Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Буте де Монвель, И. Д. Чуешов, О колебаниях кармановской пластины в потенциальном потоке газа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 2, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/im237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:24:59

УДК 517.955+517.968

Л. Буте де Монвель, И. Д. Чуешов

О колебаниях кармановской пластины в потенциальном потоке газа

Рассматривается задача о нелинейных колебаниях заземленной пластины в потоке газа. Динамика пластины описывается модификацией эволюционных уравнений Кармана, учитывающей инерцию вращения элементов пластины. Для описания влияния потока газа привлекается линеаризованная теория потенциальных течений. Доказывается глобальное существование и единственность слабых решений рассматриваемой задачи и изучаются их свойства. Показано также, что при некоторых условиях на начальные данные потока задача может быть сведена к запаздывающему нелинейному уравнению в частных производных для величины смещения пластины. Дано обоснование некоторых эвристических формул для величины аэродинамического давления. Представленный подход носит общий характер и позволяет одновременно охватить случаи дозвуковых и сверхзвуковых течений.

Библиография: 18 наименований.

§ 1. Введение

Нелинейные колебания заземленной пластины могут быть описаны следующими уравнениями:

$$(1 - \alpha \Delta) \partial_t^2 u + \Delta^2 u - [u, v + \theta] = p(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1(x), \quad (2)$$

где $v = v(u)$ является решением задачи

$$\Delta^2 v + [u, u] = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Здесь Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, Δ – оператор Лапласа и

$$[u, v] = \partial_{x_1}^2 u \partial_{x_2}^2 v + \partial_{x_2}^2 u \partial_{x_1}^2 v - 2 \partial_{x_1 x_2}^2 u \partial_{x_1 x_2}^2 v. \quad (4)$$

Неизвестная функция $u = u(x, t)$ описывает поперечное отклонение пластины в точке x в момент t ; $\theta(x)$ – заданная функция, определяемая механическими нагрузками. Параметр $\alpha > 0$ учитывает инерцию вращения элементов пластины. Эта система рассматривалась многими авторами при заданной поперечной нагрузке $p(x, t)$. Было показано (см., например, [1], [2]), что задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение. Свойства решений изучались в [1], [3], [4] (для других граничных условий см. также [5] и приведенные там ссылки).

В этой статье рассматривается задача о взаимодействии пластины с линеаризованным потенциальным потоком газа. Если газ движется над пластиной в направлении оси x_1 , то аэродинамическое давление потока на нее дается формулой (см., например, [6], [7])

$$p(x, t) = p_0(x) + \nu(\partial_t + U \partial_{x_1})(\phi|_{x_3=0}), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

где $p_0(x) \in L^2(\Omega)$. Здесь параметр $\nu > 0$ характеризует интенсивность взаимодействия между потоком и пластиной, величина $U \geq 0$ ($U \neq 1$) является скоростью невозмущенного потока, а потенциал скоростей $\phi(x, t) = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$ возмущенного течения удовлетворяет уравнениям

$$(\partial_t + U \partial_{x_1})^2 \phi = \Delta \phi, \quad x \in \mathbb{R}_+^3 \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \begin{cases} (\partial_t + U \partial_{x_1})u(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

$$\phi|_{t=0} = \phi_0(x), \quad \partial_t \phi|_{t=0} = \phi_1(x). \quad (8)$$

Для дозвуковых течений ($0 < U < 1$) задача (1)–(3), (5)–(8) рассматривалась в [8] при $\alpha \geq 0$. Доказательство существования решений в [8] использует стандартную форму метода Галёркина и опирается на положительность энергии потока для дозвуковых течений. В данной работе представлен другой подход к построению слабых решений задачи (1)–(3), (5)–(8). Он позволяет охватить одновременно как дозвуковой ($0 \leq U < 1$), так и сверхзвуковой ($U > 1$) случай. Этот подход, во-первых, опирается на некоторые результаты, относящиеся к системе (6)–(8) и вытекающие из общей теоремы, доказанной в [9], а во-вторых, использует регуляризованный вариант метода Галёркина для определения $u(x, t)$. Привлекаются также некоторые идеи и результаты из [3], [4], [8], [10]. Представленный подход позволяет, в частности, показать, что задача (1)–(3), (5)–(8) может быть сведена к запаздывающему нелинейному уравнению в частных производных для $u(x, t)$ при некоторых условиях на начальные данные (8) для $\phi(x, t)$.

Задача о нелинейных колебаниях пластины в сверхзвуковом потоке газа ($U > 1$) в различных постановках изучалась также в [11]–[13]. В этих работах влияние потока изначально описывалось некоторым запаздывающим потенциалом для волнового уравнения (6)–(8) (см., например, [14]). Это также приводило к запаздывающему нелинейному уравнению в частных производных для определения $u(x, t)$. Оказалось, что запаздывающие члены, появляющиеся в данной работе и используемые в [11]–[13], совпадают при $U > 1$.

Опишем структуру работы. В §2 сформулированы глобальная теорема существования и единственности слабых решений и теорема о сведении к запаздывающему уравнению. В качестве приложения теоремы о сведении установлены некоторые результаты об асимптотическом поведении решений диссипативного варианта задачи (1)–(3), (5)–(8). §3 посвящен изучению задачи (6)–(8). Установлены некоторые соотношения энергетического типа и построено интегральное представление для $\phi(x, t)$. В §4 построены приближенные решения для произвольных временных интервалов и доказаны априорные оценки. Наконец, в §5 выполнен предельный переход и завершено доказательство основных теорем.

Представленные здесь результаты были анонсированы в заметке [15].

§ 2. Основные результаты

Пусть $H^s(\mathcal{O})$ – соболевское пространство порядка s на $\mathcal{O}$, и пусть $H_0^s(\mathcal{O})$ – замыкание в $H^s(\mathcal{O})$ множества C_0^∞ гладких функций с компактным носителем в $\mathcal{O}$. Обозначим через $\|\cdot\|_{s,\mathcal{O}}$ норму в $H^s(\mathcal{O})$, а через $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ и $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{O}}$ – соответственно норму и скалярное произведение в $L^2(\mathcal{O})$. Скалярное произведение и норму в $H_0^1(\Omega)$ определим формулами

$$(u, v)_{1,\Omega} = (u, v)_\Omega + \alpha(\nabla u, \nabla v)_\Omega, \quad \|u\|_{1,\Omega}^2 = \|u\|_\Omega^2 + \alpha\|\nabla u\|_\Omega^2. \quad (2.1)$$

В тех случаях, когда не возникает недоразумений, иногда ради простоты будем писать $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|$ вместо $\|\cdot\|_{s,\mathcal{O}}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$. В дальнейшем используются следующие пространства:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_T &= \{u(x, t) \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \partial_t u(x, t) \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))\}, \\ \mathcal{V}_T &= \{\phi(x, t) \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}_+^3)), \partial_t \phi(x, t) \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^3))\}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара функций $\{u(x_1, x_2, t), \phi(x_1, x_2, x_3, t)\}$ является *слабым решением задачи* (1)–(3), (5)–(8) на интервале $[0, T]$, если $u(x, t) \in \mathcal{W}_T$, $u(x, 0) = u_0(x)$ и $u(t) \equiv u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & - \int_0^T ((1 - \alpha\Delta) \partial_t u(t), \partial_t w(t))_\Omega dt \\ & + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w(t))_\Omega dt - \int_0^T ([u(t), v(u(t)) + \theta] + p_0, w(t))_\Omega dt \\ & = ((1 - \alpha\Delta)u_1 - \nu\gamma[\phi_0], w(0))_\Omega \\ & - \nu \int_0^T (\gamma[\phi(t)], \partial_t w(t) + U \partial_{x_1} w(t))_\Omega dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

для любой функции $w \in \mathcal{W}_T$ такой, что $w(T) = 0$. Здесь $v = v(u(t)) \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$ определяется по $u(t)$ с помощью (3), а $\phi(x, t) \equiv \phi(u; x, t) \in \mathcal{V}_T$ находится по $u(t)$ как обобщенное решение линейной задачи (6)–(8). Здесь и ниже $\gamma[\phi]$ – след функции $\phi(x) \in H^1(\mathbb{R}_+^3)$ на плоскости $\{x: x_3 = 0\}$.

Основным результатом является

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $U \geq 0$ и $U \neq 1$. Предположим, что

$$u_0 \in H_0^2(\Omega), \quad u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad \phi_0 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^3). \quad (2.3)$$

Пусть также $\theta(x) \in H^4(\Omega)$ и $p_0(x) \in L^2(\Omega)$. Тогда задача (1)–(3), (5)–(8) имеет единственное слабое решение на любом интервале $[0, T]$. Это решение обладает свойствами

$$u(x, t) \in C(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.4)$$

$$\phi(x, t) \in C(0, T; H^1(\mathbb{R}_+^3)) \cap C^1(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^3)) \quad (2.5)$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{E}^{(1)}(t) = \mathcal{E}^{(1)}(0), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{E}^{(2)}(t) = \mathcal{E}^{(2)}(0) + \nu U \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \partial_{x_1} [\partial_t u + U \partial_{x_1} u] \gamma[\phi] dx_1 dx_2, \quad (2.7)$$

где

$$\mathcal{E}^{(1)}(t) = E_{\text{pl}}(u(t), \partial_t u(t)) + \nu E_{\text{fl}}^{(1)}(\phi(t), \partial_t \phi(t)) + E_{\text{int}}(u(t), \phi(t)), \quad (2.8)$$

$$\mathcal{E}^{(2)}(t) = E_{\text{pl}}(u(t), \partial_t u(t)) + \nu E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi(t), \partial_t \phi(t)) + E_{\text{int}}(u(t), \phi(t)). \quad (2.9)$$

Здесь $E_{\text{pl}}(u, \partial_t u)$ обозначает энергию пластины, которая имеет вид

$$E_{\text{pl}}(u(t), \partial_t u(t)) = \frac{1}{2} \|\partial_t u(t)\|_{1,\Omega}^2 + \Pi(u(t)) \quad (2.10)$$

с

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \left(\|\Delta u\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta v(u)\|_{\Omega}^2 - ([u, u], \theta)_{\Omega} - 2(p_0, u)_{\Omega} \right),$$

а величины $E_{\text{fl}}^{(j)}(\phi, \partial_t \phi)$ определяются формулами

$$E_{\text{fl}}^{(1)}(\phi, \partial_t \phi) = \frac{1}{2} \left(\|\partial_t \phi\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla \phi\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 - U^2 \|\partial_{x_1} \phi\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \right), \quad (2.11)$$

$$E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi, \partial_t \phi) = \frac{1}{2} \left(\|(\partial_t + U \partial_{x_1}) \phi(t)\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla \phi\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \right). \quad (2.12)$$

Энергия $E_{\text{int}}(u, \phi)$ взаимодействия пластины и потока определяется равенством

$$E_{\text{int}}(u, \phi) = \nu U (\gamma[\phi], \partial_{x_1} u)_{\Omega} \quad (2.13)$$

(здесь, как и выше, $\gamma[\phi] = \phi|_{x_3=0}$).

