Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кривошеев, Критерий единственности носителей аналитических функционалов в классе n -круговых выпуклых компактов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 2, 127–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:43:48

УДК 517.55

А. С. Кривошеев

Критерий единственности носителей аналитических функционалов в классе n -круговых выпуклых компактов

В работе приводятся необходимые и достаточные условия на n -круговые выпуклые компакты $K \subset \mathbb{C}^n$, обладающие следующим свойством единственности: K есть единственный выпуклый носитель любого аналитического функционала, для которого он является носителем.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение. Вспомогательные сведения

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ обозначает пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах, $H^*(\mathbb{C}^n)$ – сопряженное к нему пространство, называемое *пространством аналитических функционалов*. Через $\tilde{\nu}(z)$ будем обозначать преобразование Лапласа функционала $\nu \in H^*(\mathbb{C}^n)$, т.е.

$$\tilde{\nu}(z) = (\nu, \exp \langle z, \eta \rangle), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где $\langle z, \eta \rangle = z^1 \eta^1 + \dots + z^n \eta^n$. Функция $\tilde{\nu}(z)$ является целой и имеет экспоненциальный тип ($|\tilde{\nu}(z)| \leq A \exp B|z|$, $z \in \mathbb{C}^n$) [1]. Выпуклый компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ называется *определяющим множеством функционала* $\nu \in H^*(\mathbb{C}^n)$, если для всякой его окрестности U существует постоянная $C_U > 0$ такая, что

$$|(\nu, f)| \leq C_U \sup_{z \in U} |f(z)|, \quad f \in H(\mathbb{C}^n). \quad (1.1)$$

Каждый аналитический функционал обладает некоторым определяющим множеством [1]. Минимальные элементы частично упорядоченного множества всех выпуклых определяющих компактов функционала $\nu \in H^*(\mathbb{C}^n)$ называются *носителями* ν . Таким образом, носитель функционала – это его определяющее множество, любое собственное выпуклое замкнутое подмножество которого уже не является определяющим. Хорошо известно, что в случае одной переменной любой аналитический функционал ν имеет единственный выпуклый носитель, т.е. наименьшее выпуклое определяющее множество, которое совпадает с сопряженной диаграммой функции $\tilde{\nu}(z)$ [2]. В случае многих переменных функционал из $H^*(\mathbb{C}^n)$, вообще говоря, не обладает единственным выпуклым носителем [3]. Более того, если он имеет хотя бы два носителя, то их у него бесконечно много [4].

Работа написана при поддержке РФФИ (грант № 96-01-00095).

К. О. Кизелманом в работе [5] было замечено, что в $\mathbb{C}^n$ существуют выпуклые компакты K , обладающие следующим свойством единственности: если K – носитель какого-либо аналитического функционала, то K – единственный его выпуклый носитель. Основываясь на разрешимости $\bar{\partial}$ -задачи с равномерными оценками, К. О. Кизелман показал, что указанным свойством обладают выпуклые компакты с гладкой границей, т.е. компакты, через каждую граничную точку которых проходит единственная вещественная опорная гиперплоскость. А. Мартино [6], используя установленный им изоморфизм между пространством аналитических функционалов и пространством функций, аналитических на сопряженных к выпуклым компактам множествах, доказал, что свойством единственности обладают выпуклые компакты, через каждую крайнюю точку которых проходит единственная комплексная опорная гиперплоскость. Подробное изложение этих результатов имеется в [7], где проблеме единственности отведена целая глава.

В работе [8] автором был разработан новый метод исследования этой проблемы. Он основан на детальном изучении структуры выпуклых множеств в $\mathbb{C}^n$ и получении оценок типа Фрагмена–Линделёфа для плюрисубгармонических функций на конусах линейности опорных функций выпуклых множеств. В [8] были найдены достаточные условия единственности, относящиеся ко всему классу выпуклых компактов и принципиально более общие, чем результаты работ [5] и [6]. Эти условия приводятся в терминах наличия определенной комплексной структуры и гладкости конусов линейности выпуклого компакта. Получены также необходимые условия, из которых, в частности, следует, что требование некоторой гладкости указанных конусов существенно. Отметим еще, что в [4] и [9, с. 46, 47] были высказаны гипотезы по проблеме единственности, которые опровергаются результатами работы [8].

В данной статье развиваются идеи, изложенные в [8]. Здесь впервые для одного из классов выпуклых компактов (n -круговых) дается критерий обладания свойством единственности.

Работа построена следующим образом. В §2 вводятся и поясняются основные понятия, связанные с выпуклыми множествами. Затем формулируется основной результат, который вместе с указанными понятиями иллюстрируется различными примерами. §3 посвящен изложению некоторых вспомогательных результатов по геометрии выпуклых множеств, необходимых в дальнейшем. Наконец, в §4, 5 доказываются соответственно достаточные и необходимые условия единственности, что и составляет содержание основного результата.

Приведем теперь некоторые известные и необходимые для наших целей факты. Пусть X – выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$ и

$$H_X(z) = \sup_{y \in X} \operatorname{Re} \langle z, y \rangle, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

– опорная функция X . Она выпукла, полунепрерывна снизу, положительно однородна порядка один (т.е. $H_X(tz) = tH_X(z)$, $t > 0$) и может принимать значения $+\infty$. Если X – ограниченное множество, то $H_X(z)$ непрерывна в $\mathbb{C}^n$.

Через $\mathfrak{L}^*(z, \varphi)$ обозначим радиальный регуляризованный индикатор целой функции $\varphi(z)$ экспоненциального типа, т.е.

$$\mathfrak{L}^*(z, \varphi) = \overline{\lim}_{y \rightarrow z} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\varphi(ty)|}{t}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Это плюрисубгармоническая, положительно однородная порядка один функция в $\mathbb{C}^n$ [1].

Пусть K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$ и ν – аналитический функционал из $H^*(\mathbb{C}^n)$, для которого K является определяющим множеством. В силу (1.1) нетрудно видеть, что в этом случае

$$\mathcal{L}^*(z, \tilde{\nu}) \leq H_K(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (1.2)$$

Обратно, из леммы Хартогса о семействах субгармонических функций и теоремы Поляна–Мартино–Эренпрайса [3] легко следует, что если функционал ν удовлетворяет (1.2), то K является его определяющим множеством [1]. Таким образом, имеет место

ЛЕММА 1.1. *Для того чтобы выпуклый компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ был определяющим множеством аналитического функционала $\nu \in H^*(\mathbb{C}^n)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства (1.2).*

Сформулируем еще два результата, доказанные в работе [4], которые понадобятся нам в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для того чтобы выпуклый компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ был единственным выпуклым носителем аналитического функционала $\nu \in H^*(\mathbb{C}^n)$, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\mathcal{L}^*(z, \tilde{\nu}) = H_K(z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Следующий результат носит название “индикаторная теорема”.

ТЕОРЕМА 1.3. *Для любой плюрисубгармонической, положительно однородной порядка один функции $\psi(z)$ в $\mathbb{C}^n$ существует аналитический функционал $\nu \in H^*(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющий равенству*

$$\mathcal{L}^*(z, \tilde{\nu}) = \psi(z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

§ 2. Конусы линейности и опорные элементы выпуклого множества. Формулировка основного результата. Примеры

Наша цель – описать структуру выпуклых компактов в $\mathbb{C}^n$, обладающих свойством единственности. Эта структура характеризуется многими параметрами. Однако, как показано в работе [8], в проблеме единственности важны лишь два из них. Это – конусы линейности выпуклого множества, определяющие характер негладкости его граничных точек, и граничные опорные элементы, которые служат мерой его не строгой выпуклости. Указанные понятия достаточно просты и известны. Тем не менее читателю, не знакомому с выпуклым анализом, было бы трудно оперировать с ними ввиду отсутствия наглядности и сложной структуры выпуклых множеств в $\mathbb{C}^n$. Поэтому, чтобы сделать дальнейшее изложение более доступным,

а основной результат более прозрачным, мы попытаемся вначале дать некоторые геометрические пояснения.

Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$. Через $\text{int } \mathbf{X}$ и $\partial \mathbf{X}$ будем обозначать соответственно относительную внутренность и относительную границу множества $\mathbf{X}$, т.е. его внутренность и границу в топологии наименьшего вещественного аффинного подпространства, содержащего $\mathbf{X}$. Отметим, что в топологии этого подпространства $\text{int } \mathbf{X}$ является непустой областью [10].

Согласно определению опорной функции величина $H_{\mathbf{X}}(\eta)$ задается как верхняя грань значений линейных функций $\text{Re}\langle z, \eta \rangle$, где z пробегает множество $\mathbf{X}$, или, что то же самое, его границу $\partial \mathbf{X}$. Если $\mathbf{X}$ ограничено, то для каждого $\eta \in \mathbb{C}^n$ найдется точка $z \in \partial \mathbf{X}$, в которой эта верхняя грань достигается. В этом случае имеет место равенство

$$H_{\mathbf{X}}(\eta) = \text{Re}\langle z, \eta \rangle.$$

Более того, это же равенство будет выполнено и на всем луче $t\eta$, $t \geq 0$. При этом множество точек $y \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих уравнению $H_{\mathbf{X}}(\eta) = \text{Re}\langle y, \eta \rangle$, задает вещественную опорную гиперплоскость к $\mathbf{X}$ в направлении η , которая будет проходить через точку z . Если через z проходит другая опорная гиперплоскость к $\mathbf{X}$ в каком-либо направлении ξ (т.е. с уравнением $H_{\mathbf{X}}(\xi) = \text{Re}\langle y, \xi \rangle$), то на луче $t\xi$, $t \geq 0$, также будет выполнено указанное выше равенство. В этой связи для каждой точки $z \in \partial \mathbf{X}$ введем множество

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}}(z) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : H_{\mathbf{X}}(\eta) = \text{Re}\langle z, \eta \rangle\}.$$

Если не возникнет путаница, то будем писать $\mathbf{P}(z)$ вместо $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}(z)$. Множество $\mathbf{P}(z)$ представляет совокупность направляющих лучей всех опорных к $\mathbf{X}$ вещественных гиперплоскостей, проходящих через z . Через каждую граничную точку выпуклого множества проходит хотя бы одна такая гиперплоскость. Поэтому $\mathbf{P}(z)$ не пусто. Кроме того, из полунепрерывности снизу, выпуклости и однородности $H_{\mathbf{X}}$ следует, что $\mathbf{P}(z)$ – замкнутый выпуклый конус.

Согласно определению функция $H_{\mathbf{X}}(\eta)$ линейна на $\mathbf{P}(z)$. Вообще, конус $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ (с вершиной в начале координат) будем называть *конусом линейности множества $\mathbf{X}$* , если функция $H_{\mathbf{X}}(\eta)$ линейна на нем, т.е. существует $y \in \mathbb{C}^n$ такое, что $H_{\mathbf{X}}(\eta) = \text{Re}\langle y, \eta \rangle$, $\eta \in \Gamma$. Выпуклый конус $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ будем называть *почти комплексным*, если его внутренность порождена открытым подмножеством Y некоторого комплексного аффинного подпространства в $\mathbb{C}^n$:

$$\text{int } \Gamma = \{t\eta : \eta \in Y, t > 0\}.$$

Отметим, что это определение включает в себя и тривиальный случай, когда комплексное подпространство нульмерно. Следовательно, конус, являющийся лучом, считается почти комплексным.

Для граничной точки z выпуклого множества $\mathbf{X}$ через $\mathbf{M}(z)$ обозначим наименьшее вещественное линейное подпространство, содержащее $\mathbf{P}(z)$. Поскольку начало координат принадлежит $\mathbf{P}(z)$, то $\mathbf{M}(z)$ будет одновременно наименьшим аффинным вещественным подпространством, содержащим $\mathbf{P}(z)$. Подпространство $\mathbf{M}(z)$

лежит в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, поэтому наследует от него комплексную структуру. В связи с этим через $\mathbf{M}_0(z)$ обозначим максимальное комплексное подпространство в $\mathbb{C}^n$, лежащее в $\mathbf{M}(z)$. Оно состоит из всех векторов $\eta \in \mathbf{M}(z)$ таких, что $i\eta \in \mathbf{M}(z)$. Для того чтобы конус $\mathbf{P}(z)$ был почти комплексным, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

- 1) $\mathbf{M}(z) = \mathbf{M}_0(z)$;
- 2) вещественная размерность $\mathbf{M}_0(z)$ на единицу меньше размерности $\mathbf{M}(z)$ и $\text{int } \mathbf{P}(z) \cap \mathbf{M}_0(z)$ пусто.

Если конус $\mathbf{P}(z)$ не является почти комплексным, то его внутренность можно “расслоить” на семейство почти комплексных конусов следующим образом. Для каждого $\eta \in \mathbf{P}(z)$ положим

$$\Gamma(\eta, z) = \{t\xi : \xi \in [\eta + \mathbf{M}_0(z)] \cap \mathbf{P}(z), \quad t \geq 0\}.$$

Очевидно, что для всех точек $\zeta \in \Gamma(\eta, z) \setminus \{0\}$ конусы $\Gamma(\eta, z)$ и $\Gamma(\zeta, z)$ совпадают. Пусть $\eta \in \text{int } \mathbf{P}(z)$. Тогда $\Gamma(\eta, z)$ – почти комплексный конус. Действительно, комплексное аффинное подпространство $\eta + \mathbf{M}_0(z)$, лежащее в $\mathbf{M}(z)$, пересекает область $\text{int } \mathbf{P}(z) \subset \mathbf{M}(z)$ по открытому подмножеству. Таким образом, конус $\text{int } \mathbf{P}(z)$ представляется как объединение непересекающегося семейства почти комплексных конусов $\text{int } \Gamma(\eta, z)$, где η пробегает некоторое подмножество (лежащее, к примеру, на единичной сфере $\mathbf{S}$) из $\mathbf{P}(z)$. Для точек же $\eta \in \partial \mathbf{P}(z)$ конус $\Gamma(\eta, z)$, вообще говоря, не обязан быть почти комплексным.

Конусы линейности $\mathbf{P}(z)$ выпуклого множества $\mathbf{X}$ характеризуют “изломы” его границы. К примеру, в крайнем случае, когда $\mathbf{P}(z)$ – луч для всех $z \in \partial \mathbf{X}$, граница $\partial \mathbf{X}$ является гладкой. Верно и обратное. В другом крайнем случае, когда $\mathbf{P}(z)$ – полномерное подмножество $\mathbb{C}^n$ (т.е. $\text{int } \mathbf{P}(z)$ – область в $\mathbb{C}^n$), точка z называется *вершиной*. Такой будет, например, вершина многогранника.

Еще одной важной характеристикой выпуклого множества $\mathbf{X}$ являются опорные элементы или линейные части его границы, т.е. пересечения опорных гиперплоскостей с $\partial \mathbf{X}$. Через $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta)$ (или $\mathbf{F}(\eta)$) обозначим опорный элемент множества $\mathbf{X}$ в направлении η :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta) = \partial \mathbf{X} \cap \{z : \text{Re}\langle z, \eta \rangle = H_{\mathbf{X}}(\eta)\}.$$

Очевидно, что элемент $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta')$ одинаков для всех точек η' луча $t\eta$, $t > 0$. Множество $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta)$ состоит из тех и только тех точек $z \in \partial \mathbf{X}$, для которых конус $\mathbf{P}(z)$ содержит η . Отметим еще, что согласно определению $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(0)$ совпадает с $\partial \mathbf{X}$.

Для неограниченных множеств $\mathbf{X}$ опорный элемент $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta)$ может оказаться пустым. Для ограниченных множеств $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta)$ при всех $\eta \in \mathbb{C}^n$ содержит хотя бы одну точку (см. [10]). Если $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta)$ состоит из одной точки, то последняя называется *выступающей*. Другими словами, точка $z \in \partial \mathbf{X}$ выступающая, если через нее проходит хотя бы одна опорная гиперплоскость к $\mathbf{X}$, не содержащая других граничных точек $\mathbf{X}$, т.е. существует $\eta \in \mathbb{C}^n$ такое, что

$$H_{\mathbf{X}}(\eta) = \text{Re}\langle z, \eta \rangle > \text{Re}\langle y, \eta \rangle \quad \forall y \in \partial \mathbf{X} \setminus \{z\}.$$

Совокупность выступающих точек является подмножеством множества крайних (или экстремальных) точек выпуклого множества, но, вообще говоря, не совпадает с ним. В случае, когда для каждого $\eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ множество $\mathbf{F}(\eta)$ является одноточечным (т.е. все $z \in \partial\mathbf{X}$ выступающие), множество $\mathbf{X}$ будет строго выпуклым. Верно и обратное. Таким образом, диаметры элементов $\mathbf{F}(\eta)$ ($\text{diam } \mathbf{F}(\eta)$) можно рассматривать как некую меру нестрогой выпуклости $\mathbf{X}$.

Введем еще один конус линейности для точек $z \in \partial\mathbf{X}$:

$$\mathfrak{P}(z) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : \text{Re}\langle z, \eta \rangle > \text{Re}\langle y, \eta \rangle, \quad y \in \partial\mathbf{X} \setminus \{z\}\}.$$

Из самого определения следует, что $\mathfrak{P}(z)$ не пуст тогда и только тогда, когда z – выступающая точка. В этом случае $\mathfrak{P}(z)$ состоит из тех и только тех точек $\eta \in \mathbb{C}^n$, для которых опорная гиперплоскость в направлении η пересекает $\partial\mathbf{X}$ только в точке z .

Исходя из определений опорной функции и конусов $\mathbf{P}(z)$, $\mathfrak{P}(z)$, нетрудно доказать следующие включения:

$$\text{int } \mathbf{P}(z) \subset \mathfrak{P}(z) \subset \mathbf{P}(z) \setminus \{0\}.$$

Рассмотрим крайние ситуации. Пусть $\mathfrak{P}(z) = \text{int } \mathbf{P}(z)$. Тогда для каждого $\eta \in \partial\mathbf{P}(z)$ опорный элемент $\mathbf{F}(\eta)$ состоит из более чем одной точки, т.е. $\text{diam } \mathbf{F}(\eta) > 0$. Наиболее нагляден случай, когда $\mathbf{P}(z)$ – полномерное подмножество $\mathbb{C}^n$ и $\text{diam } \mathbf{F}(\eta) \geq r > 0$ для всех $\eta \in \partial\mathbf{P}(z)$. При этих условиях множество $\mathbf{X}$ в окрестности точки z является конусом с вершиной в z . Это имеет место, например, когда $\mathbf{X}$ – многогранник и z – его вершина.

Пусть теперь $\mathfrak{P}(z) = \mathbf{P}(z) \setminus \{0\}$. В этом случае малые окрестности точки z могут пересекаться лишь с опорными элементами малых же диаметров, т.е. в окрестности точки z множество $\mathbf{X}$ будет “близко” к строго выпуклому множеству. В этой ситуации можно сказать, что $\mathbf{X}$ является строго выпуклым в точке z .

Через $\mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ обозначим объединение конусов линейности $\mathfrak{P}(z)$ выпуклого множества $\mathbf{X}$, когда z пробегает совокупность всех его выступающих точек. Таким образом, $\mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ состоит из тех и только тех точек $\eta \in \mathbb{C}^n$, для которых опорный элемент $\mathbf{F}(\eta)$ является одноточечным. Другими словами, для любого $\eta \in \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ существует единственная точка $z \in \partial\mathbf{X}$ такая, что конус $\mathbf{P}(z)$ содержит η . Эту точку в дальнейшем будем обозначать $z_{\mathbf{X}}(\eta)$ (или $z(\eta)$).

Конус $\Gamma(\eta, z)$ зависит от двух параметров η и z , которые связаны между собой соотношениями: $\eta \in \mathbf{P}(z)$ и $z \in \mathbf{F}(\eta)$. Таким образом, для точки $\eta \in \mathbb{C}^n$ существует, вообще говоря, целое семейство таких конусов с первым параметром η . Если же $\eta \in \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$, то $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta) = \{z_{\mathbf{X}}(\eta)\}$, и указанный конус определяется однозначно своим первым параметром. Это конус $\Gamma(\eta, z(\eta))$, который в этом случае естественно обозначить просто $\Gamma(\eta)$.

