$v(y) \geq 2b_5 \rho_1^{2-n} \operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}), \quad (242)$$

где $b_5 = b_7 b_8 / 2$.

Далее, ограничивая v на множество $\Omega \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}$, ввиду неравенства

$$v|_{(\partial\Omega) \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}} \leq 1,$$

вытекающего из принципа максимума, получим, применяя формулу Грина:

$$v(y) = \int_{(\partial\Omega) \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}} v(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x \leq \int_{(\partial\Omega) \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x.$$

В свою очередь, из последнего неравенства и из (242) находим

$$\int_{(\partial\Omega) \cap Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} dS_x \geq 2b_5 \rho_1^{2-n} \operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4});$$

отсюда, а также из (237) имеем

$$M(\rho_1; u) - u(y) \geq 2b_5 \rho_1^{2-n} \operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) M(\rho_1; u). \quad (243)$$

В силу условия (14)

$$u(y) = M(\rho_2 + (\sqrt{k_1} - k_1)\rho_4; u) \geq M(\rho_2; u).$$

Следовательно, (243) влечет за собой оценку

$$\begin{aligned} M(\rho_1; u) - M(\rho_2; u) \\ \geq 2b_5 \rho_1^{2-n} \operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) M(\rho_1; u). \end{aligned} \quad (244)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} M(\rho_1; u) - M(\rho_2; u) \\ \geq 2b_5 \rho_1^{2-n} \operatorname{cap}(D_- \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) M(\rho_1; u). \end{aligned} \quad (245)$$

По свойству полуаддитивности емкости

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}(D_+ \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) + \operatorname{cap}(D_- \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) \\ \geq \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}). \end{aligned}$$

Таким образом, складывая (244) и (245), получаем (236).

ЛЕММА 3.3.3. Пусть $R_0/(1 - \delta\eta) \leq r_1 < r_2 < R$, $r_2 \leq \tau r_1$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (19) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16) и таким, что $AM(r_1; u) \leq M(r_2; u) \leq A^2 M(r_1; u)$. Тогда

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_9(r_2 - r_1)^2 \lambda^2 M(r_2; u), \quad (246)$$

где

$$\lambda = \inf_{x \in \Omega \cap Q_{\zeta r_1} \setminus Q_{r_1}} \sup_{\xi \in (0, \delta|x|)} \xi^{1-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_\xi^x, Q_{\eta\xi}^x), \quad (247)$$

постоянная $b_9 > 0$ зависит только от $n, \eta, \zeta, \tau, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda = 0$, то неравенство (246) очевидно. Будем считать, что $\lambda > 0$. В соответствии с определением λ для всякого $x \in \Omega$, удовлетворяющего соотношению

$$r_1 \leq |x| \leq \min \left\{ \zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2} \right\}, \quad (248)$$

найдем $\xi \in (0, \delta|x|)$ такое, что

$$\xi^{1-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_\xi^x, Q_{\eta\xi}^x) \geq \frac{\lambda}{2}. \quad (249)$$

Предположим сперва, что существуют $x \in \Omega$ и $\xi \in (0, \delta|x|)$, для которых одновременно с (248) и (249) выполнено также неравенство

$$\xi \geq \frac{r_2 - r_1}{2\eta}.$$

Тогда, с одной стороны, по свойству монотонности емкости будем иметь

$$\frac{\lambda}{4\eta}(r_2 - r_1) \leq \xi^{2-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_\xi^x, Q_{\eta\xi}^x) \leq \xi^{2-n} \operatorname{cap}(\overline{Q}_\xi^x, Q_{\eta\xi}^x) \leq b_{10}, \quad (250)$$

где $b_{10} > 0$ зависит только от n, η . Следовательно,

$$1 \geq \frac{1}{16b_{10}^2\eta^2} \lambda^2 (r_2 - r_1)^2. \quad (251)$$

С другой стороны,

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq \frac{A-1}{A^2} M(r_2; u). \quad (252)$$

Перемножая (251) и (252), получаем (246).

Пусть теперь для всяких $x \in \Omega$ и $\xi \in (0, \delta|x|)$ из (248) и (249) вытекает неравенство

$$\xi < \frac{r_2 - r_1}{2\eta}.$$

Построим последовательность вещественных чисел $\rho_i \in [r_1, r_2)$, $\xi_i \in (0, (r_2 - r_1)/2)$ и точек $x_i \in \Omega \cap S_{\rho_i}$, $i = 0, 1, \dots$, следующим образом. Полагаем $\rho_0 = r_1$ и возьмем $x_0 \in \Omega \cap S_{\rho_0}$, $\xi_0 \in (0, \delta\rho_0)$ такие, что

$$\begin{aligned} u(x_0) &= M(\rho_0; u), \\ \xi_0^{1-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q_{\xi_0}^{x_0}}, Q_{\eta\xi_0}^{x_0}) &\geq \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Предположим, далее, что ρ_{i-1} , ξ_{i-1} , x_{i-1} уже построены, причем

$$r_1 \leq \rho_{i-1} < \min\left\{\zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2}\right\}.$$

Полагаем $\rho_i = \rho_{i-1} + \eta\xi_{i-1}$. Если

$$\rho_i \geq \min\left\{\zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2}\right\},$$

то на этом процесс обрывается. Если

$$\rho_i < \min\left\{\zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2}\right\},$$

то возьмем $x_i \in \Omega \cap S_{\rho_i}$, $\xi_i \in (0, \delta\rho_i)$ такие, что

$$u(x_i) = M(\rho_i; u), \tag{253}$$

$$\xi_i^{1-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q_{\xi_i}^{x_i}}, Q_{\eta\xi_i}^{x_i}) \geq \frac{\lambda}{2}. \tag{254}$$

Заметим, что ввиду неравенств

$$\begin{aligned} \xi_{i-1} &< \frac{r_2 - r_1}{2\eta}, \\ \rho_{i-1} &< \min\left\{\zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2}\right\} \end{aligned}$$

всегда будем иметь $\rho_i \in [r_1, r_2)$.

