Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Сазонов, C^* -алгебры бисингулярных операторов с разрывными коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 2, 167–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:00:11

УДК 517.9

Л. И. Сазонов

C^* -алгебры бисингулярных операторов с разрывными коэффициентами

Ниже исследуется фредгольмовость в C^* -алгебре бисингулярных операторов с коэффициентами, имеющими разрывы вдоль гладких кривых. Исследование основано на применении некоторой модификации локального принципа Гохберга–Крупника и изучении некоторых канонических алгебр сингулярных и бисингулярных операторов. Для рассматриваемых операторов приведен алгоритм вычисления индекса.

Библиография: 26 наименований.

Условия фредгольмовости бисингулярных операторов были исследованы для непрерывных коэффициентов в [1]–[6], для коэффициентов, кусочно непрерывных по каждой переменной, в [7]–[10]. Предположения о классах коэффициентов оказались весьма существенными для методов, развиваемых в этих работах. Поэтому в случае разрывных коэффициентов более общего вида, например с разрывами вдоль кривых, требуется новый подход. Этот подход был предложен в [11], [12] как некоторая модификация локального принципа Гохберга–Крупника и применялся к характеристическим бисингулярным операторам с измеримыми коэффициентами. В данной работе он применяется к C^* -алгебрам бисингулярных операторов с коэффициентами, разрывными вдоль кривых, и позволяет получить критерий фредгольмовости для этих алгебр. Доказательство этих результатов составляет содержание § 3. Предварительно в § 2 исследуются некоторые канонические алгебры операторов, к которым принадлежат локальные представители общих операторов. В § 4 рассмотрен вопрос о вычислении индекса.

§ 1. Предварительные сведения

1. Ниже при использовании терминологии и некоторых результатов теории C^* -алгебр мы следуем [13]. Отметим важные для дальнейшего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [13, с. 20, 30]. Пусть $\mathcal{B}$ – C^* -подалгебра C^* -алгебры $\mathcal{A}$ с общей единицей.

1. Элемент $b \in \mathcal{B}$ обратим в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда он обратим в $\mathcal{B}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96–01–01195).

2. Пусть $\mathcal{I}$ – замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{A}$. Тогда множество $\mathcal{B} + \mathcal{I}$ является C^* -подалгеброй в $\mathcal{A}$, причем имеет место изоморфизм C^* -алгебр

$$\frac{\mathcal{B} + \mathcal{I}}{\mathcal{I}} \simeq \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B} \cap \mathcal{I}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [13, с. 29]. Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ – C^* -алгебры, ϕ – морфизм $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$, $\mathcal{I}$ – ядро ϕ и

$$\mathcal{B} \rightarrow \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{I}} \xrightarrow{\psi} \phi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

– каноническое разложение морфизма ϕ . Тогда $\phi(\mathcal{B})$ – C^* -подалгебра в $\mathcal{A}$ и ψ – изоморфизм C^* -алгебр.

Пусть $\text{End } H$ – C^* -алгебра всех линейных ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H , $\mathcal{K}$ – ее замкнутый двусторонний идеал всех компактных операторов.

Оператор A из $\text{End } H$ называется *фредгольмовым*, если его образ $\text{Im } A$ – замкнутое подпространство в H , подпространства $\text{Ker } A$ и $\text{Ker } A^*$, где A^* – сопряженный оператор, конечномерны. Число $\text{ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } A^*$ называется *индексом оператора* A .

Фредгольмовость оператора A эквивалентна обратимости факторкласса $[A]$ в факторалгебре $\text{End } H/\mathcal{K}$. Последнее в свою очередь равносильно существованию у оператора A правого и левого регуляризаторов по идеалу $\mathcal{K}$, т.е. таких операторов R_1 и R_2 из $\text{End } H$, что

$$AR_1 = I + K_1, \quad R_2A = I + K_2, \quad K_i \in \mathcal{K}.$$

2. Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная ось, $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ – ее одноточечная и $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – ее двухточечная компактификации, $\mathbb{R}^2 = R_x \times R_y$ – двумерная плоскость переменных x и y , $L_2(\mathbb{R})$, $L_2(\mathbb{R}^2)$ – лебеговы пространства функций, интегрируемых с квадратом. (После продолжения меры Лебега на $\{\infty\}$ условием $\text{mes}\{\infty\} = 0$ пространства $L_2(\dot{\mathbb{R}})$ и $L_2(\mathbb{R})$ естественным образом отождествляются. Необходимость такого продолжения связана с тем, что теория операторов локального типа строится в алгебрах $\text{End } L_p(X)$, где X – компактное пространство с мерой. Напомним, что оператор $A: L_p(X) \rightarrow L_p(X)$ называется *оператором локального типа*, если он коммутирует со всеми операторами умножения на непрерывные на X функции с точностью до компактного оператора. Это определение отличается от первоначального определения из [14], но эквивалентно ему [15].)

В C^* -алгебрах $\text{End } L_2(\mathbb{R})$, $\text{End } L_2(\mathbb{R}^2)$ введем следующие C^* -подалгебры и замкнутые двусторонние идеалы: алгебру $\Lambda \subset \text{End } L_2(\mathbb{R})$ операторов локального типа с идеалом $\mathcal{K}$ всех компактных операторов (см. [14], [15]) и алгебру $\mathcal{L} \subset \text{End } L_2(\mathbb{R}^2)$ операторов билокального типа с идеалами $\mathcal{K}^i$ ($i = 0, 1, 2$) (см. [4], [5]), определяемыми как замыкания в $\text{End } L_2(\mathbb{R}^2)$ алгебраических тензорных произведений

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \Lambda \otimes \Lambda, & \mathcal{K}^0 &= \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}, \\ \mathcal{K}^1 &= \mathcal{K} \otimes \Lambda, & \mathcal{K}^2 &= \Lambda \otimes \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Известно [5], что $\mathcal{K}^0$ является идеалом всех компактных операторов в $\text{End } L_2(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{K}^{12} = \mathcal{K}^1 + \mathcal{K}^2$ – замкнутый двусторонний идеал в алгебре $\mathcal{L}$ и имеет место инъективный морфизм

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{K}^0} \rightarrow \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{K}^1} \oplus \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{K}^2}.$$

Введем новый объект – C^* -подалгебру $\tilde{\mathcal{L}} \subset \text{End } L_2(\mathbb{R}^2)$ – как наибольшую подалгебру, в которой множества $\mathcal{K}^i$ ($i = 1, 2$) являются двусторонними идеалами. Алгебру $\tilde{\mathcal{L}}$ будем называть *алгеброй операторов ослабленного биллокального типа*.

Имеет место следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 [12]. Пусть Φ – множество всех функций из $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ таких, что отображения $x \rightarrow a(x, \cdot)I$ и $y \rightarrow a(\cdot, y)I$ являются сильно кусочно непрерывными отображениями из $\mathbb{R}$ в $\text{End } L_2(\mathbb{R})$. Тогда при $a \in \Phi$ оператор aI принадлежит алгебре $\tilde{\mathcal{L}}$.

Отметим, что класс Φ содержит функции, не принадлежащие замыканию в $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ алгебраического тензорного произведения $L_\infty(\mathbb{R}) \otimes L_\infty(\mathbb{R})$. Простой пример представляет характеристическая функция χ_Π полуплоскости $\Pi = \{(x, y); x > y\}$. Более общий пример – функция вида $a(x + y)$, где a принадлежит $L_\infty(\mathbb{R})$ и равна нулю вне ограниченного множества из $\mathbb{R}$. Заметим, что в последнем примере функцию $x + y$ можно заменить на непрерывную функцию $g(x, y)$, удовлетворяющую определенным условиям [12].

Перейдем к формулировке модификации локального принципа Гохберга–Крупника для алгебры $\tilde{\mathcal{L}}$. Введем покрывающие системы локализующих классов $\{M_\tau^i\}$, где $i = 1, 2, 12$; $\tau \in T^i$, $T^1 = \dot{\mathbb{R}}_x$, $T^2 = \dot{\mathbb{R}}_y$, $T^{12} = \dot{\mathbb{R}}_x \times \dot{\mathbb{R}}_y$. Элементами M_τ^i являются операторы умножения на непрерывные на T^i функции, удовлетворяющие условиям: $0 \leq a \leq 1$, a равна единице в некоторой окрестности точки τ (при этом считаем, что $C(\dot{\mathbb{R}}_x)$ и $C(\dot{\mathbb{R}}_y)$ естественно вложены в $C(\dot{\mathbb{R}}_x \times \dot{\mathbb{R}}_y)$).

Пусть $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ – система конечномерных ортопроекторов из $\text{End } L_2(\mathbb{R})$, сильно сходящихся к единичному оператору,

$$P_n^1 = P_n \otimes I, \quad P_n^2 = I \otimes P_n.$$

Будем говорить, что операторы A и B из алгебры $\tilde{\mathcal{L}}$ *i-сильно эквивалентны в точке* $\tau \in T^i$ и обозначать это $A \stackrel{\tau, s, i}{\sim} B$ ($i = 1, 2$), если для любого n и $j \neq i$ ($i, j = 1, 2$)

$$\inf_{a \in M_\tau^i} \|(A - B)aP_n^j\| = \inf_{a \in M_\tau^i} \|aP_n^j(A - B)\| = 0.$$

Множества $\mathcal{J}_\tau^i = \{A \in \tilde{\mathcal{L}}; A \stackrel{\tau, s, i}{\sim} 0\}$ являются замкнутыми двусторонними идеалами в алгебре $\tilde{\mathcal{L}}$.