Теперь мы хотим ввести две числовые характеристики, связанные с только что рассмотренными понятиями. Пусть $\eta \in \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$. Через $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\eta)$ обозначим максимальное расстояние между парами всевозможных множеств $\Gamma(\xi) \cap \mathbf{S}$, лежащих в $\mathbf{P}(z(\eta))$, т.е.

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\eta) = \sup_{\zeta, \xi \in \mathbf{P}(z(\eta)) \cap \mathbf{S}} \text{dist}(\Gamma(\xi) \cap \mathbf{S}; \Gamma(\zeta) \cap \mathbf{S}).$$

Из определения числа $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\eta)$ легко следует, что конус $\mathbf{P}(z(\eta))$ будет почти комплексным тогда и только тогда, когда $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\eta) = 0$. Поэтому $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\eta)$ можно рассматривать как некую меру, характеризующую близость конуса $\mathbf{P}(z(\eta))$ к почти комплексному конусу.

Через $\mathbf{D}'_{\mathbf{X}}(\eta)$ обозначим минимальный из диаметров опорных элементов $\mathbf{F}(\xi)$, когда ξ пробегает границу конуса $\Gamma(\eta)$, т.е.

$$\mathbf{D}'_{\mathbf{X}}(\eta) = \inf_{\xi \in \partial\Gamma(\eta)} \text{diam } \mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\xi).$$

В связи со сказанным выше величину $\mathbf{D}'_{\mathbf{X}}(\eta)$ можно считать характеристикой не строгой выпуклости множества $\mathbf{X}$ в точке $z(\eta)$.

Введем, наконец, множества, на основе которых формулируется основной результат работы. Через $\mathbf{E}_{\mathbf{X}}$ (соответственно $\mathbf{E}'_{\mathbf{X}}$) обозначим подмножество множества $\mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$, для каждой точки η которого существует сходящаяся последовательность $\{\eta_k\} \subset \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ такая, что $\lim \eta_k \in \text{int } \Gamma(\eta)$ и $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\eta_k) \rightarrow 0$ ($\mathbf{D}'_{\mathbf{X}}(\eta_k) \rightarrow 0$) при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим некоторые примеры. Если выступающая точка z выпуклого множества $\mathbf{X}$ такова, что конус $\mathbf{P}(z)$ почти комплексный, то для любого $\eta \in \text{int } \mathbf{P}(z)$ величина $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\eta)$ равна нулю, и, полагая $\eta_k = \eta$, $k \geq 1$, мы согласно определению имеем $\eta \in \mathbf{E}_{\mathbf{X}}$.

Пусть K – выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда для каждого $z \in \partial K$ конус $\mathbf{P}(z)$ – луч, т.е. является почти комплексным. Следовательно, в этом случае $\mathbf{E}_K = \mathfrak{P}_K$. Напомним, что такие компакты согласно результату К.О. Кизелмана обладают свойством единственности. Этим же свойством уже согласно А. Мартино обладают и выпуклые компакты $K \subset \mathbb{C}^n$, через каждую крайнюю (и, в частности, выступающую) точку которых проходит единственная комплексная опорная гиперплоскость. Последнее означает, что для любой выступающей точки z конус $\mathbf{P}(z)$ является углом (возможно, вырожденным в луч), лежащим на некоторой комплексной прямой $\{\lambda\xi: \lambda \in \mathbb{C}\}$, т.е. $\mathbf{P}(z)$ – почти комплексный конус. Следовательно, и здесь мы имеем равенство $\mathbf{E}_K = \mathfrak{P}_K$.

Наш основной результат относится к случаю n -круговых выпуклых компактов в $\mathbb{C}^n$, т.е. компактов, которые вместе с каждой своей точкой $z = (z^1, \dots, z^n)$ содержат также и все точки вида $(z^1 e^{i\gamma_1}, \dots, z^n e^{i\gamma_n})$, где $\gamma_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим один из таких компактов. Пусть K – выпуклая оболочка объединения $\cup K_j$, где K_j – круг (с центром в нуле), лежащий в j -й координатной плоскости. Нетрудно видеть, что множество выступающих точек компакта K представляет из себя объединение $\partial K_1 \cup \dots \cup (\cap \partial K_n)$. Для каждого $z \in \partial K_j$ имеем (см. лемму 3.12)

$$\mathbf{P}(z) = \{t\eta: t \geq 0; \eta^j = \bar{z}^j, (\eta^1, \dots, \eta^{j-1}, \eta^{j+1}, \dots, \eta^n) \in T_j\},$$

где T_j – поликруг в координатной плоскости переменных с номерами $1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$. Таким образом, конус $\text{int } \mathbf{P}(z)$ порожден областью $(n-1)$ -мерного комплексного аффинного подпространства, т.е. $\mathbf{P}(z)$ – почти комплексный конус. Следовательно, в этом случае также имеем $\mathbf{E}_K = \mathfrak{P}_K$.

Пусть K – строго выпуклый компакт. Тогда для каждого $\eta \neq 0$ элемент $\mathbf{F}(\eta)$ состоит из точки $z(\eta)$, т.е. $\text{diam } \mathbf{F}(\eta) = 0$. Рассмотрим $z \in \partial K$ такое, что $\mathbf{M}_0(z)$ нетривиально. Пусть $\eta \in \mathfrak{P}(z) = \mathbf{P}(z) \setminus \{0\}$. Выберем какую-нибудь последовательность $\{\eta_k\}$ из $\text{int } \mathbf{P}(z)$, сходящуюся к некоторой точке из $\text{int } \Gamma(\eta)$. Для каждого $k \geq 1$ конус $\Gamma(\eta_k)$ отличен от луча, т.е. его граница содержит ненулевые точки. Поэтому $\mathbf{D}'_K(\eta_k) = 0$. Таким образом, согласно определению множества $\mathbf{E}'_K$ имеем включение $\mathfrak{P}(z) \subset \mathbf{E}'_K$. Если теперь для любого $z \in \partial K$ конус $\mathbf{P}(z)$ – луч, либо $\mathbf{M}_0(z)$ нетривиально, то с учетом сказанного получаем $\mathfrak{P}_K = \mathbf{E}_K \cup \mathbf{E}'_K$. В [8] было доказано, что при этих условиях строго выпуклые компакты обладают свойством единственности. И вообще, для всех классов выпуклых компактов, относительно которых известно, что они обладают свойством единственности, выполнено последнее равенство. Несколько ниже мы сформулируем основной результат работы, утверждающий, что в классе n -круговых выпуклых компактов это равенство эквивалентно наличию свойства единственности.

Отметим еще следующее. Если в последнем примере для некоторого $z \in \partial K$ конус $\mathbf{P}(z)$ почти комплексный и не вырождается в луч, то $\mathfrak{P}(z)$ лежит одновременно в $\mathbf{E}_K$ и $\mathbf{E}'_K$. Таким образом, множества $\mathbf{E}_K$ и $\mathbf{E}'_K$ пересекаются. Однако ни одно из них в общем случае не содержит другое. Нетрудно привести примеры во всем классе выпуклых компактов. Но поскольку мы будем иметь дело с n -круговыми компактными, то рассмотрим соответствующие примеры именно для них, чтобы развеять возможные сомнения о целесообразности введения того или иного множества в этом конкретном случае. К тому же можно показать, что в классе 2-круговых выпуклых компактов множество $\mathbf{E}_K$ все-таки содержит $\mathbf{E}'_K$.

Пусть K – гладкий n -круговой выпуклый компакт (например, шар). Тогда для всех $\eta \in \mathfrak{P}_K$ конус $\Gamma(\eta)$ – луч, т.е. его граница состоит лишь из начала координат. Поэтому величина $\mathbf{D}'_K(\eta)$ для всех $\eta \in \mathfrak{P}_K$ постоянна и равна $\text{diam } \mathbf{F}_K(0) = \text{diam } \partial K$, т.е. $\mathbf{D}'_K(\eta)$ не может становиться сколь угодно малой, как в определении $\mathbf{E}'_K$. Таким образом, в этом случае множество $\mathbf{E}'_K$ пусто, а $\mathbf{E}_K$, как было показано ранее, совпадает с $\mathfrak{P}_K$.

Рассмотрим пример и другого рода. При этом мы не будем давать подробных разъяснений тех утверждений, которые появятся в ходе этого. Необходимые рассуждения каждый читатель при желании может провести самостоятельно, внимательно изучив содержание следующего параграфа и, в частности, лемму 3.12. Пусть K – n -круговой строго выпуклый компакт в $\mathbb{C}^3$ и $L = R(K)$ – его образ на диаграмме Рейнхарта. Компакт L строго выпуклый и лежит в положительном октанте в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что для некоторого $x \in \partial L$, лежащего на координатной плоскости переменных $|z^1|$ и $|z^2|$, но не на координатных прямых (т.е. $x^1 \neq 0$, $x^2 \neq 0$, $x^3 = 0$), конус $\text{int } \mathbf{P}_L(x)$ является областью в $\mathbb{R}^3$ (другими словами, x – вершина L). При этом некоторая опорная плоскость к L , проходящая через x , пересекает все три положительные полуоси.

Пусть $R^{-1}(x) \subset \partial K$ – полный прообраз x и $\mathbf{T} = \cup \{\text{int } \mathbf{P}(z), z \in R^{-1}(x)\}$. Множество $\mathbf{T}$ открыто в $\mathbb{C}^3$, а конусы $\mathbf{P}(z)$ при $z \in R^{-1}(x)$ получаются друг из друга по координатным поворотами. В силу последнего $\mathbf{D}_K(\eta)$ постоянна при всех $\eta \in \mathbf{T}$. Она не равна нулю, т.е. конус $\mathbf{P}(z)$, $z \in R^{-1}(x)$, не является почти комплексным, так как $\mathbf{M}(z)$ четырехмерно (это следует из того, что x – верши-

на L), а $M_0(z)$ комплексно одномерно (это вытекает из выбора x и предположения о существовании указанной выше опорной плоскости к L). Из сказанного с учетом определения E_K следует, что $T \cap E_K$ пусто. С другой стороны, в силу нетривиальности $M_0(z)$ для всех $z \in R^{-1}(x)$, как и выше, получаем $T \subset E'_K$.

Прежде чем дать формулировку основной теоремы, сделаем еще одно замечание. В [8] был доказан следующий результат. Для того чтобы выпуклый компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ обладал свойством единственности, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладал этот же самый компакт K , но рассматриваемый уже как подмножество $\mathbb{C}^{n+m}$ для всех $m \geq 1$. Другими словами, достаточно рассматривать лишь те выпуклые компакты, которые содержат точки со всеми ненулевыми координатами. Если же K — n -круговой выпуклый компакт, то вместе с точкой $z = (z^1, \dots, z^n)$, все координаты которой ненулевые, он содержит и полномерный поликруг вида

$$\{y = (y^1, \dots, y^n) : |y^j| \leq |z^j|, \quad j = 1, \dots, n\},$$

т.е. имеет непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать только выпуклые компакты $K \subset \mathbb{C}^n$, которые имеют непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть K — n -круговой выпуклый компакт с непустой внутренностью в $\mathbb{C}^n$. Для того чтобы K обладал свойством единственности, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\mathfrak{P}_K = E_K \cup E'_K.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Из результатов работы [8] следует, что это равенство не является достаточным для наличия свойства единственности на всем классе выпуклых компактов. Необходимо еще при определении множества E_K потребовать некоторую специальную гладкость (как при определении E_K^1 в [8]) конусов $\Gamma(\eta_k)$. В нашем случае никакая гладкость не предполагается, так как в классе n -круговых выпуклых компактов она присутствует автоматически.

2) Указанное равенство, как нам кажется, должно быть необходимым условием наличия свойства единственности для произвольных выпуклых компактов. Более того, нам представляется также, что оно вместе с некоторой гладкостью конусов линейности может оказаться критерием существования свойства единственности. Однако для доказательства этого потребуются решить ряд довольно сложных задач. Прежде всего, это — получение оценок типа Фрагмена–Линделёфа для плюрисубгармонических функций на почти комплексных конусах (см. [8, предложение 5.2] и § 4 здесь); построение специальных плюрисубгармонических функций с очень тонкими свойствами (см. [8, теорема 6.1] и § 5 здесь); дальнейшее изучение геометрической структуры выпуклых компактов.

Приведем некоторые примеры применения теоремы 2.1.

1. Свойством единственности обладают n -круговые выпуклые компакты из всех тех классов, которые рассмотрены вслед за определением множеств E_X и E'_X и относительно которых выше уже установлено требуемое в теореме 2.1 равенство.

2. Пусть K – замкнутый поликруг с непустой внутренностью в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Множество выступающих точек K совпадает с остовом. Для каждой же точки z последнего имеем (см. лемму 3.12)

$$\mathbf{P}(z) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : \eta^i = t_i \bar{z}^i, \quad t_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Следовательно, $\mathbf{M}(z)$ вполне вещественно, т.е. $\mathbf{M}_0(z)$ тривиально. Как и в случае с гладкими компактами, находим отсюда, что $\mathbf{E}'_K = \emptyset$. Кроме того, непосредственным подсчетом получаем

$$\mathbf{D}_K(\eta) = \sup_{\eta, \xi \in \mathbf{P}(z) \cap \mathbf{S}} |\eta - \xi| \geq 2^{1/2} \quad \forall \eta \in \mathbf{P}(z).$$

Это означает, что $\mathbf{E}_K$ также пусто. Таким образом, согласно теореме 2.1 K не обладает свойством единственности.

3. В случае $n = 2$ можно дать более простой и наглядный критерий существования свойства единственности. Пусть K – 2-круговой выпуклый компакт в $\mathbb{C}^2$ и $L = R(K)$ – его образ на диаграмме Рейнхарта. Рассмотрим произвольную выступающую точку z компакта K . Предположим вначале, что одна из ее координат нулевая, например $z^2 = 0$ (обе координаты не могут быть нулевыми, так как начало координат лежит в $\text{int } K$ и поэтому не является выступающей точкой). Тогда для некоторого $a \geq 0$ (см. лемму 3.12)

$$\mathbf{P}_K(z) = \{t\eta : \eta^1 = \bar{z}^1, \quad |\eta^2| \leq a, \quad t \geq 0\}.$$

При любом значении числа $a \geq 0$ конус $\mathbf{P}(z)$ будет почти комплексным и, следовательно, $\mathfrak{P}(z) \subset \mathbf{E}_K$. Таким образом, наличие или отсутствие свойства единственности зависит лишь от тех выступающих точек, обе координаты которых ненулевые.

Пусть z – одна из таких точек. Если $x = R(z)$ – гладкая точка компакта L , то такой же для K будет и точка z . В этом случае $\mathbf{P}(z)$ – почти комплексный конус, т.е. $\mathfrak{P}(z) \subset \mathbf{E}_K$. Пусть $x = R(z)$ – негладкая точка L . Тогда конус $\text{int } \mathbf{P}_L(x)$ является областью в $\mathbb{R}^2$. Поэтому областью же, но уже в $\mathbb{C}^2$, будет и множество $\mathbf{T} = \cup \{\text{int } \mathbf{P}(y), \quad y \in R^{-1}(x)\}$. Поскольку $y \in R^{-1}(x)$ имеет обе ненулевые координаты, то $\mathbf{M}_0(y)$ тривиально (см. лемму 3.12). Следовательно, для всех $\xi \in \mathbf{T}$ величина $\mathbf{D}'_K(\xi)$ постоянна и равна $\text{diam } \mathbf{F}_K(0) = \text{diam } \partial K$. Это означает, что $\mathbf{T}$ не содержит точек из $\mathbf{E}'_K$. Кроме того, величина $\mathbf{D}_K(\xi)$ также постоянна и равна $\text{diam } [\mathbf{P}(z) \cap \mathbf{S}] > 0$. Поэтому область $\mathbf{T}$ не содержит и точек из $\mathbf{E}_K$.

Из сказанного вытекает, что K будет обладать свойством единственности тогда и только тогда, когда часть границы компакта L , состоящая из точек, не лежащих на осях координат, является гладкой. Гладкость этой части границы L влечет за собой гладкость части границы K , которая не содержит точек с нулевыми координатами. Верно и обратное. Таким образом, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть K – 2-круговой выпуклый компакт с непустой внутренностью в $\mathbb{C}^2$. Для того чтобы он обладал свойством единственности, необходимо и достаточно, чтобы часть границы K , состоящая из точек с ненулевыми координатами, была гладкой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналог следствия 2.2 при $n \geq 3$ не верен. Указанное там условие гладкости не является достаточным. Действительно, для выпуклой оболочки множества $B \cup V$, где B – замкнутый единичный шар в $\mathbb{C}^3$, а V – замкнутый двумерный поликруг, образованный кругами радиуса ≥ 1 , требования гладкости (такой, как в следствии 2.2) выполнены, но она не обладает свойством единственности. Разбор этого примера мы оставляем читателю. Это условие гладкости не будет также и необходимым. Рассмотрим компакт в $\mathbb{C}^3$, диаграмма Рейнхарта L которого представляет из себя диаграмму Рейнхарта шара, “срезанную” плоскостью $x_3 = a$. Далее сгладим все негладкие точки L , лежащие в плоскости $x_3 = a$, за исключением точки x , самой удаленной от оси x_3 . Для этого присоединим к L шары с центрами в таких точках и радиусами, определенным образом стремящимися к нулю при приближении центров к x . Далее возьмем специальную оболочку расширенного множества так, чтобы она являлась диаграммой Рейнхарта выпуклого компакта. Последний будет обладать свойством единственности и иметь негладкие точки с ненулевыми координатами.

В терминах гладкости все-таки можно дать достаточные условия наличия свойства единственности у n -круговых компактов и при $n > 2$. Для этого в дополнение к условию из следствия 2.2 нужно потребовать еще и гладкость всех аналогичных частей границы, лежащих в координатных плоскостях размерности > 1 . К примеру, в случае $n = 3$ дополнительно должны быть гладкими части границы, лежащие в двумерных координатных плоскостях и состоящие из точек с ненулевыми координатами. Однако эти условия далеки от необходимых. Если K – строго выпуклый компакт в $\mathbb{C}^3$, удовлетворяющий условию следствия 2.2, то вне зависимости от гладкости частей его границы, лежащих в двумерных плоскостях, он будет обладать свойством единственности.

Возможно, что при $n = 3$ какой-либо критерий свойства единственности в более привычных терминах (например, определенной гладкости и строгой выпуклости) и удалось бы получить. Но при этом он выглядел бы, конечно, достаточно громоздко. Переход же к более высоким размерностям делает эту задачу практически невыполнимой. Попытка сформулировать критерий так или иначе приведет нас к понятиям, аналогичным тем, которые использовались при определении E_X и E'_X и которые, в общем-то, и отражают характер негладкости и нестрогой выпуклости выпуклого множества.

§ 3. Геометрия выпуклых множеств

Здесь мы докажем вспомогательные результаты, связанные с введенными выше понятиями.