Следующий результат показывает, что задача (1)–(3), (5)–(8) может быть сведена к запаздывающему уравнению в частных производных.

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1 и существует $R > 0$ такое, что $\phi_0(x) = \phi_1(x) = 0$ для $|x| \geq R$. Пусть $\{u(x_1, x_2, t), \phi(x_1, x_2, x_3, t)\}$ – слабое решение задачи (1)–(3), (5)–(8). Тогда существует положительное число $t(R, U, \Omega)$ такое, что для всех $t \geq t(R, U, \Omega)$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет (1)–(3) с*

$$p(x, t) = p_0(x) - \nu(\partial_t u + U \partial_{x_1} u + q(u; x, t)), \quad (2.14)$$

где

$$q(u; x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_*} ds \int_0^{2\pi} d\theta [M_{\theta}^2 \hat{u}](x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta, t - s). \quad (2.15)$$

Здесь $\hat{u}$ – продолжение функции $u(x, t)$ нулем вне Ω ,

$$M_\theta = \sin \theta \cdot \partial_{x_1} + \cos \theta \cdot \partial_{x_2}$$

и

$$t_* = \inf\{t: x(U, \theta, s) \notin \Omega \text{ для всех } x \in \Omega, \theta \in [0, 2\pi], s > t\}, \quad (2.16)$$

где

$$x(U, \theta, s) = (x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, после некоторого промежутка времени функция $u(x, t)$ может рассматриваться как решение запаздывающего нелинейного уравнения в частных производных (1) с $p(x, t)$, определяемым формулой (2.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Предположим, что $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^2: |x - z| \leq \rho\}$ для некоторых $z \in \mathbb{R}^2$ и $\rho > 0$. Так как

$$(x_1 - z_1 - (U + \sin \theta)s)^2 + (x_2 - z_2 - s \cos \theta)^2 \geq -2\rho s(U + 1) + (U - 1)^2 s^2,$$

то имеем, что $(x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta) \notin \Omega$ при условии $s \geq t_*(U, \Omega)$, где

$$t_*(U, \Omega) = \rho \frac{1 + U + \sqrt{2 + 2U^2}}{(U - 1)^2}.$$

Поэтому $t_* \leq t_*(U, \Omega)$ для всех $U > 0$, $U \neq 1$. Легко также видеть, что $t_* \leq l(U - 1)^{-1}$, когда $U > 1$. Здесь l – размер области Ω в направлении оси x_1 .

Теорема 2.1 (с очевидными изменениями в энергетических равенствах (2.6) и (2.7)) и теорема 2.2 остаются в силе, если вместо (1) рассмотреть следующее уравнение:

$$(1 - \alpha \Delta) \partial_t^2 u + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \Delta) \partial_t u + \Delta^2 u - [u + f, \hat{v} + \theta] = p(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.17)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ и $f(x) \in H^2(\Omega)$ – заданная функция. Величина $\hat{v} = \hat{v}(u)$ определяется как решение задачи

$$\Delta^2 \hat{v} + [u + 2f, u] = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.18)$$

Уравнения (2.17) и (2.18) возникают при изучении динамики упругой полужесткой оболочки с учетом сопротивления среды вращению ее элементов (см., например, [1], [3], [4]). В работе [12] изучалось запаздывающее уравнение (2.17) с функцией $p(x, t)$ вида (2.14), где $q(u; x, t)$ удовлетворяет оценке

$$\|q(u, t)\|_{s, \Omega}^2 \leq C t_* \int_{t-t_*}^t \|u(\tau)\|_{2+s, \Omega}^2 d\tau \quad \text{при } s = 0, -1. \quad (2.19)$$

Было доказано, что в подходящем фазовом пространстве соответствующая динамическая система обладает глобальным аттрактором. Рассуждения, приведенные в [13], позволяют доказать, что этот аттрактор имеет конечную фрактальную размерность. Ясно, что (2.19) справедливо для $q(u; x, t)$, даваемого формулой (2.15). Поэтому, используя теорему 2.2 и повторяя рассуждения из [12] и [13], получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2. Пусть $\{u(x_1, x_2, t), \phi(x_1, x_2, x_3, t)\}$ – слабое решение задачи (2.17), (2), (2.18), (5)–(8) с $\varepsilon_2 > 0$. Тогда существует конечномерное компактное множество $\mathcal{U}$ в $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ такое, что*

$$\text{dist}(u(t), \mathcal{U}) \equiv \inf_{(v_0; v_1) \in \mathcal{U}} \{\|u(t) - v_0\|_{2, \Omega}^2 + \|\partial_t u(t) - v_1\|_{1, \Omega}\} \rightarrow 0, \quad (2.20)$$

когда $t \rightarrow \infty$.

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 опираются на свойства решений задачи (6)–(8) при заданной функции $u(x, t)$ (см. §3). Они используют также следующие свойства скобки Кармана (4), необходимые для изучения задачи (1)–(3) с заданной функцией $p(x, t)$.

ЛЕММА 2.1. *Скобка $[u, v]$, определяемая равенством (4), является непрерывным билинейным отображением из $H^2(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$. Трилинейная форма $([u, v], w)$ на $H^2(\Omega)$ является инвариантной относительно перестановок элементов u, v, w , если по крайней мере один из них лежит в $H_0^2(\Omega)$. Кроме того,*

$$\|[u, v]\|_{-j, \Omega} \leq C \|u\|_{2-\beta, \Omega} \|v\|_{3-j+\beta, \Omega} \quad (2.21)$$

при $j = 1, 2, \quad 0 < \beta < 1$ и

$$\|[u, v]\|_{-j-\theta, \Omega} \leq C \|u\|_{2-\theta+\beta, \Omega} \|v\|_{3-j-\beta, \Omega} \quad (2.22)$$

при $j = 0, 1, \quad 0 < \beta \leq \theta < 1$.

За исключением оценок (2.21) и (2.22) эта лемма хорошо известна (см., например, [2]). Подробные доказательства оценок (2.21) и (2.22) содержатся в [16]. Здесь мы лишь отметим, что их доказательства используют структуру скобки (4) и непрерывность вложения (см., например, [17]) $H^s(\Omega)$ в пространство Бесова $B_{p,2}^\alpha(\Omega)$ при $s = 1 + \alpha - 2/p$ и $p > 2$.

Лемма 2.1 и свойства бигармонического оператора дают следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Для любых $u \in H_0^2(\Omega)$ задача (3) имеет единственное решение $v = v(u)$, лежащее в $H_0^2(\Omega) \cap H^{3-\delta}(\Omega)$ для любого $\delta > 0$. Это решение обладает следующими свойствами:*

$$\|v(u_1) - v(u_2)\|_{3-\delta, \Omega} \leq C(\|u_1\|_{2, \Omega} + \|u_2\|_{2, \Omega}) \|u_1 - u_2\|_{2-\delta, \Omega}, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \| [u_1, v(u_1)] - [u_2, v(u_2)] \|_{-1, \Omega} \\ & \leq C(\|u_1\|_{2, \Omega}^2 + \|u_2\|_{2, \Omega}^2) \|u_1 - u_2\|_{2-\delta, \Omega}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Доказательство (2.23) может быть найдено, например, в [16]. Неравенство (2.24) легко извлекается из (2.21) и (2.23).

Используя леммы 2.1 и 2.2, можно также доказать (см. [3]) следующее свойство потенциальной энергии пластины $\Pi(u)$.

ЛЕММА 2.3. *Потенциальная энергия пластины $\Pi(u)$ является непрерывной функцией от $u \in H_0^2(\Omega)$. Она ограничена снизу для любого $\theta(x) \in H^4(\Omega)$.*

В дальнейшем понадобится следующее свойство функционала $E_{\text{int}}(u, \phi)$.

ЛЕММА 2.4. *Энергия $E_{\text{int}}(u, \phi)$ взаимодействия пластины и потока допускает оценку*

$$|E_{\text{int}}(u, \phi)| \leq \delta \|\nabla \phi\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + C_\delta \|u\|_{1, \Omega}^2 \quad (2.25)$$

для любого $\delta > 0$ и всех $\phi \in H^2(\mathbb{R}_+^3)$, $u \in H^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство Харди

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-2} |\phi(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi(x)|^2 dx,$$

легко получить

$$\int_{Q_R} |\phi(x)|^2 dx \leq C_R \int_{\mathbb{R}_+^3} |\nabla \phi(x)|^2 dx,$$

где $Q_R = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : |x| \leq R\}$ и $\phi \in H^1(\mathbb{R}_+^3)$. Поэтому, используя теорему о следах, находим

$$\|r_\Omega \gamma[\phi]\|_\Omega \leq C \|\nabla \phi\|_{\mathbb{R}_+^3}, \quad \phi \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad (2.26)$$

где r_Ω – оператор сужения из $L^2(\mathbb{R}^2)$ в $L^2(\Omega)$ ($r_\Omega u = u(x)|_{x \in \Omega}$). Неравенство (2.25) вытекает из (2.26).