ТЕОРЕМА 1.1 (сильный локальный принцип [12]). Факторкласс $[A]_0$ оператора A из алгебры $\tilde{\mathcal{L}}$ обратим в факторалгебре $\tilde{\mathcal{L}}/\mathcal{K}^0$ тогда и только тогда, когда:

1) для любого $\tau \in T^i$ ($i = 1, 2$) факторкласс $[A]_{i, \tau}$ оператора A обратим в факторалгебре $\tilde{\mathcal{L}}/\mathcal{J}_\tau^i$;

2) факторкласс $[A]_{12}$ оператора A обратим в факторалгебре $\tilde{\mathcal{L}}/\mathcal{K}^{12}$.

Заметим, что условие 1) можно сформулировать в терминах самого оператора A . Именно, будем говорить, что оператор A *i -сильно обратим в точке $\tau \in T^i$* , если существуют операторы B и C из $\tilde{\mathcal{L}}$ такие, что

$$BA \stackrel{\tau, s, i}{\sim} I, \quad AC \stackrel{\tau, s, i}{\sim} I.$$

Тогда условие 1) теоремы 1.1 эквивалентно тому, что для каждого $\tau \in T^i$ ($i = 1, 2$) оператор A *i -сильно обратим в точке τ* .

В действительности в дальнейшем достаточно ограничиться C^* -подалгеброй $\tilde{\mathcal{L}}^0$ в алгебре $\tilde{\mathcal{L}}$, которая состоит из всех операторов из $\tilde{\mathcal{L}}$, коммутирующих с операторами умножения на функции из $C(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$ с точностью до слагаемого из идеала $\mathcal{K}^{12}$. Как будет показано ниже, именно этой алгебре принадлежат исследуемые бисингулярные операторы. Кроме того, и это важно для дальнейшего, для исследования обратимости операторов из алгебры $\tilde{\mathcal{L}}^0$ по идеалу $\mathcal{K}^{12}$ (12-обратимости) можно применять локальный принцип Гохберга–Крупника [16, с. 353–356].

3. Ниже будет использован один результат об огибающем операторе. Пусть $\{A_\tau\}$, $\tau \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$, – семейство операторов из алгебры $\tilde{\mathcal{L}}^0$. Оператор A из $\tilde{\mathcal{L}}^0$ будем называть *12-огибающим* (огибающим по идеалу $\mathcal{K}^{12}$) семейства $\{A_\tau\}$, если для каждого $\tau \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$ выполняется соотношение $A \stackrel{\tau, 12}{\sim} A_\tau$. Последнее означает, что операторы A и A_τ локально 12-эквивалентны в точке τ , т.е.

$$\inf_{a \in M_\tau^{12}} \|(A - A_\tau)a\|_{12} = 0,$$

где $\|\cdot\|_{12}$ – факторнорма по идеалу $\mathcal{K}^{12}$:

$$\|A\|_{12} = \inf_{K \in \mathcal{K}^{12}} \|A + K\|.$$

Семейство операторов $\{A_\tau\}$, $\tau \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$, будем называть *12-локально полунепрерывным* (локально полунепрерывным по идеалу $\mathcal{K}^{12}$), если для любой точки τ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $u \ni \tau$, что для каждой точки $\theta \in u$ выполняется неравенство

$$\inf_{a \in M_\theta^{12}} \|(A_\tau - A_\theta)a\|_{12} < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 1.2 (ср. с [14]). *Семейство операторов $\{A_\tau\}$, $\tau \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$, где $A_\tau \in \tilde{\mathcal{L}}^0$, имеет 12-огибающую тогда и только тогда, когда оно 12-локально полунепрерывно. При этом 12-огибающий оператор A определяется однозначно с точностью до слагаемого из идеала $\mathcal{K}^{12}$ и имеет место оценка*

$$\|A\|_{12} \leq 3 \sup_{\tau} \|A_\tau\|_{12}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если $\mathcal{M}$ – C^* -подалгебра в $\tilde{\mathcal{L}}^0$, содержащая элементы всех локализуемых классов M_τ^{12} , то огибающий оператор может быть выбран из $\mathcal{M}$, если для каждого τ $A_\tau \in \mathcal{M}$.

§ 2. Некоторые канонические C^* -алгебры сингулярных и бисингулярных операторов

1. Исследованию указанных алгебр предположим один результат об операторах умножения на сильно непрерывные оператор-функции (в дальнейшем о.-ф.).

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ – о.-ф. на $\mathbb{R}$ со значениями в $\text{End } H$, A – оператор, определяемый формулой

$$A\{\xi(t)\} = \{A(t)\xi(t)\} \in L_2(\mathbb{R}, H). \quad (2.1)$$

Если $\{A(t)\}$ – измеримая о.-ф., то, как известно (см., например, [17, с. 410]), оператор вида (2.1) ограничен в $L_2(\mathbb{R}, H)$ тогда и только тогда, когда $\|A(t)\|$ – существенно ограниченная функция, причем

$$\|A\| = \text{ess sup} \|A(t)\|.$$

Пусть теперь $\{A(t)\}$ – сильно непрерывная о.-ф.; тогда она измерима и ввиду теоремы Банаха–Штейнгауза и предыдущего результата оператор A вида (2.1) ограничен тогда и только тогда, когда $\sup \|A(t)\| < \infty$, причем $\|A\| = \sup \|A(t)\|$.

Ниже используется следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\{A(t)\}, \{A^*(t)\}$ – сильно непрерывные о.-ф. (здесь * означает переход к сопряженному оператору). Тогда оператор A вида (2.1) имеет ограниченный обратный оператор тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1) для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $A(t)$ имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t)$;
- 2) $\sup \|A^{-1}(t)\| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оператор A вида (2.1) имеет ограниченный обратный оператор A^{-1} , то (см. [17, с. 411]) оператор A^{-1} , будучи перестановочным со всеми операторами вида $\{\beta(t)I\}$, где $\beta \in L_\infty(\mathbb{R})$, является оператором умножения на измеримую существенно ограниченную о.-ф., которую обозначим через $\{B(t)\}$. Таким образом, для почти всех t оператор $A(t)$ имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t) = B(t)$ и $\text{ess sup} \|A^{-1}(t)\| < \infty$. Остается показать, что последние условия выполняются для всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть t_0 – произвольная точка из $\mathbb{R}$ и $t_n \rightarrow t_0$ – такая последовательность, что $\sup \|A^{-1}(t_n)\| < \infty$. Так как операторы $A(t_n)$ и $A^*(t_n)$ сильно сходятся соответственно к операторам $A(t_0)$ и $A^*(t_0)$, то [18, с. 111] оператор $A(t_0)$ имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t_0)$ и

$$\|A^{-1}(t_0)\| \leq \text{ess sup} \|A^{-1}(t)\|.$$

Обратно, при выполнении условий 1) и 2) о.-ф. $\{A^{-1}(t)\}$ сильно непрерывна и оператор $A^{-1}\{\xi(t)\} = \{A^{-1}(t)\xi(t)\}$ является обратным к оператору A вида (2.1).

2. В этом пункте исследуются C^* -алгебры одномерных сингулярных операторов с кусочно постоянными коэффициентами. Для конечного множества $M \subset \mathbb{R}$ (возможно, пустого) обозначим через σ_M C^* -подалгебру алгебры $\text{End } L_2(\mathbb{R})$, порожденную оператором сингулярного интегрирования

$$(Sf)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x} dt$$

и операторами умножения на кусочно постоянные функции, имеющие разрывы только в точках из M . Очевидно, что $\sigma_{\emptyset}$ – алгебра сингулярных операторов с постоянными коэффициентами; для одноточечного множества $\sigma_{\{t\}} = \sigma_{\emptyset}$; если $M \subset N$, то $\sigma_M \subset \sigma_N$.

Особый интерес представляют алгебры σ_M для двухточечных множеств. Известно [15], что $\sigma_{\{0,\infty\}}$ изоморфна C^* -алгебре Σ всех непрерывных матриц-функций $(a_{ij}(\xi))_{i,j=1}^2$ на $\overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющих условиям $a_{12}(\pm\infty) = a_{21}(\pm\infty) = 0$, причем существует единственный изоморфизм $\mu: \sigma_{\{0,\infty\}} \rightarrow \Sigma$ такой, что

$$\mu(\text{sgn } x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mu S)(\xi) = \begin{pmatrix} \text{th } \pi\xi & -i/\text{ch } \pi\xi \\ i/\text{ch } \pi\xi & -\text{th } \pi\xi \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

В частности, оператор A из $\sigma_{\{0,\infty\}}$ обратим в $\sigma_{\{0,\infty\}}$ (а также и в $\text{End } L_2(\mathbb{R})$) тогда и только тогда, когда $(\mu A)(\xi)$ является обратимой матрицей для любой точки $\xi \in \mathbb{R}$.

Отметим, что согласно результатам А. С. Дынина (см. [16, с. 309–312]) этот изоморфизм реализуется как пространственный изоморфизм

$$A \rightarrow MW\nu A\nu^{-1}W^{-1}M^{-1} \quad (2.3)$$

алгебры $\sigma_{\{0,\infty\}}$ и алгебры Σ , реализованной в виде алгебры операторов умножения на матрицы-функции из Σ в пространстве $L_2(\mathbb{R}) \oplus L_2(\mathbb{R})$, где оператор $\nu: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+) \oplus L_2(\mathbb{R}_+)$ ($\mathbb{R}_+$ – положительная вещественная полуось) определяется формулой

$$(\nu f)(x) = (f(-x), f(x)), \quad x > 0, \quad (2.4)$$

$W: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+, t^{-1})$ – изоморфизм, имеющий вид $(Wf)(t) = t^{1/2}f(t)$, $M: L_2(\mathbb{R}_+, t^{-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ – унитарный оператор преобразования Меллина

$$(Mf)(\xi) = \int_0^\infty f(t)t^{-i\xi} \frac{dt}{t}. \quad (2.5)$$

Аналогично предыдущему можно определить изоморфизм $\mu: \sigma_M \rightarrow \Sigma$ для любого двухточечного множества $M = \{a, b\}$.