Пусть $\{Y_m\}$ – последовательность множеств. Символом $\text{Lim } Y_m$ будем обозначать совокупность пределов всех сходящихся последовательностей $\{y_m\}$, где $y_m \in Y_m$, $m = 1, 2, \dots$

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое множество и $z \in \partial\mathbf{X}$. Если последовательность $\{z_m\} \subset \partial\mathbf{X}$ сходится к z , то $\text{Lim } \mathbf{P}(z_m) \subset \mathbf{P}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\eta_m\}$ – произвольная сходящаяся последовательность такая, что $\eta_m \in \mathbf{P}(z_m)$, $m \geq 1$, и η_0 – ее предел. Согласно определению конуса $\mathbf{P}(z_m)$ для каждого $m \geq 1$

$$H_{\mathbf{X}}(\eta_m) = \text{Re}\langle z_m, \eta_m \rangle. \quad (3.1)$$

Из полунепрерывности снизу опорной функции следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H_{\mathbf{X}}(\eta_m) \geq H_{\mathbf{X}}(\eta_0). \quad (3.2)$$

Кроме того, очевидно, что $\text{Re}\langle z_m, \eta_m \rangle \rightarrow \text{Re}\langle z, \eta_0 \rangle$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда с учетом (3.1) и (3.2) получаем неравенство $\text{Re}\langle z, \eta_0 \rangle \geq H_{\mathbf{X}}(\eta_0)$. С другой стороны, так как $z \in \overline{\mathbf{X}}$, то по определению опорной функции $H_{\mathbf{X}}(\eta_0) = H_{\overline{\mathbf{X}}}(\eta_0) \geq \text{Re}\langle z, \eta_0 \rangle$. Вместе с предыдущим это дает нам равенство $H_{\mathbf{X}}(\eta_0) = \text{Re}\langle z, \eta_0 \rangle$, которое согласно определению $\mathbf{P}(z)$ означает, что $\eta_0 \in \mathbf{P}(z)$. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$, $\{\eta_m\}$ – сходящаяся последовательность из $\mathbb{C}^n$ с ненулевым пределом. Тогда

$$\text{Lim } \mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\eta_m) \subset \mathbf{F}_{\mathbf{X}}\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое ограниченное множество и $\eta_0 \in \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$. Если $\{\eta_k\} \subset \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ сходится к η_0 , то соответствующая последовательность выступающих точек $\{z(\eta_k)\}$ сходится к $z(\eta_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось выше, для всех $k \geq 0$ опорный элемент $\mathbf{F}(\eta_k)$ состоит лишь из точки $z(\eta_k)$. По лемме 3.2 предел любой сходящейся подпоследовательности $\{z(\eta_{k_j})\}$ принадлежит $\mathbf{F}(\eta_0)$, т.е. равен $z(\eta_0)$. Поскольку $\{z(\eta_k)\}$ ограничена, то она также будет сходиться к $z(\eta_0)$. Лемма доказана.

Пусть $\eta \in \mathbb{C}^n$ и $a \in \mathbb{R}$. Через $\mathfrak{T}(\eta, a)$ в дальнейшем будем обозначать вещественную гиперплоскость $\{z \in \mathbb{C}^n : \text{Re}\langle z, \eta \rangle = a\}$. Как отмечалось выше, гиперплоскость $\mathfrak{T}(\eta, H_{\mathbf{X}}(\eta))$ является опорной к $\mathbf{X}$ в направлении η (конечно, если $H_{\mathbf{X}}(\eta) < +\infty$).

ЛЕММА 3.4. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое множество, $z_1, z_2 \in \partial\mathbf{X}$ и $\Gamma \subset \mathbf{P}(z_2)$ – выпуклый конус. Предположим, что пересечение $\mathbf{P}(z_1) \cap \text{int } \Gamma$ не пусто. Тогда $\Gamma \subset \mathbf{P}(z_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению конусов $\mathbf{P}(z_1)$ и $\mathbf{P}(z_2)$ их пересечение принадлежит $\mathfrak{T}(z_1 - z_2, 0)$. Тогда с учетом условий леммы множество $\mathfrak{T}(z_1 - z_2, 0) \cap \text{int } \Gamma$ не пусто. Поэтому реализуется лишь одна из двух следующих возможностей:

1) существуют точки из Γ , лежащие как “по одну”, так и “по другую стороны” гиперплоскости $\mathfrak{T}(z_1 - z_2, 0)$;

2) конус Γ целиком лежит на гиперплоскости $\mathfrak{T}(z_1 - z_2, 0)$.

В первом случае найдется точка $\xi \in \Gamma \subset \mathbf{P}(z_2)$ такая, что

$$\text{Re}\langle z_1, \xi \rangle > \text{Re}\langle z_2, \xi \rangle = H_{\mathbf{X}}(\xi).$$

Это противоречит определению опорной функции. Следовательно, реализуется вторая возможность, т.е.

$$\text{Re}\langle z_1, \eta \rangle = \text{Re}\langle z_2, \eta \rangle, \quad \eta \in \Gamma. \quad (3.3)$$

Поскольку $\Gamma \subset \mathbf{P}(z_2)$, то по определению $\mathbf{P}(z_2)$ имеем $\text{Re}\langle z_2, \eta \rangle = H_{\mathbf{X}}(\eta)$, $\eta \in \Gamma$. С учетом (3.3) и определения $\mathbf{P}(z_1)$ последнее означает, что $\Gamma \subset \mathbf{P}(z_1)$. Лемма доказана.

Напомним, что граничная точка z выпуклого множества $\mathbf{X}$ называется *крайней* (*экстремальной*), если $\mathbf{X} \setminus \{z\}$ также выпукло. Совокупность крайних точек выпуклого компакта $\mathbf{X}$ полностью его определяет в том смысле, что ее выпуклая оболочка совпадает с $\mathbf{X}$. Это означает, что каждый опорный элемент $\mathbf{F}(\eta)$ содержит хотя бы одну крайнюю точку (см. [10]). Отметим также, что множество выступающих точек является плотным подмножеством множества крайних точек (причем в общем случае собственным) (см. [12]).

Из определения крайней точки легко следует

ЛЕММА 3.5. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое множество и z – его крайняя точка. Для любой окрестности U в $\mathbb{C}^n$ точки z выпуклая оболочка $\mathbf{X}_1$ множества $\mathbf{X} \setminus U$ не содержит z .

ЛЕММА 3.6. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое множество, z – выступающая точка $\mathbf{X}$, Γ – выпуклый конус из $\mathbf{P}(z)$. Если пересечение $\Gamma \cap \mathfrak{P}(z)$ не пусто, то конус $\text{int } \Gamma$ целиком лежит в $\mathfrak{P}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_0 \in \Gamma \cap \mathfrak{P}(z)$ и η – произвольная точка из $\text{int } \Gamma$. Выберем $\xi \in \partial \Gamma$ такое, что η лежит на отрезке $[\eta_0, \xi]$, т.е. для некоторого $\alpha \in [0, 1]$ имеем $\eta = \alpha \eta_0 + (1 - \alpha)\xi$. Поскольку ξ по выбору не может совпадать с η , то $\alpha > 0$.

Согласно определению конусов $\mathfrak{P}(z)$ и $\mathbf{P}(z)$ получаем

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle y, \eta_0 \rangle &< \text{Re}\langle z, \eta_0 \rangle, \\ \text{Re}\langle y, \xi \rangle &\leq \text{Re}\langle z, \xi \rangle \quad \forall y \in \overline{\mathbf{X}} \setminus \{z\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\text{Re}\langle z - y, \eta \rangle = \alpha \text{Re}\langle z - y, \eta_0 \rangle + (1 - \alpha) \text{Re}\langle z - y, \xi \rangle > 0 \quad \forall y \in \overline{\mathbf{X}} \setminus \{z\}.$$

Это означает, что $\eta \in \mathfrak{P}(z)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 3.6 легко следует приведенное в предыдущем параграфе включение: $\text{int } \mathbf{P}(z) \subset \mathfrak{P}(z)$.

ЛЕММА 3.7. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое множество. Если $\mathbf{X}$ ограничено, то лебегова мера множества $\mathbb{C}^n \setminus \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [10, с. 128, 129] $\mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ совпадает с множеством точек, где дифференцируема опорная функция $H_{\mathbf{X}}(\eta)$. Требуемое утверждение следует теперь из дифференцируемости почти всюду выпуклой функции. Лемма доказана.

Как указывалось выше, множество $\mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ состоит из тех и только тех точек $\eta \in \mathbb{C}^n$, каждая из которых лежит лишь в одном из конусов $\mathbf{P}(z)$. При этом z , для которого $\eta \in \mathbf{P}(z)$, является выступающей точкой (ранее мы уже обозначили ее $z(\eta)$). Таким образом, если $\mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ пересекает какой-либо конус $\mathbf{P}(z)$, то z – выступающая точка $\mathbf{X}$. С учетом сказанного из леммы 3.7 легко получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклое множество и $z \in \partial \mathbf{X}$. Если $\text{int } \mathbf{P}(z)$ является областью в $\mathbb{C}^n$, то z – выступающая точка $\mathbf{X}$.

Через $\mathbf{B}(x, r)$ будем обозначать в дальнейшем открытый шар с центром в точке x радиуса $r > 0$.

Пусть z – граничная точка выпуклого множества $\mathbf{X}$. Согласно лемме 3.7 для каждого $\eta \in \mathbf{P}(z)$ найдется последовательность $\{\eta_k\} \subset \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$, сходящаяся к η . Однако при этом соответствующая последовательность выступающих точек $\{z(\eta_k)\}$ вовсе не обязана сходиться к z . Она может быть даже несходящейся. Если эта последовательность все-таки сходится к некоторому $y \in \partial \mathbf{X}$, то согласно лемме 3.1 $\eta \in \mathbf{P}(y)$, но y , вообще говоря, не совпадает с z . Более того, возможна ситуация, когда для любой последовательности $\{\eta_k\} \subset \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$, сходящейся к η , $\{z(\eta_k)\}$ не сходится к z . Это будет, например, когда $\mathbf{X}$ – выпуклый многогранник, а z – точка относительной внутренней его грани. Следующее утверждение показывает, что для крайних точек z ситуация несколько иная.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклый компакт и z_0 – крайняя точка $\mathbf{X}$. Тогда для любого $\eta_0 \in \mathbf{P}(z_0) \cap \mathbf{S}$ существует последовательность $\{\eta_k\} \subset \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ такая, что $\eta_k \rightarrow \eta_0$ и $z(\eta_k) \rightarrow z_0$ при $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если z_0 – выступающая точка, то утверждение предложения тривиально. Считаем поэтому, что z_0 не является выступающей, и предположим, что утверждение неверно. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для каждой выступающей точки z компакта $\mathbf{X}$, лежащей в шаре $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$, и любого $\eta \in \mathfrak{P}(z)$ выполнено неравенство $|\eta - \eta_0| \geq \delta$. Пусть $\mathbf{X}_1$ обозначает выпуклую оболочку компактного множества $\mathbf{X} \setminus \mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)$. Тогда $\mathbf{X}_1$ – компакт (см. [10]), а по лемме 3.5 точка $z_0 \notin \mathbf{X}_1$. Отсюда и из теоремы об отделимости для выпуклых множеств следует, что на некотором открытом в $\mathbb{C}^n$ множестве U выполняется неравенство

$$\text{Re}\langle z_0, \eta \rangle > H_{\mathbf{X}_1}(\eta), \quad \eta \in U. \quad (3.4)$$

Пусть $\mathbf{X}_2$ – выпуклая оболочка $\mathbf{X}_1 \cup \{z_0\}$. Тогда (см. [10])

$$H_{\mathbf{X}_2}(\eta) = \max\{H_{\mathbf{X}_1}(\eta), \text{Re}\langle z_0, \eta \rangle\}.$$

Отсюда с учетом (3.4) и определения множества $\mathbf{P}(z_0)$ следует, что конус $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_2}(z_0)$ имеет непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$. По построению множество $\mathbf{X}_2$ лежит в $\mathbf{X}$. Поэтому нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}_2}(z_0) \supset \mathbf{P}_{\mathbf{X}}(z_0) \ni \eta_0. \quad (3.5)$$

Определим еще одно множество:

$$\mathbf{X}_3 = \left\{ y \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle \leq \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle, \quad \eta \in \overline{\mathbf{B}\left(\eta_0, \frac{\delta}{2}\right)} \cap \mathbf{S} \right\}.$$

Это замкнутый выпуклый конус с вершиной в точке z_0 . Легко видеть, что его опорная функция задается следующими равенствами:

$$H_{\mathbf{X}_3}(\eta) = +\infty, \quad \eta \in \mathbf{S} \setminus \overline{\mathbf{B}\left(\eta_0, \frac{\delta}{2}\right)}, \quad (3.6)$$

$$H_{\mathbf{X}_3}(\eta) = \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle, \quad \eta \in \overline{\mathbf{B}\left(\eta_0, \frac{\delta}{2}\right)} \cap \mathbf{S}. \quad (3.7)$$

Пусть Y – выпуклая оболочка объединения $\mathbf{X}_2 \cup \mathbf{X}_3$. Тогда

$$H_Y(\eta) = \max\{H_{\mathbf{X}_2}(\eta), H_{\mathbf{X}_3}(\eta)\}. \quad (3.8)$$

Функция $H_{\mathbf{X}_2}(\eta)$ совпадает с $\operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle$ на конусе $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_2}(z_0)$, имеющем непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$. Согласно (3.5) точка η_0 лежит в $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_2}(z_0)$. Следовательно, пересечение $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_2}(z_0) \cap \mathbf{B}(\eta_0, \delta/2)$ имеет непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$. С учетом (3.7) и (3.8) находим отсюда, что $\mathbf{P}_Y(z_0)$ обладает этим же свойством.

Пусть $y \in \mathbf{X}$ и $\eta \in \mathbf{S}$. Если $\eta \notin \overline{\mathbf{B}(\eta_0, \delta/2)}$, то из (3.6) и (3.8) получаем $\operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle < H_Y(\eta) = +\infty$. Пусть теперь $\eta \in \overline{\mathbf{B}(\eta_0, \delta/2)}$. По лемме 3.7 найдется последовательность $\{\xi_m\} \subset \mathfrak{P}_{\mathbf{X}} \cap \mathbf{B}(\eta_0, \delta)$, сходящаяся к η . Согласно выбору ε и δ точки $z(\xi_m)$, $m \geq 1$, не принадлежат $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$. В силу компактности $\mathbf{X}$, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{z(\xi_m)\}$ сходится к некоторому $y_0 \in \mathbf{X}$, не принадлежащему $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$. Тогда из определений множеств $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ и Y следует, что $y_0 \in Y$. В силу же леммы 3.1 точка η принадлежит $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}(y_0)$. Поэтому с учетом определения опорной функции и $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}(y_0)$ получаем

$$\operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle \leq H_{\mathbf{X}}(\eta) = \operatorname{Re}\langle y_0, \eta \rangle \leq H_Y(\eta).$$

Таким образом, мы доказали, что верно неравенство

$$\operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle \leq H_Y(\eta), \quad \eta \in \mathbf{S}.$$

Оно означает (см. [10]), что y принадлежит замыканию $\overline{Y}$. Поскольку y выбиралось произвольно из $\mathbf{X}$, то $\mathbf{X} \subset \overline{Y}$. Опорные функции множества и его замыкания совпадают (см. [10]). Поэтому последнее соотношение влечет за собой обратное включение для конусов линейности: $\mathbf{P}_Y(z_0) \subset \mathbf{P}_{\mathbf{X}}(z_0)$. Следовательно,

вместе с $\mathbf{P}_Y(z_0)$ конус $\mathbf{P}_X(z_0)$ также имеет непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$. Следствие 3.8 утверждает, что в этом случае точка z_0 является выступающей для множества $\mathbf{X}$. Получили противоречие с нашим допущением насчет z_0 , сделанным вначале. Предложение доказано.

Как уже отмечалось выше, строгая выпуклость множества $\mathbf{X}$ в граничной точке z_0 означает, что малые окрестности этой точки могут пересекаться лишь с опорными элементами малых же диаметров. С учетом леммы 3.2 это равносильно тому, что для каждого η из достаточно малой окрестности множества $\mathbf{P}(z_0) \cap \mathbf{S}$ опорный элемент $\mathbf{F}(\eta)$ лежит в шаре $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$ (где $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно близким к нулю). Если же для некоторой совокупности точек η , лежащих вблизи множества $\mathbf{P}(z_0) \cap \mathbf{S}$, опорные элементы $\mathbf{F}(\eta)$ не лежат целиком в каком-либо шаре $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$, то есть смысл говорить о нестрогой выпуклости множества $\mathbf{X}$ (в окрестности точки z_0) по этим направлениям η . Согласно лемме 3.1 при движении граничной точки z множества $\mathbf{X}$ к $z_0 \in \partial\mathbf{X}$ конусы $\mathbf{P}(z)$ также смещаются к $\mathbf{P}(z_0)$. В общем случае это смещение может происходить по любым “траекториям”. Следующий результат показывает, что при условиях нестрогой выпуклости $\mathbf{X}$ в окрестности z_0 эти траектории (для выступающих точек z) лежат в определенной области, тесно связанной с направлениями нестрогой выпуклости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклый компакт, z_0 – выступающая точка $\mathbf{X}$ и Γ – выпуклый конус из $\mathbf{P}(z_0)$, имеющий общие точки с $\mathfrak{P}(z_0)$. Предположим, что существуют $\varepsilon > 0$, открытое множество W , содержащее $\text{int } \Gamma$, и окрестность W_1 множества $\partial\Gamma \cap \mathbf{S}$, удовлетворяющие условию: для любого $\eta \in \partial W \cap W_1$ опорный элемент $\mathbf{F}(\eta)$ не лежит в шаре $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$. Тогда найдутся окрестность W_2 множества $\partial\Gamma \cap \mathbf{S}$ и число $r > 0$ такие, что для всех $\eta \in [W_2 \cap \mathfrak{P}_X] \setminus W$ выступающая точка $z(\eta)$ не лежит в шаре $\mathbf{B}(z_0, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_0 \in \text{int } \Gamma$. Согласно лемме 3.6 точка η_0 принадлежит $\mathfrak{P}(z_0)$. Покажем, что для некоторого $\delta > 0$ и любого $z \in \partial\mathbf{X} \setminus \mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\text{Re}\langle z_0 - z, \eta_0 \rangle \geq \delta. \quad (3.9)$$

Предположим, что это неверно. Тогда найдется последовательность $\{y_k\} \subset \partial\mathbf{X} \setminus \mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$, сходящаяся к некоторой точке $y_0 \in \partial\mathbf{X} \setminus \mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$ и такая, что $\text{Re}\langle z_0 - y_k, \eta_0 \rangle < 1/k$, $k \geq 1$. Так как $\eta_0 \in \mathbf{P}(z_0)$, то из определений H_X и $\mathbf{P}(z_0)$ имеем

$$\text{Re}\langle y_k, \eta_0 \rangle \leq H_X(\eta_0) = \text{Re}\langle z_0, \eta_0 \rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Объединяя две последние формулы, получаем

$$\text{Re}\langle z_0 - y_k, \eta_0 \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\text{Re}\langle z_0 - y_0, \eta_0 \rangle = 0$. Это означает, что

$$H_X(\eta_0) = \text{Re}\langle z_0, \eta_0 \rangle = \text{Re}\langle y_0, \eta_0 \rangle,$$

т.е. $\eta_0 \in \mathbf{P}(y_0)$, что противоречит определению $\mathfrak{P}(z_0)$, так как $\eta_0 \in \mathfrak{P}(z_0)$. Таким образом, (3.9) действительно верно.

Можно считать, что множество W не содержит $\partial\Gamma \cap \mathbf{S}$. В противном случае утверждение предложения будет тривиальным. При этом предположении пересечение ∂W и $\partial\Gamma \cap \mathbf{S}$ является непустым.

По условию $\eta_0 \in W$. Следовательно, для всех $\eta \notin W$ отрезок $[\eta_0, \eta]$ пересекает ∂W . Докажем существование окрестности W_2 множества $\partial\Gamma \cap \mathbf{S}$, удовлетворяющей условию: для любого $\eta \in W_2 \setminus W$ хотя бы одна из точек пересечения $[\eta_0, \eta] \cap \partial W$ лежит в W_1 .

Пусть вначале $\eta \in \partial W \cap \partial\Gamma \cap \mathbf{S}$. Поскольку $\eta \in W_1$ является единственной точкой пересечения $\partial W \cap [\eta_0, \eta]$, то найдется ее окрестность U_η такая, что для всех $\xi \in U_\eta \setminus W$ одна из точек $\partial W \cap [\eta_0, \xi]$ лежит в W_1 . В качестве W_2 можно взять теперь объединение W и окрестностей U_η , когда η пробегает $\partial W \cap \partial\Gamma \cap \mathbf{S}$.