Изложенный выше процесс обязан оборваться на конечном шаге. Действительно, существует вещественное число $d > 0$ такое, что $\operatorname{dist}(x_i, \partial\Omega) > d$ при

всех $i = 0, 1, \dots$. Если это не так, то для некоторой подпоследовательности $\{x_{i_j}\}_{j=0,1,\dots}$ последовательности $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$ будем иметь

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist} \left(x_{i_j}, \partial\Omega \right) = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности функции u на множестве $\overline{\Omega \cap Q_{r_2} \setminus Q_{r_1}}$ и условия (16) получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M \left(\rho_{i_j}; u \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} u \left(x_{i_j} \right) = 0.$$

Тем самым приходим к противоречию с (14) и (15). Значит, согласно (254) $\xi_i > d$ при всех $i = 0, 1, \dots$, поэтому $\rho_i > r_1 + i\eta d$.

Пусть k – натуральное число такое, что

$$\begin{aligned} \rho_k &\geq \min \left\{ \zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2} \right\}, \\ \rho_{k-1} &< \min \left\{ \zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.3.1, имеем для всех $i \in \{0, \dots, k-1\}$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega \cap Q_{\eta \xi_i}^{x_i}} u - u(x_i) &\geq b_1 \xi_i^{2-n} \text{cap} \left(D \cap \overline{Q_{\xi_i}^{x_i}}, Q_{\eta \xi_i}^{x_i} \right) \sup_{\Omega \cap Q_{\eta \xi_i}^{x_i}} u \\ &\geq \frac{b_1}{2\eta} (\rho_{i+1} - \rho_i) \lambda \sup_{\Omega \cap Q_{\eta \xi_i}^{x_i}} u, \end{aligned} \quad (255)$$

где $b_1 > 0$ – константа из неравенства (222). По построению x_i $u(x_i) = M(\rho_i; u)$. В то же время согласно соотношению

$$M(\rho_i; u) \geq \frac{1}{A^2} M(r_2; u)$$

и принципу максимума получим

$$\frac{1}{A^2} M(r_2; u) \leq \sup_{\Omega \cap Q_{\eta \xi_i}^{x_i}} u \leq M(\rho_{i+1}; u).$$

Таким образом, из (255) находим

$$M(\rho_{i+1}; u) - M(\rho_i; u) \geq \frac{b_1}{2\eta A^2} (\rho_{i+1} - \rho_i) \lambda M(r_2; u).$$

Суммируя последнюю оценку по всем $i \in \{0, \dots, k-1\}$, будем иметь

$$M(\rho_k; u) - M(r_1; u) \geq \frac{b_1}{2\eta A^2} (\rho_k - r_1) \lambda M(r_2; u). \quad (256)$$

Ввиду (14) $M(r_2; u) \geq M(\rho_k; u)$. Одновременно с этим по определению натурального числа k

$$\rho_k - r_1 \geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\zeta - 1}{\tau - 1}\right\}(r_2 - r_1).$$

Полагая

$$b_{11} = \frac{b_1}{2\eta A^2} \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\zeta - 1}{\tau - 1}\right\},$$

из (256) получим

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{11}(r_2 - r_1)\lambda M(r_2; u). \quad (257)$$

Поделив обе части (257) на $M(r_2; u) - M(r_1; u)$, приходим к неравенству

$$1 \geq b_{11}(r_2 - r_1)\lambda,$$

перемножая которое с неравенством (257), в свою очередь приходим к (246).

ЛЕММА 3.3.4. Пусть $R_0/(1 - \delta\eta) \leq r_1 < R/\tau$, и пусть функция u является неотрицательным решением (19) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16) и таким, что $A^2 M(r_1; u) \geq M(\tau r_1; u)$. Тогда

$$M(\tau r_1; u) - M(r_1; u) \geq b_{12} r_1^2 \lambda^2 M(\tau r_1; u), \quad (258)$$

где λ определено с помощью (247), постоянная $b_{12} > 0$ зависит только от $n, \eta, \zeta, \tau, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda = 0$, то неравенство (258) очевидно. Считаем поэтому, что $\lambda > 0$. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 3.3.3, построим конечные последовательности вещественных чисел $\rho_i \in [r_1, \zeta r_1)$, $\xi_i \in (0, \delta \rho_i)$ и точек $x_i \in \Omega \cap S_{\rho_i}$, $i = 0, \dots, k-1$, для которых выполнены соотношения (253), (254), и при этом $\rho_k = \rho_{k-1} + \eta \xi_{k-1} \geq \zeta r_1$. Согласно определению ζ имеем $\zeta(1 + \delta\eta) \leq \tau$, поэтому $\rho_k \leq \tau r_1$.

Рассуждая, как при выводе формулы (257), получим

$$M(\tau r_1; u) - M(r_1; u) \geq b_{13} r_1 \lambda M(\tau r_1; u), \quad (259)$$

где

$$b_{13} = \frac{b_1(\zeta - 1)}{2\eta A^2}.$$

Поделив обе части (259) на $M(\tau r_1; u) - M(r_1; u)$, приходим к неравенству

$$1 \geq b_{13} r_1 \lambda,$$

перемножая которое с (259), будем иметь (258).