ЛЕММА 2.1. *Все алгебры σ_M для двухточечных множеств M изометрически изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что оператор S инвариантен относительно сдвигов и растяжений, т.е. $T_\xi S = ST_\xi$, $\tau_\alpha S = S\tau_\alpha$, $\alpha > 0$, где операторы сдвига T_ξ и растяжения τ_α определяются формулами

$$(T_\xi f)(x) = f(x + \xi), \quad (\tau_\alpha f)(x) = \alpha^{1/2} f(\alpha x). \quad (2.6)$$

Далее, легко проверяется, что операторы

$$(B_a f)(x) = \frac{\sqrt{2a}}{x+a} f\left(\frac{x-a}{x+a}\right), \quad a > 0,$$

$$(B_a^{-1} f)(x) = \frac{\sqrt{2a}}{1-x} f\left(-a \frac{x+1}{x-1}\right)$$

являются унитарными в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, причем $B_a S = S B_a$, $B_a \chi_{[0,1]} I = \chi_{[a,\infty]} B_a$. Здесь, как обычно, $\chi_{[a,b]}$ – характеристическая функция отрезка $[a,b]$. Поэтому отображения $A \rightarrow T_{-\xi} A T_\xi$, $A \rightarrow B_a A B_a^{-1}$, $A \rightarrow \tau_\alpha^{-1} A \tau_\alpha$ устанавливают соответственно изоморфизмы $\sigma_M \overset{*}{\sim} \sigma_{M+\xi}$, $\sigma_{\{0,1\}} \overset{*}{\sim} \sigma_{\{a,\infty\}}$, $\sigma_M \overset{*}{\sim} \sigma_{\alpha M}$. Комбинируя данные отображения, устанавливаем изоморфизм алгебр $\sigma_{\{a,b\}}$ и $\sigma_{\{0,\infty\}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из леммы 2.1 следует, что для каждой алгебры $\sigma_{\{a,b\}}$ ($a < b$) определен изоморфизм $\mu: \sigma_{\{a,b\}} \rightarrow \Sigma$, для которого

$$\mu \xi_{[a,b]} I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а $(\mu S)(\xi)$ определен формулой (2.2).

Вернемся к алгебрам σ_M , где M – конечное множество. Операторы из этих алгебр являются операторами локального типа (определение см. в §1, п.2). Напомним, что *локальным представителем оператора A в точке $t \in \mathbb{R}$* называется оператор A_t такой, что выполняется соотношение локальной эквивалентности $A \overset{t}{\sim} A_t$, т.е. выполняется равенство

$$\inf_{a \in M_t} \|a(A - A_t)\| = 0,$$

где $\inf$ берется по всем элементам из локализирующего класса M_t , состоящего из тех функций алгебры $C(\mathbb{R})$, каждая из которых равна единице в некоторой окрестности точки t . Отношение локальной эквивалентности сохраняется при алгебраических операциях и предельном переходе.

Отметим следующие используемые в дальнейшем *свойства локальных представителей* операторов из алгебр σ_M :

– если $A \in \sigma_M$ и $t \in \mathbb{R} \setminus M$, то существует его единственный локальный представитель A_t из $\sigma_\emptyset$ в точке t ($A \overset{t}{\sim} A_t$), причем если $\tau \in \mathbb{R} \setminus M$, $A \overset{\tau}{\sim} A_\tau \in \sigma_\emptyset$, t и τ принадлежат одной компоненте связности множества $\mathbb{R} \setminus M$, то $A_t = A_\tau$;

– если $A \in \sigma_{\{t_1, t_2\}}$ ($t_1 \neq \infty$, $t_1 < t_2$), $A_t \in \sigma_{\mathcal{O}}$ – его локальный представитель в точке t ($\neq t_1, t_2$) и $(\mu A)(\xi)$ – отвечающая оператору A матрица-функция, то при $t \in \mathbb{R} \setminus [t_1, t_2]$

$$A_t = (\mu A)_{11}(+\infty)P_+ + (\mu A)_{11}(-\infty)P_-, \quad (2.7)$$

при $t \in (t_1, t_2)$

$$A_t = (\mu A)_{22}(-\infty)P_+ + (\mu A)_{22}(+\infty)P_-, \quad (2.8)$$

где $P_{\pm} = (I \pm S)/2$;

– если $A \in \sigma_M$, $t \in M$, то в любой алгебре $\sigma_{\{t, \tau\}}$ ($t \neq \tau$) существует единственный оператор A_t такой, что $A \stackrel{t}{\sim} A_t$, причем если точка s ($\neq t$) принадлежит достаточно малой окрестности точки t и $A \stackrel{s}{\sim} A_s \in \sigma_{\mathcal{O}}$, $A_t \stackrel{s}{\sim} (A_t)_s \in \sigma_{\mathcal{O}}$, то $A_s = (A_t)_s$;

– оператор $A \in \sigma_M$ является компактным тогда и только тогда, когда для каждой точки $t \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение $A \stackrel{t}{\sim} 0$.

Ниже будет использован следующий *критерий фредгольмовости операторов* из σ_M [15], который мы приведем в удобной для дальнейшего применения формулировке: оператор $A \in \sigma_M$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда для каждой точки $t \in \mathbb{R}$ его локальный представитель A_t , принадлежащий $\sigma_{\mathcal{O}}$, если $t \in \mathbb{R} \setminus M$, или принадлежащий $\sigma_{\{t, \tau\}}$ (при любом $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{t\}$), если $t \in M$, обратим.

В дальнейшем существенную роль играют алгебры σ_M с трехточечными множествами M . Обозначим через $S_1C(\overline{\mathbb{R}})$ C^* -подалгебру алгебры $\text{End } L_2(\mathbb{R})$, порожденную характеристическими сингулярными операторами с коэффициентами из алгебры $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций.

Справедлива

ЛЕММА 2.2. *Алгебра $\sigma_{\{0,1,\infty\}}$ изоморфна C^* -алгебре $S_1C(\overline{\mathbb{R}})_{2 \times 2}^0$ матричных операторов вида $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2$, удовлетворяющих условиям*

$$A_{ij} \in S_1C(\overline{\mathbb{R}}), \quad A_{12}, A_{21} \approx 0, \quad A_{11} \approx aI,$$

где a – однородная функция степени нуль на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $S_1C(\overline{\mathbb{R}})_{2 \times 2}^0$ является C^* -алгеброй. Действительно, замкнутость относительно алгебраических операций и инволюции следует из свойств локальной эквивалентности. Установим полноту. Для этого достаточно показать, что если $A_n, A \in S_1C(\overline{\mathbb{R}})$, $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $A_n \approx a_n I$, где a_n – однородная функция, то $A \approx aI$, где a – также однородная функция. Пусть $A \approx A_{\infty}$, где $A_{\infty} \in \sigma_{\{0,\infty\}}$. Тогда оператор $a_n I - A_{\infty}$ однороден, т.е. коммутирует с операторами растяжения τ_{α} при всех $\alpha > 0$. Поэтому для любой функции $\theta \in M_{\infty}$, $0 \leq \theta \leq 1$, имеем

$$\|a_n I - A_{\infty}\| = \|\theta(a_n I - A_{\infty})\| \leq \|\theta(a_n I - A_n)\| + \|\theta(A_n I - A)\| + \|\theta(A - A_{\infty})\|. \quad (2.9)$$

Из этого неравенства вытекает, что $\|a_n I - A_\infty\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому существует однородная функция a такая, что $A_\infty = aI$; это и завершает доказательство полноты.

Теперь распространим на алгебру $\sigma_{\{0,1,\infty\}}$ описанный выше пространственный изоморфизм μ (см. формулу (2.3)). Учитывая, что $\mu(\sigma_{\{0,\infty\}}) = \Sigma$, а для характеристических функций $\chi_{[0,1]}$ и $\chi_{[1,+\infty]}$

$$\mu(\chi_{[0,1]}I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}, \quad \mu(\chi_{[1,+\infty]}I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix},$$

получаем, что алгебра $\mu(\sigma_{\{0,1,\infty\}})$ содержит все операторы вида

$$\begin{pmatrix} aI + \alpha A & \beta B \\ \gamma C & D \end{pmatrix},$$

где $A, B, C, D \in S_1C(\overline{\mathbb{R}})$, $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$, $\alpha, \beta, \gamma \in C(\dot{\mathbb{R}})$, $\alpha(\infty) = \beta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$, образующие в ней всюду плотное множество.

Остается заметить, что замыкание множества операторов $\{dF\}$, где $d \in C(\dot{\mathbb{R}})$, $d(\infty) = 0$, $F \in S_1C(\overline{\mathbb{R}})$, совпадает с множеством всех операторов из $S_1C(\overline{\mathbb{R}})$, локально эквивалентных нулю в точке ∞ . Действительно, если $G \in S_1C(\overline{\mathbb{R}})$ и $G \approx 0$, то

$$\inf_{\theta \in M_\infty} \|\theta G\| = 0,$$

поэтому оператор G принадлежит замыканию множества операторов $\{(1 - \theta)G\}$, $\theta \in M_\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Алгебра $\sigma_{\{0,1,\infty\}}$ содержит все компактные операторы из алгебры $\text{End } L_2(\mathbb{R})$.*

Достаточно установить этот факт для алгебры $S_1C(\overline{\mathbb{R}})_{2 \times 2}^0$. А это следует из того, что этим свойством обладает алгебра $S_1C(\overline{\mathbb{R}})$.

3. Ниже рассматриваются C^* -алгебры бисингулярных операторов с некоторыми условиями инвариантности, возникающие при исследовании локальных представителей бисингулярных операторов с разрывными коэффициентами.