Рассмотрим произвольное $\eta \in (W_2 \cap \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}) \setminus W$. Пусть ζ — одна из точек $\partial W \cap [\eta_0, \eta]$, лежащая в W_1 . Согласно условию найдем $y \in \mathbf{F}(\zeta)$, не принадлежащее $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$. Предположим, что

$$\operatorname{Re}\langle y - z(\eta), \eta_0 \rangle < 0. \quad (3.10)$$

Выберем $\tau \in [0, 1]$ такое, что $\zeta = \tau\eta_0 + (1 - \tau)\eta$. Из (3.10) с учетом включения $\eta \in \mathfrak{P}(z(\eta))$ и определения $\mathfrak{P}(z(\eta))$ получаем

$$\operatorname{Re}\langle z(\eta), \zeta \rangle = \tau \operatorname{Re}\langle z(\eta), \eta_0 \rangle + (1 - \tau) \operatorname{Re}\langle z(\eta), \eta \rangle > \operatorname{Re}\langle y, \zeta \rangle.$$

Последнее невозможно, так как $y \in \mathbf{F}(\zeta)$, т.е.

$$H_{\mathbf{X}}(\zeta) = \operatorname{Re}\langle y, \zeta \rangle \geq \operatorname{Re}\langle x, \zeta \rangle \quad \forall x \in \overline{\mathbf{X}}.$$

Следовательно, имеет место обратное к (3.10) неравенство

$$\operatorname{Re}\langle y - z(\eta), \eta_0 \rangle \geq 0.$$

Поскольку $y \notin \mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$, отсюда и из (3.9) получаем

$$\operatorname{Re}\langle z_0 - z(\eta), \eta_0 \rangle = \operatorname{Re}\langle z_0 - y, \eta_0 \rangle + \operatorname{Re}\langle y - z(\eta), \eta_0 \rangle \geq \operatorname{Re}\langle z_0 - y, \eta_0 \rangle \geq \delta.$$

Это дает нам следующее:

$$\delta \leq |\operatorname{Re}\langle z_0 - z(\eta), \eta_0 \rangle| \leq |\eta_0| |z_0 - z(\eta)|.$$

Таким образом, мы доказали, что для каждого $\eta \in (W_2 \cap \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}) \setminus W$ выполнено неравенство

$$|z_0 - z(\eta)| \geq \frac{\delta}{|\eta_0|} = r.$$

Здесь $|\eta_0| \neq 0$, так как $\eta_0 \in \operatorname{int} \Gamma$. Предложение доказано.

В дальнейшем через $\operatorname{con} Y$ будем обозначать конус с вершиной в начале координат, порожденный множеством Y , т.е.

$$\operatorname{con} Y = \{ty : y \in Y, \quad t > 0\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Пусть $\mathbf{X}$ – выпуклый компакт и Z – некоторое подмножество его выступающих точек. Предположим, что в условиях предложения 3.10 конус Γ совпадает с $\mathbf{P}(z_0)$ и, кроме того, выполнено еще следующее условие: для каждого $\eta \in W \cap \mathfrak{P}_{\mathbf{X}}$ точка $z(\eta)$ лежит в Z . Тогда найдется окрестность точки z_0 такая, что все выступающие точки $\mathbf{X}$ из этой окрестности лежат в Z .

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение следствия означает, что для выступающих точек z , близких к z_0 , конус $\mathfrak{P}(z)$ лежит в W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{z_k\}$ – произвольная последовательность выступающих точек $\mathbf{X}$, сходящаяся к z_0 , и W_2 – окрестность множества $\partial\mathbf{P}(z_0) \cap \mathbf{S}$, существование которой доказывается в предложении 3.10. По его условию $\text{int } \mathbf{P}(z_0) \subset W$. Поэтому верно включение $\mathbf{P}(z_0) \cap \mathbf{S} \subset W \cup W_2$. Тогда согласно лемме 3.1 найдется номер k_0 такой, что $\mathbf{P}(z_k) \cap \mathbf{S} \subset W \cup W_2$, $k \geq k_0$.

Пусть $\eta \in \mathfrak{P}(z_k)$, $k \geq k_0$. Если $\eta \in \text{con } W$, то согласно условию $z_k \in Z$. Если же $\eta \in \text{con } W_2 \setminus \text{con } W$, то в силу предложения 3.10 точка z_k не может лежать в шаре $\mathbf{B}(z_0, r)$. Следовательно, для всех достаточно больших номеров k конус $\mathfrak{P}(z_k)$ содержится в $\text{con } W$, т.е. $z_k \in Z$. Следствие доказано.

Дальнейшие результаты параграфа касаются только n -круговых компактов. В первом из них описывается структура $\mathbf{P}(z)$.

ЛЕММА 3.12. Пусть K – n -круговой выпуклый компакт с непустой внутреннейностью в $\mathbb{C}^n$ и $z = (z^1, \dots, z^n)$ – граничная точка K . Имеют место следующие утверждения:

- 1) если $z^i \neq 0$, то для каждого $\eta \in \mathbf{P}(z)$ такого, что $\eta^i \neq 0$, верно неравенство $z^i \eta^i > 0$;
- 2) если $\mathbf{M}_0(z)$ нетривиально, то для некоторого набора целых чисел $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ подпространство $\mathbf{M}_0(z)$ совпадает с координатной плоскостью переменных $\eta^{i_1}, \dots, \eta^{i_k}$;
- 3) для тех же i_j , $j = 1, \dots, k$, что и в п. 2), выполнены равенства $z^{i_1} = \dots = z^{i_k} = 0$;
- 4) пусть $j_1, \dots, j_m$ – номера всех нулевых координат точки z ; для каждого $\eta \in \mathbf{P}(z)$ точка $\hat{\eta}$, определяемая из равенств

$$\hat{\eta}^s = \eta^s, \quad s \neq j_p, \quad \hat{\eta}^{j_p} = 0 \quad \forall p = 1, \dots, m,$$

принадлежит $\mathbf{P}(z)$ (при этом $\eta - \hat{\eta} \in \mathbf{M}_0(z)$);

- 5) пусть $\eta \in \mathbf{P}(z)$; если для некоторого $\xi \in \mathbf{P}(z)$ подпространство $\mathbf{M}_0(z)$ содержит вектор $\eta - \xi$ и $\xi^{j_p} = 0 \quad \forall p = \overline{1, m}$, то $\xi = \hat{\eta}$;

6) для каждого $\eta \in \mathbf{P}(z)$ множество $\mathbf{T}_{\eta}$, состоящее из всех точек $\xi \in \mathbf{M}_0(z)$ таких, что $\hat{\eta} + \xi \in \mathbf{P}(z)$, является n -круговым выпуклым компактом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z^i \neq 0$. Рассмотрим произвольную точку $\eta \in \mathbf{P}(z)$ такую, что $\eta^i \neq 0$. Так как K – n -круговой компакт, то вместе с z он содержит также и точку $y = (y^1, \dots, y^n)$, координаты которой определяются из соотношений

$$y^j = z^j, \quad j \neq i; \quad |y^i| = |z^i|, \quad y^i \eta^i > 0. \quad (3.11)$$

Очевидно, выполнено неравенство $\operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle \geq \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle$. С другой стороны, из определений $\mathbf{P}(z)$ и опорной функции получаем $H_K(\eta) = \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle \geq \operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle$. Таким образом, $\operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle = \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle$. С учетом (3.11) находим отсюда, что $\operatorname{Re} z^i \eta^i = y^i \eta^i > 0$. Поскольку $|y^i| = |z^i|$, то предыдущее равенство возможно лишь в случае, когда $z^i \eta^i = y^i \eta^i > 0$. Это дает п. 1) леммы.

Пусть $\eta \in \operatorname{int} \mathbf{P}(z)$ и $\xi \in \mathbf{M}_0(z)$. Так как $\mathbf{M}_0(z) \subset \mathbf{M}(z)$, а $\operatorname{int} \mathbf{P}(z)$ – область в топологии $\mathbf{M}(z)$, то для достаточно малого $r > 0$ точки $\eta + \lambda \xi$ при всех $|\lambda| < r$ принадлежат $\mathbf{P}(z)$. Если $z^i \neq 0$, то согласно п. 1) для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ такого, что $|\lambda| < r$ и $\eta^i + \lambda \xi^i \neq 0$, выполнено неравенство $z^i(\eta^i + \lambda \xi^i) > 0$. Последнее возможно лишь в случае, когда $\xi^i = 0$. Таким образом, мы показали, что имеет место импликация

$$z^i \neq 0 \Rightarrow \xi^i = 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{M}_0(z). \quad (3.12)$$

При условии выполнения п. 2) это доказывает п. 3) леммы.

Пусть $j_1, \dots, j_m$ – номера нулевых координат z и η – произвольная точка из $\mathbf{P}(z)$. Из определений $\mathbf{P}(z)$ и $\hat{\eta}$ следует

$$\operatorname{Re}\langle z, \hat{\eta} \rangle = \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle = H_K(\eta). \quad (3.13)$$

Предположим, что $\hat{\eta} \notin \mathbf{P}(z)$. Тогда для некоторого $y \in K$, лежащего на опорном элементе $\mathbf{F}(\hat{\eta})$, будет выполнено следующее:

$$H_K(\hat{\eta}) = \operatorname{Re}\langle y, \hat{\eta} \rangle > \operatorname{Re}\langle z, \hat{\eta} \rangle. \quad (3.14)$$

Определим $x = (x^1, \dots, x^n) \in K$ посредством соотношений

$$x^i = y^i, \quad i \neq j_p, \quad |x^{j_p}| = |y^{j_p}|, \quad x^{j_p} \eta^{j_p} \geq 0, \quad p = \overline{1, m}.$$

Тогда с учетом определения $\hat{\eta}$ получаем

$$\operatorname{Re}\langle x, \eta \rangle \geq \sum_{i \neq j_p} x^i \eta^i = \sum_{i \neq j_p} y^i \hat{\eta}^i = \operatorname{Re}\langle y, \hat{\eta} \rangle.$$

Отсюда и из (3.13), (3.14) находим, что $\operatorname{Re}\langle x, \eta \rangle > H_K(\eta)$. Это противоречит определению опорной функции. Таким образом, наше предположение неверно, т.е. $\hat{\eta} \in \mathbf{P}(z)$.

Пусть теперь $\xi \in \mathbf{P}(z)$ удовлетворяет равенствам

$$\xi^i = \hat{\eta}^i, \quad i \neq j_p, \quad p = \overline{1, m}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим еще какую-нибудь точку ζ из $\mathbb{C}^n$, для которой

$$\zeta^i = \xi^i, \quad i \neq j_p; \quad |\zeta^{j_p}| = |\xi^{j_p}|, \quad p = 1, \dots, m. \quad (3.16)$$

Если предположить, что $\zeta \notin \mathbf{P}(z)$, т.е. для некоторого $y \in K$ имеем $\operatorname{Re}\langle y, \zeta \rangle > \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle$, то, как и выше, меняя аргументы координат y с номерами j_p , $p = 1, \dots, m$, получим противоречие с определением опорной функции. Следовательно, все точки $\zeta \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющие (3.16), лежат в $\mathbf{P}(z)$. Учитывая еще выпуклость $\mathbf{P}(z)$, находим, что вместе с каждой своей точкой ξ , для которой выполнено (3.15) (например, $\xi = \eta$), он содержит и весь поликруг

$$\hat{\eta} + \left[U(\xi, j_1, \dots, j_m) = \{ \lambda \in \mathbb{C}^n : \lambda^i = 0, \quad i \neq j_p; \quad |\lambda^{j_p}| \leq |\xi^{j_p}|, \quad p = 1, \dots, m \} \right].$$

Поскольку $\hat{\eta} \in \mathbf{P}(z) \subset \mathbf{M}(z)$, то $\mathbf{M}_0(z)$ будет содержать поликруг $U(\eta, j_1, \dots, j_m)$, а также комплексное подпространство, порожденное им. Последнее же лежит в $\mathbf{M}_0(z)$. Следовательно, $U(\eta, j_1, \dots, j_m) \subset \mathbf{M}_0(z)$. Чтобы завершить доказательство п. 4), остается заметить, что в силу определения $\hat{\eta}$ точка $\eta - \hat{\eta}$ принадлежит $U(\eta, j_1, \dots, j_m)$.

Пусть $\zeta^{i_1}, \dots, \zeta^{i_k}$ – минимальный набор координат, в плоскости которых лежит $\mathbf{M}_0(z)$. Тогда в $\mathbf{M}_0(z)$ найдется ζ такое, что $\zeta^{i_s} \neq 0$, $s = \overline{1, k}$. В этом случае в силу (3.12) координаты z^{i_s} , $s = 1, \dots, k$, будут входить в число нулевых координат точки z .

Пусть $\eta \in \operatorname{int} \mathbf{P}(z)$. Тогда для каждого $r \in \mathbb{R}$ точка $\xi = \eta + r\zeta$ удовлетворяет (3.15) (так как $\zeta^i = 0$, $i \neq i_s$, $s = 1, \dots, k$). Поскольку $\zeta \in \mathbf{M}_0(z) \subset \mathbf{M}(z)$, а $\operatorname{int} \mathbf{P}(z)$ – область в $\mathbf{M}(z)$, то для всех малых $r > 0$ конус $\mathbf{P}(z)$ содержит точку ξ . Выберем одно из таких r так, чтобы выполнялись неравенства

$$\eta^{i_s} + \zeta^{i_s} \neq 0, \quad s = 1, \dots, k. \quad (3.17)$$

Выше мы уже показали, что $\mathbf{M}_0(z)$ содержит поликруг $U(\xi, j_1, \dots, j_p)$. Поскольку $j_1, \dots, j_m$ – номера всех нулевых координат точки z , последний в свою очередь будет содержать поликруг $U(\xi, i_1, \dots, i_k)$. Следовательно, в силу (3.17) $\mathbf{M}_0(z)$ содержит и всю координатную плоскость переменных $\zeta^{i_1}, \dots, \zeta^{i_k}$. Согласно выбору этой плоскости верно и обратное. Это дает нам п. 2), а вместе с ним, как отмечалось выше, и п. 3) леммы.

Докажем теперь п. 5). Пусть η и ξ удовлетворяют его условиям. Поскольку $\eta - \xi \in \mathbf{M}_0(z)$, согласно п. 2) $\eta^i - \xi^i = 0$, $i \neq i_s$, $s = 1, \dots, k$. Номера $i_1, \dots, i_k$ в силу п. 3) входят в число номеров $j_1, \dots, j_m$. Поэтому $\eta^i - \xi^i = 0$, $i \neq j_s$, $s = 1, \dots, m$. Отсюда с учетом определения $\hat{\eta}$ получаем: $\xi^i = \eta^i = \hat{\eta}^i$, $i \neq j_s$, $s = 1, \dots, m$. Все остальные координаты ξ (как и $\hat{\eta}$) являются нулевыми по условию п. 5). Таким образом, $\xi = \hat{\eta}$.

То, что множество $\mathbf{T}_\eta$ из п. 6) является n -круговым, мы уже по сути дела доказали выше. Теперь с учетом замкнутости и выпуклости $\mathbf{P}(z)$ для доказательства п. 6) достаточно показать ограниченность $\mathbf{T}_\eta$. Предположим, что $\mathbf{T}_\eta$ не ограничено. Тогда в силу его симметричности (оно круговое) найдется последовательность $\{\zeta_j\} \subset \mathbf{M}_0(z)$ такая, что $|\zeta_j| \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$ и точки $\hat{\eta} \pm \zeta_j$ лежат в $\mathbf{P}(z)$

для всех $j \geq 1$. Поскольку $\mathbf{P}(z)$ – конус, верны включения $\hat{\eta}/|\zeta_j| \pm \zeta_j/|\zeta_j| \in \mathbf{P}(z)$, $j \geq 1$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\zeta_j/|\zeta_j|\}$ сходится к некоторому ζ_0 . Тогда в силу замкнутости конуса $\mathbf{P}(z)$ он содержит точки $\pm\zeta_0$. Согласно определению $\mathbf{P}(z)$ это означает, что

$$H_K(\zeta_0) = \operatorname{Re}\langle z, \zeta_0 \rangle = -\operatorname{Re}\langle z, -\zeta_0 \rangle = -H_K(-\zeta_0).$$

С другой стороны, компакт K имеет непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$. Поэтому (см. [10])

$$H_K(\zeta) > -H_K(-\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Точка $\hat{\eta}$, определяемая в лемме 3.12 для $\eta \in \mathbf{P}(z)$, зависит, вообще говоря, от $z \in \mathbf{F}(\eta)$. Однако для $\eta \in \mathfrak{P}_K$ опорный элемент $\mathbf{F}(\eta)$ состоит лишь из точки $z(\eta)$, и поэтому $\hat{\eta}$ определяется в этом случае однозначно.

2) Для ненулевых $\eta \in \mathbf{P}(z)$ точки $\hat{\eta}$ также являются ненулевыми. Действительно, пусть $\hat{\eta} = 0$. Тогда согласно п. 4) леммы 3.12 точка $\eta - \hat{\eta} = \eta$ принадлежит $\mathbf{M}_0(z)$. Поскольку $\eta \in \mathbf{P}(z)$, то с учетом п. 2) и п. 3) леммы 3.12 получаем $H_K(\eta) = \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle = 0$. Последнее невозможно для $\eta \neq 0$, так как $0 \in \operatorname{int} K$ и K имеет непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$, т.е. $H_K(\zeta) > 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Попутно мы показали, что для каждой граничной точки z компакта K (n -кругового и имеющего непустую внутренность в $\mathbb{C}^n$) пересечение $\mathbf{M}_0(z) \cap \mathbf{P}(z)$ состоит лишь из начала координат.

3) Пусть $\eta_1 \in \Gamma(\eta, z) \setminus \{0\}$. Так как $\Gamma(\eta, z)$ порожден подмножеством из $\mathbf{M}_0(z)$, то найдется $t > 0$ такое, что $t\eta - \eta_1 \in \mathbf{M}_0(z)$. По п. 2) леммы 3.12 выполнены равенства $t\eta^i = \eta_1^i$, $i \neq i_s$, $s = 1, \dots, k$. Отсюда, учитывая еще п. 3) и определение $\hat{\eta}$, находим, что $\hat{\eta}_1 = t\hat{\eta}$. Таким образом, верно следующее:

$$\frac{\hat{\eta}}{|\hat{\eta}|} = \frac{\hat{\eta}_1}{|\hat{\eta}_1|} \quad \forall \eta_1 \in \Gamma(\eta) \setminus \{0\}.$$

4) По п. 4) леммы 3.12 $\eta - \hat{\eta} \in \mathbf{M}_0(z)$, т.е. множество $\hat{\eta} + \mathbf{M}_0(z)$ содержит η . Согласно определению $\Gamma(\hat{\eta}, z)$ последнее означает, что $\eta \in \Gamma(\hat{\eta}, z)$. Верно и обратное. Таким образом, конусы $\Gamma(\eta, z)$ и $\Gamma(\hat{\eta}, z)$ совпадают. Согласно п. 6) леммы 3.12 $\Gamma(\eta, z)$ порождается множеством $\hat{\eta} + \mathbf{T}_\eta$. Так как $\mathbf{T}_\eta$ – n -круговое множество, то $0 \in \operatorname{int} \mathbf{T}_\eta$. Следовательно, $\hat{\eta} \in \operatorname{int} \Gamma(\eta, z)$.

Докажем еще два технических результата.