§ 3. Потенциалы течений с заданными граничными условиями

В этом параграфе рассматривается следующая линейная гиперболическая задача в области $\mathbb{R}_+^3 \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$:

$$(\partial_t + U \partial_{x_1})^2 \phi = \Delta \phi, \quad x \in \mathbb{R}_+^3, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = h(x_1, x_2, t), \quad (3.2)$$

$$\phi|_{t=0} = \phi_0(x), \quad \partial_t \phi|_{t=0} = \phi_1(x). \quad (3.3)$$

Как и ранее, предполагается, что $U \geq 0$ и $U \neq 1$. Применяя в данном случае теорему 2 из [9], получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть*

$$\phi_0 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^3), \quad h(x, t) \in C(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\mathbb{R}^2)). \quad (3.4)$$

Тогда существует единственное решение $\phi(x, t)$ задачи (3.1)–(3.3) такое, что

$$\phi(x, t) \in C(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}_+^3)), \quad \partial_t \phi(x, t) \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}_+^3)). \quad (3.5)$$

При некотором $\sigma > 0$ это решение обладает свойством

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \phi(t)\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\phi(t)\|_{1, \mathbb{R}_+^3}^2 + \int_0^t \|\gamma[\phi(\tau)]\|_{1/2, \mathbb{R}^2}^2 d\tau \\ & \leq C e^{\sigma t} \left(\|\phi_1\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\phi_0\|_{1, \mathbb{R}_+^3}^2 + \int_0^t \|h(\tau)\|_{1/2, \mathbb{R}^2}^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Более того, если при некотором $k \geq 1$

$$\phi_0 \in H^{k+1}(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_1 \in H^k(\mathbb{R}_+^3), \quad \partial_t^j h(x, t) \in C(\mathbb{R}_+; H^{k-j+1/2}(\mathbb{R}^2)) \quad (3.7)$$

для $j = 0, 1, \dots, k$ и если выполнено следующее условие согласования:

$$\left. \frac{\partial \phi_j(0)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \partial_t^j h(x_1, x_2, 0), \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \quad (3.8)$$

(величина $\phi_j(x, 0)$ определяется через ϕ_0 и ϕ_1 по индукции из (3.1)), то решение принадлежит пространству $C^j(\mathbb{R}_+; H^{k+1-j}(\mathbb{R}_+^3))$ при $j = 0, 1, \dots, k+1$ и для некоторого $\sigma_k^* > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \phi(t)\|_{k, \mathbb{R}_+^3}^2 + \|\phi(t)\|_{k+1, \mathbb{R}_+^3}^2 + \int_0^t \sum_{i+j \leq k} \|\partial_x^j \partial_t^i \gamma[\phi(\tau)]\|_{1/2+k-i-j, \mathbb{R}^2}^2 d\tau \\ & \leq C e^{\sigma_k^* t} \left(\|\phi_1\|_{k, \mathbb{R}_+^3}^2 + \|\phi_0\|_{k+1, \mathbb{R}_+^3}^2 + \int_0^t \sum_{j \leq k} \|\partial_t^j h(\tau)\|_{k-j+1/2, \mathbb{R}^2}^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Так как пространство $C(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\mathbb{R}^2))$ плотно в $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\mathbb{R}^2))$, то можно гарантировать существование единственного решения задачи (3.1)–(3.3), обладающего свойствами (3.5) и (3.6), если

$$\phi_0 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^3), \quad h(x, t) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\mathbb{R}^2)). \quad (3.10)$$

Легко также видеть, что решение $\phi(x, t)$ является классическим, если условия (3.7) и (3.8) выполняются при $k \geq 3$.

В дальнейшем ради простоты будем говорить, что решение $\phi(x, t)$ задачи (3.1)–(3.3) является k -гладким, если

$$\phi(x, t) \in C^j(\mathbb{R}_+; H^{k+1-j}(\mathbb{R}_+^3)) \quad \text{при } j = 0, 1, \dots, k+1. \quad (3.11)$$

Нам понадобятся следующие леммы об аппроксимации 0-гладких и 1-гладких решений.

ЛЕММА 3.1. *Предположим, что справедливо (3.10), и пусть $\phi(x, t)$ – соответствующее 0-гладкое решение. Тогда для любого $m \geq 1$ существует последовательность $\{\phi_N(x, t)\}$ m -гладких решений такая, что*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t(\phi(t) - \phi_N(t))\|_{\mathbb{R}_+^3} + \sup_{t \in [0, T]} \|\phi(t) - \phi_N(t)\|_{1, \mathbb{R}_+^3} \\ & + \int_0^T \|h(\tau) - \gamma[\partial_{x_3} \phi_N(\tau)]\|_{1/2, \mathbb{R}^2}^2 d\tau \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

для любого $T > 0$, когда $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что существует последовательность $\{\bar{h}_N(x, t)\}$ гладких функций такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \|h(\tau) - \bar{h}_N(\tau)\|_{1/2, \mathbb{R}^2}^2 d\tau = 0 \quad (3.13)$$

для любого $T > 0$, и такая, что $(\partial_t^j \bar{h}_N)(0) = 0$ при $j = 0, 1, \dots, m-1$. Предположим, что $\phi_0^N(x)$ и $\phi_1^N(x)$ – гладкие аппроксимации ϕ_0 и ϕ_1 в $H^1(\mathbb{R}_+^3)$ и в $L^2(\mathbb{R}_+^3)$ соответственно. Пусть $\phi_j^N(x)$ определяется по $\phi_0^N(x)$ и $\phi_1^N(x)$ индуктивно из (3.1). Рассмотрим задачу (3.1)–(3.3) с $\phi_0 = \phi_0^N(x)$, $\phi_1 = \phi_1^N(x)$ и

$$h(t) = h_N(t) \equiv \bar{h}_N(t) + \beta(A_N t) \sum_{i=0}^{m-1} \gamma [\partial_{x_3} \phi_i^N] \frac{t^i}{i!}, \quad (3.14)$$

где

$$A_N = N \left(1 + \sum_{i=0}^{m-1} \|\phi_i^N\|_{2, \mathbb{R}_+^3}^2 \right),$$

а $\beta(t)$ – функция класса C^∞ такая, что $\beta(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 1$ и $\beta(t) = 0$ для $t \geq 2$. Ясно, что для таких $\phi_0^N(x)$, $\phi_1^N(x)$ и $h_N(x, t)$ условия (3.7) и (3.8) с $k = m$ выполнены. Поэтому существует m -гладкое решение $\phi_N(x, t)$ с этими граничными и начальными данными. При этом свойство (3.12) вытекает из (3.6), (3.13) и (3.14).

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что*

$$\phi_0 \in H^2(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_1 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \partial_t^j h(x, t) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{2-j+1/2}(\mathbb{R}^2)), \quad j = 0, 1, \quad (3.15)$$

и имеет место (3.8) с $k = 1$. Тогда задача (3.1)–(3.3) имеет единственное 1-гладкое решение $\phi(x, t)$, обладающее свойством (3.9) при $k = 1$, и для любого $m \geq 2$ существует последовательность $\{\phi_N(x, t)\}$ m -гладких решений таких, что

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t(\phi(t) - \phi_N(t))\|_{1, \mathbb{R}_+^3} + \sup_{t \in [0, T]} \|\phi(t) - \phi_N(t)\|_{2, \mathbb{R}_+^3} \\ & + \int_0^T \|\partial_t(h(\tau) - \gamma[\partial_{x_3} \phi_N(\tau)])\|_{1/2, \mathbb{R}^2}^2 d\tau \\ & + \int_0^T \|h(\tau) - \gamma[\partial_{x_3} \phi_N(\tau)]\|_{3/2, \mathbb{R}^2}^2 d\tau \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

для всех $T > 0$, когда $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $h(x, t)$ обладает свойством (3.7) с $k = 1$. Тогда существует последовательность $\{\bar{h}_N(x, t)\}$ функций из $C^m(\mathbb{R}_+; H^{m+1}(\mathbb{R}^2))$ такая, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|h(t) - \bar{h}_N(t)\|_{3/2, \mathbb{R}^2}^2 + \int_0^T \|\partial_t(h(\tau) - \bar{h}_N(\tau))\|_{1/2, \mathbb{R}^2}^2 d\tau \rightarrow 0 \quad (3.17)$$

для любых $T > 0$, когда $N \rightarrow \infty$, и такая, что $(\partial_t^j \bar{h}_N)(0) = 0$ при $j = 1, \dots, m-1$. Пусть $\phi_0 \in H^3(\mathbb{R}_+^3)$, $\phi_1 \in H^2(\mathbb{R}_+^3)$, а $\phi_0^N(x)$ и $\phi_1^N(x)$ – гладкие аппроксимации ϕ_0 и ϕ_1 в $H^3(\mathbb{R}_+^3)$ и в $H^2(\mathbb{R}_+^3)$ соответственно. Как и ранее, пусть $\phi_j^N(x)$ определяется по $\phi_0^N(x)$ и $\phi_1^N(x)$ индуктивно из (3.1). Рассмотрим

$$h_N(t) = \bar{h}_N(t) + \beta(B_N t) \sum_{i=1}^{m-1} g_i^N \frac{t^i}{i!} + g_0^N - \bar{h}_N(0),$$

где $\beta(t)$ определяется так же, как и в лемме 3.1, а $g_i^N = \gamma[\partial_{x_3} \phi_i^N]$. Так как

$$\|g_0^N - \gamma[\partial_{x_3} \phi_0]\|_{3/2} \rightarrow 0,$$

то в силу условия согласования можно выбрать константы B_N так, чтобы (3.17) выполнялось с h_N вместо $\bar{h}_N$. Поэтому теорема 3.1 влечет, что решения $\phi_N(x, t)$ задачи (3.1)–(3.3) с $\phi_0 = \phi_0^N(x)$, $\phi_1 = \phi_1^N(x)$ и $h = h_N(x, t)$ обладают свойством (3.16). Ясно, что $\phi_N(x, t)$ – m -гладкие решения.

Предположим теперь, что $\phi_0 \in H^2(\mathbb{R}_+^3)$ и $\phi_1 \in H^1(\mathbb{R}_+^3)$. Пусть p – оператор продолжения из $H^{3/2}(\mathbb{R}^2)$ в $H^3(\mathbb{R}_+^3)$ такой, что $\gamma[\partial_{x_3} p(h)] = h$. В силу условия согласования можно утверждать, что $\phi_0 = p(h(0)) + \psi$, где ψ лежит в пространстве

$$V = \{\phi \in H^2(\mathbb{R}_+^3) : \partial_{x_3} \phi|_{x_3=0} = 0\}. \quad (3.18)$$

Так как $V \cap H^3(\mathbb{R}_+^3)$ плотно в V , то величины $\phi_0 \in H^2(\mathbb{R}_+^3)$ можно аппроксимировать функциями $\phi_0^N \in H^3(\mathbb{R}_+^3)$, удовлетворяющими тем же самым условиям согласования. Таким образом, можно получить (3.16) при условии, что выполняются соотношения (3.7) и (3.8) с $k = 1$.

Наконец, величины $\{\phi_0, \phi_1, h\}$, обладающие свойствами (3.15) и (3.8) с $k = 1$, можно аппроксимировать последовательностью $\{\phi_0^N, \phi_1^N, h_N\}$, обладающей свойствами (3.7) и (3.8) с $k = 1$, так, чтобы

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \|h(\tau) - \bar{h}_N(\tau)\|_{3/2, \mathbb{R}^2}^2 + \|\partial_t(h(\tau) - \bar{h}_N(\tau))\|_{1/2, \mathbb{R}^2}^2 \right\} d\tau &\rightarrow 0, \\ \sup_{t \in [0, T]} \|h(t) - h_N(t)\|_{1, \mathbb{R}_+^2} &\rightarrow 0, \quad \phi_0^N = \left(\phi_0 - p(h(0)) \right) + p(h_N(0)), \end{aligned}$$

где определенный выше оператор продолжения p выбран так, чтобы он был также непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^2)$ в $H^2(\mathbb{R}_+^3)$.