Начиная с этого момента, мы по умолчанию под Λ будем подразумевать измеримую функцию $\Lambda: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющую соотношению (24) и такую, что $\text{supp } \Lambda \subset [\theta R_0/(1 - \delta), \infty) \cap [R_0/\sigma_4, \infty)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. Пусть $R_0 \leq r_1 < r_2 < R$, $r_2 \leq \tau r_1$, $\max\{R_0, r_1/\tau\} < \xi_* < r_2$, и пусть функция u является неотрицательным решением (19) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16) и таким, что $AM(r_1; u) \leq M(r_2; u) \leq A^2 M(r_1; u)$. Тогда

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{14}(r_2 - r_1)^2 \Lambda(\xi_*) M(\xi_*; u), \quad (260)$$

где постоянная $b_{14} > 0$ зависит только от $n, \eta, \zeta, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Lambda(\xi_*) = 0$, то неравенство (260) очевидно. Пусть $\Lambda(\xi_*) > 0$; тогда $\xi_* \geq R_0/\sigma_4$ и $\xi_* \geq \theta R_0/(1 - \delta)$. Учитывая, что $1/(1 - \delta\eta) < \theta/((1 - \delta)\tau)$, будем также иметь $r_1 \geq r_2/\tau \geq \xi_*/\tau \geq R_0/(1 - \delta\eta)$.

Применяя лемму 3.3.3, получим

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_9(r_2 - r_1)^2 \lambda^2 M(\xi_*; u). \quad (261)$$

Одновременно с этим

$$\begin{aligned} & \xi_*^{2-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_{\sigma_2 \xi_*} \setminus Q_{\sigma_3 \xi_*}, Q_{\sigma_1 \xi_*} \setminus \overline{Q}_{\sigma_4 \xi_*}) \\ & \leq \xi_*^{2-n} \operatorname{cap}(\overline{Q}_{\sigma_2 \xi_*} \setminus Q_{\sigma_3 \xi_*}, Q_{\sigma_1 \xi_*} \setminus \overline{Q}_{\sigma_4 \xi_*}) \leq b_{15}, \end{aligned}$$

где $b_{15} > 0$ зависит только от $n, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

Тем самым, ввиду того, что $\xi_* \geq (r_2 - r_1)/(\tau(\tau - 1))$, имеем оценку

$$1 \geq \frac{1}{b_{15}(\tau(\tau - 1))^2} (r_2 - r_1)^2 \xi_*^{-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_{\sigma_2 \xi_*} \setminus Q_{\sigma_3 \xi_*}, Q_{\sigma_1 \xi_*} \setminus \overline{Q}_{\sigma_4 \xi_*}).$$

Умножая последнее неравенство на неравенство (252), которое, очевидно, справедливо и на этот раз, находим

$$\begin{aligned} & M(r_2; u) - M(r_1; u) \\ & \geq b_{16}(r_2 - r_1)^2 \xi_*^{-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_{\sigma_2 \xi_*} \setminus Q_{\sigma_3 \xi_*}, Q_{\sigma_1 \xi_*} \setminus \overline{Q}_{\sigma_4 \xi_*}) M(\xi_*; u), \end{aligned} \quad (262)$$

где

$$b_{16} = \frac{A - 1}{b_{15}(A\tau(\tau - 1))^2}.$$

Согласно определениям τ и ζ имеем $Q_{\zeta r_1} \setminus Q_{r_1} \subset Q_{\theta \xi_*} \setminus Q_{\xi_*/\theta}$, в то время как $\eta \leq \nu$, поэтому

$$\lambda^2 \geq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{\theta \xi_*} \setminus Q_{\frac{\xi_*}{\theta}}} \mu^2(x; \delta, \nu),$$

где $\mu(x; \delta, \nu)$ определено равенством (5), и из условия (24) следует, что

$$\lambda^2 + \xi_*^{-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_{\sigma_2 \xi_*} \setminus Q_{\sigma_3 \xi_*}, Q_{\sigma_1 \xi_*} \setminus \overline{Q}_{\sigma_4 \xi_*}) \geq \Lambda(\xi_*). \quad (263)$$

Таким образом, складывая (261) и (262), получаем (260). При этом $b_{14} = \min\{b_9, b_{16}\}/2$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.2. Пусть $R_0 \leq r_1 < r_2 < R$, $\max\{R_0, r_2/\tau^2\} < \xi_* < r_2$, $\tau r_1 \leq r_2 \leq \tau^2 r_1$, и пусть функция u является неотрицательным решением (19) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16) и таким, что $A^2 M(r_1; u) \geq M(r_2; u)$. Тогда

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{17}(r_2 - r_1)^2 \Lambda(\xi_*) M(\xi_*; u),$$

где постоянная $b_{17} > 0$ зависит только от $n, \eta, \zeta, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия 3.3.2 является нетривиальным лишь тогда, когда $\Lambda(\xi_*) > 0$, откуда, в частности, вытекает, что $\xi_* \geq R_0/\sigma_4$, $\xi_* \geq \theta R_0/(1 - \delta)$ и $r_2/\tau \geq R_0/(1 - \delta\eta)$.