ЛЕММА 3.13. Пусть K – n -круговой выпуклый компакт с непустой внутренностью в $\mathbb{C}^n$. Существует $A > 0$ такое, что для каждого $z \in \partial K$ и любых $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{P}(z) \cap \mathbf{S}$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\hat{\eta}_1}{|\hat{\eta}_1|} - \frac{\hat{\eta}_2}{|\hat{\eta}_2|} \right| \leq A|\eta_1 - \eta_2|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{P}(z) \cap \mathbf{S}$. Так как $\hat{\eta}_1$ и $\hat{\eta}_2$ получаются из η_1 и η_2 занулением одних и тех же координат, то верно неравенство $|\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2| \leq |\eta_1 - \eta_2|$. Отсюда

$$|\eta_1 - \eta_2| \geq |\hat{\eta}_1| \left| \frac{\hat{\eta}_1}{|\hat{\eta}_1|} - \frac{\hat{\eta}_2}{|\hat{\eta}_1|} \right|.$$

Для определенности считаем, что $|\hat{\eta}_1| \leq |\hat{\eta}_2|$. Тогда элементарные геометрические рассуждения показывают, что

$$\left| \frac{\hat{\eta}_1}{|\hat{\eta}_1|} - \frac{\hat{\eta}_2}{|\hat{\eta}_2|} \right| \leq \left| \frac{\hat{\eta}_1}{|\hat{\eta}_1|} - \frac{\hat{\eta}_2}{|\hat{\eta}_1|} \right|.$$

Остается доказать равномерную ограниченность снизу величин $|\hat{\eta}_1|$, когда $\eta_1 \in \mathbf{P}(z) \cap \mathbf{S}$ и $z \in \partial K$. Предположим противное, т.е. найдутся последовательности $\{z_m\} \subset \partial K$ и $\{\zeta_m\}$ такие, что $\zeta_m \in \mathbf{P}(z_m) \cap \mathbf{S}$, $m \geq 1$, и $|\zeta_m| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\{z_m\}$ и $\{\zeta_m\}$ сходятся соответственно к z_0 и ζ_0 . По п. 4) леммы 3.12 точка $\zeta_m - \hat{\zeta}_m$ принадлежит $\mathbf{M}_0(z_m)$, $m \geq 1$. Так как $\hat{\zeta}_m + (\zeta_m - \hat{\zeta}_m) \in \mathbf{P}(z_m)$, то согласно п. 6) этой же леммы все точки вида $\hat{\zeta}_m + \lambda(\zeta_m - \hat{\zeta}_m)$, $|\lambda| \leq 1$, лежат в $\mathbf{P}(z_m)$, $m \geq 1$. Следовательно, в силу леммы 3.1 имеем включение $\lambda\zeta_0 \in \mathbf{P}(z_0)$, $|\lambda| \leq 1$. Таким образом, пересечение $\mathbf{P}(z_0) \cap \mathbf{M}_0(z_0)$ нетривиально. Последнее, как было показано в замечании 2) к лемме 3.12, невозможно. Лемма доказана.

Через $Z_K(s, l)$ обозначим множество граничных точек z выпуклого компакта K , у которых ровно s ненулевых координат и подпространство $\mathbf{M}_0(z)$ имеет комплексную размерность l .

ЛЕММА 3.14. Пусть K — n -круговой выпуклый компакт с непустой внутреннейностью в $\mathbb{C}^n$ и $z \in Z_K(s, l)$. Если $s + l \neq n$, то

$$\mathbf{P}(z) \subset \bigcup_{i=1}^n \{\eta \in \mathbb{C}^n : \eta^i = 0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in Z_K(s, l)$. Согласно п. 2) леммы 3.12 $\mathbf{M}_0(z)$ совпадает с координатной плоскостью по некоторому набору переменных $\xi^{i_1}, \dots, \xi^{i_l}$. Пусть $z^{j_1}, \dots, z^{j_s}$ — все ненулевые координаты z . По п. 3) той же леммы множества $\{i_1, \dots, i_l\}$ и $\{j_1, \dots, j_s\}$ не пересекаются. Следовательно, $s + l \leq n$. Если $s + l < n$, то найдется номер $k = 1, \dots, n$ такой, что

$$k \notin \{i_1, \dots, i_l\} \cup \{j_1, \dots, j_s\}. \quad (3.18)$$

Пусть $\eta \in \mathbf{P}(z)$. По определению точки $\hat{\eta}$ имеем

$$\hat{\eta}^j = 0, \quad j \neq j_m, \quad m = 1, \dots, s. \quad (3.19)$$

Кроме того, по п. 4) леммы 3.12 $\eta - \hat{\eta} \in \mathbf{M}_0(z)$, т.е.

$$\eta^j - \hat{\eta}^j = 0, \quad j \neq i_r, \quad r = 1, \dots, l. \quad (3.20)$$

В силу (3.18) для $j = k$ выполнено (3.19) и (3.20). Следовательно, $\eta^k = 0$ и $\mathbf{P}(z) \subset \{\eta \in \mathbb{C}^n : \eta^k = 0\}$. Лемма доказана.

§ 4. Достаточные условия единственности

Рассмотрим вначале некоторые вспомогательные утверждения. В первом из них доказывается, что равенство из теоремы 1.2 будет всегда выполнено на некотором подмножестве из $\mathbb{C}^n$.

ЛЕММА 4.1. Пусть ν – аналитический функционал из $H^*(\mathbb{C}^n)$, $K \subset \mathbb{C}^n$ – выпуклый компакт. Если K является носителем ν , то для любой выступающей точки z найдется $\eta \in \mathbf{P}(z) \setminus \{0\}$ такое, что

$$\mathcal{L}^*(t\eta, \tilde{\nu}) = H_K(t\eta), \quad t \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку ξ из $\mathfrak{P}(z)$ и рассмотрим выпуклые компакты

$$K_m = K \cap \left\{ y \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle \leq H_K(\xi) - \frac{1}{m} \right\},$$

$m \geq 1$. Эти компакты образуют возрастающую последовательность собственных подмножеств K , и их объединение дает все K . Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер m_0 такой, что

$$H_{K_m}(\eta) \geq H_K(\eta) - \varepsilon|\eta|, \quad \eta \in \mathbb{C}^n, \quad m \geq m_0. \quad (4.1)$$

Согласно определению носителя компакт K является также определяющим множеством функционала ν , т.е. (см. лемму 1.1)

$$\mathcal{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) \leq H_K(\eta), \quad \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (4.2)$$

С другой стороны, никакое собственное замкнутое выпуклое подмножество $K' \subset K$ уже не является определяющим для ν , т.е. неравенство из леммы 1.1, переписанное для K' , нарушается. Поэтому для любого $m \geq 1$ найдется точка $\eta_m \in \mathbf{S}$ (здесь мы учитываем однородность функций), удовлетворяющая условию

$$\mathcal{L}^*(\eta_m, \tilde{\nu}) > H_{K_m}(\eta_m). \quad (4.3)$$

Выберем произвольное z_m на элементе $\mathbf{F}(\eta_m)$ (который не пуст в силу компактности K), $m \geq 1$. Из (4.2) и (4.3) с учетом определений $\mathbf{F}(\eta_m)$ и опорной функции находим, что $z_m \notin K_m$, $m \geq 1$. Поскольку $z_m \in \mathbf{F}(\eta_m) \subset K$, то в силу построения K_m получаем

$$\operatorname{Re}\langle z_m, \xi \rangle > H_K(\xi) - \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\{\eta_m\}$ и $\{z_m\}$ сходятся соответственно к η_0 и z_0 . Покажем, что $z_0 = z$. В силу (4.4) $\operatorname{Re}\langle z_0, \xi \rangle \geq H_K(\xi)$. С другой стороны, z_0 является пределом последовательности, лежащей на K . Поэтому $z_0 \in K$, и согласно определению опорной функции $\operatorname{Re}\langle z_0, \xi \rangle \leq H_K(\xi)$. Таким образом, $\operatorname{Re}\langle z_0, \xi \rangle = H_K(\xi)$. Это означает, что z_0 принадлежит элементу $\mathbf{F}(\xi)$. Поскольку $\xi \in \mathfrak{P}(z)$, то последний вырождается в точку $z(\xi) = z$. Следовательно, $z_0 = z$. Тогда по лемме 3.1 точка $\eta_0 \in \mathbf{S}$ принадлежит $\mathbf{P}(z)$. Из (4.1)–(4.3) и полунепрерывности сверху $\mathcal{L}^*$ следует, что $\mathcal{L}^*(\eta_0, \tilde{\nu}) = H_K(\eta_0)$. Поскольку функции здесь положительно однородны, лемма полностью доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть Γ – выпуклый почти комплексный конус в $\mathbb{C}^n$ и $q(\eta)$ – плюрисубгармоническая, положительно однородная функция в $\mathbb{C}^n$. Если $q(\eta)$ неположительна на Γ и равна нулю в некоторой точке $\eta_0 \in \text{int } \Gamma$, то она равна нулю всюду в Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Γ – почти комплексный и выпуклый конус, то согласно определению его внутренность $\text{int } \Gamma$ порождена связной областью U некоторого комплексного аффинного подпространства в $\mathbb{C}^n$. Точка η_0 лежит в $\text{int } \Gamma$. Поэтому луч $t\eta_0$, $t > 0$, пересекает множество U в некоторой точке η' . По условию $q(\eta_0) = 0$. Следовательно, в силу однородности и $q(\eta') = 0$. Таким образом, сужение $q(\eta)$ на U является неположительной плюрисубгармонической функцией, достигающей своего нулевого максимума во внутренней точке η' области U . По принципу максимума это сужение тождественно равно нулю в U . То, что $q(\eta) = 0$ всюду в Γ , следует теперь из однородности и полунепрерывности сверху функции $q(\eta)$. Лемма доказана.

Нам понадобятся еще два результата, доказанные в [8]. В первом из них даются оценки неположительных субгармонических функций вблизи границ областей из $\mathbb{C}$. В том общем виде, в котором этот результат приведен в предложении 4.1 из [8], он нам не понадобится. Поэтому мы сформулируем его лишь для частного случая, который был известен, по-видимому, и много раньше.

ЛЕММА 4.3. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – единичный круг с центром в нуле и M – положительное число. Существуют $\tau \in (0, 1)$, не зависящее от M , и $c = c(M) > 0$ такие, что для любой неположительной субгармонической в U функции $\psi(\lambda)$, полунепрерывной сверху в $\bar{U}$ и удовлетворяющей условию $\sup_{|\lambda| \leq \tau} \psi(\lambda) \leq -M$, верна оценка

$$\psi(\lambda) \leq -c(1 - |\lambda|), \quad \lambda \in \bar{U}.$$

Следующий результат из [8] (лемма 5.3) мы также сформулируем лишь для частного случая.

ЛЕММА 4.4. Пусть ν – аналитический функционал из $H^*(\mathbb{C}^n)$ и K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$, который является определяющим множеством для ν . Предположим, что существуют сходящиеся последовательности $\{z_k\} \subset \partial K$, $\{\xi_k\} \subset \mathbf{S}$ и $\{\zeta_k\}$ с пределами z_0 , ξ_0 и ζ_0 соответственно, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\xi_k \in \partial \mathbf{P}(z_k)$, $\xi_k - \zeta_k \in \mathbf{M}_0(z_k)$, $k = 1, 2, \dots$;
- 2) $\text{diam } \mathbf{F}_K(\xi_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;
- 3) $\mathfrak{L}^*(\xi_k, \tilde{\nu}) = H_K(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots$;
- 4) $\{\zeta_k + \lambda(\xi_k - \zeta_k) : |\lambda| \leq 1\} \subset \mathbf{P}(z_k)$, $k = 1, 2, \dots$.

Тогда имеет место равенство

$$\mathfrak{L}^*(\zeta_0 + \lambda(\xi_0 - \zeta_0), \tilde{\nu}) = H_K(\zeta_0 + \lambda(\xi_0 - \zeta_0)), \quad |\lambda| \leq 1.$$

Приступим, наконец, к формулировке и доказательству основного результата данного параграфа.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть K – n -круговой выпуклый компакт с непустой внутреннейностью в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что $\mathfrak{P}_K = \mathbf{E}_K \cup \mathbf{E}'_K$.

Тогда K обладает свойством единственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν – произвольный аналитический функционал из $H^*(\mathbb{C}^n)$, для которого K является носителем. Согласно теореме 1.2 утверждение будет доказано, если мы покажем, что

$$\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) = H_K(\eta) \quad (4.5)$$

для каждого $\eta \in \mathbb{C}^n$. По определению носитель аналитического функционала является одновременно и его определяющим множеством. Следовательно, по лемме 1.1 верно неравенство

$$\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) \leq H_K(\eta), \quad \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (4.6)$$

Предположим, что мы доказали (4.5) для некоторой сходящейся последовательности $\{\eta_m\}$ с пределом η_0 . Тогда в силу полунепрерывности сверху $\mathfrak{L}^*$ и непрерывности $H_K(\eta)$ будем иметь $\mathfrak{L}^*(\eta_0, \tilde{\nu}) \geq H_K(\eta_0)$. С другой стороны, согласно (4.6) верно обратное, и мы получаем равенство (4.5) в точке η_0 . Таким образом, достаточно доказать (4.5) для какого-либо плотного подмножества из $\mathbb{C}^n$. В силу леммы 3.7 в качестве последнего можно взять

$$\mathfrak{P}'_K = \mathfrak{P}_K \setminus \bigcup_{i=1}^n \{\eta \in \mathbb{C}^n : \eta^i = 0\}.$$

Итак, пусть η_0 – произвольная точка из $\mathfrak{P}'_K$. Проведем доказательство равенства (4.5) в этой точке индукцией по комплексной размерности подпространства $\mathbf{M}_0(z(\eta_0))$. Пусть $\mathbf{M}_0(z(\eta_0)) = \{0\}$. Тогда согласно определению $\mathfrak{P}'_K$ и лемме 3.14 все координаты точки $z(\eta_0)$ являются ненулевыми. По условию $\eta_0 \in \mathbf{E}_K \cup \mathbf{E}'_K$. Пусть $\{\eta_k\}$ – сходящаяся последовательность из определения $\mathbf{E}_K$ и $\mathbf{E}'_K$ с пределом ζ_0 , лежащим в $\text{int } \Gamma(\eta_0)$. Пересечение $\Gamma(\eta_0) \cap \mathfrak{P}(z(\eta_0))$ не пусто, так как содержит η_0 . Поэтому по лемме 3.6 $\text{int } \Gamma(\eta_0)$ и, в частности, ζ_0 лежат в $\mathfrak{P}(z(\eta_0))$. Это означает, что элемент $\mathbf{F}(\zeta_0)$ состоит из одной выступающей точки $z(\zeta_0)$, совпадающей в этом случае с $z(\eta_0)$. Тогда согласно следствию 3.3 $\{z(\eta_k)\}$ сходятся к $z(\eta_0)$. Поскольку все координаты $z(\eta_0)$ ненулевые, таковыми будут и координаты $z(\eta_k)$ при всех k , больших некоторого k_0 . Следовательно, в силу пп. 2) и 3) леммы 3.12 подпространства $\mathbf{M}_0(z(\eta_k))$, $k > k_0$, тривиальны. Отсюда согласно определению находим, что конусы $\Gamma(\eta_k)$ для $k > k_0$ являются лучами, и поэтому их границы состоят лишь из начала координат. Следовательно, соответствующие этим конусам величины $\mathbf{D}'_K(\eta_k)$ одинаковы и равны $\text{diam } \mathbf{F}_K(0) = \text{diam } \partial K$. Таким образом, последовательность $\{\mathbf{D}'_K(\eta_k)\}$ не может сходить к нулю, т.е. η_0 не принадлежит $\mathbf{E}'_K$. Но тогда $\eta_0 \in \mathbf{E}_K$ и $\mathbf{D}_K(\eta_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Из определения величины $\mathbf{D}_K(\eta)$ следует, что при условии тривиальности $\mathbf{M}_0(z(\eta))$ она превращается в обычный диаметр множества $\mathbf{P}(z(\eta)) \cap \mathbf{S}$. Поэтому имеем

$$\text{diam}(\mathbf{P}(z(\eta_k)) \cap \mathbf{S}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

По лемме 4.1 для $k \geq 1$ найдем $\xi_k \in \mathbf{P}(z(\eta_k)) \cap \mathbf{S}$ такое, что

$$H_K(t\xi_k) = \mathfrak{L}^*(t\xi_k, \tilde{\nu}), \quad t \geq 0. \quad (4.8)$$

Поскольку $\eta_k/|\eta_k| \in \mathbf{P}(z(\eta_k)) \cap \mathbf{S}$, то в силу (4.7) последовательность $\{\xi_k\}$ имеет тот же предел, что и $\{\eta_k/|\eta_k|\}$, т.е. $\{\xi_k\}$ сходится к $\zeta_0/|\zeta_0|$ ($|\zeta_0| \neq 0$, так как $\zeta_0 \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$). Из этой сходимости и (4.8), как показано выше, следует выполнимость (4.5) в точке $\zeta_0/|\zeta_0|$. Функция $H_K(\eta)$ на конусе $\mathbf{P}(z(\eta_0))$ равна $\text{Re}\langle z(\eta_0), \eta \rangle$. Поэтому в силу (4.6) и леммы 4.2, примененной к $\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) - \text{Re}\langle z(\eta_0), \eta \rangle$, (4.5) будет выполнено на всем $\Gamma(\eta_0)$ и, в частности, в точке η_0 .

Предположим, что равенство (4.5) доказано для всех $\eta_0 \in \mathfrak{P}'_K$ таких, что размерность $\mathbf{M}_0(z(\eta_0))$ не превышает $l - 1$. Пусть теперь эта размерность равна l . Тогда по лемме 3.14 $z(\eta_0) \in Z_K(n - l, l)$. Через Z обозначим пересечение ∂K с плоскостью всех ненулевых координат точки $z(\eta_0)$, номера которых, в свою очередь, обозначим через $j_1, \dots, j_{n-l}$. Выберем окрестность U точки $z(\eta_0)$ такую, что

$$z^{j_p} \neq 0, \quad p = 1, \dots, n - l, \quad \forall z = (z^1, \dots, z^n) \in U. \quad (4.9)$$

Рассмотрим произвольную последовательность $\{\eta_k\} \subset \mathfrak{P}_K$, сходящуюся к некоторому $\eta' \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$. Предположим, что для всех $k \geq 1$ точка $z(\eta_k)$ имеет по крайней мере $n - l + 1$ ненулевых координат. Поскольку $\mathfrak{P}'_K$ плотно в $\mathbb{C}^n$, то для каждого $k \geq 1$ мы можем найти последовательность $\{\eta_{k,m}\} \subset \mathfrak{P}'_K$, сходящуюся к η_k . По следствию 3.3 $\{z(\eta_{k,m})\}$ сходится к $z(\eta_k)$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому для всех достаточно больших m точки $z(\eta_{k,m})$ имеют не менее $n - l + 1$ ненулевых координат. Тогда согласно лемме 3.14 размерность $\mathbf{M}_0(z(\eta_{k,m}))$ не превышает $l - 1$. В силу индуктивного допущения для указанных m будет выполнено равенство $\mathfrak{L}^*(\eta_{k,m}, \tilde{\nu}) = H_K(\eta_{k,m})$. Оно же, как показано ранее, будет выполнено тогда и для всех предельных точек η_k , а вместе с ними и для η' . Применение леммы 4.2 дает нам сейчас, как и при доказательстве первого шага индукции, равенство (4.5) для η_0 .

Пусть теперь $\{\eta_k\}$ — последовательность из определения множеств $\mathbf{E}_K$ и $\mathbf{E}'_K$ с пределом $\zeta_0 \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$. Если для некоторой ее подпоследовательности $\{\eta_{k_j}\}$ точки $z(\eta_{k_j})$, $j \geq 1$, имеют более чем $n - l$ ненулевых координат, то по доказанному для η_0 будет выполнено (4.5). Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда все $z(\eta_k)$ имеют не более чем $n - l$ ненулевых координат. С другой стороны, как и на первом шаге индукции, доказывается, что $\{z(\eta_k)\}$ сходится к $z(\eta_0)$. Следовательно, для всех больших k имеет место (4.9) с $z = z(\eta_k)$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что

$$z(\eta_k) \in Z \cap U, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

т.е. точки $z(\eta_k)$ имеют ровно $n - l$ ненулевых координат, причем с теми же номерами, что и у $z(\eta_0)$.