Используя лемму 3.2, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что выполнены условия (3.15) и (3.8) с $k = 1$. Тогда решение $\phi(x, t)$ задачи (3.1)–(3.3) удовлетворяет энергетическим равенствам*

$$E_{\text{fl}}^{(1)}(\phi(t), \partial_t \phi(t)) = E_{\text{fl}}^{(1)}(\phi_0, \phi_1) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} h(x, \tau) \partial_t \gamma[\phi(x, \tau)] dx d\tau, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi(t), \partial_t \phi(t)) &= E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi_0, \phi_1) \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} h(x, \tau) \left\{ (\partial_t + U \partial_{x_1}) \gamma[\phi(x, \tau)] \right\} dx d\tau, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $E_{\text{fl}}^{(1)}(\phi, \partial_t \phi)$ и $E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi, \partial_t \phi)$ задаются формулами (2.11) и (2.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для классических решений $\phi(x, t)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \left\{ (\partial_t \phi(x, t))^2 + (\nabla \phi(x, t))^2 - U^2 (\partial_{x_1} \phi(x, t))^2 \right\} \\ &= \operatorname{div} \left\{ \partial_t \phi(x, t) \nabla \phi(x, t) \right\} - U \partial_{x_1} \left\{ (\partial_t \phi(x, t) + U \partial_{x_1} \phi(x, t)) \partial_t \phi(x, t) \right\}, \\ & \frac{1}{2} \partial_t \left\{ (\partial_t \phi(x, t) + U \partial_{x_1} \phi(x, t))^2 + (\nabla \phi(x, t))^2 \right\} \\ &= \operatorname{div} \left\{ (\partial_t \phi(x, t) + U \partial_{x_1} \phi(x, t)) \nabla \phi(x, t) \right\} \\ & \quad - \frac{U}{2} \partial_{x_1} \left\{ (\partial_t \phi(x, t) + U \partial_{x_1} \phi(x, t))^2 + (\nabla \phi(x, t))^2 \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя эти равенства по множеству $(0, t) \times [\{|x| \leq \rho\} \cap \mathbb{R}_+^3]$, после предельного перехода по подходящей последовательности $\rho \rightarrow \infty$ получаем (3.19) и (3.20) для рассматриваемых классических решений. Опираясь на лемму 3.2 и теорему 3.1, легко выполнить предельный переход к решениям, обладающим свойствами (3.8), (3.9) с $k = 1$ и (3.15).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\phi_0 \equiv \phi_1 \equiv 0$. Предположим, что

$$h(x, t) \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)) \quad \text{для некоторого } p > 2. \quad (3.21)$$

Тогда слабое решение $\phi(x, t)$ задачи (3.1)–(3.3) имеет вид

$$\phi(x, t) = -\frac{\chi(t - x_3)}{2\pi} \int_{x_3}^t ds \int_0^{2\pi} d\theta h(x_1 - k_1(\theta, s, x_3), x_2 - k_2(\theta, s, x_3), t - s). \quad (3.22)$$

Здесь и ниже $\chi(t)$ – функция Хевисайда ($\chi(t) = 1$ при $t \geq 0$, $\chi(t) = 0$ для $t < 0$) и

$$k_1(\theta, s, x_3) = Us + \sqrt{s^2 - x_3^2} \sin \theta, \quad k_2(\theta, s, x_3) = \sqrt{s^2 - x_3^2} \cos \theta.$$

Кроме того, в данном случае

$$\begin{aligned} (\partial_t + U \partial_{x_1}) \gamma[\phi] &= -h(x_1, x_2, t) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_0^{2\pi} d\theta [M_\theta h](x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta, t - s), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $M_\theta = \sin \theta \partial_{x_1} + \cos \theta \partial_{x_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $h(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$. Используя метод Фурье–Лапласа, легко получить в рассматриваемом случае следующую формулу для классического решения задачи (3.1) и (3.2):

$$\phi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma e^{(\delta + i\sigma)t} e^{i\langle x, \eta \rangle} F(x_3, \delta + i\sigma, \eta) \hat{h}(\eta, \delta + i\sigma)$$

с

$$F(x_3, \tau, \eta) = \frac{\exp \left\{ -x_3 \sqrt{(\tau + iU\eta_1)^2 + \eta^2} \right\}}{\sqrt{(\tau + iU\eta_1)^2 + \eta^2}}, \quad \tau = \delta + i\sigma, \quad \delta = \operatorname{Re} \tau > 0,$$

где квадратный корень выбран так, чтобы $\operatorname{Re} \sqrt{z^2 + \eta^2} \geq (1/\sqrt{2}) \operatorname{Re} z > 0$ и

$$\hat{h}(\eta, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} dx \int_0^{+\infty} dt e^{-\tau t} e^{-i\langle x, \eta \rangle} h(x, t), \quad \operatorname{Re} \tau > 0.$$

Простые вычисления показывают, что это решение обладает свойством (3.9) для любого $k > 0$. Используя известную формулу

$$\frac{\exp\{-\alpha\sqrt{p^2+1}\}}{\sqrt{p^2+1}} = \int_{\alpha}^{\infty} \mathcal{J}_0(\sqrt{t^2-\alpha^2}) e^{-pt} dt,$$

где $\mathcal{J}_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка, а также теорему о свертке для преобразования Фурье–Лапласа, получаем

$$\phi(x, t) = -\chi(t - x_3) \int_{\mathbb{R}^2} d\eta \int_{x_3}^t ds e^{i\langle x, \eta \rangle} e^{-iU\eta_1 s} \mathcal{J}_0(|\eta| \sqrt{s^2 - x_3^2}) \bar{h}(\eta, t - s),$$

где

$$\bar{h}(\eta, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} dx e^{-i\langle x, \eta \rangle} h(x, t).$$

Так как

$$2\pi a \int_{\mathbb{R}^2} d\eta e^{i\langle y, \eta \rangle} \mathcal{J}_0(a|\eta|) \bar{h}(\eta) = \int_{|x|=a} h(y - x) dS_x,$$

то

$$\phi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \chi(t - x_3) \int_{x_3}^t \frac{ds}{\sqrt{s^2 - x_3^2}} \int_{K(s, x_3)} dS_{\xi} h(x_1 - Us - \xi_1, x_2 - \xi_2, t - s), \quad (3.24)$$

где $K(s, x_3) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| = \sqrt{s^2 - x_3^2}\}$. Отсюда после перехода к полярным координатам получаем (3.22) в случае гладких функций $h(x, t)$. Для того чтобы доказать (3.23) в этом случае, заметим, что из (3.22) вытекает соотношение

$$\gamma[\phi](x_1, x_2, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_0^{2\pi} d\theta h(x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta, t - s). \quad (3.25)$$

Поэтому, применяя оператор $\partial_t + U \partial_{x_1}$ к этой формуле и используя равенство

$$\begin{aligned} \partial_t h &= -\frac{d}{ds} h(x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta, t - s) \\ &\quad - (U + \sin \theta) \partial_{x_1} h - \cos \theta \partial_{x_2} h, \end{aligned} \quad (3.26)$$

получаем (3.23) для $h(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$. Для завершения доказательства теоремы осталось выполнить предельный переход. Сделать это можно, опираясь на следующее утверждение.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что $h(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ и $\phi(x, t)$ имеет вид (3.22). Тогда*

$$\begin{aligned} \|\partial_t \phi(t)\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\phi(t)\|_{1, \mathbb{R}_+^3}^2 \\ \leq C_1 \int_0^t \|h(\tau)\|_{\mathbb{R}^2}^2 d\tau + C_2(r) t^{3-2/r} \left(\int_0^t \|\nabla h(\tau)\|_{\mathbb{R}^2}^r d\tau \right)^{2/r} \end{aligned} \quad (3.27)$$

для любого $r > 2$ и

$$\|(\partial_t + U \partial_{x_1}) \gamma[\phi(t)]\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|h(t)\|_{\mathbb{R}^2} + \int_0^t \|\nabla h(\tau)\|_{\mathbb{R}^2} d\tau. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.28) является очевидным следствием соотношения (3.23). Докажем (3.27). Из (3.22) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\phi(\cdot, x_3, t)\|_{\mathbb{R}^2} &\leq \chi(t - x_3) \int_{x_3}^t \|h(t - s)\|_{\mathbb{R}^2} ds, \\ \|\partial_{x_j} \phi(\cdot, x_3, t)\|_{\mathbb{R}^2} &\leq \chi(t - x_3) \int_{x_3}^t \|\partial_{x_j} h(t - s)\|_{\mathbb{R}^2} ds \quad \text{для } j = 1, 2. \end{aligned}$$

Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \partial_{x_3} \phi(x, t) &= \chi(t - x_3) h(x_1 - U x_3, x_2, t - x_3) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \chi(t - x_3) \int_{x_3}^t \frac{x_3 ds}{\sqrt{s^2 - x_3^2}} \int_0^{2\pi} d\theta \left[(\sin \theta \partial_{x_1} + \cos \theta \partial_{x_2}) h^* \right] (x, t, s, \theta), \end{aligned}$$

где

$$h^*(x, t, s, \theta) = h\left(x_1 - U s - \sqrt{s^2 - x_3^2} \sin \theta, x_2 - \sqrt{s^2 - x_3^2} \cos \theta, t - s\right).$$

Следовательно,

$$\|\partial_{x_3} \phi(\cdot, x_3, t)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \chi(t - x_3) \left(\|h(t - x_3)\|_{\mathbb{R}^2} + \int_{x_3}^t \frac{x_3 ds}{\sqrt{s^2 - x_3^2}} \|\nabla h(t - s)\|_{\mathbb{R}^2} \right).$$

Используя формулу, аналогичную (3.26), имеем также, что

$$\begin{aligned} \|\partial_t \phi(\cdot, x_3, t)\|_{\mathbb{R}^2} \\ \leq \chi(t - x_3) \left(\|h(t - x_3)\|_{\mathbb{R}^2} + (1 + U) \int_{x_3}^t \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - x_3^2}} \|\nabla h(t - s)\|_{\mathbb{R}^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \left(\|\phi(\cdot, x_3, t)\|_{1, \mathbb{R}^2}^2 + \|\partial_{x_3} \phi(\cdot, x_3, t)\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \|\partial_t \phi(\cdot, x_3, t)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \right)^{1/2} \\ \leq C \chi(t - x_3) \left(\|h(t - x_3)\|_{\mathbb{R}^2} + \int_{x_3}^t \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - x_3^2}} \|\nabla h(t - s)\|_{\mathbb{R}^2} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Так как

$$\left(\int_{x_3}^t \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 - x_3^2}} \right)^q ds \right)^{1/q} \leq C_q \left((t - x_3)^{1/q} + x_3^{1/2} (t - x_3)^{1/q - 1/2} \right)$$

при $0 < q < 2$, находим, что

$$\left(\int_{x_3}^t \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - x_3^2}} \|\nabla h(t - s)\|_{\mathbb{R}^2} \right)^2 \leq C_r (t^{2-2/r} + x_3 t^{1-2/r}) \left(\int_0^t \|\nabla h(s)\|_{\mathbb{R}^2}^r ds \right)^{2/r}$$

для любого $r > 2$. Поэтому из (3.29) вытекает (3.27).