Пусть $\mathbb{R}_{++}^2 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ – четверть плоскости. Обозначим через $\mathcal{A}_\varrho^{++}$ C^* -подалгебру в $\text{End } L_2(\mathbb{R}_{++}^2)$, порожденную операторами $S \otimes I$, $I \otimes S$, $\text{sgn}(y - x^\varrho)I$, $\varrho > 0$, где в данном случае S – оператор сингулярного интегрирования на полуоси $\mathbb{R}_+$. Введем оператор

$$(\theta f)(x, y) = x^{(\varrho+1)/2} y^{1/2} f(x, x^\varrho y),$$

выравнивающий линию разрыва $y = x^\varrho$ и осуществляющий изометрический изоморфизм $\theta : L_2(\mathbb{R}_{++}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_{++}^2, x^{-1}y^{-1})$. Его обратный оператор имеет вид

$$(\theta^{-1}f)(x, y) = x^{-1/2} y^{-1/2} f(x, x^{-\varrho}y).$$

Легко проверяется, что операторы $\widetilde{S \otimes I} = \theta(S \otimes I)\theta^{-1}$, $\widetilde{I \otimes S} = \theta(I \otimes S)\theta^{-1}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}\widetilde{(S \otimes I f)}(x, y) &= \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^{1/2} \frac{f(t, y(x/t)^\varrho)}{t-x} dt, \\ \widetilde{(I \otimes S f)}(x, y) &= \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\tau}\right)^{1/2} \frac{f(x, \tau)}{\tau-y} d\tau.\end{aligned}$$

Для оператора $A \in \mathcal{A}_\varrho^{++}$ обозначим через $\hat{A}$ оператор $(M \otimes M)\theta A\theta^{-1}(M \otimes M)^{-1}$, где M – одномерный оператор преобразования Меллина (2.5). Найдем операторы $\widetilde{I \otimes S}$, $\widetilde{S \otimes I}$, $\widetilde{\zeta_\pm I}$, где $\zeta_\pm(x, y) = (1 \pm \operatorname{sgn}(y - x^\varrho))/2$. Аналогично [16, с. 309–312] получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{S \otimes I} &\equiv s_1(\xi, \eta)I = \frac{e^{2\pi(\xi - \varrho\eta + i/2)} + 1}{e^{2\pi(\xi - \varrho\eta + i/2)} - 1}I, \\ \widetilde{I \otimes S} &\equiv s_2(\xi, \eta)I = \frac{e^{2\pi(\eta + i/2)} + 1}{e^{2\pi(\eta + i/2)} - 1}I, \\ \widetilde{\zeta_\pm I} &= I \otimes P_\pm, \quad P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S).\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к выводу, что отображение $A \rightarrow \hat{A}$ осуществляет изоморфизм C^* -алгебр $\mathcal{A}_\varrho^{++}$ и $\hat{\mathcal{A}}_\varrho^{++}$, где $\hat{\mathcal{A}}_\varrho^{++}$ порождается операторами $I \otimes S$, $s_1(\xi, \eta)I$, $s_2(\xi, \eta)I$, действующими в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Так как о.-ф. $\xi \rightarrow s_1(\xi, \cdot)I$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и сильно непрерывна на $\overline{\mathbb{R}}$ (в частности, в смысле сильной сходимости $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} s_1(\xi, \cdot)I = \pm I$), то операторы $\hat{A}$ являются операторами умножения на о.-ф. $\{\hat{A}(\xi)\}$ со значениями в алгебре $S_1C(\overline{\mathbb{R}})$, непрерывными на $\mathbb{R}$ и сильно непрерывными на $\overline{\mathbb{R}}$. Вследствие теоремы 2.1 справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. *Оператор A из алгебры $\mathcal{A}_\varrho^{++}$ обратим тогда и только тогда, когда отвечающая ему о.-ф. $\{\hat{A}(\xi)\}$ удовлетворяет условиям:*

- 1) для любого $\xi \in \mathbb{R}$ оператор $\hat{A}(\xi)$ обратим;
- 2) $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|\hat{A}^{-1}(\xi)\| < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho}$ C^* -подалгебру операторов в $\operatorname{End} L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденную операторами

$$\operatorname{sgn} x I, \quad \operatorname{sgn} y I, \quad \operatorname{sgn}(y - \psi_\varrho(x)) I, \quad S \otimes I, \quad I \otimes S,$$

где $\psi_\varrho(x) = (\operatorname{sgn} x)^\varepsilon |x|^\varrho$, $\varrho > 0$, $\varepsilon = 0, 1$.

Пусть ν – оператор вида (2.4); тогда пространственный изоморфизм $\nu \otimes \nu: L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 L_2(\mathbb{R}_{++}^2)$ определяет инъективный морфизм алгебры $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho}$ в матричную операторную алгебру $(\mathcal{A}_\varrho^{++})_{4 \times 4}$. В сочетании с изоморфизмом $\mathcal{A}_\varrho^{++} \xrightarrow{*} \hat{\mathcal{A}}_\varrho^{++}$ получаем инъективный морфизм $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho} \rightarrow (\hat{\mathcal{A}}_\varrho^{++})_{4 \times 4}$. Таким образом, каждому оператору A из алгебры $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho}$ взаимно однозначно соответствует о.-ф. $\{\hat{A}(\xi)\}$ со значениями в алгебре $(S_1C(\overline{\mathbb{R}}))_{4 \times 4}$, непрерывная на $\mathbb{R}$ и сильно непрерывная на $\overline{\mathbb{R}}$.

Из теоремы 2.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Обратимость оператора A из $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho}$ эквивалентна выполнению условий:

- 1) $\hat{A}(\xi)$ – обратимый оператор для всех $\xi \in \mathbb{R}$;
- 2) $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|\hat{A}^{-1}(\xi)\| < \infty$.

Отметим, что каждая алгебра $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho}$ содержит C^* -подалгебру $\mathcal{A}^{12}$, порожденную операторами $\operatorname{sgn} xI$, $\operatorname{sgn} yI$, $S \otimes I$, $I \otimes S$, которая изоморфна некоторой C^* -алгебре матриц-функций на $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $C_{4 \times 4}^0$ – C^* -алгебра непрерывных на $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ матриц-функций $\{a_{ij}(\xi, \eta)\}_{i,j=1}^4$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $a_{ij}(\xi, \pm\infty) = 0$, если $i + j$ нечетно;
- 2) $a_{ij}(\pm\infty, \eta) = 0$, если $i + j$ четно или a_{ij} расположен на побочной диагонали.

Тогда существует единственный изоморфизм $\mu^{12}: \mathcal{A}^{12} \rightarrow C_{4 \times 4}^0(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}})$, однозначно определяемый условиями

$$\begin{aligned}\mu^{12}(\operatorname{sgn} xI) &= \operatorname{diag}(-1, -1, 1, 1), \\ \mu^{12}(\operatorname{sgn} yI) &= \operatorname{diag}(-1, 1, -1, 1),\end{aligned}$$

$\mu^{12}(S \otimes I) = s(\xi) \otimes E$, $\mu^{12}(I \otimes S) = E \otimes s(\eta)$, где $s(\xi)$ – матрица вида (2.2), а тензорное произведение матриц определяется следующим образом:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}.$$

В частности, оператор A из $\mathcal{A}^{12}$ обратим тогда и только тогда, когда для любой точки $(\xi, \eta) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ матрица $(\mu^{12}A)(\xi, \eta)$ обратима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представляет очевидное распространение схемы А.С. Дынина на двумерный случай.

Среди алгебр $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho}$ в дальнейшем существенную роль играет алгебра $\mathcal{A}_{1,1}$, точнее, ее подалгебра $\mathcal{B}$, порожденная операторами $\operatorname{sgn}(y-x)I$, $S \otimes I$, $I \otimes S$. Операторы из $\mathcal{B}$ инвариантны относительно более широкой группы преобразований по сравнению с операторами из алгебр $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho}$. Именно, имеют место равенства

$$\begin{aligned}\tau_\alpha \otimes \tau_\alpha A &= A \tau_\alpha \otimes \tau_\alpha, \quad \alpha > 0, \\ T_\xi \otimes T_\xi A &= A T_\xi \otimes T_\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Поэтому алгебра $\mathcal{B}$ заслуживает самостоятельного исследования. Справедлива

ТЕОРЕМА 2.4. Имеет место изометрический изоморфизм C^* -алгебр

$$\mathcal{J}: \mathcal{B} \rightarrow \{\sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \sigma_{\{0, 1, \infty\}}\}^\infty,$$

где $\{\sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \sigma_{\{0, 1, \infty\}}\}^\infty$ – подалгебра алгебры $\sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \sigma_{\{0, 1, \infty\}}$, состоящая из всех пар операторов $(A(-1), A(1))$, связанных условием $A(-1) \stackrel{\infty}{\sim} A(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [19] устанавливается, что отображение $A \rightarrow DAD^{-1}$, где $D = FB$ – композиция унитарных операторов: преобразования Фурье

$$(Ff)(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{(i\xi x + i\eta y)} dx dy$$

и оператора $(Bf)(x, y) = f(x, x + y)$, осуществляет изоморфизм C^* -алгебр $\mathcal{B}$ и $\widehat{\mathcal{B}}$, где $\widehat{\mathcal{B}}$ – C^* -алгебра, порожденная операторами $I \otimes S$, $\operatorname{sgn}(\xi - \eta)I$, $\operatorname{sgn} \eta I$, причем для образующих имеют место соотношения

$$\begin{aligned} D \operatorname{sgn}(y - x)I &= I \otimes SD, & DS \otimes I &= -\operatorname{sgn}(\xi - \eta)D, \\ DI \otimes S &= -\operatorname{sgn} \eta D. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Далее, легко проверяется, что каждый оператор A из $\widehat{\mathcal{B}}$ является оператором умножения на о.-ф. $\{A(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{R}}$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\{A(\xi)\}$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}$;
- 2) $A(\xi) \in \sigma_{\{0, \xi, \infty\}}$ при любом $\xi \in \mathbb{R}$;
- 3) для любого $\alpha > 0$

$$\tau_\alpha A(\xi) = A\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \tau_\alpha; \quad (2.11)$$

4) для любого $\xi \in \mathbb{R}$ оператор $A(0) \in \sigma_{\{0, \infty\}}$ является локальным представителем оператора $A(\xi)$ в точке ∞ : $A(\xi) \stackrel{\infty}{\sim} A(0)$;

5) $\|A\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|A(\xi)\| = \sup_{\xi = \pm 1} \|A(\xi)\|$.