Предположим вначале, что $\eta_0 \in \mathbf{E}'_K$. Тогда $\mathbf{D}'_K(\eta_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Так как $\mathbf{F}(t\eta) = \mathbf{F}(\eta)$, $t > 0$, то согласно определению $\mathbf{D}'_K(\eta_k)$ для каждого $k \geq 1$ выберем $\xi_k \in \partial\Gamma(\eta_k) \cap \mathbf{S}$ такое, что

$$\text{diam } \mathbf{F}_K(\xi_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\xi_k\}$ сходится к некоторому ξ_0 . Поскольку $\xi_k \in \Gamma(\eta_k) \subset \mathbf{P}(z(\eta_k))$, то по лемме 3.1 $\xi_0 \in \mathbf{P}(z(\eta_0))$. В силу (4.10) и определения из п. 4) леммы 3.12 точки $\hat{\xi}_k$ и $\hat{\xi}_0$ получаются соответственно из ξ_k и ξ_0 занулением одних и тех же координат. Поэтому $\{\hat{\xi}_k\}$ сходится к $\hat{\xi}_0$. Аналогично получаем: $\hat{\eta}_k \rightarrow \hat{\xi}_0$ при $k \rightarrow \infty$.

Покажем, что для последовательностей $\{z(\eta_k)\}$, $\{\xi_k\}$ и $\{\hat{\xi}_k\}$ выполняются все условия леммы 4.4. Условие 1) выполнено по п. 4) леммы 3.12. Формула (4.11) дает нам условие 2). Поскольку $\xi_k - \hat{\xi}_k \in \mathbf{M}_0(z(\eta_k))$, то по п. 6) леммы 3.12 имеем включения

$$\hat{\xi}_k + \lambda(\xi_k - \hat{\xi}_k) \subset \mathbf{P}(z(\eta_k)), \quad |\lambda| \leq 1, \quad k \geq 1, \quad (4.12)$$

которые требуются в условии 4). Осталось проверить условие 3). Так как $\xi_k \in \mathbf{P}(z(\eta_k))$, то по определению опорного элемента $z(\eta_k) \in \mathbf{F}_K(\xi_k)$, $k \geq 1$. Поэтому в силу (4.11) и сходимости $\{z(\eta_k)\}$ к точке $z(\eta_0)$ найдется номер k_0 такой, что

$$\mathbf{F}_K(\xi_k) \subset U, \quad k \geq k_0. \quad (4.13)$$

Для каждого $k \geq 1$ рассмотрим прямую $\{\xi_{k,\alpha} = \alpha\xi_k + (1-\alpha)\hat{\xi}_k, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Согласно замечанию 3) к лемме 3.12 точки $\hat{\xi}_k$ и $\hat{\eta}_k$ лежат на одном луче из $\Gamma(\eta_k)$, а в силу замечания 4) к этой же лемме $\hat{\eta}_k \in \text{int } \Gamma(\eta_k)$. Поэтому $\hat{\xi}_k \in \text{int } \Gamma(\eta_k)$. По выбору ξ_k лежит на $\partial\Gamma(\eta_k)$. Следовательно, с учетом выпуклости конуса $\Gamma(\eta_k)$ точки $\xi_{k,\alpha}$ при $\alpha > 1$ не принадлежат ему. Поскольку $\Gamma(\eta_k)$ есть пересечение подпространства из $\mathbb{C}^n$ (порожденного множеством $\eta_k + \mathbf{M}_0(z(\eta_k))$) и конуса $\mathbf{P}(z(\eta_k))$, указанные точки не принадлежат также и $\mathbf{P}(z(\eta_k))$. Пусть $\alpha \rightarrow 1$. Тогда $\xi_{k,\alpha} \rightarrow \xi_k$. Отсюда и из леммы 3.2 с учетом (4.13) легко следует, что для каждого $k \geq k_0$ найдется число $\alpha_k > 1$ такое, что имеют место включения

$$\mathbf{F}(\xi_{k,\alpha}) \subset U \quad \forall \alpha \in [1, \alpha_k]. \quad (4.14)$$

Как уже отмечалось, любой опорный элемент выпуклого компакта содержит хотя бы одну его крайнюю точку. Пусть $z_{k,\alpha}$ — одна из таких точек, лежащая на $\mathbf{F}(\xi_{k,\alpha})$. В силу (4.14) $z_{k,\alpha} \in U$. Предположим, что $z_{k,\alpha} \in U \cap Z$. Тогда согласно определению из п. 4) леммы 3.12 точка $\hat{\xi}_{k,\alpha}$ получается из $\xi_{k,\alpha} \in \mathbf{P}(z_{k,\alpha})$ при помощи зануления координат последней с номерами j_p , $p = 1, \dots, n-l$. Точно так же из ξ_k получается $\hat{\xi}_k$. Поэтому $\hat{\xi}_{k,\alpha}^{j_p} = \hat{\xi}_k^{j_p} = 0$, $p = 1, \dots, n-l$. Кроме того, для номеров i , отличных от j_p , $p = 1, \dots, n-l$, координаты $\xi_{k,\alpha}^i$ и $\hat{\xi}_{k,\alpha}^i$, а также ξ_k^i и $\hat{\xi}_k^i$ совпадают, и мы имеем

$$\hat{\xi}_{k,\alpha}^i = \xi_{k,\alpha}^i = \alpha\xi_k^i + (1-\alpha)\hat{\xi}_k^i = \xi_k^i = \hat{\xi}_k^i.$$

Следовательно, $\hat{\xi}_{k,\alpha} = \hat{\xi}_k$.

Выше мы показали, что $\hat{\xi}_k \in \text{int } \Gamma(\eta_k)$. Так как пересечение $\Gamma(\eta_k) \cap \mathfrak{P}(z(\eta_k))$ не пусто (оно содержит η_k), то по лемме 3.6 конус $\text{int } \Gamma(\eta_k)$ и, в частности, точка $\hat{\xi}_k = \hat{\xi}_{k,\alpha}$ принадлежат $\mathfrak{P}(z(\eta_k))$, $k \geq k_0$. Следовательно, согласно определению конусов $\mathfrak{P}(z)$ точка $z(\eta_k)$ является единственной точкой компакта K , конус линейности которой $\mathbf{P}(z(\eta_k))$ содержит $\hat{\xi}_{k,\alpha}$. Поскольку $\hat{\xi}_{k,\alpha}$ по п. 4) леммы 3.12 принадлежит $\mathbf{P}(z_{k,\alpha})$, то отсюда следует, что $z_{k,\alpha} = z(\eta_k)$. Значит, $\xi_{k,\alpha}$ принадлежит $\mathbf{P}(z(\eta_k)) = \mathbf{P}(z_{k,\alpha})$. По доказанному же ранее $\xi_{k,\alpha}$ при $\alpha > 1$ не лежит в $\mathbf{P}(z(\eta_k))$. Полученное противоречие означает, что наше предположение о принадлежности $z_{k,\alpha}$ при $\alpha \in (1, \alpha_k]$ множеству Z неверно. Таким образом, $z_{k,\alpha} \in U \setminus Z$ для всех $k \geq k_0$ и $\alpha \in (1, \alpha_k]$, т.е. $z_{k,\alpha}$ имеет по крайней мере $n - l + 1$ ненулевых координат (см. (4.9)).

Согласно предложению 3.9 для любых $k \geq k_0$ и $\alpha \in (1, \alpha_k]$ найдем точку $\xi_{k,\alpha,m} \in \mathfrak{P}_K$ такую, что $|\xi_{k,\alpha} - \xi_{k,\alpha,m}| < 1/m$ и $|z_{k,\alpha} - z(\xi_{k,\alpha,m})| < 1/m$. Далее, поскольку $\mathfrak{P}'_K$ плотно в $\mathbb{C}^n$, то с учетом следствия 3.3 для всех $k \geq k_0$, $\alpha \in (1, \alpha_k]$ и $m \geq 1$ найдется $\xi_{k,\alpha,m,j} \in \mathfrak{P}'_K$ такое, что $|\xi_{k,\alpha,m} - \xi_{k,\alpha,m,j}| < 1/j$ и $|z(\xi_{k,\alpha,m}) - z(\xi_{k,\alpha,m,j})| < 1/j$. По построению последовательности $\{\xi_{k,\alpha,m,m}\} \subset \mathfrak{P}'_K$ и $\{z(\xi_{k,\alpha,m,m})\}$ сходятся соответственно к точкам $\xi_{k,\alpha}$ и $z_{k,\alpha}$. Следовательно, для всех достаточно больших m точки $z(\xi_{k,\alpha,m,m})$, как и $z_{k,\alpha}$, имеют по крайней мере $n - l + 1$ ненулевых координат. Тогда по лемме 3.14 размерность $\mathbf{M}_0(z(\xi_{k,\alpha,m,m}))$ для таких m не превышает $l - 1$. Поэтому согласно допущению индукции в точках $\xi_{k,\alpha,m,m}$ при больших m будет выполнено (4.5). Это же равенство, как показано выше, будет выполнено тогда и в предельных точках $\xi_{k,\alpha}$, а вслед за ними и в точках ξ_k , $k \geq k_0$. Это дает нам условие 3) из леммы 4.4.

Таким образом, мы можем применить лемму 4.4 в нашей ситуации. Согласно ей будет выполнено равенство

$$\mathfrak{L}^*(\hat{\xi}_0 + \lambda(\xi_0 - \hat{\xi}_0), \tilde{\nu}) = H_K(\hat{\xi}_0 + \lambda(\xi_0 - \hat{\xi}_0)), \quad |\lambda| \leq 1. \quad (4.15)$$

Как уже отмечалось, $\hat{\xi}_k$ и $\hat{\eta}_k$ лежат на одном луче. Следовательно, их предельные точки также лежат на одном луче. Тогда в силу замечания 4) к лемме 3.12 имеем $\hat{\xi}_0 \in \text{int } \Gamma(\zeta_0)$. По выбору $\zeta_0 \in \Gamma(\eta_0)$. Поскольку два конуса $\Gamma(\eta, z) \setminus \{0\}$ и $\Gamma(\xi, z) \setminus \{0\}$ либо совпадают, либо не пересекаются, из последнего получаем $\Gamma(\eta_0) = \Gamma(\zeta_0)$. В силу (4.15) равенство (4.5) выполнено в точке $\hat{\xi}_0 \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$. Следовательно, по лемме 4.2, как и выше, оно будет выполнено на всем $\Gamma(\eta_0)$ и, в частности, в точке η_0 .

Таким образом, все доказано для случая, когда $\eta_0 \in \mathbf{E}'_K$.

Пусть теперь $\eta_0 \in \mathbf{E}_K$. Последовательность $\{\eta_k\} \subset \mathfrak{P}_K$ и точка $\zeta_0 \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$ — те же, что и выше, но здесь уже $\mathbf{D}_K(\eta_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Проведем доказательство от противного, т.е. предположим, что (4.5) не выполнено в точке η_0 . Тогда в силу (4.6) $\mathfrak{L}^*(\eta_0, \tilde{\nu}) < H_K(\eta_0)$. Покажем, что в этом случае в противоречие с условием теоремы K уже не будет носителем для ν , т.е. найдем собственное замкнутое выпуклое подмножество компакта K , которое является определяющим множеством функционала ν . Для этого мы вначале продолжим последнее неравенство на

конусы $\text{int } \mathbf{P}(z)$, где z пробегает некоторое открытое подмножество выступающих точек K , и опишем структуру этих точек. Положим

$$G = \{\eta \in \mathbb{C}^n : \mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) < H_K(\eta)\}.$$

В силу полунепрерывности сверху $\mathfrak{L}^*$ и непрерывности H_K множество G является открытым. Так как $\eta_0 \in G$, то пересечение $\text{int } \Gamma(\eta_0) \cap G$ не пусто. Тогда из (4.6) и леммы 4.2 следует, что весь конус $\text{int } \Gamma(\eta_0)$ и, в частности (см. замечание 4) к лемме 3.12), точка $\hat{\eta}_0/|\hat{\eta}_0|$ лежат в G .

Ранее мы показали, что $\hat{\eta}_k \rightarrow \hat{\zeta}_0$ при $k \rightarrow \infty$, а согласно замечанию 3) к лемме 3.12 верно равенство $\hat{\eta}_0/|\hat{\eta}_0| = \hat{\zeta}_0/|\hat{\zeta}_0|$. Поэтому последовательность $\{\hat{\eta}_k/|\hat{\eta}_k|\}$ сходится к $\hat{\eta}_0/|\hat{\eta}_0|$.

Пусть ξ – произвольная ненулевая точка из $\mathbf{P}(z(\eta_k))$. По определению числа $\mathbf{D}_K(\eta_k)$ найдем $\eta' \in \Gamma(\eta_k) \cap \mathbf{S}$ и $\xi' \in \Gamma(\xi) \cap \mathbf{S}$ такие, что $|\eta' - \xi'| < 2\mathbf{D}_K(\eta_k)$. Тогда по лемме 3.13 с учетом замечания 3) к лемме 3.12 получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hat{\eta}_0}{|\hat{\eta}_0|} - \frac{\hat{\xi}}{|\hat{\xi}|} \right| &\leq \left| \frac{\hat{\eta}_0}{|\hat{\eta}_0|} - \frac{\hat{\eta}_k}{|\hat{\eta}_k|} \right| + \left| \frac{\hat{\eta}_k}{|\hat{\eta}_k|} - \frac{\hat{\xi}}{|\hat{\xi}|} \right| = \left| \frac{\hat{\eta}_0}{|\hat{\eta}_0|} - \frac{\hat{\eta}_k}{|\hat{\eta}_k|} \right| + \left| \frac{\eta'}{|\eta'|} - \frac{\xi'}{|\xi'|} \right| \\ &\leq \left| \frac{\hat{\eta}_0}{|\hat{\eta}_0|} - \frac{\hat{\eta}_k}{|\hat{\eta}_k|} \right| + A|\eta' - \xi'| \leq \left| \frac{\hat{\eta}_0}{|\hat{\eta}_0|} - \frac{\hat{\eta}_k}{|\hat{\eta}_k|} \right| + 2\mathbf{D}_K(\eta_k). \end{aligned}$$

Последняя сумма здесь становится сколь угодно малой при достаточно больших k . Поэтому найдется номер k_0 такой, что

$$\frac{\hat{\xi}}{|\hat{\xi}|} \in G \quad \forall \xi \in \mathbf{P}(z(\eta_{k_0})) \setminus \{0\}. \quad (4.16)$$

В дальнейшем мы будем работать только с $z(\eta_{k_0})$, а другие члены последовательности $\{z(\eta_k)\}$ нас интересовать не будут. Поэтому для простоты мы переобозначим точку $z(\eta_{k_0})$ через z_0 .

Покажем, что существует окрестность $U_1 \subset U$ точки $z_0 \in U$ (см. (4.10)), удовлетворяющая следующему условию:

$$\frac{\hat{\xi}}{|\hat{\xi}|} \in G \quad \forall \xi \in \mathbf{P}(z) \setminus \{0\}, \quad \forall z \in Z \cap U_1. \quad (4.17)$$

Предположим, что это не так. Тогда найдутся последовательность $\{z_m\} \subset Z \cap U$, сходящаяся к z_0 , и последовательность $\{\xi_m\}$ такие, что $\xi_m \in \mathbf{P}(z_m) \setminus \{0\}$ и $\hat{\xi}_m/|\hat{\xi}_m|$ не лежит в G , $m \geq 1$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\hat{\xi}_m/|\hat{\xi}_m|\}$ сходится к некоторому ξ_0 , которое также не будет принадлежать G . С другой стороны, по лемме 3.1 $\xi_0 \in \mathbf{P}(z_0)$. Так как $z_0 \in Z \cap U$ (см. (4.10)), то по определению из п.4) леммы 3.12 ξ_0 получается из ξ_0 занулением координат последней с номерами, не равными j_p , $p = 1, \dots, n-l$. Кроме того, z_m тоже принадлежат $Z \cap U$ для всех $m \geq 1$. Следовательно, $\hat{\xi}_m$ получается из ξ_m занулением тех же самых координат. Поскольку ξ_0 является

пределом для $\{\hat{\xi}_m/|\hat{\xi}_m|\}$, то ее координаты с номерами, не равными j_p , $p = 1, \dots, n-l$, уже являются нулевыми. Таким образом, точки ξ_0 и $\hat{\xi}_0$ совпадают. Так как $\xi_0 \in \mathbf{S}$, то $\xi_0 = \hat{\xi}_0/|\hat{\xi}_0|$. Отсюда в силу (4.16) имеем $\xi_0 \in G$. Полученное противоречие для ξ_0 доказывает (4.17). Из (4.17), леммы 4.2 и замечания 4) к лемме 3.12 следует, что верны включения

$$\text{int } \Gamma(\xi) \subset G \quad \forall \xi \in \mathbf{P}(z) \setminus \{0\}, \quad \forall z \in Z \cap U_1. \quad (4.18)$$

Покажем теперь, что найдутся окрестность $U_2 \subset U_1$ точки z_0 и число $r > 0$, удовлетворяющие условию

$$\mathbf{D}'_K(\xi) \geq r \quad \forall \xi \in \mathfrak{P}(z), \quad \forall z \in Z \cap U_2, \quad (4.19)$$

z – выступающая точка.

Предположим, что это неверно. Тогда найдутся последовательность выступающих точек $\{z_k\} \subset Z \cap U$, сходящаяся к z_0 , и последовательность $\{\eta_k\}$ такие, что $\eta_k \in \mathfrak{P}(z_k)$ и $\mathbf{D}'_K(\eta_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. По определению величины $\mathbf{D}'_K(\eta_k)$ найдем точку $\xi_k \in \partial\Gamma(\eta_k) \cap \mathbf{S}$, $k \geq 1$, такую, что $\text{diam } \mathbf{F}(\xi_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\xi_k\}$ сходится к некоторому ξ_0 . По лемме 3.1 $\xi_0 \in \mathbf{P}(z_0)$.

Нетрудно видеть, что в силу выбора последовательности $\{z_k\}$, $\{\xi_k\}$ и $\{\hat{\xi}_k\}$ обладают всеми теми свойствами, которые имелись у последовательностей $\{z(\eta_k)\}$, $\{\xi_k\}$ и $\{\hat{\xi}_k\}$ при разборе случая $\eta_0 \in \mathbf{E}'_K$ и которые позволили установить для последних выполнимость всех условий леммы 4.4. Действительно, единственное отличие данной ситуации от случая $\eta_0 \in \mathbf{E}'_K$ состоит в том, что $\{\eta_k\}$ здесь, вообще говоря, не обязана сходиться к внутренней точке одного из конусов $\Gamma(\eta)$, принадлежащих $\mathbf{P}(z_0)$ и имеющих к тому же непустое пересечение с $\mathfrak{P}(z_0)$. Последнее же (т.е. наличие указанной сходимости) использовалось нами ранее лишь для того, чтобы доказать принадлежность $\{z(\eta_k)\}$ множеству $Z \cap U$ и ее сходимости к $z(\eta_0)$. В данном случае z_k обладают этими свойствами по выбору. Следовательно, мы вновь можем применить лемму 4.4, согласно которой будет выполнено (4.15). В частности, это означает, что $\hat{\xi}_0$ из $\text{int } \Gamma(\xi_0)$ вопреки (4.18) не принадлежит G . Это противоречие доказывает (4.19).

Далее мы хотим показать, что все выступающие точки из достаточно малой окрестности z_0 принадлежат Z . Для этого применим следствие 3.11 к $\mathbf{P}(z_0)$. Проверим вначале выполнимость его условий, которые включают в себя условия предложения 3.10.

Пусть W – совокупность точек $\xi \in \mathbb{C}^n$, для каждой из которых найдется ее окрестность W_ξ такая, что $z(\eta) \in Z \cap U_2$ при всех $\eta \in W_\xi \cap \mathfrak{P}_K$. По построению W открыто и удовлетворяет условию следствия 3.11. Пусть $\xi \in \text{int } \mathbf{P}(z_0)$. Тогда в силу (4.18) $\xi \in G$, и, как было отмечено ранее, $\xi \in \mathfrak{P}(z_0)$. Учитывая все это и повторяя практически дословно рассуждения, приведшие к (4.10), нетрудно показать, что для любой последовательности $\{\xi_m\} \subset \mathfrak{P}_K$ точки $z(\xi_m)$ при больших m принадлежат $Z \cap U_2$. Отсюда следует, что $\text{int } \mathbf{P}(z_0) \subset W$. Остается показать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $\eta \in \partial W \setminus \{0\}$ элемент $\mathbf{F}(\eta)$ не лежит в $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon)$.