Установим теперь следующее интегральное представление типа Кирхгофа для решений задачи (3.1)–(3.3) в случае, когда $h(x, t) \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $h(x, t) \equiv 0$ и

$$\phi_0 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^3). \quad (3.30)$$

Тогда слабое решение $\phi(x, t)$ задачи (3.1)–(3.3) дается следующей формулой:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S dS_\xi \left[\hat{\phi}_0 - t(\xi - U \mathbf{e}_1, \nabla \hat{\phi}_0) + t \hat{\phi}_1 \right] (x - (\xi + U \mathbf{e}_1)t), \quad (3.31)$$

где S – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, dS_ξ – ее поверхностная мера, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, функции $\hat{\phi}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ и $\hat{\phi}_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ определяются формулой

$$\hat{\phi}_j(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_j(x_1, x_2, x_3), & x_3 \geq 0, \\ \hat{\phi}_j(x_1, x_2, -x_3), & x_3 < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать (3.31) для задачи

$$(\partial_t + U \partial_{x_1})^2 \phi = \Delta \phi, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad (3.32)$$

$$\phi|_{t=0} = \hat{\phi}_0(x), \quad \partial_t \phi|_{t=0} = \hat{\phi}_1(x). \quad (3.33)$$

Заметим сначала, что любое гладкое решение $\phi(x, t)$ задачи (3.32), (3.33) представимо в виде

$$\phi(x, t) = \psi(\hat{\phi}_1; x, t) + (\partial_t + 2U \partial_{x_1}) \psi(\hat{\phi}_0; x, t), \quad (3.34)$$

где $\psi(f; x, t)$ – решение задачи (3.32), (3.33) с $\hat{\phi}_0 \equiv 0$ и $\hat{\phi}_1 = f$. Используя метод Фурье, легко видеть, что

$$\psi(f; x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iU\xi_1 t} \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} e^{ix\xi} \tilde{f}(\xi) d\xi,$$

где $\tilde{f}$ – преобразование Фурье функции f . После простых вычислений теорема о свертке дает

$$\psi(f; x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_S dS_\xi f(x - (\xi + U \mathbf{e}_1)t). \quad (3.35)$$

Из (3.34) и (3.35) получаем (3.31) для гладких функций $\hat{\phi}_0$ и $\hat{\phi}_1$. Ясно также, что решение $\phi(x, t)$, даваемое формулой (3.31), удовлетворяет оценке

$$\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}_+^3} \leq C(1+t)(\|\phi_1\|_{\mathbb{R}_+^3} + \|\phi_0\|_{1, \mathbb{R}_+^3}).$$

Из этой оценки и леммы 3.1 вытекает (3.31) для 0-гладких (слабых) решений задачи (3.1)–(3.3) с $h \equiv 0$.

§ 4. Построение приближенных решений

Пусть $\{e_k\}$ – ортонормированный базис в $H_0^1(\Omega)$, состоящий из собственных функций задачи

$$\Delta^2 w = \lambda(1 - \alpha \Delta)w, \quad w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.1)$$

Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ – соответствующие собственные числа. В силу (2.1) ясно, что $\{e_k\}$ – собственные векторы положительного самосопряженного оператора A в $H_0^1(\Omega)$, определенного равенством

$$(Au, v)_{1,\Omega} = (\Delta u, \Delta v)_\Omega. \quad (4.2)$$

В дальнейшем обозначаем через J ограниченный оператор из $H^{-1}(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ такой, что $(Ju, v)_{1,\Omega} = (u, v)_\Omega$, через r_Ω – оператор сужения из $L^2(\mathbb{R}^2)$ в $L^2(\Omega)$ ($r_\Omega u = u(x)|_{x \in \Omega}$) и через P_N – ортогональный проектор на подпространство в $H_0^1(\Omega)$, порожденное первыми N собственными векторами спектральной задачи (4.1).

Определим приближенное решение порядка N задачи (1)–(3), (5)–(8) на интервале $[0, T]$ как пару функций $\{u_N(t), \phi_N(t)\}$ таких, что

$$u_N(t) = \sum_{k=1}^N g_k(t)e_k \in \mathcal{L}_T^N \equiv C^1(O, T; P_N H_0^1(\Omega))$$

и в $H_0^1(\Omega)$ выполняются соотношения

$$u_N(t) = u_N(0) + \int_0^t \partial_t u_N(\tau) d\tau, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_N(t) = & \partial_t u_N(0) + \int_0^t \{ -Au_N(\tau) + P_N J([u_N(\tau), v(u_N(\tau)) + \theta] + p_0) \} d\tau \\ & + \nu P_N J r_\Omega (\gamma[\phi_N(t)] - \gamma[\phi_0]) + \nu U \int_0^t P_N J r_\Omega (\partial_{x_1} \gamma[\phi_N(\tau)]) d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

для всех $0 \leq t < T$. Здесь:

- (i) $u_N(0) = P_N u_0$, $\partial_t u_N(0) = P_N u_1$;
- (ii) $v(u_N)$ определяется величиной u_N согласно (3);
- (iii) $\phi_N(x, t)$ – решение задачи (3.1)–(3.3) с $h(x, t) = h_N(x, t)$, где

$$h_N(x, t) = \begin{cases} (\partial_t + U\chi_N(x)\partial_{x_1})u_N(x, t), & x = (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & x = (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

а $\chi_N(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ выбрано так, чтобы $0 \leq \chi_N(x) \leq 1$, $\chi_N(x) \rightarrow 1$ почти всюду и

$$|\nabla \chi_N(x)| \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq C \quad \text{для } x \in \Omega$$

с константой C , не зависящей от N .

Так как $h_N(x, t) \in C(0, T; H^2(\mathbb{R}^2))$ при $u_N \in \mathcal{L}_T^N$, то из теоремы 3.1 вытекает, что $\phi_N(x, t) \in C(0, T; H^1(\mathbb{R}_+^3))$, когда $\phi_0 \in H^1(\mathbb{R}_+^3)$, $\phi_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^3)$ и $u_N \in \mathcal{L}_T^N$. Поэтому $r_\Omega \gamma[\phi_N] \in H^{1/2}(\Omega)$ и, следовательно, правая часть равенства (4.4) корректно определена.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть:

- (i) $U \geq 0$, $U \neq 1$;
- (ii) $\theta(x) \in H^4(\Omega)$ и $p_0(x) \in L^2(\Omega)$.

Предположим, что

$$u_0 \in H_0^2(\Omega), \quad u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad \phi_0 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^3).$$

Тогда для любого интервала $[0, T]$ существует единственное приближенное решение $\{u_N(t), \phi_N(t)\}$ порядка N задачи (1)–(3), (5)–(8). Это решение обладает свойством

$$\|\partial_t u_N\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta u_N\|_{\Omega}^2 + \|\partial_t \phi_N\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla \phi_N\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \leq C_T, \quad t \in [0, T] \quad (4.6)$$

(C_T не зависит от N), и удовлетворяет равенствам

$$\mathcal{E}_N^{(1)}(t) = \mathcal{E}_N^{(1)}(0) - \nu U \int_0^t d\tau \int_{\Omega} (1 - \chi_N) \partial_{x_1} \partial_t u_N \gamma[\phi_N] dx_1 dx_2, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{E}_N^{(2)}(t) = \mathcal{E}_N^{(2)}(0) + \nu U \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \left[\chi_N \partial_{x_1} \partial_t u_N + U \partial_{x_1} (\chi_N \partial_{x_1} u_N) \right] \gamma[\phi_N] dx_1 dx_2, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^{(1)}(t) &= E_{\text{pl}}(u_N(t), \partial_t u_N(t)) + \nu E_{\text{fl}}^{(1)}(\phi_N(t), \partial_t \phi_N(t)) + E_{\text{int}}^N(u_N(t), \phi_N(t)), \\ \mathcal{E}_N^{(2)}(t) &= E_{\text{pl}}(u_N(t), \partial_t u_N(t)) + \nu E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi_N(t), \partial_t \phi_N(t)) + E_{\text{int}}^N(u_N(t), \phi_N(t)). \end{aligned}$$

Здесь энергия $E_{\text{pl}}(u, \partial_t u)$ и величины $E_{\text{fl}}^{(j)}(\phi, \partial_t \phi)$ определяются соотношениями (2.10)–(2.12), $E_{\text{int}}^N(u_N, \phi_N) = \nu U (\gamma[\phi_N], \chi_N \partial_{x_1} u_N)_{\Omega}$.

Докажем сначала локальное существование приближенных решений.