Рассмотрим отображение $J: \widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \sigma_{\{0, 1, \infty\}}$, определяемое формулой $J\{A(\xi)\} = (A(-1), A(1))$. Очевидно, что J является изометрическим изоморфизмом $\widehat{\mathcal{B}}$ на его образ $J(\widehat{\mathcal{B}})$, причем ввиду соотношения $A(-1) \stackrel{\infty}{\sim} A(1)$ имеет место вложение

$$J(\widehat{\mathcal{B}}) \subset \{\sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \sigma_{\{0, 1, \infty\}}\}^\infty.$$

Покажем, что на самом деле данные C^* -алгебры совпадают. Сначала установим принадлежность $J(\widehat{\mathcal{B}})$ пар вида $(A(-1), 0)$ и $(0, A(1))$, где $A(j)$, $j = \pm 1$, – произвольные операторы из $\sigma_{\{0, j, \infty\}}$ с условием $A(j) \stackrel{\infty}{\sim} 0$. Рассмотрим, например, пару вида $(0, A(1))$. Очевидно, можно считать, что $A(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, где A_n – операторы из $\sigma_{\{0, 1, \infty\}}$, $A_n \stackrel{\infty}{\sim} 0$, $A_n = \Sigma \Pi(a_i^n S)$, где a_i^n – кусочно постоянные функции с разрывами в точках $0, 1, \infty$. Пусть $a(\eta) = \alpha \chi_{[-\infty, 0]}(\eta) + \beta \chi_{[0, 1]}(\eta) + \gamma \chi_{[1, \infty]}(\eta)$ – любая из функций a_i^n . Сопоставим ей функцию

$$\tilde{a}(\xi, \eta) = \alpha \chi_{(-\infty, 0)}(\eta) + \beta \chi_{(0, \infty)}(\eta) \chi_{(0, \infty)}(\xi - \eta) + \gamma \chi_{(0, \infty)}(\eta) \chi_{(-\infty, 0)}(\xi - \eta),$$

для которой выполняются соотношения $\tilde{a}(1, \eta) = a(\eta)$, $\{\tilde{a}(\xi, \cdot)I\} \in \widehat{\mathcal{B}}$. Рассмотрим оператор $\tilde{A}_n(\xi) = \Sigma \Pi(\tilde{a}_i^n(\xi, \eta) S)$. Ясно, что о.-ф. $\{\tilde{A}_n(\xi)\}$ принадлежит $\widehat{\mathcal{B}}$, $\tilde{A}_n(1) = A_n$, $\tilde{A}_n(\xi) \stackrel{\infty}{\sim} \tilde{A}_n(0) = 0$, и, следовательно, так как $\tilde{A}_n(\xi) = \tilde{A}_n(0)$ при $\xi \leq 0$, то $J\{\tilde{A}_n(\xi)\} = (0, A_n)$. Переходя к пределу, устанавливаем существование о.-ф. $\{\tilde{A}(\xi)\}$ из $\widehat{\mathcal{B}}$, для которой $J\{\tilde{A}(\xi)\} = (0, A(1))$.

Пусть теперь $(A(-1), A(1))$ – произвольная пара из C^* -алгебры $\{\sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \sigma_{\{0, 1, \infty\}}\}^\infty$ и $A_\infty \in \sigma_{\{0, \infty\}}$ – такой оператор, что выполняется соотношение $A_\infty \stackrel{\sim}{\sim} A(j)$, $j = \pm 1$. Тогда пары (A_∞, A_∞) , $(A(-1) - A_\infty, 0)$, $(0, A(1) - A_\infty)$ принадлежат $J(\widehat{\mathcal{B}})$, чем фактически завершается доказательство теоремы.

Отметим только, что изоморфизм $\mathcal{J}$ определяется формулой

$$\mathcal{J}(A) = (A(-1), A(1)) = J(DAD^{-1}), \quad (2.12)$$

а оператор A восстанавливается по паре $\mathcal{J}(A) = (A(-1), A(1))$ следующим образом:

$$A = \mathcal{J}^{-1}((A(-1), A(1))) = U^{-1}(\chi_{(-\infty, 0)}(\xi)A(-1) + \chi_{(0, \infty)}(\xi)A(1))U, \quad (2.13)$$

где $U = \tau_{|\xi|}D$, а τ_α – оператор растяжения (2.6).

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Оператор A из $\mathcal{B}$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $A(j)$, $j = \pm 1$, отвечающие оператору A при изоморфизме $\mathcal{J}: \mathcal{B} \stackrel{*}{\sim} J(\widehat{\mathcal{B}})$.*

4. В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений: если $\mathcal{A}$ – C^* -алгебра операторов, $[a, b]$ – конечный отрезок, то $\mathcal{GA}$ – группа всех ее обратимых операторов, $C([a, b], \mathcal{A})$ ($C([a, b], \mathcal{GA})$) – множество всех непрерывных на $[a, b]$ о.-ф. со значениями в $\mathcal{A}$ ($\mathcal{GA}$). Ясно, что $C([a, b], \mathcal{A})$ – C^* -алгебра с нормой $\|\{A(t)\}\| = \max \|A(t)\|$ и инволюцией $\{A(t)\} \rightarrow \{A^*(t)\}$, $C([a, b], \mathcal{GA})$ – группа всех ее обратимых элементов, т.е. $C([a, b], \mathcal{GA}) = \mathcal{GC}([a, b], \mathcal{A})$. Ниже отрезок $[a, b]$ фиксирован и, как правило, опускается в обозначениях алгебр и групп. Далее через $C^0(\mathcal{A})$ ($C^0(\mathcal{GA})$) будем обозначать подалгебры (подгруппы) о.-ф. с определенными условиями в точках $t = a, b$; нижние индексы при C^0 будут обозначать подгруппы в $C^0(\mathcal{GA})$, в частности, $C_e^0(\mathcal{GA})$ – компонента связности единичного элемента в группе $C^0(\mathcal{GA})$.

Пусть $\mathcal{B}$ – C^* -алгебра бисингулярных операторов, определенная в п. 3. Выделим в группе $C(\mathcal{GB})$ подгруппу $C^0(\mathcal{GB})$ о.-ф. $\{A(t)\}$, удовлетворяющих условию: $A(t)|_{t=a, b}$ суть бисингулярные операторы с постоянными коэффициентами. Цель этого пункта – построение некоторой специальной факторизации элементов группы $C^0(\mathcal{GB})$. Этот результат будет использован в § 4.

ТЕОРЕМА 2.5. *Любая о.-ф. из группы $C^0(\mathcal{GB})$ допускает факторизацию вида*

$$A(t) = Q_\theta(t)B_e(t)G_\kappa(t), \quad (2.14)$$

в которой $\{B_e(t)\}$ – некоторая о.-ф. из компоненты единицы $C_e^0(\mathcal{GB})$, $G_\kappa(t)$ – бисингулярный оператор вида

$$G_\kappa(t) = I \otimes P_+ a I + I \otimes P_- b I \quad (2.15)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a(t, x, y) &= \alpha(t)\chi_{[0, \infty]}(y - x) + \chi_{[-\infty, 0]}(y - x), \\ b(t, x, y) &= \chi_{[0, \infty]}(y - x) + \bar{\alpha}(t)\chi_{[-\infty, 0]}(y - x), \end{aligned}$$

где $\alpha(t)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция, $\bar{\alpha}(t)$ – ее комплексно сопряженная функция, причем $|\alpha(t)| = 1$, $\alpha(a) = \alpha(b) = 1$, $\text{ind } \alpha = 1/(2\pi) \Delta_{[a, b]} \arg \alpha = \kappa$, $Q_\theta(t)$ – оператор, определяемый формулой

$$Q_\theta(t) = U^{-1}T_\theta(t)U, \quad (2.16)$$

в которой оператор U определен в (2.13),

$$T_\theta(t) = I + ((\alpha_+(t) - 1)\chi_{[0, \infty]}(\xi) + (\alpha_-(t) - 1)\chi_{[-\infty, 0]}(\xi))Q, \quad (2.17)$$

Q – некоторый одномерный ортопроектор, $\alpha_\pm(t)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции, причем $|\alpha_\pm| = 1$, $\alpha_\pm(a) = \alpha_\pm(b) = 1$, $\text{ind } \alpha_\pm = \theta_\pm$. В этом представлении числа $\theta_\pm$, κ определяются однозначно, в остальном функции $\alpha_\pm$, α и ортопроектор Q могут быть произвольными.