Дальнейшие рассуждения основаны на использовании леммы 3.3.2 и леммы 3.3.4. Положим $\rho_1 = r_2$, $\rho_2 = \max\{\xi_*\sigma_2, r_1\}$, $\rho_3 = \xi_*\sigma_3$, $\rho_4 = \xi_*\sigma_4$ и $k_1 = \max\{\sigma_2, \tau^{-1}, \sigma_4/\sigma_3\}$, $k_2 = \sigma_4/\tau^2$. Тогда, очевидно, $0 < \rho_4 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$, $0 < k_1 < 1$, $0 < k_2 < 1$, $\rho_2 \leq k_1\rho_1$, $k_2\rho_1 \leq \rho_4 \leq k_1\rho_3$, и вместе с тем $\rho_2 \geq \xi_*\sigma_2$, поэтому

$$\begin{aligned} \text{cap}(D \cap \overline{Q}_{\rho_2} \setminus Q_{\rho_3}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) &\geq \text{cap}(D \cap \overline{Q}_{\sigma_2\xi_*} \setminus Q_{\sigma_3\xi_*}, Q_{\rho_1} \setminus \overline{Q}_{\rho_4}) \\ &\geq b_{18} \text{cap}(D \cap \overline{Q}_{\sigma_2\xi_*} \setminus Q_{\sigma_3\xi_*}, Q_{\sigma_1\xi_*} \setminus \overline{Q}_{\sigma_4\xi_*}), \end{aligned}$$

где $b_{18} > 0$ зависит только от $n, \tau, \sigma_1, \sigma_2$. Последнее неравенство следует из [2, с. 327, § 9.1.1, предложение 1]. Таким образом, применяя лемму 3.3.2, будем иметь

$$\begin{aligned} M(\rho_1; u) - M(\rho_2; u) \\ \geq b_{19}\rho_1^{2-n} \text{cap}(D \cap \overline{Q}_{\sigma_2\xi_*} \setminus Q_{\sigma_3\xi_*}, Q_{\sigma_1\xi_*} \setminus \overline{Q}_{\sigma_4\xi_*}) M(\xi_*; u), \end{aligned} \quad (264)$$

где постоянная $b_{19} > 0$ зависит лишь от $n, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$. Одновременно с этим согласно лемме 3.3.4

$$M(r_2; u) - M\left(\frac{r_2}{\tau}; u\right) \geq \frac{b_{12}}{\tau^2} r_2^2 \lambda^2 M(\xi_*; u), \quad (265)$$

где

$$\lambda = \inf_{x \in \Omega \cap Q_{\frac{r_2}{\tau}} \setminus Q_{\frac{r_2}{\tau}}} \sup_{\xi \in (0, \delta|x|)} \xi^{1-n} \text{cap}(D \cap \overline{Q}_{\xi}^x, Q_{\eta\xi}^x).$$

Складывая (264) и (265) с учетом того, что

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq M(\rho_1; u) - M(\rho_2; u)$$

и

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq M(r_2; u) - M\left(\frac{r_2}{\tau}; u\right),$$

находим

$$\begin{aligned} M(r_2; u) - M(r_1; u) \\ \geq b_{17}(r_2 - r_1)^2(\lambda^2 + \xi_*^{-n} \operatorname{cap}(D \cap \overline{Q}_{\sigma_2 \xi_*} \setminus Q_{\sigma_3 \xi_*}, Q_{\sigma_1 \xi_*} \setminus \overline{Q}_{\sigma_4 \xi_*})) M(\xi_*; u), \end{aligned}$$

где $b_{17} = \min\{\tau^{-2n}b_{19}, \tau^{-2}b_{12}\}/2$.

Осталось воспользоваться неравенством (263), и доказательство полностью завершено.

Приведенные выше следствия 3.3.1 и 3.3.2 позволяют получить оценку (174) с помощью техники, продемонстрированной в п. 3.2.

Вплоть до окончания настоящего пункта будем считать, что

$$\gamma_0 = \min\left\{\frac{b(\tau-1)}{A\tau}, \frac{b(\tau-1)^2}{A}, \frac{b}{4\tau}\right\},$$

где $b = \min\{b_{14}, b_{17}\}$.

ЛЕММА 3.3.5. Пусть $R_0 \leq \rho < \rho_0 < R$, $\tau\rho \leq \rho_0$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (19) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16). Пусть также $M(\rho_0; u) \leq A^2 M(\rho; u)$. Тогда

$$M(\rho_0; u) - M(\rho; u) \geq A\gamma_0 \int_{\rho}^{\rho_0} \xi \Lambda(\xi) M(\xi; u) d\xi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью аналогично доказательству леммы 3.2.4.

ЛЕММА 3.3.6. Пусть $R_0 \leq \rho_1 < \rho_0 < R$, $\tau\rho_1 \leq \rho_0$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (19) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16) и таким, что $AM(\rho_1; u) = M(\rho_0; u)$ и

$$M(\rho_1; u) - M(R_0; u) \geq \gamma_0 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi \left(1 - \frac{\xi}{\rho_1}\right) \Lambda(\xi) M(\xi; u) d\xi.$$

Тогда

$$M(\rho_0; u) - M(\rho_1; u) \geq \frac{\tau-1}{4\tau} A\gamma_0 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi \Lambda(\xi) M(\xi; u) d\xi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью аналогично доказательству леммы 3.2.5.

ЛЕММА 3.3.7. Пусть $R_0 < r_1 < r_0 < R$, $\tau r_1 \geq r_0$, и пусть функция u является неотрицательным решением неравенства (19) в области $\Omega \cap Q_R \setminus \overline{Q}_{R_0}$, удовлетворяющим условиям (14)–(16) и таким, что $AM(r_1; u) = M(r_0; u)$. Пусть также для всякого $r \in (R_0, r_1)$ имеет место (174). Тогда

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq 2\gamma_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 \Lambda(\xi) M(\xi; u) d\xi.$$

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 3.2.6.