ЛЕММА 4.1. Пусть

$$w_0, w_1 \in P_N H_0^1(\Omega), \quad \phi_0 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^3)$$

и

$$\|w_1\|_{1,\Omega}^2 + \|w_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\phi_1\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\phi_0\|_{1,\mathbb{R}_+^3}^2 \leq R^2 \quad (4.9)$$

для некоторого $R > 0$. Тогда существует $T_0 = T_0(N, R)$ такое, что задача (4.3), (4.4) с $u_N(0) = w_0$ и $\partial_t u_N(0) = w_1$ имеет единственное решение $\{u_N(t), \phi_N(t)\}$ на интервале $[0, T_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{M}_T^N = \{(v_0; v_1) : v_0 \in C(0, T; P_N H_0^2(\Omega)), v_1 \in C(0, T; P_N H_0^1(\Omega))\}$$

с нормой

$$|(v_0; v_1)|_{\mathcal{M}_T^N} = \max_{[0, T]} \|v_0(t)\|_{2, \Omega} + \max_{[0, T]} \|v_1(t)\|_{1, \Omega}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ отображение из $\mathcal{M}_T^N$ в себя, действующее по формуле

$$\mathcal{B}(v_0; v_1) = (b_0(v_0; v_1); b_1(v_0; v_1)),$$

где

$$b_0(v_0; v_1) = w_0 + \int_0^t v_1(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} b_1(v_0; v_1) = & w_1 + \int_0^t \{-Av_0(\tau) + P_N J([v_0(\tau), v^*(v_0(\tau)) + \theta] + p_0)\} d\tau \\ & + \nu P_N J r_\Omega(\gamma[\phi(t)] - \gamma[\phi_0]) + \nu U \int_0^t P_N J r_\Omega(\partial_{x_1} \gamma[\phi(\tau)]) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $v = v^*(v_0)$ определяется по v_0 из (3) с $u = v_0$ и $\phi(x, t)$ является решением задачи (3.1)–(3.3) с

$$h(x, t) = \begin{cases} v_1(x_1, x_2, t) + U \chi_N(x_1, x_2) \partial_{x_1} v_0(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega. \end{cases}$$

Достаточно доказать, что существует $T_0 = T_0(N, R)$ такое, что отображение $\mathcal{B}$ имеет неподвижную точку в шаре

$$\mathcal{K}(w_0; w_1) = \left\{ (v_0; v_1) \in \mathcal{M}_T^N : |(v_0; v_1) - (w_0; w_1)|_{\mathcal{M}_T^N} \leq 1 \right\}, \quad T < T_0.$$

Предположим, что $(v_0; v_1) \in \mathcal{K}(w_0; w_1)$; тогда (4.9) дает

$$\max_{[0, T]} \|v_0(t)\|_{2, \Omega} + \max_{[0, T]} \|v_1(t)\|_{1, \Omega} \leq 1 + 2R.$$

Поэтому

$$\|b_0(v_0; v_1)(t) - w_0\|_{2, \Omega} \leq c\sqrt{\lambda_N} (1 + 2R)T, \quad t \in [0, T]. \quad (4.10)$$

Используя лемму 2.1 и свойства операторов A и J , имеем также

$$\begin{aligned} \|b_1(v_0; v_1)(t) - w_1\|_{1, \Omega} & \leq (1 + \lambda_N) C_R T \\ & + \nu \|\gamma[\phi(t)] - \gamma[\phi_0]\|_{\mathbb{R}^2} + \nu U \sqrt{T} \left(\int_0^t \|\gamma[\phi(\tau)]\|_{\mathbb{R}^2}^2 d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

для $t \in [0, T]$. Теоремы об интерполяции и следах (см., например, [17]) дают

$$\begin{aligned} \|\gamma[\phi(t)] - \gamma[\phi(s)]\|_{\mathbb{R}^2} &\leq \|\phi(t) - \phi(s)\|_{1/2+\delta, \mathbb{R}_+^3} \\ &\leq C \|\phi(t) - \phi(s)\|_{\mathbb{R}_+^3}^{1/2-\delta} \left(\|\phi(t)\|_{1, \mathbb{R}_+^3} + \|\phi(s)\|_{1, \mathbb{R}_+^3} \right)^{1/2+\delta} \\ &\leq C |t - s|^{1/2-\delta} \left(\max_{[0, T]} \|\partial_t \phi(t)\|_{\mathbb{R}_+^3} \right)^{1/2-\delta} \left(\|\phi(t)\|_{1, \mathbb{R}_+^3} + \|\phi(s)\|_{1, \mathbb{R}_+^3} \right)^{1/2+\delta} \end{aligned}$$

для любых $t, s \in [0, T]$ и некоторого $\delta < 1/2$. Поэтому из теоремы 3.1 получаем

$$\begin{aligned} \|b_1(v_0; v_1)(t) - w_1\|_{1, \Omega} &\leq (1 + \lambda_N) C_R T \\ &\quad + C T^{1/2-\delta} (1 + T^\delta) \exp\left(\frac{\sigma T}{2}\right) \left(R^2 + \int_0^T \|h(\tau)\|_{1/2, \Omega}^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из теоремы 11.8 [18] следует

$$\|\chi_N v\|_{1, \Omega} \leq C \|v\|_{1, \Omega} \quad \text{для } v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.12)$$

поэтому свойства $h(\tau)$ и (4.11) дают

$$\|b_1(v_0; v_1)(t) - w_1\|_{1, \Omega} \leq C_R \left((1 + \lambda_N) T + T^{1/2-\delta} (1 + T) \exp\left(\frac{\sigma T}{2}\right) \right). \quad (4.13)$$

Значит, из (4.10) и (4.13) следует, что $\mathcal{B}$ отображает $\mathcal{K}(w_0; w_1)$ в себя при условии, что $T \leq T_0(N, R)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\mathcal{B}$ является сжатием в этом шаре для достаточно малых $T_0(N, R)$. Лемма 4.1 доказана.

Пусть p – непрерывный линейный оператор продолжения из $H_0^1(\Omega)$ в $H^2(\mathbb{R}_+^3)$ такой, что

$$\left. \frac{\partial p[h]}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \begin{cases} h(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega. \end{cases}$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $\{u_N(t), \phi_N(t)\}$ – приближенное решение задачи (1)–(3), (5)–(8) на некотором интервале $[0, T_*)$. Предположим, что

$$\phi_1 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_0(x) = p[h_N(0)](x) + \psi(x), \quad (4.14)$$

где $h_N(x, t)$ определяется формулой (4.5) и

$$\psi(x) \in V = \{\phi \in H^2(\mathbb{R}_+^3) : \partial_{x_3} \phi|_{x_3=0} = 0\}.$$

Тогда для этого приближенного решения выполняются равенства (4.7) и (4.8) для всех $t \in [0, T_*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $\phi_N(t)$ как сумму двух функций

$$\phi_N(t) = \phi_N^*(t) + \phi_N^{**}(t),$$

где $\phi_N^*(x, t)$ – решение задачи (3.1)–(3.3) с $\phi_0 = \phi_1 = 0$ и $h(x, t) = h_N(x, t) - h_N(x, 0)$, а $\phi_N^{**}(x, t)$ – решение этой же задачи с заданными ϕ_0 , ϕ_1 и $h(x, t) = h_N(x, 0)$. Из теоремы 3.3 получаем

$$r_\Omega(\partial_t + U \partial_{x_1}) \gamma[\phi_N^*] \in C(0, T_*; L^2(\Omega)).$$

Теорема 3.1 дает

$$\phi_N^{**}(t) \in C(0, T_*; H^2(\mathbb{R}_+^3)), \quad \partial_t \phi_N^{**}(t) \in C(0, T_*; H^1(\mathbb{R}_+^3)).$$

Следовательно,

$$r_\Omega(\partial_t + U \partial_{x_1}) \gamma[\phi_N^{**}] \in C(0, T_*; L^2(\Omega)).$$

Поэтому можно продифференцировать (4.4) по t и получить

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_N(t) = & -A u_N(t) + P_N J([u_N(t), v(u_N(t)) + \theta] + p_0) \\ & + \nu P_N J r_\Omega \left(\gamma \left[(\partial_t + U \partial_{x_1}) \phi_N(t) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

лежит в $C(0, T_*; P_N H_0^1(\Omega))$. Следовательно, справедливы условия (3.7) и (3.8) с $k = 1$. Применяя теорему 3.2, получаем равенства

$$\begin{aligned} E_{\text{fl}}^{(1)}(\phi_N(t), \partial_t \phi_N(t)) - E_{\text{fl}}^{(1)}(\phi_0, \phi_1) \\ = - \int_0^t \int_\Omega (\partial_t + U \chi_N(x) \partial_{x_1}) u_N(x, t) \partial_t \gamma[\phi_N(x, \tau)] dx d\tau, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi_N(t), \partial_t \phi_N(t)) - E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi_0, \phi_1) \\ = - \int_0^t \int_\Omega (\partial_t + U \chi_N(x) \partial_{x_1}) u_N(x, t) (\partial_t + U \partial_{x_1}) \gamma[\phi_N(x, \tau)] dx d\tau. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если умножить (4.15) скалярно в $H_0^1(\Omega)$ на $\partial_t u_N(t)$, то легко обнаружить (см., например, [1], [2]), что

$$\begin{aligned} E_{\text{pl}}(u_N(t), \partial_t u_N(t)) - E_{\text{pl}}(u_N(0), \partial_t u_N(0)) \\ = \nu \int_0^t \int_\Omega \partial_t u_N(x, t) (\partial_t + U \partial_{x_1}) \gamma[\phi_N(x, \tau)] dx d\tau. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Сравнивая между собой равенства (4.16)–(4.18), получаем (4.7) и (4.8) в рассматриваемой ситуации.

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что выполняются условия леммы 4.2. Тогда для приближенного решения $\{u_N(t), \phi_N(t)\}$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u_N(t)\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta u_N(t)\|_{\Omega}^2 + \|\partial_t \phi_N(t)\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla \phi_N(t)\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \\ & \leq C_1 e^{C_2 t} (1 + E_{\text{pl}}^0(u_N(0), \partial_t u_N(0)) + E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi_0, \phi_1)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

для всех $t \in [0, T_*)$ с константами C_1 и C_2 , не зависящими от N , где $E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi_0, \phi_1)$ определено в (2.12) и

$$E_{\text{pl}}^0(u(t), \partial_t u(t)) = \frac{1}{2} \left(\|\partial_t u(t)\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta u\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta v(u)\|_{\Omega}^2 \right).$$

Если $\{u_{j,N}(t), \phi_{j,N}(t)\}$, $j = 1, 2$, — два приближенных решения таких, что

$$E_{\text{pl}}^0(u_{j,N}(0), \partial_t u_{j,N}(0)) + E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi_{j,0}, \phi_{j,1}) \leq R^2, \quad j = 1, 2,$$

то

$$\begin{aligned} & \|\partial_t(u_{1,N}(t) - u_{2,N}(t))\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta(u_{1,N}(t) - u_{2,N}(t))\|_{\Omega}^2 \\ & \leq C(T_*, R) \{ \|\partial_t u_{1,N}(0) - \partial_t u_{2,N}(0)\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta(u_{1,N}(0) - u_{2,N}(0))\|_{\Omega}^2 \\ & \quad + \|\phi_{1,1} - \phi_{2,1}\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla(\phi_{1,0} - \phi_{2,0})\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \|\partial_t(\phi_{1,N}(t) - \phi_{2,N}(t))\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla(\phi_{1,N}(t) - \phi_{2,N}(t))\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \\ & \leq C(T_*, R) \{ \|\partial_t u_{1,N}(0) - \partial_t u_{2,N}(0)\|_{1,\Omega}^2 \\ & \quad + \|\Delta(u_{1,N}(0) - u_{2,N}(0))\|_{\Omega}^2 \\ & \quad + \|\phi_{1,1} - \phi_{2,1}\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla(\phi_{1,0} - \phi_{2,0})\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $C(T_*, R)$ не зависит от N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Леммы 2.3 и 2.4 дают

$$\beta_1 \mathcal{E}^{(2,0)}(u_0, u_1; \phi_0, \phi_1) - c_1 \leq \mathcal{E}^{(2)}(u_0, u_1; \phi_0, \phi_1) \leq \beta_2 \mathcal{E}^{(2,0)}(u_0, u_1; \phi_0, \phi_1) + c_2,$$

где β_j и c_j — положительные числа и

$$\mathcal{E}^{(2,0)}(u_0, u_1; \phi_0, \phi_1) = E_{\text{pl}}^0(u_0, u_1) + E_{\text{fl}}^{(2)}(\phi_0, \phi_1).$$

Используя (4.12), имеем

$$\|\chi_N \partial_{x_1} \partial_t u_N + U \partial_{x_1} (\chi_N \partial_{x_1} u_N)\|_{\Omega} \leq C(\|\partial_t u_N\|_{1,\Omega} + \|\Delta u_N\|_{\Omega}).$$

Для того чтобы получить оценку (4.19), осталось воспользоваться (2.26), (4.8) и леммой Гронуолла. Доказательство оценок (4.20) и (4.21) использует стандартные рассуждения, опирающиеся на соотношения (4.15), (4.19), (3.6) и лемму 2.2.