Сначала заметим, что ввиду установленного в теореме 2.4 изометрического изоморфизма

$$\mathcal{J}: \mathcal{B} \simeq J(\widehat{\mathcal{B}}) = \{\sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \sigma_{\{0, 1, \infty\}}\}^\infty$$

группа $C^0(\mathcal{G}B)$ изометрически изоморфна группе

$$C^0(\mathcal{G}J(\widehat{\mathcal{B}})) = C^0\mathcal{G}\{\sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \sigma_{\{0, 1, \infty\}}\}^\infty,$$

состоящей из пар о.-ф. $\{A(t)\} = (\{A_-(t)\}, \{A_+(t)\})$ со значениями в группе $\mathcal{G}\sigma_{\{0, -1, \infty\}} \oplus \mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}}$, связанных соотношением $A_-(t) \simeq A_+(t)$ при всех $t \in [a, b]$ и являющихся при $t = a, b$ операторами умножения на функции соответственно из групп $\mathcal{G}\sigma_{\{0, -1, \infty\}}$ и $\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}}$. Учитывая, что образом оператора $G_\kappa(t)$ вида (2.15) при изоморфизме $\mathcal{J}$ является пара $\mathcal{J}(G_\kappa(t)) = (\{H_\kappa(t)\}, \{H_\kappa(t)\})$, где

$$\begin{aligned} H_\kappa(t) &= (\alpha\zeta_- + \zeta_+)P_+ + (\zeta_- + \bar{\alpha}(t)\zeta_+)P_-, \\ \zeta_+ &= \chi_{(0, \infty)}, \quad \zeta_- = \chi_{(-\infty, 0)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

получаем, что теорема 2.5 эквивалентна следующей факторизационной теореме для группы $C^0(\mathcal{G}J(\widehat{\mathcal{B}}))$.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\{A(t)\} = (\{A_-(t)\}, \{A_+(t)\})$ – элемент группы $C^0(\mathcal{G}J(\widehat{\mathcal{B}}))$. Тогда существуют целые числа θ_- , θ_+ , κ такие, что справедливо представление

$$A(t) = T_\theta(t)A_e(t)H_\kappa(t), \quad (2.19)$$

где $\{A_e(t)\} = (\{A_e^-(t)\}, \{A_e^+(t)\})$ – некоторая о.-ф. из группы $C_e^0(\mathcal{G}J(\widehat{\mathcal{B}}))$, $\{H_\kappa(t)\} = (\{H_\kappa(t)\}, \{H_\kappa(t)\})$, $H_\kappa(t)$ определяется формулой (2.18),

$$\{T_\theta(t)\} = (\{I + (\alpha^-(t) - 1)Q\}, \{I + (\alpha^+(t) - 1)Q\}),$$

функции $\alpha^\pm(t)$ и ортопроектор Q описаны в формулировке теоремы 2.5.

В свою очередь доказательство теоремы 2.6 опирается на ряд лемм.

Пусть $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}})$ ($t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2 \leq \infty$) – подгруппа о.-ф. $\{A(t)\}$ из $C(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}})$, определяемая следующим условием.

Операторы $A(t)|_{t=a, b}$ являются операторами умножения на функции из группы $\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}}$, $C^{00}(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}})$ – подгруппа в $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}})$ всех о.-ф., удовлетворяющих условиям: $A(t) \sim I$ для всех $t \in [a, b]$ и $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$; $C^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$ ($\Omega = [a, b] \times \overline{\mathbb{R}}$) – группа всех непрерывных на Ω матриц-функций со значениями в $\text{GL}(2, C)$, диагональных при $(t, \xi) \in \partial\Omega = [a, b] \times \{-\infty, +\infty\} \cup \{a, b\} \times \overline{\mathbb{R}}$ и постоянных на $\{a, b\} \times \overline{\mathbb{R}}$, $C^{00}(\Omega, \text{GL}(2, C))$ – подгруппа в $C^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$, состоящая из матриц-функций, равных единичной матрице на $\partial\Omega$.

Сопоставляя о.-ф. $\{A(t)\}$ матрицу-функцию $a(t, \xi) = (\mu A(t))(\xi)$ и используя свойства локальных представителей операторов из $\sigma_{\{t_1, t_2\}}$, устанавливаем изометрические изоморфизмы

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}}) &\cong C^0(\Omega, \text{GL}(2, C)), \\ C^{00}(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}}) &\cong C^{00}(\Omega, \text{GL}(2, C)). \end{aligned}$$

Для произвольного целого числа κ зафиксируем непрерывную на $[a, b]$ функцию $\alpha(t)$ такую, что $|\alpha(t)| = 1$, $\alpha(a) = \alpha(b) = 1$, $\text{ind } \alpha = \kappa$, $\alpha(t) = 1$ при $\kappa = 0$, и рассмотрим матрицу

$$h_\kappa(t, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha(t)}{2} + \frac{\alpha(t)-1}{2} \text{th } \pi\xi & \frac{\alpha(t)-1}{2i \text{ch } \pi\xi} \\ \frac{i(1-\bar{\alpha}(t))}{2 \text{ch } \pi\xi} & \frac{1+\bar{\alpha}(t)}{2} - \text{th } \pi\xi \frac{1-\bar{\alpha}(t)}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

где $\bar{\alpha}(t)$ – функция, комплексно сопряженная к функции $\alpha(t)$. Ясно, что матрица-функция $h_\kappa(t, \xi)$ принадлежит группе $C^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$.

ЛЕММА 2.3. *Для любой матрицы-функции $a(t, \xi)$ из группы $C^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$ существует целое число κ такое, что матрица-функция $b(t, \xi) = a(t, \xi)h_\kappa^{-1}(t, \xi)$ принадлежит компоненте единицы $C_e^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее считаем, что $\partial\Omega = \{a, b\} \times \overline{\mathbb{R}} \cup [a, b] \times \{-\infty, +\infty\}$ является ориентированной кривой с ориентацией, определяемой порядком следования точек $(a, +\infty)$, $(b, +\infty)$, $(b, -\infty)$. Для непрерывной невырожденной на $\partial\Omega$ функции $f(t, \xi)$ положим

$$\text{ind } f = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\Omega} \arg f(t, \xi).$$

Ввиду стягиваемости пространства Ω имеем $\text{ind det } a(t, \xi) = 0$. Пусть $\text{ind } a_{11} = \kappa$; тогда для матрицы-функции $b = ah_\kappa^{-1}$ выполняется соотношение $\text{ind } b_{ii} = 0$, $i = 1, 2$. При этих условиях существует диагональная матрица-функция $\lambda(t, \xi)$ из $C^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$ такая, что $\lambda|_{\partial\Omega} = b|_{\partial\Omega}$. Ясно, что $\lambda \in C_e^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$. Далее, матрица-функция $b\lambda^{-1}$ принадлежит группе $C^{00}(\Omega, \text{GL}(2, C))$, которая ввиду тривиальности гомотопической группы $\pi_2(\text{GL}(2, C))$ (см., например, [20, с. 140]) связна и, следовательно, принадлежит $C_e^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$.

ЛЕММА 2.4. Для любой о.-ф. $\{A(t)\}$ из группы $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}})$ справедливо представление

$$A(t) = B(t)H_\kappa(t),$$

о.-ф. $\{B(t)\} \in C_e^0(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}})$, а о.-ф. $\{H_\kappa(t)\}$ имеет вид

$$H_\kappa(t) = (\alpha(t)\zeta_- + \zeta_+)P_+ + (\zeta_- + \bar{\alpha}(t)\zeta_+)P_-, \quad (2.21)$$

где $P_\pm = (1/2)(I \pm S)$, $\zeta_+ = \chi_{[t_1, t_2]}$, $\zeta_- = 1 - \zeta_+$, т.е. при фиксированном $t \in [a, b]$ о.-ф. $\{A(t)\}$ является сингулярным характеристическим оператором с кусочно постоянными коэффициентами с разрывами в точках t_1, t_2 .

В частности, если для $\{A(t)\}$ выполняется соотношение $A(t) \stackrel{\tau}{\sim} I$ при всех $t \in [a, b]$ и некотором $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$, то о.-ф. $\{A(t)\}$ принадлежит компоненте единицы $C_e^0(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}})$.

Первое утверждение является следствием леммы 2.3 и изоморфности групп $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{t_1, t_2\}})$ и $C^0(\Omega, \text{GL}(2, C))$, второе вытекает из представлений (2.7), (2.8) локальных представителей операторов из алгебры $\sigma_{\{t_1, t_2\}}$.

Пусть $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}})$ – подгруппа о.-ф. $\{A(t)\}$ из $C(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}})$, определяемая условиями: операторы $A(t)|_{t=a, b}$ суть операторы умножения на функции из группы $\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}}$, $C_1^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}})$ – ее подгруппа, состоящая из всех о.-ф. $\{A(t)\}$ из $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}})$, удовлетворяющих соотношениям $A(t) \stackrel{\tau}{\sim} I$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Справедлива

ЛЕММА 2.5. Для любой о.-ф. $\{A(t)\}$ из $C_1^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}})$ существует о.-ф. $\{\tilde{A}(t)\}$ из компоненты единицы $C_{1,e}^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1, \infty\}})$ такая, что $\tilde{A}(t) \stackrel{1}{\sim} A(t)$ при всех $t \in [a, b]$; о.-ф. $\{A(t)\tilde{A}^{-1}(t)\}$ имеет вид

$$A(t)\tilde{A}^{-1}(t) = I + K(t), \quad (2.22)$$

где $\{K(t)\}$ – некоторая компактнозначная о.-ф. с условиями $K(t)|_{t=a, b} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть о.-ф. $\{B(t)\}$ из $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1\}})$ такова, что при каждом $t \in [a, b]$ оператор $B(t)$ является локальным представителем оператора $A(t)$ в точке $\tau = 1$: $B(t) \stackrel{1}{\sim} A(t)$. Тогда (см. свойства локальных представителей) $B(t) \stackrel{\tau}{\sim} I$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ и, следовательно, о.-ф. $\{B(t)\}$ является элементом группы $C^{00}(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1\}})$. Ввиду изоморфизма $C^{00}(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1\}}) \cong C^{00}(\Omega, \text{GL}(2, C))$ она связна. Но так как каждая связная группа порождается любой окрестностью единичного элемента (см., например, [21, с. 23]), то для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ о.-ф. $\{B(t)\}$ допускает представление

$$B(t) = (I + A_1(t))(I + A_2(t)) \dots (I + A_N(t)),$$

где $\{I + A_j(t)\} \in C^{00}(\mathcal{G}\sigma_{\{0, 1\}})$, $\max \|A_j(t)\| < \varepsilon$.