Наконец, дословно повторяя рассуждения, с помощью которых было получено (173), доказываем (174).

3.4. В этом пункте мы получим оценку (174) в случае оператора $\mathcal{L}$ вида (3), тем самым теорема 1.1.2' будет полностью доказана.

Предположим, что δ, θ, v, v_* – константы из предпосылки теоремы 1.1.2, и пусть $\Lambda: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция такая, что $\text{supp } \Lambda \subset [\theta R_0, \infty) \cap [R_0/(1 - 2v_*), \infty)$, и выполнено соотношение (31), где $s > 0$ таково, что s -емкость является верхней для $\mathcal{L}$ (т.е. $s \geq \ell - 2$, где ℓ – константа эллиптичности оператора $\mathcal{L}$). Возьмем вещественные числа $\theta_0, \theta_1, v_0, v_1$ таким образом, чтобы были выполнены неравенства $1 + 2\delta < \theta_1 < \theta_0 < \theta$ и $v < v_1 < v_0 < v_*$. Обозначим через E' множество вещественных чисел $\rho \in (R_0, \infty)$, для которых

$$\inf_{x \in \Omega \cap Q_{\rho\theta_0} \setminus Q_{\frac{\rho}{\theta_0}}} \mu_s^2(x; \delta) > \rho^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_0\rho}).$$

Пусть $\rho_0 \in E'$; тогда найдется открытая окрестность U_{ρ_0} точки ρ_0 такая, что для всех $\rho \in U_{\rho_0}$

$$\inf_{x \in \Omega \cap Q_{\rho\theta_1} \setminus Q_{\frac{\rho}{\theta_1}}} \mu_s^2(x; \delta) > \rho^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_1\rho}). \quad (266)$$

Значит, существует открытое, а поэтому измеримое множество E_1 такое, что $E' \subset E_1 \subset (R_0, \infty)$ и для всякого $\rho \in E_1$ имеет место (266). Положим также $E_2 = (R_0, \infty) \setminus E_1$. Очевидно, E_2 – измеримое множество, и при этом для всех $\rho \in E_2$

$$\inf_{x \in \Omega \cap Q_{\rho\theta_0} \setminus Q_{\frac{\rho}{\theta_0}}} \mu_s^2(x; \delta) \leq \rho^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_0\rho}).$$

Определим измеримые функции Λ_1 и Λ_2 равенствами

$$\Lambda_1(\rho) = \frac{1}{2} \Lambda(\rho) \chi_{E_1}(\rho), \quad \Lambda_2(\rho) = \frac{1}{2} \Lambda(\rho) \chi_{E_2}(\rho),$$

где χ_E – характеристическая функция множества E . Из (31) ввиду того, что $\theta_1 < \theta$ и $v < v_1$, будем иметь при всех $\rho \in (R_0, \infty)$

$$\Lambda(\rho) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{\rho\theta_1} \setminus Q_{\frac{\rho}{\theta_1}}} \mu_s^2(x; \delta) + \rho^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_1\rho}),$$

откуда с учетом (266) получим при всех $\rho \in (R_0, \infty)$

$$\Lambda_1(\rho) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{\rho\theta_1} \setminus Q_{\frac{\rho}{\theta_1}}} \mu_s^2(x; \delta). \quad (267)$$

Аналогично доказывается, что для всякого $\rho \in (R_0, \infty)$

$$\Lambda_2(\rho) \leq \rho^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_0\rho}). \quad (268)$$

Далее, если для некоторых $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ удастся одновременно получить два неравенства:

$$M(r; u) - M(R_0; u) \geq \gamma_1 \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \frac{\xi}{r}\right) \Lambda_1(\xi) M(\xi; u) d\xi, \quad (269)$$

$$M(r; u) - M(R_0; u) \geq \gamma_2 \int_{R_0}^r \xi \left(1 - \frac{\xi}{r}\right) \Lambda_2(\xi) M(\xi; u) d\xi, \quad (270)$$

то, складывая их, будем иметь (174), где $\gamma_0 = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}/2$.

Нам потребуется следующий известный результат [11], [12] (см. также [3, гл. 1, § 4, с. 26, лемма 4.1]).

ЛЕММА 3.4.1. *Предположим, что $H \subset Q_\rho^{x_0} \setminus \Omega$ – измеримое по Борелю множество, $x \in \Omega \cap Q_\rho^{x_0}$, $\rho_1 = \text{dist}(H, S_\rho^{x_0})$, $\rho_2 = \sup_{y \in H} \text{dist}(y, x)$, u пусть u – неотрицательное решение неравенства (20) в области $\Omega \cap Q_\rho^{x_0}$, удовлетворяющее условию*

$$u|_{Q_\rho^{x_0} \cap \partial\Omega} = 0.$$

Тогда если $s > 0$ таково, что s -емкость является верхней для оператора $\mathcal{L}$, то

$$\sup_{\Omega \cap Q_\rho^{x_0}} u - u(x) \geq \left(\frac{1}{\rho_2^s} - \frac{1}{\rho_1^s}\right) C_s(H) \sup_{\Omega \cap Q_\rho^{x_0}} u. \quad (271)$$

В монографии [3] дана несколько иная формулировка этой леммы, однако доказательство, приведенное там без каких-либо существенных изменений, проходит и в нашем случае.