Пусть $\eta \in \partial W \setminus \{0\}$. Так как W открыто, то в силу леммы 3.7 найдется последовательность $\{\xi_k\} \subset \mathfrak{P}_K \cap W$, сходящаяся к η . Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{z(\xi_k)\}$ сходится к некоторому y_0 . Тогда $y_0 \in Z \cap U_2$ по построению W . Если $y_0 \in \partial U_2$, то в качестве ε возьмем число $\text{dist}(z_0, \partial U_2)$, так как согласно лемме 3.2 $y_0 \in \mathbf{F}(\eta)$. Пусть $y_0 \in Z \cap U_2$. Не ограничивая общности, достаточно рассмотреть два случая:

- 1) существует $a > 0$ такое, что $\text{dist}(\xi_k, \partial \Gamma(\xi_k)) \geq a$ при $k \geq 1$;
- 2) $\text{dist}(\xi_k, \partial \Gamma(\xi_k)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

В первом случае с учетом п. 6) леммы 3.12 найдется $\alpha > 1$ такое, что

$$\{\hat{\xi}_k + \lambda(\xi_k - \hat{\xi}_k) : |\lambda| \leq \alpha\} \subset \Gamma(\xi_k) \subset \mathbf{P}(z(\xi_k)), \quad k \geq 1.$$

Так как $y_0, z(\xi_k) \in Z \cap U_2$, то, как и выше, $\hat{\xi}_k \rightarrow \hat{\eta}$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, по лемме 3.1 получаем

$$\{\hat{\eta} + \lambda(\eta - \hat{\eta}) : |\lambda| \leq \alpha\} \subset \mathbf{P}(y_0).$$

Поскольку $\hat{\eta} \in \text{int } \Gamma(\eta)$, отсюда следует, что и $\eta \in \text{int } \Gamma(\eta)$. Тогда в силу (4.18) $\eta \in G$. С другой стороны, согласно определению множества W существует последовательность $\{\xi_m\} \subset \mathfrak{P}_K$, сходящаяся к $\eta \in \partial W$ и такая, что $z(\xi_m) \notin Z \cap U_2$, $m \geq 1$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{z(\xi_m)\}$ сходится к некоторому x_0 . По лемме 3.2 $x_0 \in \mathbf{F}(\eta)$. Если $x_0 \notin U_2$, то в качестве ε можно вновь взять число $\text{dist}(z_0, \partial U_2)$. Пусть $x_0 \in U_2$. Тогда для больших m точки $z(\xi_m)$ также принадлежат U_2 и для них выполнено (4.9). По выбору $z(\xi_m) \notin Z$, $m \geq 1$. Следовательно, для всех больших m точки $z(\xi_m)$ имеют по крайней мере $n - l + 1$ ненулевых координат. Взяв для таких m последовательность $\{\zeta_{m,j}\} \subset \mathfrak{P}'_K$, сходящуюся к ζ_m , и используя индуктивное допущение, мы, как и ранее, покажем, что в точке η будет выполнено (4.5), т.е. $\eta \notin G$. Это противоречие с установленным чуть выше включением завершает разбор первого случая.

В случае 2) для каждого $k \geq 1$ найдется точка $\eta_k \in \partial \Gamma(\xi_k)$ такая, что $|\eta_k - \xi_k| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\{\eta_k\}$ сходится к η . Отсюда с учетом (4.19) и леммы 3.2 легко следует, что $\text{diam } \mathbf{F}(\eta) \geq r$. Поэтому в качестве ε можно взять $r/2$. Таким образом, все условия следствия 3.11 выполнены. Согласно ему найдется окрестность U_3 точки z_0 такая, что все выступающие точки K , лежащие в U_3 , принадлежат Z .

Пусть U_4 – окрестность z_0 , компактно лежащая в U_3 . Положим

$$L = \{\hat{\xi} + \tau \mathbf{T}_{\xi} : \xi \in \mathbf{P}(z), \quad |\hat{\xi}| = 1; \quad z \in Z \cap U_4\},$$

где $\mathbf{T}_{\xi}$ – множество из п. 6) леммы 3.12 и $\tau > 0$ – то же, что и в лемме 4.3. Покажем, что L компактно принадлежит G . Пусть $\{\zeta_k\} \subset L$ сходится к ζ_0 . Согласно определению L найдем последовательности $\{z_k\} \subset Z \cap U_4$ и $\{\xi_k\}$ такие, что $\xi_k \in \mathbf{P}(z_k)$ и $\zeta_k \in \{\hat{\xi}_k + \tau \mathbf{T}_{\xi_k}\}$, $k \geq 1$. Можно считать, что $\{z_k\}$ сходится к некоторому $y_0 \in Z \cap \bar{U}_4 \subset Z \cap U_3$. Из включения $\mathbf{T}_{\xi_k} \subset \mathbf{M}_0(z_k)$ и пп. 2)–4) леммы 3.12 следует, что $\hat{\zeta}_k = \hat{\xi}_k$. Тогда, поскольку $\tau < 1$, найдется $\alpha > 1$ такое, что

$$\hat{\zeta}_k + \lambda(\zeta_k - \hat{\zeta}_k) \subset \mathbf{P}(z_k), \quad |\lambda| \leq \alpha, \quad k \geq 1.$$

Отсюда точно так же, как и при проверке выполнимости условия следствия 3.11, следует, что $\zeta_0 \in G$. Таким образом, $L \subseteq G$ и

$$-M = \sup_{\eta \in L} [\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) - H_K(\eta)] < 0. \quad (4.20)$$

Приступим, наконец, к построению собственного подмножества K , определяющего ν . Рассмотрим произвольную выступающую точку $z \in U_4$. По доказанному $z \in Z$. Пусть $\eta \in \mathfrak{P}(z)$. На луче $t\eta$, $t > 0$, найдется ξ такое, что $|\hat{\xi}| = 1$. На продолжении отрезка $[\hat{\xi}, \xi]$ выберем точку ζ так, что $\zeta \in \partial\Gamma(\xi)$ и $\xi \in [\hat{\xi}, \zeta]$. Пусть $\eta(\lambda) = \hat{\xi} + \lambda(\zeta - \hat{\xi})$. Рассмотрим функцию

$$\psi(\lambda) = \mathfrak{L}^*(\eta(\lambda), \tilde{\nu}) - H_K(\eta(\lambda)) = \mathfrak{L}^*(\eta(\lambda), \tilde{\nu}) - \operatorname{Re}\langle z, \eta(\lambda) \rangle.$$

Она неположительна и субгармонична при $|\lambda| < 1$. С учетом (4.20) по лемме 4.3 получаем $\psi(\lambda) \leq -c(1 - |\lambda|)$, $|\lambda| \leq 1$. Отсюда, в частности, находим

$$\mathfrak{L}^*(\xi) \leq \operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle - c(1 - \beta), \quad (4.21)$$

где $\beta \in [0, 1]$ такое, что $\xi = \beta\zeta + (1 - \beta)\hat{\xi} = \hat{\xi} + \beta(\zeta - \hat{\xi})$.

Пусть $y \in \mathfrak{T}(\hat{\xi}, H_K(\hat{\xi}) - c) \cap \mathbf{F}(\zeta) \neq \emptyset$. Так как $\hat{\xi} \in \mathbf{P}(z)$, то

$$\operatorname{Re}\langle y - z, \hat{\xi} \rangle = \operatorname{Re}\langle y, \hat{\xi} \rangle - \operatorname{Re}\langle z, \hat{\xi} \rangle = H_K(\hat{\xi}) - c - H_K(\hat{\xi}) = -c.$$

Следовательно, $|y - z| \geq c/|\hat{\xi}| = c$. Кроме того, с учетом включения $\zeta \in \mathbf{P}(z)$ получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle &= \operatorname{Re}\langle y, \beta\zeta + (1 - \beta)\hat{\xi} \rangle = \beta \operatorname{Re}\langle y, \zeta \rangle + (1 - \beta) \operatorname{Re}\langle y, \hat{\xi} \rangle \\ &= \beta \operatorname{Re}\langle z, \zeta \rangle + (1 - \beta)(\operatorname{Re}\langle z, \hat{\xi} \rangle - c) = \operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle - c(1 - \beta). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Отсюда и из (4.21) имеем $\mathfrak{L}^*(\xi, \tilde{\nu}) \leq \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{T}(\hat{\xi}, H_K(\hat{\xi}) - c) \cap \mathbf{F}(\zeta) = \emptyset$. Так как $z \in \mathbf{F}(\zeta)$, то в силу (4.19) найдется $y \in \mathbf{F}(\zeta)$ такое, что $|y - z| \geq r/2$. Согласно предположению $y \notin \mathfrak{T}(\hat{\xi}, H_K(\hat{\xi}) - c)$, т.е. $\operatorname{Re}\langle y, \hat{\xi} \rangle \neq H_K(\hat{\xi}) - c$. Если $\operatorname{Re}\langle y, \hat{\xi} \rangle < H_K(\hat{\xi}) - c$, то в силу соотношений $\operatorname{Re}\langle z, \hat{\xi} \rangle = H_K(\hat{\xi}) > H_K(\hat{\xi}) - c$ на отрезке $[z, y]$, лежащем в $\mathbf{F}(\zeta)$, найдется точка, принадлежащая гиперплоскости $\mathfrak{T}(\hat{\xi}, H_K(\hat{\xi}) - c)$, что неверно. Поэтому $\operatorname{Re}\langle y, \hat{\xi} \rangle > H_K(\hat{\xi}) - c$. Отсюда при помощи выкладок таких, как в (4.22), получаем

$$\operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle > \operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle - c(1 - \beta).$$

Тогда в силу (4.21) $\mathfrak{L}^*(\xi, \tilde{\nu}) \leq \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle$. Таким образом, так как $\eta = t\xi$, $t > 0$, то с учетом однородности $\mathfrak{L}^*$ мы показали, что для каждой выступающей точки z из окрестности U_4 точки z_0 и всех $\eta \in \mathfrak{P}(z)$ существует $y \in K$ такое, что выполнены неравенства

$$\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) \leq \operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle, \quad |y - z| \geq r',$$

где $r' = \min\{c, r/2\}$. Пусть $U_5 = U_4 \cap \mathbf{B}(z_0, r'/2)$ и Y – выпуклая оболочка компакта $K \setminus U_5$. Тогда Y – компакт, а из предыдущего следует, что для всех $\eta \in \mathfrak{P}_K$ таких, что $z(\eta) \in U_5$, верно неравенство $\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) \leq H_Y(\eta)$. Если же $z(\eta) \in K \setminus U_5 \subset Y$, то с учетом (4.6) имеем

$$\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) \leq H_K(\eta) = \operatorname{Re}\langle z(\eta), \eta \rangle \leq H_Y(\eta).$$

Таким образом, мы показали, что

$$\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) \leq H_Y(\eta) \quad \forall \eta \in \mathfrak{P}_K.$$

Отсюда в силу леммы 3.7 и субгармоничности $\mathfrak{L}^*$ и H_K получаем

$$\mathfrak{L}^*(\eta, \tilde{\nu}) \leq H_Y(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n.$$

По лемме 1.1 компакт Y является определяющим множеством функционала ν . Согласно же лемме 3.5 Y – собственное подмножество K . Мы получили противоречие с тем, что K – носитель ν , и, таким образом, завершили доказательство теоремы.

§ 5. Необходимые условия единственности

ЛЕММА 5.1. Пусть K – n -круговой выпуклый компакт с непустой внутренностью в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что $\mathfrak{P}_K \neq \mathbf{E}_K \cup \mathbf{E}'_K$. Тогда существуют $\eta_0 \in \mathfrak{P}_K$, $r > 0$ и окрестность V множества $\Gamma(\eta_0) \cap \mathbf{S}$ такие, что $z(\eta_0)$ имеет по крайней мере две ненулевые координаты и для каждого $\eta \in \mathfrak{P}_K$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $z(\eta) \notin \mathbf{B}(z(\eta_0), r)$;
- 2) номера ненулевых координат точек $z(\eta)$ и $z(\eta_0)$ совпадают и $\mathbf{D}_K(\eta) \geq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \partial K$ имеет только одну ненулевую координату, например z^1 . Тогда по пп. 1) и 6) леммы 3.12

$$\mathbf{P}(z) = \operatorname{con}\{(\bar{z}^1, z') : (0, z') \in T\},$$

где T – n -круговой выпуклый компакт в $\mathbf{M}_0(z)$. Следовательно, $\mathbf{P}(z)$ – почти комплексный конус, и если z – выступающая точка, то $\mathfrak{P}(z) \subset \mathbf{E}_K$.

Пусть $\zeta_0 \in \mathfrak{P}_K \setminus [\mathbf{E}_K \cup \mathbf{E}'_K]$. Так как $0 \notin \partial K$, то по доказанному $z(\zeta_0)$ имеет по крайней мере две ненулевые координаты. Кроме того, поскольку $\hat{\zeta}_0 \in \operatorname{int} \Gamma(\zeta_0)$ (см. замечание 4) к лемме 3.12), то согласно определению $\mathbf{E}_K$ и $\mathbf{E}'_K$ найдутся $\delta, \alpha > 0$ такие, что

$$\mathbf{D}_K(\eta) \geq \alpha, \quad \mathbf{D}'_K(\eta) \geq \alpha \quad \forall \eta \in \mathbf{B}(\hat{\zeta}_0, \delta) \cap \mathfrak{P}_K. \quad (5.1)$$

По лемме 3.6 конус $\operatorname{int} \Gamma(\zeta_0)$ и, в частности, $\hat{\zeta}_0$ принадлежат $\mathfrak{P}_K$. Поэтому в силу следствия 3.3 при достаточно малом $\delta > 0$ для всех $\eta \in \mathfrak{P}_K \cap \mathbf{B}(\hat{\zeta}_0, \delta)$ координаты точки $z(\eta)$ с номерами ненулевых координат $z(\zeta_0)$ также являются ненулевыми. Тогда согласно п. 4) леммы 3.12 для любого $\eta \in \mathfrak{P}_K \cap \mathbf{B}(\hat{\zeta}_0, \delta)$ точка $\hat{\eta}$ получается

из η занулением только тех координат, которые уже равны нулю у $\hat{\zeta}_0$. Следовательно, $\hat{\eta} \in \mathbf{B}(\hat{\zeta}_0, \delta)$ для всех $\eta \in \mathfrak{P}_K \cap \mathbf{B}(\hat{\zeta}_0, \delta)$. Выберем $\eta_0 \in \mathfrak{P}_K \cap \mathbf{B}(\hat{\zeta}_0, \delta)$ так, что $z(\eta_0)$ имеет максимальное число ненулевых координат среди всех точек $z(\eta)$, $\eta \in \mathfrak{P}_K \cap \mathbf{B}(\hat{\zeta}_0, \delta)$. Пусть $j_1, \dots, j_m$ – номера ненулевых координат точки $z(\eta_0)$. По доказанному $m \geq 2$. Через Z обозначим координатную плоскость переменных z^i , $i = j_1, \dots, j_m$. С учетом максимальной m , как и выше, найдем $q, \tau > 0$ такие, что

$$z(\eta) \in Z, \quad |z^{j_s}(\eta)| \geq q, \quad s = \overline{1, m}, \quad \forall \eta \in \mathfrak{P}_K \cap \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau) \quad (5.2)$$

и $\mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau) \subset \mathbf{B}(\hat{\zeta}_0, \delta)$. Через W обозначим множество точек $\xi \in \mathbb{C}^n$, для каждой из которых найдется ее окрестность W_ξ такая, что $\Gamma(\eta) \cap \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau) \neq \emptyset$ при всех $\eta \in \mathfrak{P}_K \cap W_\xi$. Пусть $\eta \in W \cap \mathfrak{P}_K$. По лемме 3.6 $\text{int } \Gamma(\eta) \subset \mathfrak{P}_K$. Согласно определению W найдется $\xi \in \text{int } \Gamma(\eta)$ такое, что $\xi \in \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau)$. Так как точка ξ принадлежит $\mathfrak{P}_K$, то для нее выполнено (5.1). Кроме того, как указывалось ранее, $\Gamma(\xi) = \Gamma(\eta)$ и $z(\xi) = z(\eta)$. Поэтому (5.1) будет выполнено и для η . Таким образом, мы показали, что

$$\mathbf{D}_K(\eta) \geq \alpha, \quad \mathbf{D}'_K(\eta) \geq \alpha \quad \forall \eta \in W \cap \mathfrak{P}_K. \quad (5.3)$$

Аналогично из (5.2) получаем

$$z(\eta) \in Z, \quad |z^{j_s}(\eta)| \geq q, \quad s = \overline{1, m}, \quad \forall \eta \in \mathfrak{P}_K \cap W. \quad (5.4)$$

Далее для построения требуемой окрестности V мы хотим применить предложение 3.10 к $\Gamma(\eta_0)$. Покажем вначале, что выполнены его условия. По построению W открыто. Проверим включение $\text{int } \Gamma(\eta_0) \subset W$. Из определения множества W следует, что оно является конусом. Поэтому требуемое включение достаточно доказать лишь для какой-либо одной точки каждого луча из $\text{int } \Gamma(\eta_0)$. В силу замечания 3) к лемме 3.12 для любого $\zeta \in \Gamma(\eta_0) \setminus \{0\}$ точки $\hat{\zeta}$ и $\hat{\eta}_0$ лежат на одном луче. Следовательно, достаточно доказать, что W содержит все точки $\zeta \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$, для которых $\hat{\zeta} = \hat{\eta}_0$. Итак, пусть $\zeta \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$, $\hat{\zeta} = \hat{\eta}_0$, и последовательность $\{\zeta_k\} \subset \mathfrak{P}_K$ сходится к ζ . Нам нужно показать, что $\Gamma(\zeta_k) \cap \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau) \neq \emptyset$ при $k \geq k_0$. Определим точки η_k , $k \geq 1$, равенствами

$$\eta_k^i = \zeta_k^i, \quad i = j_p; \quad \eta_k^i = 0, \quad i \neq j_p; \quad p = \overline{1, m}. \quad (5.5)$$

Так как $\hat{\zeta} = \hat{\eta}_0$, то из (5.2) и определения в п. 4) леммы 3.12 следует, что $\eta_k \rightarrow \hat{\eta}_0$ при $k \rightarrow \infty$. Выберем k' такое, что $\eta_k \in \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau/2)$ при $k \geq k'$. На отрезке $[\eta_k, \zeta_k]$ возьмем точку ξ_k , для которой $|\eta_k - \xi_k| = \varepsilon/2$. Тогда $\xi_k \in \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau)$, $k \geq k'$, и $\{\xi_k\}$ сходится к точке $\xi_0 \in [\hat{\eta}_0, \zeta]$ такой, что $|\xi_0 - \hat{\eta}_0| = \varepsilon/2$. Согласно лемме 3.7 для каждого $k \geq k'$ найдем последовательность $\{\xi_{k,m}\} \subset \mathfrak{P}_K \cap \mathbf{B}(\eta_0, \tau)$, сходящуюся к ξ_k при $m \rightarrow \infty$. Можно считать также, что $\{z(\xi_{k,m})\}$ сходится к некоторому y_k . Из (5.2), (5.5), выбора ξ_k и определения из п. 4) леммы 3.12 легко следует, что $\hat{\xi}_{k,m} \rightarrow \eta_k$ при $m \rightarrow \infty$. Пусть

$$T_{k,m} = \{\xi \in \Gamma(\xi_{k,m}) : \xi = \hat{\xi}_{k,m} + \lambda(\xi_{k,m} - \hat{\xi}_{k,m})\}$$

и $T_k = \text{Lim } T_{k,m}$. Тогда по лемме 3.1

$$T_k \subset \{\xi \in \mathbf{P}(y_k) : \xi = \eta_k + \lambda(\xi_k - \eta_k)\},$$

а в силу (5.1) и леммы 3.2

$$\text{diam } \mathbf{F}(\eta) \geq \alpha \quad \forall \eta \in \partial T_k, \quad k \geq k'.$$

Пусть $T_0 = \text{Lim } T_k$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} T_0 &\subset \{\xi \in \Gamma(\eta_0) : \xi = \hat{\eta}_0 + \lambda(\xi_0 - \hat{\eta}_0)\}, \\ \text{diam } \mathbf{F}(\eta) &\geq \alpha \quad \forall \eta \in \partial T_0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Предположим, что $\zeta_{k_j} \notin T_{k_j}$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда $\zeta \notin \text{int } T_0$. Следовательно, на отрезке $[\hat{\eta}_0, \zeta]$ найдется точка ξ , принадлежащая ∂T_0 . По выбору $\zeta \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$, а в силу замечания 4) к лемме 3.12 и $\hat{\eta}_0 \in \text{int } \Gamma(\eta_0)$. Поэтому весь отрезок $[\hat{\eta}_0, \zeta]$, а вместе с ним и точка ξ лежат в $\text{int } \Gamma(\eta_0)$. Так как $\eta_0 \in \mathfrak{P}(z(\eta_0))$, то по лемме 3.6 $\text{int } \Gamma(\eta_0) \subset \mathfrak{P}(z(\eta_0))$. Следовательно, $\mathbf{F}(\xi) = \{z(\eta_0)\}$, т.е. $\text{diam } \mathbf{F}(\xi) = 0$, что противоречит (5.6).