Пусть $\{D(t)\}$ – любая из о.-ф. $\{A_j(t)\}$ и $d(t, \xi)$ – отвечающая ей матрица-функция $(\mu D(t))(\xi)$. Обозначим через $d^{ij}(t, \xi)$ матрицу-функцию с элементами

$$d_{ks}^{ij}(t, \xi) = \delta_{ki}\delta_{sj}d_{ks}(t, \xi), \quad i, j, k, s = 1, 2;$$

а через $\{D^{ij}(t)\}$ – о.-ф. из $C(\sigma_{\{0,1\}})$, для которой $(\mu D^{ij}(t))(\xi) = d^{ij}(t, \xi)$. Отметим, что операторы $D^{ij}(t)$ удовлетворяют соотношениям: $D^{ij}(t) \stackrel{\tau}{\sim} 0$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}\zeta_- D^{11}(t) \zeta_- I &= D^{11}(t), & \zeta_- D^{12}(t) \zeta_+ I &= D^{12}(t), \\ \zeta_+ D^{21}(t) \zeta_- I &= D^{21}(t), & \zeta_+ D^{22}(t) \zeta_+ I &= D^{22}(t)\end{aligned}$$

при всех $t \in [a, b]$, где $\zeta_+ = \chi_{[0,1]}$, $\zeta_- = 1 - \zeta_+$. Из о.-ф. $\{D^{ij}(t)\}$ сконструируем о.-ф. $\{\tilde{D}^{ij}(t)\}$ из $C(\sigma_{\{0,1,\infty\}})$, для которых $\tilde{D}^{ij}(t) \stackrel{\tau}{\sim} 0$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\tilde{D}^{ij}(t) \stackrel{1}{\sim} D^{ij}(t)$ при всех $t \in [a, b]$. Положим

$$\tilde{D}^{1j}(t) = \chi_{[1,+\infty]} D^{1j}(t), \quad \tilde{D}^{21}(t) = D^{21}(t) \chi_{[1,+\infty]} I,$$

а для $\{D^{22}(t)\}$ введем сначала о.-ф. $\{\hat{D}^{22}(t)\}$ из $C(\sigma_{\{1,\infty\}})$, для которой $\hat{D}^{22}(t) \stackrel{1}{\sim} D^{22}(t)$ при всех $t \in [a, b]$, и положим $\tilde{D}^{22}(t) = \chi_{[0,1]} \hat{D}^{22}(t)$. Ясно, что для о.-ф. $\{\tilde{D}^{ij}(t)\}$ выполняются нужные соотношения локальной эквивалентности и неравенство $\|\tilde{D}^{ij}(t)\| \leq \|D^{ij}(t)\|$. Считая ε достаточно малым, получаем, что о.-ф.

$$\{I + \tilde{D}(t)\} = \{I + \tilde{D}^{11}(t) + \tilde{D}^{12}(t) + \tilde{D}^{21}(t) + \tilde{D}^{22}(t)\}$$

принадлежит группе $C_e^0(G\sigma_{\{0,1,\infty\}})$, причем $\tilde{D}(t) \stackrel{\tau}{\sim} 0$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\tilde{D}(t) \stackrel{1}{\sim} D(t)$.

Пусть теперь $\{\tilde{A}_j(t)\}$ – приведенная выше конструкция для о.-ф. $\{A_j(t)\}$; тогда о.-ф.

$$\{\tilde{A}(t)\} = \{(I + \tilde{A}_1(t)) \dots (I + \tilde{A}_N(t))\}$$

удовлетворяет всем нужным условиям. Представление (2.22) следует из того, что $A(t)\tilde{A}^{-1}(t) - 1 \stackrel{\tau}{\sim} 0$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R}$, и, следовательно, является компактным оператором.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Аналогичный результат справедлив для группы $C_{-1}^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0,1,\infty\}})$.

Пусть $\mathcal{G}K$ – группа всех обратимых операторов вида $I + K$, где K – компактный оператор из алгебры $\text{End } L_2(\mathbb{R})$, $C^0(\mathcal{G}K)$ – группа всех непрерывных на $[a, b]$ о.-ф. $\{I + K(t)\}$ со значениями в $\mathcal{G}K$ и таких, что $K(t)|_{t=a,b} = 0$. Известно [22, с. 205], что гомотопическая группа $\pi_1(\mathcal{G}K)$ изоморфна группе всех целых чисел $\mathbb{Z}$. Соответствующую целочисленную характеристику будем называть *степенью о.-ф.* $\{I + K(t)\}$ и обозначать $\deg\{I + K(t)\}$. Ее можно однозначно определить, положив для о.-ф. $\{I + (\alpha(t) - 1)Q\}$, где Q – любой одномерный ортопроектор, $|\alpha(t)| = 1$, $\alpha(t)|_{t=a,b} = 1$,

$$\deg\{I + (\alpha(t) - 1)Q\} = \text{ind } \alpha(t).$$

Для любой о.-ф. $\{A(t)\}$ из $C^0(\mathcal{G}K)$ справедливо представление

$$A(t) = (I + (\alpha(t) - 1)Q)A_e(t),$$

где $\{A_e(t)\}$ – о.-ф. из компоненты единицы $C_e^0(\mathcal{G}K)$, $\text{ind } \alpha = \deg\{A(t)\}$.

Следствием предыдущих результатов и леммы 2.5 является

ЛЕММА 2.6. Для любой о.-ф. $\{A(t)\}$ из группы $C_1^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0,1,\infty\}})$ существует целое число θ_+ такое, что справедливо представление

$$A(t) = (I + (\alpha(t) - 1)Q)A_e(t),$$

где $\{A_e(t)\}$ – о.-ф. из компоненты единицы $C_{1,e}^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0,1,\infty\}})$, $\text{ind } \alpha = \theta_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Аналогичное представление справедливо для о.-ф. из группы $C_{-1}^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0,-1,\infty\}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. Пусть $\{A(t)\}$ – о.-ф. из группы $C^0(\mathcal{G}J(\widehat{\mathcal{B}}))$ и $\{A_\infty(t)\}$ – о.-ф. из $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0,\infty\}})$ такая, что при всех $t \in [a, b]$ справедливы соотношения

$$A_-(t) \approx A_\infty, \quad A_+(t) \approx A_\infty.$$

Тогда о.-ф. $\{C(t)\} = (\{C_-(t)\}, \{C_+(t)\})$, где $C_\pm(t) = A_\pm(t)A_\infty^{-1}(t)$ удовлетворяет соотношениям: $C_+(t) \stackrel{\tau}{\sim} I$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$; $C_-(t) \stackrel{\tau}{\sim} I$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Пусть $\{C_{+,0}(t)\}$ – о.-ф. из группы $C^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0,1\}})$ такая, что при всех $t \in [a, b]$ выполняется соотношение $C_{+,0}(t) \stackrel{0}{\sim} C_+(t)$; тогда $C_{+,0}(t) \stackrel{\tau}{\sim} I$ при всех $t \in [a, b]$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ и, следовательно, $\{C_{+,0}(t)\}$ – элемент группы $C_e^0(\mathcal{G}\sigma_{\{0,1\}})$. Далее, для о.-ф. $\{E_+(t)\} = \{C_+(t)C_{+,0}^{-1}(t)\}$ справедливы соотношения $E_+(t) \stackrel{\tau}{\sim} I$ при всех $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Аналогично рассматривается о.-ф. $\{C_-(t)\}$. Поэтому для о.-ф. $\{A(t)\}$ имеет место представление

$$A(t) = (E_-(t), E_+(t))(C_{-,0}(t), C_{+,0}(t))(A_\infty(t), A_\infty(t)).$$

После этого, применяя к о.-ф. $\{E_\pm(t)\}$ лемму 2.5, а к о.-ф. $\{A_\infty\}$ – лемму 2.4, приходим к утверждению теоремы 2.6.

§ 3. Критерий фредгольмовости бисингулярных операторов

1. Пусть $S_2\Phi^0$ – алгебра (незамкнутая) всех бисингулярных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$ следующего вида:

$$A = \sum_{k=1}^N A_{1k} A_{2k} \dots A_{Nk}, \quad (3.1)$$

где A_{jk} – характеристические операторы типа

$$aI + bS \otimes I + cI \otimes S + dS \otimes S \quad (3.2)$$

с коэффициентами класса Φ , определенного в п. 2 из § 1, S – оператор сингулярного интегрирования в $L_2(\mathbb{R})$. Замыкание алгебры $S_2\Phi^0$ в $\text{End } L_2(\mathbb{R}^2)$ обозначим через $S_2\Phi$.

ЛЕММА 3.1. $S_2\Phi$ – C^* -подалгебра в C^* -алгебре $\tilde{\mathcal{L}}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что алгебра $\tilde{\mathcal{L}}^0$ определена в п. 2 из § 1. Ее элементы являются операторами ослабленного биллокального типа из алгебры $\tilde{\mathcal{L}}$, для которых коммутаторы с операторами умножения на функции из $C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$ принадлежат идеалу $\mathcal{K}^{12}$. Так как коммутатор $[S, aI]$ для $a \in C(\dot{\mathbb{R}})$ является компактным оператором, то операторы $[I \otimes S, bI]$, $[S \otimes I, bI]$, где $b \in C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$, содержатся соответственно в идеалах $\mathcal{K}^2$, $\mathcal{K}^1$. Остается заметить, что операторы умножения на функции из Φ – операторы ослабленного биллокального типа.