К сожалению, мы не можем в случае теоремы 1.1.2' доказывать оценку (174) сразу, как это делалось для теоремы 1.1.1' в предыдущем пункте, а вынуждены разбить доказательство на два этапа, соответственно для функций Λ_1 и Λ_2 в отдельности. Это связано с тем, что не удастся подобрать вещественное число τ , аналогичное тому, о котором шла речь в п. 3.3, так, чтобы одновременно проходило доказательство как оценки (269), так и оценки (270). Именно для доказательства (269) нам будет нужна константа τ_1 , удовлетворяющая неравенству $1 + 2\delta < \tau_1 < \theta_1$. В этом случае нам потребуются еще две постоянные $\eta > 2$ и $\zeta > 1$, которые мы выберем по δ и τ_1 так, чтобы были выполнены соотношения $1 + \delta\eta < \tau_1$ и $\zeta = \min\{\theta_1/\tau_1, \tau_1/(1 + \delta\eta)\}$. В то время как для доказательства (270) возьмем константу τ_2 такую, что

$$\frac{1}{1 - 2v_*} > \tau_2 > \frac{1}{1 - 2v_0}. \quad (272)$$

По заданным значениям τ_i определим вещественные числа ε_i и A_i , полагая

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\tau_i + 1}, \quad A_i = \max\left\{2\tau_i, \frac{16\tau_i}{\tau_i - 1}, \frac{2}{\varepsilon_i}\right\}, \quad i = 1, 2.$$

ЛЕММА 3.4.2. Пусть $0 < r_1 < r_2 < R$, $r_2 \leq \tau_1 r_1$, и пусть u – неотрицательное решение неравенства (20) в области $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющее условию (17) и такое, что $M(r_1; u) > 0$ и $A_1 M(r_1; u) \leq M(r_2; u) \leq A_1^2 M(r_1; u)$. Тогда если $s > 0$ таково, что s -емкость является верхней для оператора $\mathcal{L}$, то

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{20}(r_2 - r_1)^2 \lambda^2 M(r_2; u),$$

где

$$\lambda = \inf_{x \in \Omega \cap Q_{\zeta r_1} \setminus Q_{r_1}} \sup_{\xi \in (0, \delta|x|)} \xi^{-1-s} C_s(D \cap \overline{Q_\xi^x}), \quad (273)$$

постоянная $b_{20} > 0$ зависит только от $n, s, \delta, \zeta, \tau_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство леммы 3.3.3 с единственной разницей, что вместо емкости $\text{cap}(D \cap \overline{Q_\xi^x}, Q_{\eta\xi}^x)$ теперь следует рассматривать емкость $C_s(D \cap \overline{Q_\xi^x})$.

В частности, вместо (250) теперь надлежит воспользоваться соотношением

$$\frac{\lambda}{4\eta}(r_2 - r_1) \leq \xi^{-s} C_s(D \cap \overline{Q_\xi^x}) \leq \xi^{-s} C_s(\overline{Q_\xi^x}) \leq \tilde{b}_{10},$$

где $\tilde{b}_{10} > 0$ зависит только от n, η, s (а значит, только от n, δ, τ_1, s).

Точно так же при выборе последовательностей $\rho_i \in [r_1, r_2)$, $\xi_i \in (0, (r_2 - r_1)/2)$, $x_i \in \Omega \cap S_{\rho_i}$ неравенства (254) заменяются на неравенства

$$\xi_i^{-1-s} C_s(D \cap \overline{Q_{\xi_i}^{x_i}}) \geq \frac{\lambda}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

В связи с этим вместо оценок (255) теперь следует воспользоваться оценками

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega \cap Q_{\eta\xi_i}^{x_i}} u - u(x_i) &\geq (1 - (\eta - 1)^{-s}) \xi_i^{-s} C_s(D \cap \overline{Q_{\xi_i}^{x_i}}) \sup_{\Omega \cap Q_{\eta\xi_i}^{x_i}} u \\ &\geq \frac{1}{2\eta} (1 - (\eta - 1)^{-s}) (\rho_{i+1} - \rho_i) \lambda \sup_{\Omega \cap Q_{\eta\xi_i}^{x_i}} u, \end{aligned}$$

$i = 0, \dots, k-1$, вытекающими из леммы 3.4.1.

ЛЕММА 3.4.3. Пусть $0 < r_1 < R/\tau_1$, u – неотрицательное решение (20) в области $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющее условию (17) и такое, что $M(r_1; u) > 0$ и $A_1^2 M(r_1; u) \geq M(\tau_1 r_1; u)$. Тогда если $s > 0$ таково, что s -емкость является верхней для оператора $\mathcal{L}$, то

$$M(\tau_1 r_1; u) - M(r_1; u) \geq b_{21} r_1^2 \lambda^2 M(\tau_1 r_1; u),$$

где λ определено с помощью (273), постоянная $b_{21} > 0$ зависит только от $n, s, \delta, \zeta, \tau_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью аналогично доказательству леммы 3.3.4.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.1. *Предположим, что $0 < r_1 < r_2 < R$, $r_2 \leq \tau_1 r_1$ ($r_2 \leq \tau_2 r_1$), $r_1/\tau_1 < \xi_* < r_2$ ($r_1/\tau_2 < \xi_* < r_2$), и пусть u – неотрицательное решение (20) в $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющее условию (17) и такое, что $M(r_1; u) > 0$ и $A_1 M(r_1; u) \leq M(r_2; u) \leq A_1^2 M(r_1; u)$ ($A_2 M(r_1; u) \leq M(r_2; u) \leq A_2^2 M(r_1; u)$). Тогда*

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{22}(r_2 - r_1)^2 \Lambda_1(\xi_*) M(\xi_*; u) \quad (274)$$

$$(M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{23}(r_2 - r_1)^2 \Lambda_2(\xi_*) M(\xi_*; u)), \quad (275)$$

где постоянная $b_{22} > 0$ зависит только от n , τ_1 , s , δ , ζ , а постоянная $b_{23} > 0$ – только от n , s , v_0 , τ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (274) следует из леммы 3.4.2, соотношения (267) и включения $Q_{\zeta r_1} \setminus Q_{r_1} \subset Q_{\theta_1 \xi_*} \setminus Q_{\xi_*/\theta_1}$ (см. доказательство следствия 3.3.1).