Мы показали, что $\zeta_k \in T_k \subset \mathbf{P}(y_k)$ для всех достаточно больших k . Поскольку точка y_k является пределом для $\{z(\xi_{k,m})\}$, в силу (5.2) номера ее ненулевых координат совпадают с $j_1, \dots, j_m$. Поэтому из (5.5) и п. 4) леммы 3.12 следует, что $\eta_k = \hat{\zeta}_k \in \Gamma(\zeta_k)$. Остается вспомнить, что $\eta_k \in \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau/2)$ при $k \geq k'$.

Таким образом, мы доказали включение $\text{int } \Gamma(\eta_0) \subset W$.

Теперь нам нужно найти число ε и окрестность W_1 множества $\partial \Gamma(\eta_0) \cap \mathbf{S}$, требуемые в предложении 3.10. Напомним, что опорные элементы $\mathbf{F}(\eta)$ одинаковы для всех точек η луча $t\zeta$, $t > 0$. Следовательно, поскольку W и $\Gamma(\eta_0)$ – конусы, а $\Gamma(\eta_0)$ порожден множеством $[\eta_0 + \mathbf{M}_0(z(\eta_0))]$, то подобную окрестность W_1 достаточно построить для $Q = \partial \Gamma(\eta_0) \cap [\eta_0 + \mathbf{M}_0(z(\eta_0))]$. В качестве такого W_1 возьмем $(\tau/4)$ -вздутие множества Q . Пусть $\zeta \in \partial W \cap W_1$. Согласно лемме 3.7 найдем последовательность $\{x_i\} \subset \mathfrak{P}_K \cap W$, сходящуюся к ζ . Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{z(x_i)\}$ сходится к некоторому y_0 . По лемме 3.1 $\zeta \in \mathbf{P}(y_0)$. Так как точка y_0 является пределом $\{z(x_i)\}$, то для нее выполнено (5.4). Поэтому $\hat{\zeta} \in \Gamma(\zeta, y_0)$ получается из ζ занулением координат последней с номерами, отличными от $j_1, \dots, j_m$.

Согласно определению W найдем теперь последовательность $\{\zeta_k\} \subset \mathfrak{P}_K \setminus W$, лежащую в $\mathbf{B}(\zeta, \tau/4)$ и сходящуюся к ζ . Тогда $\Gamma(\zeta_k) \cap \mathbf{B}(\eta_0, \tau) = \emptyset$, а последовательность $\{\eta_k\}$, определяемая из равенства (5.5), сходится к $\hat{\zeta} \in \Gamma(\zeta, y_0)$. В силу леммы 3.12 для всех $\eta \in \Gamma(\eta_0) \cap [\eta_0 + \mathbf{M}_0(z(\eta_0))]$ точка $\hat{\eta} \in \mathbf{P}(z(\eta_0))$ совпадает с $\hat{\eta}_0$. Так как $\text{dist}(\zeta, Q) < \tau/4$, то отсюда следует, что $\hat{\zeta} \in \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau/4)$ и $\eta_k \in \mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau/2)$, $k \geq 1$.

Далее поступаем точно так же, как при доказательстве включения $\text{int } \Gamma(\eta_0) \subset W$. В результате мы построим множества T_k и T_0 такие, что $T_0 = \text{Lim } T_k$ содержит $\hat{\zeta} \in \Gamma(\zeta, y_0)$ и лежит на комплексной прямой $\hat{\zeta} + \lambda(\zeta - \hat{\zeta})$.

Кроме того, для T_0 выполнено (5.6). В данной ситуации, в отличие от предыдущей, $\zeta_k \notin T_k$, поскольку в противном случае, как показано выше, конус $\Gamma(\zeta_k)$ содержит $\eta_k = \hat{\zeta}_k$ и пересекает, таким образом, шар $\mathbf{B}(\hat{\eta}_0, \tau)$. Следовательно, $\zeta \notin \text{int } T_0$. Пусть $\xi \in \partial T_0$ лежит на отрезке $[\hat{\zeta}, \zeta]$. В силу (5.6) найдется точка $y \in \mathbf{F}(\xi)$ такая, что $y \notin \mathbf{B}(z(\eta_0), \alpha/2)$. Если $\xi = \zeta$, то $y \in \mathbf{F}(\zeta)$. Пусть $\xi \neq \zeta$. Тогда $\xi \in \text{int } \Gamma(\zeta, y_0)$ в силу того, что $\Gamma(\zeta, y_0)$ – выпуклое множество, а согласно замечанию 4) к лемме 3.12 $\hat{\zeta} \in \text{int } \Gamma(\zeta, y_0)$. По выбору $y \in \mathbf{F}(\xi)$, т.е. $\xi \in \mathbf{P}(y)$. Следовательно, пересечение $\mathbf{P}(y) \cap \text{int } \Gamma(\zeta, y_0)$ не пусто, и по лемме 3.4 $\Gamma(\zeta, y_0) \subset \mathbf{P}(y)$. В частности, $\zeta \in \mathbf{P}(y)$, т.е. $y \in \mathbf{F}(\zeta)$. Таким образом, $\mathbf{B}(z(\eta_0), \varepsilon)$, где $\varepsilon = \alpha/2$, не содержит элемент $\mathbf{F}(\zeta)$.

Мы проверили все условия предложения 3.10. Согласно ему найдутся окрестность W_2 множества $\partial \Gamma(\eta_0) \cap \mathbf{S}$ и число $r > 0$ такие, что для каждого $\eta \in [W_2 \cap \mathfrak{P}_K] \setminus W$ точка $z(\eta)$ не принадлежит $\mathbf{B}(z(\eta_0), r)$. Пусть $V = W_2 \cup W$. Тогда с учетом (5.3) и (5.4) множество V удовлетворяет всем требованиям. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть K – n -круговой выпуклый компакт с непустой внутренностью в $\mathbb{C}^n$. Если $\mathfrak{P}_K \neq \mathbf{E}_K \cup \mathbf{E}'_K$, то K не обладает свойством единственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_0 \in \mathfrak{P}_K$, $r > 0$ и V найдены благодаря лемме 5.1. Тогда $z(\eta_0)$ имеет по крайней мере две ненулевые координаты. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$z^i(\eta_0) \neq 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad z^i(\eta_0) = 0, \quad i = k+1, \dots, n,$$

где $2 \leq k \leq n$. Выберем $\beta \in (0, r)$ такое, что

$$z^i \neq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \forall z \in \mathbf{B}(z(\eta_0), \beta). \quad (5.7)$$

Пусть L обозначает выпуклую оболочку компакта $K \setminus \mathbf{B}(z(\eta_0), \beta)$. Для каждой выступающей точки z компакта K , не лежащей в L , определим $\eta_z \in \mathfrak{P}(z) \cap \mathbf{S}$ следующим образом. Если $\mathfrak{P}(z) \cap V = \emptyset$, то в качестве η_z возьмем любое $\eta \in \mathfrak{P}(z) \cap \mathbf{S}$. Пусть $\mathfrak{P}(z) \cap V \neq \emptyset$. Тогда для каждого $\eta \in \mathfrak{P}(z) \cap V$ в силу выбора точки z будет выполнен п. 2) леммы 5.1. Согласно ему номера ненулевых координат $z(\eta) = z$ те же, что и у $z(\eta_0)$, и найдутся $\xi, \zeta \in \mathbf{P}(z) \cap \mathbf{S}$ такие, что $\text{dist}(\Gamma(\xi) \cap \mathbf{S}, \Gamma(\zeta) \cap \mathbf{S}) \geq r/2$. Поскольку $\text{int } \mathbf{P}(z) \subset \mathfrak{P}(z)$, можно считать, что $\xi, \zeta \in \mathfrak{P}(z)$. Из включений $\hat{\xi} \in \Gamma(\xi)$ и $\hat{\zeta} \in \Gamma(\zeta)$ следует, что $|\hat{\xi}/|\hat{\xi}| - \hat{\zeta}/|\hat{\zeta}|| \geq r/2$. Поэтому для одной из точек, например ξ , будет выполнено неравенство $|\hat{\xi}/|\hat{\xi}| - |\hat{\eta}_0|/|\hat{\eta}_0|| \geq r/4$. Эту точку ξ мы и возьмем в качестве η_z .

Пусть z – выступающая точка компакта K , не лежащая в L , и $\eta \in \mathfrak{P}(z)$. Тогда $\eta^i \neq 0$, $i = 1, \dots, k$. Действительно, если $\eta^i = 0$ для некоторого $i = 1, \dots, k$, то $\text{Re}\langle z, \eta \rangle = \text{Re}\langle y, \eta \rangle$, где $y \in K$ получена из z занулением i -й координаты. В силу (5.7) $z \neq y$, что противоречит определению конуса $\mathfrak{P}(z)$. Выберем $i = 1, \dots, k$ такое, что $|z^i \eta_z^i| \leq |z^j \eta_z^j|$ для всех $j = 1, \dots, k$. Определим функцию

$$\varphi_z(\eta) = \text{Re}\langle y(z), \eta \rangle + k \left(\prod_{j=1}^k |a^j(z) \eta^j| \right)^{1/k},$$

где $y(z) = z - a(z)$; $a^j(z) = 0$, $j = k + 1, \dots, n$; $a^i(z) = z^i/2$ и $a^j(z)$ при $j = 1, \dots, k$, $j \neq i$, определяются из соотношений

$$|a^i(z)\eta_z^i| = |a^j(z)\eta_z^j|, \quad \frac{a^j(z)}{z^j} > 0. \quad (5.8)$$

Пусть $H_y(\eta) = \sum_{m=1}^n |y^m \eta^m|$ – опорная функция поликруга $U_y = \{x \in \mathbb{C}^n : |x^m| \leq |y^m|, m = 1, \dots, n\}$. Легко видеть, что

$$\varphi_z(\eta) \leq H_z(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (5.9)$$

Так как $U_z \subset K$, то

$$H_z(\eta) \leq H_K(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (5.10)$$

Пусть Z – какое-либо счетное плотное подмножество выступающих точек K , не лежащих в L . Из точек Z составим последовательность $\{z_m\}$ так, чтобы каждая точка этого множества попадала в нее бесконечное число раз. Положим

$$\varphi(\eta) = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow \eta} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varphi_{z_m}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

В силу (5.9) и (5.10) функции φ_{z_m} , $m \geq 1$, локально равномерно ограничены. Следовательно [1, с. 28, 29], функция $\varphi(\eta)$ плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^n$. Очевидно также, что она положительно однородна порядка один и

$$\varphi_{z_m}(\eta) \leq \varphi(\eta) \leq H_K(\eta), \quad \eta \in \mathbb{C}^n, \quad m \geq 1. \quad (5.11)$$

Определим теперь функцию

$$\psi(\eta) = \max\{H_L(\eta), \varphi(\eta)\}, \quad \eta \in \mathbb{C}^n.$$

Она обладает теми же свойствами, что и φ . В силу (5.11) $\psi(\hat{\eta}_0) \leq H_K(\hat{\eta}_0)$. Предположим, что $\psi(\hat{\eta}_0) = H_K(\hat{\eta}_0)$. По лемме 3.5 компакт L не содержит $z(\eta_0)$, а согласно замечанию 4) к лемме 3.12 и лемме 3.6 точка $\hat{\eta}_0$ принадлежит $\mathfrak{P}(z(\eta_0))$. Поэтому в силу определения $\mathfrak{P}(z(\eta_0))$ верно неравенство

$$H_K(\hat{\eta}_0) = \operatorname{Re}\langle z(\eta_0), \hat{\eta}_0 \rangle > H_L(\hat{\eta}_0).$$

Таким образом, $\varphi(\hat{\eta}_0) = H_K(\hat{\eta}_0)$. Это означает, что найдутся последовательности $\{x_j\} \subset Z$, $\{\eta_j\} \subset \mathbb{C}^n$ такие, что $\eta_j \rightarrow \hat{\eta}_0$ и

$$\varphi_{x_j}(\eta_j) \rightarrow H_K(\hat{\eta}_0), \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.12)$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $x_j \rightarrow x$ и $\eta_{x_j} \rightarrow \eta$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда $\{a(x_j)\}$ также будет сходиться к некоторому $a = (a^1, \dots, a^n) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_0(\xi) = \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle + k \left[\prod_{i=1}^k |a^i \xi^i| \right]^{1/k},$$

где $y = x - a$. В силу (5.12)

$$\varphi_0(\hat{\eta}_0) = H_K(\hat{\eta}_0). \quad (5.13)$$

По известному неравенству

$$k \left[\prod_{i=1}^k |a^i \xi^i| \right]^{1/k} \leq H_a(\xi), \quad (5.14)$$

причем равенство здесь достигается лишь в случае, когда сомножители в левой части одинаковы. Множество $y + U_a$ принадлежит поликругу U_x и пересекает его остов (который совпадает с множеством выступающих точек U_x) только в точке x . Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle + H_a(\xi) &< H_x(\xi), & \xi \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{P}_{U_x}(x), \\ \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle + H_a(\xi) &= H_x(\xi), & \xi \in \mathbf{P}_{U_x}(x). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом включения $U_x \subset K$ получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle + H_a(\xi) &< H_K(\xi), & \xi \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{P}_K(x), \\ \operatorname{Re}\langle y, \xi \rangle + H_a(\xi) &= H_x(\xi) = H_K(\xi), & \xi \in \mathbf{P}_K(x). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Из (5.8) и (5.13)–(5.15) следует, что для некоторого $t > 0$

$$|\hat{\eta}_0^i| = t|\eta^i|, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.16)$$

По лемме 3.1 точка η принадлежит $\mathbf{P}(x)$. Так как $\hat{\eta}_0 \in \mathfrak{P}(z(\eta_0))$ (см. лемму 3.6 и замечание 4) к лемме 3.12), а в силу (5.13)–(5.15) $\hat{\eta}_0 \in \mathbf{P}_K(x)$, то согласно определению $\mathfrak{P}(z(\eta_0))$ точки x и $z(\eta_0)$ совпадают. Следовательно, $\eta \in \mathbf{P}(z(\eta_0))$. Из (5.16) и п. 1) леммы 3.12 тогда находим

$$\hat{\eta}_0^i = t\eta^i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.17)$$

Отсюда и из определения в п. 4) леммы 3.12 следует, что $\hat{\eta}_0/|\hat{\eta}_0| = \hat{\eta}/|\hat{\eta}|$, т.е. $\eta \in \Gamma(\eta_0) \cap \mathbf{S} \subset V$. Поэтому для всех достаточно больших j имеем $\eta_{x_j} \in \mathfrak{P}(x_j) \cap V$. Это означает, что для таких j точки x_j обладают свойством 2) из леммы 5.1, т.е. номерами их ненулевых координат являются числа $1, \dots, k$. Следовательно, $\hat{\eta}_{x_j} =$

$(\eta_{x_j}^1, \dots, \eta_{x_j}^k, 0, \dots, 0)$ при больших j и в силу (5.17) $\hat{\eta}_{x_j}/|\hat{\eta}_{x_j}| \rightarrow \hat{\eta}_0/|\hat{\eta}_0|$, когда $j \rightarrow \infty$. Последнее, однако, противоречит выбору точек η_{x_j} . Таким образом,

$$\psi(\hat{\eta}_0) < H_K(\hat{\eta}_0). \quad (5.18)$$

Согласно теореме 1.3 найдем целую функцию $f(\xi)$ экспоненциального типа, для которой $\mathfrak{L}^*(\xi, f) = \psi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}^n$. По теореме Поля-Мартини-Эренпрайса (см. [1], [3]) существует аналитический функционал $\nu \in H^*(\mathbb{C}^n)$ с преобразованием Лапласа $\tilde{\nu}$, равным f . Из (5.11) и определения $\psi(\xi)$ с учетом леммы 1.1 следует, что K – определяющее множество функционала ν . Покажем, что K – носитель ν . Пусть Y – произвольный выпуклый компакт, являющийся собственным подмножеством K . Поскольку K есть выпуклая оболочка замыкания множества своих выступающих точек (см. [12]), то найдется выступающая точка z компакта K , которая не принадлежит Y . Тогда в силу определения $\mathfrak{P}(z)$ получаем

$$H_Y(\xi) < \operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle = H_K(\xi), \quad \xi \in \mathfrak{P}(z).$$

Предположим, что $z \in L$. Тогда из определения ψ имеем

$$\psi(\xi) \geq H_L(\xi) = H_K(\xi) > H_Y(\xi), \quad \xi \in \mathfrak{P}(z).$$

Согласно лемме 1.1 это означает, что Y не может быть определяющим множеством функционала ν . Пусть теперь $z \notin L$. Тогда в силу плотности множества Z найдется номер m такой, что z_m из Z не лежит в Y . Из (5.8) и п. 1) леммы 3.12 следует, что

$$\varphi_{z_m}(\eta_{z_m}) = \operatorname{Re}\langle z_m, \eta_{z_m} \rangle = H_K(\eta_{z_m}).$$

Так как $\eta_{z_m} \in \mathfrak{P}(z_m)$, то с учетом (5.11), как и выше, находим, что Y не может быть определяющим множеством для ν .

Таким образом, K – носитель ν , но в силу (5.18) и теоремы 1.2 не единственный. Это означает, что K не обладает свойством единственности. Теорема доказана.

Теоремы 4.5 и 5.2 дают в совокупности теорему 2.1.

Список литературы

1. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
3. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
4. Kiselman C. O. On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals // Acta math. 1967. V. 117. P. 1–35.
5. Kiselman C. O. On unique supports of analytic functionals // Ark. mat. 1965. V. 6. P. 307–318.
6. Martineau A. Unicité du support d'une fonctionnelle analytique: un theoreme de C. O. Kiselman // Bull. sci. math. 1967. V. 91. P. 131–141.
7. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.

8. *Кривошеев А. С.* О единственности носителей аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №6. С. 1171–1193.
9. Linear and complex analysis. Problem book / Ed. by V.P. Havin, S.V. Hruscev, N.K. Nikol'skii // Lect. N. Math. 1984. V. 1043.
10. *Лейтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
11. *Martineau A.* Indicatrices de croissance des fonctions entieres de N variables // Invent. Math. 1966. V. 2. P. 81–86.
12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
13. *Химченко Б. Н.* О поведении супергармонических функций вблизи границы области типа $A^{(1)}$ // Дифференц. уравн. 1969. Т. 5. №10. С. 1845–1853.
14. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.

Поступило в редакцию
17.I.1994,
после доработки 2.IV.1998