Теперь легко доказать теорему 4.1 для ϕ_0 и ϕ_1 , обладающих свойством (4.14). Действительно, предположим, что $[0, T_*)$ – максимальный интервал существования приближенного решения. Тогда, используя (4.15) и (4.19), можно заключить, что величина $\|\partial_t^2 u_N(t)\|_\Omega$ ограничена на этом интервале. Поэтому функции $u_N(t)$ и $\partial_t u_N(t)$ могут быть продолжены по непрерывности на сегмент $[0, T_*]$. Из доказательства леммы 4.2 и из теоремы 3.1 ясно также, что $\phi_N(t)$ и $\partial_t \phi_N(t)$ – непрерывные функции на $[0, T_*]$ со значениями в $H^1(\mathbb{R}_+^3)$ и $L^2(\mathbb{R}_+^3)$ соответственно. Поэтому можно применить лемму 4.1 с начальными данными

$$\{u_N(t), \partial_t u_N(t); \phi_N(t), \partial_t \phi_N(t)\}|_{t=T_*}$$

в момент $t = T_*$, и поэтому можно продолжить решение на больший интервал.

Для завершения доказательства теоремы 4.1 следует воспользоваться оценками (4.20), (4.21) и тем обстоятельством, что множество

$$\{\phi \in H^2(\mathbb{R}_+^3) : \partial_{x_3} \phi|_{x_3=0} = h(x)\}$$

плотно в $H^1(\mathbb{R}_+^3)$ для любого $h(x) \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$.

Для того чтобы выполнить предельный переход при $N \rightarrow \infty$, нам понадобится следующая оценка.

ЛЕММА 4.4. *Предположим, что выполняются условия теоремы 4.1. Тогда для приближенного решения $\{u_N(t), \phi_N(t)\}$ справедлива оценка*

$$\|\partial_t u_N(t) - \partial_t u_N(s)\|_\Omega \leq C_T |t - s|^{1/2-\delta}, \quad t, s \in [0, T], \quad (4.22)$$

для некоторого $\delta < 1/2$, где C_T не зависит от N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \partial_t u_N(t) - \partial_t u_N(s) &= \int_s^t \{-A u_N(\tau) + P_N J([u_N(\tau), v(u_N(\tau)) + \theta] + p_0)\} d\tau \\ &\quad + \nu P_N J r_\Omega(\gamma[\phi_N(t)] - \gamma[\phi_N(s)]) + \nu U \int_s^t P_N J r_\Omega(\partial_{x_1} \gamma[\phi_N(\tau)]) d\tau \end{aligned}$$

для $0 \leq t < T$. Используя свойства операторов A и J , получаем

$$\begin{aligned} &|(\partial_t u_N(t) - \partial_t u_N(s), w)_1| \\ &\leq C_1 \|w\|_2 \int_s^t \{\|u_N(\tau)\|_2 + \|[u_N(\tau), v(u_N(\tau)) + \theta] + p_0\|_{-2}\} d\tau \\ &\quad + C_2 \|w\|_1 \left\{ \|r_\Omega(\gamma[\phi_N(t)] - \gamma[\phi_N(s)])\| + \int_s^t \|r_\Omega(\partial_{x_1} \gamma[\phi_N(\tau)])\| d\tau \right\} \end{aligned}$$

для всех $w \in H_0^2(\Omega)$. Поэтому, опираясь на теорему 3.1 и лемму 2.1, так же, как и в лемме 4.1, находим

$$|(\partial_t u_N(t) - \partial_t u_N(s), w)_1| \leq C |t - s|^{1/2-\delta} \|w\|_2.$$

Используя (2.1), получаем (4.22).

§ 5. Пределный переход

Из (4.6) вытекает, что существуют подпоследовательность $\{N_k\}$ и функция $u(t) \in \mathcal{W}_T$ такие, что

$$\begin{aligned} u_{N_k}(t) &\rightarrow u(t) & \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(O, T; H_0^2(\Omega)), \\ \partial_t u_{N_k}(t) &\rightarrow \partial_t u(t) & \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(O, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Лемма 4.4 и теорема Дубинского позволяют утверждать, что

$$u_{N_k}(t) \rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } L^2(O, T; H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)), \quad (5.1)$$

$$\partial_t u_{N_k}(t) \rightarrow \partial_t u(t) \quad \text{сильно в } L^2(O, T; H_0^{1-\varepsilon}(\Omega)) \quad (5.2)$$

для каждого $0 < \varepsilon < 1$. Ниже для простоты будем полагать, что $N_k \equiv N$. Интерполяция соболевских пространств и оценка (4.6) дают

$$\int_0^T \|\chi_N \partial_{x_1} u_N(\tau) - \partial_{x_1} u(\tau)\|_{1-\varepsilon, \Omega}^2 d\tau \leq C_T^\varepsilon \int_0^T \|\chi_N \partial_{x_1} u_N(\tau) - \partial_{x_1} u(\tau)\|_\Omega^2 d\tau.$$

Таким образом, из (5.1) и (5.2) вытекает существование сильного предела:

$$\partial_t u_N(t) + U \chi_N(x) \partial_{x_1} u_N(t) \rightarrow \partial_t u(t) + U \partial_{x_1} u(t) \quad (5.3)$$

в $L^2(O, T; H_0^{1-\varepsilon}(\Omega))$. Из теоремы 3.1 и замечания 3.1 вытекает, что

$$\sup_{[0, T]} \|\partial_t(\phi_N(t) - \phi(t))\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \sup_{[0, T]} \|\nabla(\phi_N(t) - \phi(t))\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

где $\phi(t)$ – решение задачи (5)–(8).

Пусть $w(t) \in P_M \mathcal{W}_T$ с $M \leq N$ и $w(T) = 0$. Умножая (4.4) на $\partial_t w(t)$ скалярно в $H_0^1(\Omega)$ и интегрируя по t , получаем, что

$$\begin{aligned} & - \int_0^T ((1 - \alpha \Delta) \partial_t u_N(t), \partial_t w(t))_\Omega dt \\ & + \int_0^T (\Delta u_N(t), \Delta w(t))_\Omega dt - \int_0^T ([u_N(t), v(u_N(t)) + \theta] + p_0, w(t))_\Omega dt \\ & = ((1 - \alpha \Delta) \partial_t u_N(0) - \nu \gamma [\phi_0], w(0))_\Omega \\ & - \nu \int_0^T (\gamma [\phi_N(t)], \partial_t w(t) + U \partial_{x_1} w(t))_\Omega dt \end{aligned}$$

для любых $w \in P_M \mathcal{W}_T$ таких, что $w(T) = 0$. Лемма 2.2 и свойства сходимости последовательностей u_N и ϕ_N позволяют выполнить предельный переход при $N \rightarrow \infty$ и доказать (2.2) для рассматриваемых функций $w(t)$. Устремляя $M \rightarrow \infty$, получаем существование слабых решений.

Докажем единственность этих решений. Предположим, что $\{u_j, \phi_j\}$, $j = 1, 2$, – два слабых решения задачи (1)–(3), (5)–(8). Тогда $\phi(x, t) = \phi_1(x, t) - \phi_2(x, t)$ удовлетворяет уравнениям (3.1)–(3.3) с $\phi_0(x) = \phi_1(x) = 0$ и

$$h(x, t) = \begin{cases} (\partial_t + U \partial_{x_1})u(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases} \quad (5.5)$$

где $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Так как $h(x, t) \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$, то теорема 3.3 дает

$$r_\Omega(\partial_t + U \partial_{x_1})\gamma[\phi] \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.6)$$

Таким образом, функцию $u(x, t)$ можно рассматривать как слабое решение задачи (1)–(3) с заданной поперечной нагрузкой $p(x, t)$, лежащей в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Стандартные рассуждения (см. [1], [2]) вместе с теоремой 3.3 и оценкой (3.28) дают $u(x, t) \equiv 0$, и поэтому $\phi(x, t) \equiv 0$.

Из свойств слабой сходимости и леммы 4.3 вытекает непрерывная зависимость слабых решений от начальных условий:

$$\begin{aligned} & \|\partial_t(u_1(t) - u_2(t))\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta(u_1(t) - u_2(t))\|_\Omega^2 \\ & \leq C_T \left\{ \|u_{1,1} - u_{1,2}\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta(u_{0,1}(0) - u_{0,2})\|_\Omega^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\phi_{1,1} - \phi_{1,2}\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla(\phi_{0,1} - \phi_{0,2})\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} & \|\partial_t(\phi_1(t) - \phi_2(t))\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla(\phi_1(t) - \phi_2(t))\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \\ & \leq C_T \left\{ \|u_{1,1} - u_{1,2}\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta(u_{0,1}(0) - u_{0,2})\|_\Omega^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\phi_{1,1} - \phi_{1,2}\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 + \|\nabla(\phi_{0,1} - \phi_{0,2})\|_{\mathbb{R}_+^3}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\{u_j(t), \phi_j(t)\}$ – решение с начальными условиями $\{u_{0,j}, u_{1,j}; \phi_{0,j}, \phi_{1,j}\}$, $j = 1, 2$. Ясно также, что решение $\{u(t), \phi(t)\}$ обладает свойствами (2.4) и (2.5) при условии, что

$$\phi_1 \in H^1(\mathbb{R}_+^3), \quad \phi_0(x) = p[h](x) + \psi(x), \quad (5.9)$$

где

$$h(x) = \begin{cases} u_1 + U \partial_{x_1} u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

$$\psi(x) \in V = \{\phi \in H^2(\mathbb{R}_+^3) : \partial_{x_3}\phi|_{x_3=0} = 0\}.$$

Поэтому из (5.7) и (5.8) вытекают свойства (2.4) и (2.5) для любого слабого решения.