Для получения (275) заметим, что

$$\xi_*^{-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_0 \xi_*}) \leq \xi_*^{-s} C_s(\overline{Q}_{v_0 \xi_*}) \leq \tilde{b}_{15},$$

где $\tilde{b}_{15} > 0$ зависит только от n , s , v_0 , откуда, очевидно, будем иметь

$$1 \geq \frac{1}{\tilde{b}_{15}(\tau_2(\tau_2 - 1))^2} (r_2 - r_1)^2 \xi_*^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_0 \xi_*}).$$

Умножая последнее неравенство на (252), в котором следует положить $A = A_2$, находим

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{23}(r_2 - r_1)^2 \xi_*^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_0 \xi_*}) M(\xi_*; u),$$

где

$$b_{23} = \frac{A_2 - 1}{\tilde{b}_{15}(A_2 \tau_2(\tau_2 - 1))^2}.$$

Осталось воспользоваться неравенством (268), и оценка (275) доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.2. *Предположим, что $0 < r_1 < r_2 < R$, $\tau_1 r_1 \leq r_2 \leq \tau_1^2 r_1$ ($\tau_2 r_1 \leq r_2 \leq \tau_2^2 r_1$), $r_2/\tau_1^2 < \xi_* < r_2$ ($r_2/\tau_2^2 < \xi_* < r_2$), и пусть u – неотрицательное решение (20) в $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющее условию (17) и такое, что $M(r_1; u) > 0$ и $A_1^2 M(r_1; u) \geq M(r_2; u)$ ($A_2^2 M(r_1; u) \geq M(r_2; u)$). Тогда*

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{24}(r_2 - r_1)^2 \Lambda_1(\xi_*) M(\xi_*; u) \quad (276)$$

$$(M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{25}(r_2 - r_1)^2 \Lambda_2(\xi_*) M(\xi_*; u)), \quad (277)$$

где постоянная $b_{24} > 0$ зависит только от n , τ_1 , s , δ , ζ , а постоянная $b_{25} > 0$ – только от s , v_0 , τ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (276) следует из леммы 3.4.3, соотношения (267) и включения $Q_{\zeta r_2/\tau_1} \setminus Q_{r_2/\tau_1} \subset Q_{\theta_1 \xi_*} \setminus Q_{\xi_*}/\theta_1$ (см. доказательство следствия 3.3.2).

Для доказательства (277) воспользуемся леммой 3.4.1. Полагая в ней $x^0 = 0$, $\rho = r_2$, $H = D \cap \overline{Q}_{v_0 \xi_*}$ и выбирая точку $x \in \Omega \cap S_{r_1}$ таким образом, чтобы $u(x) = M(r_1; u)$, очевидно, будем иметь $\rho_1 = \text{dist}(H, S_{r_2}) \geq (1 - v_0)r_2$, $\rho_2 = \sup_{y \in H} \text{dist}(y, x) \leq (1/\tau_2 + v_0)r_2$. Тем самым из (271) и неравенства $r_2 \leq \tau_2^2 \xi_*$ получим

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{26} \xi_*^{-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_0 \xi_*}) M(r_2; u), \quad (278)$$

где

$$b_{26} = \tau_2^{-2s} \left(\left(\frac{1}{\tau_2} + v_0 \right)^{-s} - (1 - v_0)^{-s} \right),$$

причем ввиду (272) $b_{26} > 0$.

Согласно принципу максимума $M(r_2; u) \geq M(\xi_*; u)$. В то же время $\xi_* \geq \tau_2^{-2}(r_2 - r_1)$, поэтому из (278) находим

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq b_{25} (r_2 - r_1)^2 \xi_*^{-2-s} C_s(D \cap \overline{Q}_{v_0 \xi_*}) M(\xi_*; u),$$

где $b_{25} = \tau_2^{-2} b_{26}$.

Осталось только заметить, что (277) следует из последнего неравенства и (268).

Определим, далее, вещественные числа $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, полагая

$$\gamma_i = \min \left\{ \frac{B_i(\tau_i - 1)}{A_i \tau_i}, \frac{B_i(\tau_i - 1)^2}{A_i}, \frac{B_i}{4\tau_i} \right\}, \quad i = 1, 2,$$

где $B_1 = \min\{b_{22}, b_{24}\}$, $B_2 = \min\{b_{23}, b_{25}\}$.

ЛЕММА 3.4.4. Пусть $R_0 \leq \rho < \rho_0 < R$, $\tau_1 \rho \leq \rho_0$ ($\tau_2 \rho \leq \rho_0$), и пусть функция u является неотрицательным решением (20) в области $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющим условиям (17), (15). Пусть также $M(\rho_0; u) \leq A_1^2 M(\rho; u)$ ($M(\rho_0; u) \leq A_2^2 M(\rho; u)$). Тогда

$$M(\rho_0; u) - M(\rho; u) \geq A_1 \gamma_1 \int_{\rho}^{\rho_0} \xi \Lambda_1(\xi) M(\xi; u) d\xi$$

$$\left(M(\rho_0; u) - M(\rho; u) \geq A_2 \gamma_2 \int_{\rho}^{\rho_0} \xi \Lambda_2(\xi) M(\xi; u) d\xi \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство леммы 3.2.4.