Докажем равенства (2.6) и (2.7). Рассмотрим сначала случай, когда выполняется условие (5.9). В этом случае теоремы 3.1 и 3.3 дают условие (5.6). Поэтому можно воспользоваться энергетическим равенством для задачи (1)–(3) с заданной функцией $p(x, t)$ (см. [1], [2]). В результате получим

$$\begin{aligned} & E_{\text{pl}}(u(t), \partial_t u(t)) - E_{\text{pl}}(u(0), \partial_t u(0)) \\ & = \nu \int_0^t \int_\Omega \partial_t u(x, t) (\partial_t + U \partial_{x_1})\gamma[\phi(x, \tau)] \, dx \, d\tau. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Так как $\phi(x, t) - \phi_N(x, t)$ – решение задачи (3.1)–(3.3) с нулевыми начальными условиями, то из (3.23) и (5.3) вытекает

$$\int_0^T \|(\partial_t + U \partial_{x_1})\gamma[\phi(t) - \phi_N(t)]\|_{-1+\varepsilon, \Omega}^2 \, dt \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (5.2) заключаем, что при $N \rightarrow \infty$ правая часть равенства (4.18) стремится к правой части соотношения (5.10). Следовательно,

$$E_{\text{pl}}(u(t), \partial_t u(t)) = \lim_{N \rightarrow \infty} E_{\text{pl}}(u_N(t), \partial_t u_N(t)). \quad (5.11)$$

Поэтому в случае, когда выполняется (5.9), соотношения (2.6) и (2.7) вытекают из (4.7), (4.8), (5.11) и (5.1)–(5.4). Используя теперь (5.7) и (5.8), получаем (2.6) и (2.7) в общем случае.

Докажем теперь теорему 2.2. Пусть $\phi(x, t) = \phi^*(x, t) + \phi^{**}(x, t)$, где $\phi^*(x, t)$ – решение задачи (6)–(8) с $\phi_0 = \phi_1 = 0$, а $\phi^{**}(x, t)$ – решение задачи (3.1)–(3.3) с $h \equiv 0$. Если ϕ_0 и ϕ_1 удовлетворяют условиям теоремы 2.2, то из (3.31) вытекает $\gamma[\phi^{**}] = 0$ в окрестности $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Поэтому

$$r_\Omega(\partial_t + U \partial_{x_1})\gamma[\phi^{**}] = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_R \quad (5.12)$$

для некоторого $t_R > 0$. Рассмотрим величину $r_\Omega(\partial_t + U \partial_{x_1})\gamma[\phi^*]$. Применяя для преобразования $\partial_t u$ формулу, аналогичную (3.26), и используя (3.23), получаем

$$r_\Omega(\partial_t + U \partial_{x_1})\gamma[\phi^*] = -(\partial_t + U \partial_{x_1})u(x, t) - q_0(u_0; x, t) - q(u; x, t) \quad (5.13)$$

с

$$q_0(u_0; x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta [M_\theta \hat{u}_0](x_1 - (U + \sin \theta)t, x_2 - t \cos \theta), \quad (5.14)$$

$$q(u; x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_0^{2\pi} d\theta [M_\theta^2 \hat{u}](x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta, t - s), \quad (5.15)$$

где $\hat{v}$ – продолжение функции $v(x)$ нулем вне Ω и

$$M_\theta = \sin \theta \partial_{x_1} + \cos \theta \partial_{x_2}.$$

Так как $(x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta) \notin \Omega$ при условии, что $s \geq t_*$, где t_* задается формулой (2.16), то для $t \geq t_*$ имеем

$$r_\Omega(\partial_t + U \partial_{x_1})\gamma[\phi^*] = -(\partial_t + U \partial_{x_1})u(x, t) - q(u; x, t), \quad (5.16)$$

$$q(u; x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_*} ds \int_0^{2\pi} d\theta [M_\theta^2 \hat{u}](x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta, t - s). \quad (5.17)$$

Теперь из (5.12), (5.16) и (5.17) вытекают равенства (2.14) и (2.15). Таким образом, теорема 2.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Предположим, что $U > 1$. Так как подынтегральное выражение в (5.15) равно нулю при $s \geq t_*$, то

$$q(u; x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ds \int_0^{2\pi} d\theta [M_\theta^2 \hat{u}](x_1 - (U + \sin \theta)s, x_2 - s \cos \theta, t - s)$$

при $t \geq t_*$. Если сделать замену переменных $s \rightarrow \xi = x_1 - (U + \sin \theta)s$ и ввести новый угол θ^* формулами

$$\frac{\cos \theta}{U + \sin \theta} = \frac{1}{k} \cos \theta^*, \quad \frac{1}{U + \sin \theta} = \frac{1}{k^2} (U - \sin \theta^*),$$

где $k^2 = U^2 - 1$, то легко обнаружить, что

$$q(u; x, t) = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{x_1} d\xi \int_0^{2\pi} d\theta [L_\theta^2 \hat{u}](\xi, x_2 - \kappa_1(\xi, x_1, \theta), t - \kappa_2(\xi, x_1, \theta)), \quad (5.18)$$

где дифференциальный оператор L_θ задается формулой

$$L_\theta = \frac{U \sin \theta - 1}{U - \sin \theta} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{k \cos \theta}{U - \sin \theta} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

и

$$\kappa_1(\xi, x_1, \theta) = \frac{x_1 - \xi}{k} \cos \theta, \quad \kappa_2(\xi, x_1, \theta) = \frac{x_1 - \xi}{k^2} (U - \sin \theta).$$

Это представление для q вместе с формулой (2.14) для аэродинамического давления использовалось ранее при изучении асимптотического поведения решений в некоторых моделях пластин и оболочек (см. [12], а также [11], [13]). Вывод (5.18) в [12] опирается на некоторые эвристические наблюдения, сделанные в [14]. Теорема 2.2, таким образом, дает строгое обоснование формул для аэродинамического давления (2.14), (5.18) и позволяет воспользоваться результатами из [12] для описания асимптотического поведения решений задачи (2.17), (2), (2.18), (5)–(8) (см., например, приведенную выше теорему 2.3). Кроме того, следует отметить, что с механической точки зрения теорема 2.2 о сведении задачи (1)–(3), (5)–(8) о нелинейных колебаниях пластины в потенциальном потоке газа к запаздывающему уравнению в частных производных позволяет предложить эффективный метод учета аэродинамических сил и существенно упростить изучение проблемы устойчивости реальных пластинчатых конструкций в потоке газа.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В работах прикладного характера (см., например, [6], [7] и приведенные там ссылки) очень часто для учета взаимодействия потока газа с пластиной при больших сверхзвуковых скоростях ($U \gg 1$) используется так называемый закон протекания сечений (см. [19], а также [6]), приводящий к формуле для аэродинамического давления вида

$$p^*(x, t) = p_0(x) - \nu (\partial_t u(x, t) + U \partial_{x_1} u(x, t)). \quad (5.19)$$

С другой стороны, при $U > 1$ из (5.18) вытекает (см. [12])

$$\|q(u, t)\|_\Omega^2 \leq \frac{c_0}{U} \int_{t-c_1/U}^t \|\Delta u(\tau)\|_\Omega^2 d\tau,$$

где константы c_0 и c_1 зависят лишь от размеров области Ω . Таким образом, формула (2.14) для аэродинамического давления в пределе больших U хорошо согласуется с результатом (5.19), даваемым полуэмпирическим законом плоских сечений. При этом возникает вопрос об асимптотической близости решений задачи (1)–(3) с

$p(x, t) = p^*(x, t)$ и задачи (1)–(3), (5)–(8) в исходной постановке. Положительный ответ на него давал бы дополнительные аргументы в пользу применимости закона плоских сечений при изучении нелинейной динамики аэроупругих систем.

Эта работа была выполнена во время визита второго из авторов в Институт математики (UMR 9994 CNRS) университетов Париж VI и VII. Он выражает глубокую признательность сотрудникам института за их гостеприимство и Национальному центру научных исследований Франции за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
2. Lions J.-L. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires. Paris: Dunod, 1969.
3. Чуешов И. Д. Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек // Матем. сб. 1987. Т. 133. С. 419–428.
4. Чуешов И. Д. Структура максимального аттрактора модифицированной системы уравнений Кармана // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1987. Вып. 47. С. 99–104.
5. Lasiecka I. Finite-dimensionality of attractors associated with von Karman plate equations and boundary damping // J. Diff. Eqs. 1995. V. 117. P. 357–389.
6. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
7. Dowell E. H. Aeroelasticity of Plates and Shells. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1975.
8. Чуешов И. Д. Построение решений в задаче о колебаниях оболочки в потенциальном дозвуковом потоке // Теория операторов, субгармонические функции. Киев: Наук. думка, 1991. С. 147–154.
9. Miyatake S. A sharp form of the existence theorem for hyperbolic mixed problems of second order // J. Math. Kyoto Univ. 1977. V. 17. P. 199–223.
10. Чуешов И. Д. Сильные решения и аттрактор системы уравнений Кармана // Матем. сб. 1990. Т. 181. С. 25–36.
11. Boutet de Monvel L., Chueshov I. D., Rezounenko A. V. Long-time behaviour of strong solutions of retarded nonlinear P.D.E.s. // Commun. in Partial Diff. Eds. 1997. V. 22. P. 1453–1474.
12. Чуешов И. Д. Об одной системе уравнений с запаздыванием, возникающей в аэроупругости // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1990. Вып. 54. С. 123–130.
13. Chueshov I. D., Rezounenko A. V. Global attractors for a class of retarded quasilinear partial differential equations // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1995. V. 321. P. 607–612.
14. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М.: Наука, 1978.
15. Boutet de Monvel L., Chueshov I. D. Non-linear oscillations of a plate in a flow of gas // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1996. V. 322. P. 1001–1006.
16. Чуешов И. Д. Квазистатический вариант системы уравнений Кармана // Матем. физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1. С. 149–167.
17. Bergh J., Löfström J. Interpolation Spaces: an Introduction. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer, 1976.
18. Lions J.-L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. V. 1. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer, 1972.
19. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикл. матем. и мех. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733–755.

Университет Париж-VI, Франция
Харьковский университет, Украина

Поступило в редакцию
12.III.1997