ЛЕММА 3.4.5. Пусть $R_0 \leq \rho_1 < \rho_0 < R$, $\tau_1 \rho_1 \leq \rho_0$ ($\tau_2 \rho_1 \leq \rho_0$), и пусть функция u является неотрицательным решением (20) в области $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющим условиям (17), (15) и таким, что $M(\rho_0; u) = A_1 M(\rho_1; u)$ ($M(\rho_0; u) = A_2 M(\rho_1; u)$) и

$$M(\rho_1; u) - M(R_0; u) \geq \gamma_1 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi \left(1 - \frac{\xi}{\rho_1}\right) \Lambda_1(\xi) M(\xi; u) d\xi$$

$$\left(M(\rho_1; u) - M(R_0; u) \geq \gamma_2 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi \left(1 - \frac{\xi}{\rho_1}\right) \Lambda_2(\xi) M(\xi; u) d\xi \right).$$

Тогда

$$M(\rho_0; u) - M(\rho_1; u) \geq \frac{\tau_1 - 1}{4\tau_1} A_1 \gamma_1 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi \Lambda_1(\xi) M(\xi; u) d\xi$$

$$\left(M(\rho_0; u) - M(\rho_1; u) \geq \frac{\tau_2 - 1}{4\tau_2} A_2 \gamma_2 \int_{R_0}^{\rho_1} \xi \Lambda_2(\xi) M(\xi; u) d\xi \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство леммы 3.2.5.

ЛЕММА 3.4.6. Пусть $R_0 < r_1 < r_0 < R$, $\tau_1 r_1 \geq r_0$ ($\tau_2 r_1 \geq r_0$), и пусть функция u является неотрицательным решением (20) в области $\Omega \cap Q_R$, удовлетворяющим условиям (17), (15) и таким, что $A_1 M(r_1; u) = M(r_0; u)$ ($A_2 M(r_1; u) = M(r_0; u)$). Пусть также для всякого $r \in (R_0, r_1)$ имеет место неравенство (269) (неравенство (270)). Тогда

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq 2\gamma_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 \Lambda_1(\xi) M(\xi; u) d\xi$$

$$\left(M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq 2\gamma_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{R_0}^{r_0} \xi^2 \Lambda_2(\xi) M(\xi; u) d\xi \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство леммы 3.2.6.

Изложенные выше результаты позволяют теперь получить оценки (269) и (270) с помощью рассуждений, полностью аналогичных тем, которые в свое время привели к оценке (173).

Список литературы

1. Кизурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
2. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
3. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.
4. Ладъженская О. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

5. Ландис Е. М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка // УМН. 1963. Т. 18. № 1. С. 3–62.
6. Гервер М. Л., Ландис Е. М. Одно обобщение теоремы о среднем для многих переменных // Докл. АН СССР. 1962. № 4. С. 761–764.
7. Григорьян А. А. О лиувилливых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле // Матем. сб. 1987. Т. 132(174). № 4. С. 496–516.
8. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135(177). № 3. С. 346–360.
9. Littman W., Stampacchia G., Weinberger B. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 3. 1963. V. 17. № 1–2. P. 43–77.
10. Sard A. The measure of the critical values of differential maps // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1942. V. 48. P. 883–897.
11. Блохина Г. Н. Теоремы типа Фрагмена–Линделёфа для линейного эллиптического уравнения 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1965. № 4. С. 727–730.
12. Блохина Г. Н. Теоремы типа Фрагмена–Линделёфа для линейного эллиптического уравнения 2-го порядка // Матем. сб. 1970. Т. 84(124). № 4. С. 507–531.
13. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
14. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
15. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
16. Veron L. Singular solution of some nonlinear elliptic equation // Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl. 1981. V. 5. № 3. P. 225–242.
17. Veron L. Comportement asymptotique des solutions d'equations elliptiques semi-lineaires dans $\mathbb{R}^n$ // Ann. Math. Pure. Appl. 1981. V. 127. P. 25–50.
18. Veron L. Solutions singuliere d'equations elliptiques semilineaires // C. R. Acad. Sci. 1979. V. 288. Ser A. P. 867–869.
19. Keller J. B. On solution of $\Delta u = f(u)$ // Comm. Pure. Appl. Math. 1957. V. 10. № 4. P. 503–510.
20. Osserman R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ // Pacific J. Math. 1957. V. 7. № 4. P. 1641–1647.
21. Похожаев С. И. О краевой задаче для уравнения $\Delta u = u^2$ // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 3. С. 518–521.
22. Levine H. A., Payne L. E. On the nonexistence of entire solutions to nonlinear second order elliptic equations // SIAM. J. Math. Anal. 1976. V. 7. № 3. P. 337–343.
23. Кондратьев В. А., Коньков А. А. О свойствах решений одного класса нелинейных уравнений второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 9. С. 81–94.
24. Коньков А. А. О сингулярных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 616–620.
25. Arend W., Batty C., Benilan Ph. Asymptotic stability of Schrödinger semigroups // Math. Z. 1992. V. 209. № 4. P. 511–518.
26. Moser J. On Harnak's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. № 3. P. 577–591.
27. Stampacchia G. Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptique second ordre a coefficients discontinus // Ann. Inst. Fourier. 1965. V. 15. № 1. P. 189–257.