Пусть функция a принадлежит классу Φ . Обозначим через $a_{t\pm 0}^1, a_{\tau\pm 0}^2$ функции из $L_\infty(\mathbb{R})$, для которых

$$\begin{aligned} s - \lim_{x \rightarrow t \pm 0} a(x, \cdot)I &= a_{t\pm 0}^1 I, \\ s - \lim_{y \rightarrow \tau \pm 0} a(\cdot, y)I &= a_{\tau\pm 0}^2 I \end{aligned}$$

в смысле сильного предела в $L_2(\mathbb{R}^2)$, а $t, \tau \in \dot{\mathbb{R}}$, при этом считаем, что $x \rightarrow \infty \pm 0$ означает, что $x \rightarrow \pm\infty$. Кроме того, полагаем

$$\begin{aligned} a_t^1(x, y) &= \chi_t^+(x)a_{t+0}^1(y) + \chi_t^-(x)a_{t-0}^1(y), \\ a_\tau^2(x, y) &= \chi_\tau^+(y)a_{\tau+0}^2(x) + \chi_\tau^-(y)a_{\tau-0}^2(x), \end{aligned}$$

где

$$\chi_t^+(x) = \begin{cases} 1, & x \in [t, \infty), \\ 0, & x \in [-\infty, t) \end{cases}$$

при $t \in \mathbb{R}$,

$$\chi_\infty^+(x) \equiv \chi^+(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \infty), \\ 0, & x \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

$\chi_t^-(x) = 1 - \chi_t^+(x)$ при всех $t \in \dot{\mathbb{R}}$.

ЛЕММА 3.2. Справедливы следующие соотношения i -сильной локальной эквивалентности:

$$aI \stackrel{\xi, s, i}{\sim} a_\xi^i I. \quad (3.3)$$

Достаточно заметить, что о.-ф. $x \rightarrow a(x, \cdot)P_n$, $x \rightarrow P_n a(x, \cdot)I$ и аналогичные им по переменной y являются при любом n кусочно непрерывными на $\dot{\mathbb{R}}$ в норме алгебры $\text{End } L_2(\mathbb{R})$.

В дальнейшем нам понадобятся операторы растяжения $\tau_{i, \alpha}$ и сдвига $T_{i, \xi}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \tau_{1, \alpha} &= \tau_\alpha \otimes I, & \tau_{2, \alpha} &= I \otimes \tau_\alpha, \\ T_{1, \xi} &= T_\xi \otimes I, & T_{2, \xi} &= I \otimes T_\xi, \end{aligned}$$

где τ_α и T_ξ заданы в (2.6).

ЛЕММА 3.3. Пусть $B \in \text{End } L_2(\mathbb{R}^2)$ – однородный оператор по i -й переменной, т.е. выполняется условие $\tau_{i,\alpha} B = B\tau_{i,\alpha}$; тогда

$$\|B\| = \|Ba\| = \|aB\| = \| \|Ba\| \|_i = \| \|aB\| \|_i,$$

где a – любой оператор из локализирующего класса M_ξ^i , $\xi = 0$ или $\xi = \infty$, $\| \cdot \|_i$ – факторнорма по идеалу $\mathcal{K}^i$, т.е.

$$\| \|B\| \|_i = \inf_{K \in \mathcal{K}^i} \|B + K\|.$$

Доказательство аналогично [14], где рассмотрены однородные операторы локального типа. Подобные результаты применялись в [5], [9].

Ниже будет использован следующий результат, аналогичный лемме 3.3.

ЛЕММА 3.4. Пусть B – обобщенно однородный оператор в $L_2(\mathbb{R}^2)$, т.е. выполняется условие

$$\tau_\alpha \otimes \tau_\beta B = B\tau_\alpha \otimes \tau_\beta$$

для любых $\alpha, \beta > 0$, связанных соотношением $\alpha = \beta^\varrho$, $\varrho > 0$. Тогда

$$\|B\| = \|aB\| = \|Ba\| = \| \|aB\| \|_{12} = \| \|Ba\| \|_{12},$$

где a – любой оператор из локализирующего класса $M_{(0,0)}^{12}$.

Обозначим через $\mathcal{A}^1$ C^* -подалгебру в $\text{End } L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденную операторами вида $(aI + bS) \otimes I$, $I \otimes (cI + dS)$, где a, b – однородные функции степени нуль на $\mathbb{R}$, c, d – функции из $L_\infty(\mathbb{R})$. Аналогично определяется алгебра $\mathcal{A}^2$. Отметим, что операторы из алгебр $\mathcal{A}^i$ однородны по i -й переменной.

Рассмотрим идеалы $\mathcal{J}_\xi^i = \{K \in \tilde{\mathcal{L}}; K \stackrel{\xi, s, i}{\sim} 0\}$ ($\xi \in \dot{\mathbb{R}}$) и через $\| \cdot \|_{i,\xi}$ обозначим факторнорму по такому идеалу, т.е. положим

$$\| \|A\| \|_{i,\xi} = \inf_{K \in \mathcal{J}_\xi^i} \|A + K\|.$$

ЛЕММА 3.5. Для оператора A из алгебры $S_2\Phi$ в любой точке $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$ существует единственный оператор $A_{i,\xi} \in \mathcal{A}^i$ ($i = 1, 2$) такой, что $A \stackrel{\xi, s, i}{\sim} \tilde{A}_{i,\xi}$, где $\tilde{A}_{i,\xi} = T_{i,\xi}^{-1} A_{i,\xi} T_{i,\xi}$ при $\xi \in \mathbb{R}$, $\tilde{A}_{i,\xi} = A_{i,\xi}$ при $\xi = \infty$, причем

$$\|A_{i,\xi}\| = \| \|A\| \|_{i,\xi}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем $\xi = 0$, так как случай $\xi \in \mathbb{R}$ сводится к нему после замены оператора A оператором $T_{i,\xi}^{-1}AT_{i,\xi}$, а случай $\xi = \infty$ рассматривается аналогично $\xi = 0$.

Пусть A – характеристический бисингулярный оператор вида (3.2); тогда в силу леммы 3.2 имеем

$$A \stackrel{0,s,i}{\sim} A_{i,0} = a_0^i I + b_0^i S \otimes I + c_0^i I \otimes S + d_0^i S \otimes S.$$

Для операторов типа (3.1) полагаем

$$A_{i,0} = \sum_{k=1}^N (A_{1k})_{i,0} \dots (A_{Nk})_{i,0}.$$

Ясно, что $A_{i,0} \in \mathcal{A}^i$. Далее, ввиду леммы 3.3 при любом n и $j \neq i$ имеем

$$\|A_{i,0}P_n^j\| = \|A_{i,0}aP_n^j\| \leq \|(A+K)aP_n^j\| + \|(A_{i,0}-A-K)aP_n^j\|, \quad (3.5)$$

где a – любой оператор из локализирующего класса M_0^i , K – любой оператор из идеала $\mathcal{J}_0^i$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и выберем операторы K и a так, чтобы

$$\|A+K\| \leq \|A\|_{i,0} + \varepsilon, \quad \|(A_{i,0}-A-K)aP_n^j\| < \varepsilon.$$

Тогда вследствие произвольности ε из (3.5) имеем

$$\|A_{i,0}\| \leq \sup_n \|A_{i,0}P_n^j\| \leq \|A\|_{i,0} = \|A_{i,0}\|_{i,0},$$

чем фактически завершается доказательство равенства (3.4), так как распространение на всю алгебру осуществляется предельным переходом. Единственность оператора $A_{i,\xi}$ следует из соотношения (3.4).

Пусть $\theta_\xi^i: S_2\Phi \rightarrow \mathcal{A}^i$ – отображение, определенное в лемме 3.5, т.е. $\theta_\xi^i(A) = A_{i,\xi}$.

ЛЕММА 3.6. *Оператор A из $S_2\Phi$ i -сильно обратим в точке $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда оператор $\theta_\xi^i(A)$ обратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что θ_ξ^i – морфизм C^* -алгебр и $\ker \theta_\xi^i = S_2\Phi \cap \mathcal{J}_\xi^i$, поэтому в силу предложения 1.2 имеет место изоморфизм C^* -алгебр $S_2\Phi/(S_2\Phi \cap \mathcal{J}_\xi^i)$ и $\theta_\xi^i(S_2\Phi) \subset \mathcal{A}^i$. Вследствие предложения 1.1 C^* -алгебра $S_2\Phi/(S_2\Phi \cap \mathcal{J}_\xi^i)$ изоморфна C^* -алгебре $(S_2\Phi + \mathcal{J}_\xi^i)/\mathcal{J}_\xi^i$. Далее, в силу предложения 1.1 обратимость оператора $\theta_\xi^i(A)$ эквивалентна его обратимости в алгебре $\theta_\xi^i(S_2\Phi)$, а обратимость в алгебре $(S_2\Phi + \mathcal{J}_\xi^i)/\mathcal{J}_\xi^i$ эквивалентна обратимости в алгебре $\tilde{\mathcal{L}}/\mathcal{J}_\xi^i$. Наконец, остается заметить, что i -сильная обратимость оператора A в точке ξ и есть обратимость его факторкласса в алгебре $\tilde{\mathcal{L}}/\mathcal{J}_\xi^i$.

Обозначим через $C_{2 \times 2}^0(\overline{\mathbb{R}}, S_1L_\infty(\mathbb{R}))$ C^* -алгебру всех непрерывных на $\overline{\mathbb{R}}$ о.-ф. вида $(A_{ij}(\xi))_{ij=1}^2$, где $A_{ij}(\xi)$ – операторы из C^* -алгебры $S_1L_\infty(\mathbb{R})$ всех сингулярных операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с коэффициентами из $L_\infty(\mathbb{R})$, причем $A_{12}(\pm\infty) = A_{21}(\pm\infty) = 0$.

ЛЕММА 3.7. *Существует единственный изоморфизм C^* -алгебр*

$$\mu^i: \mathcal{A}^i \rightarrow C_{2 \times 2}^0(\overline{\mathbb{R}}, S_1 L_\infty(\mathbb{R})),$$

удовлетворяющий условию

$$\mu^i(aI) = \begin{pmatrix} a_{-0}^i & 0 \\ 0 & a_{+0}^i \end{pmatrix} I,$$

где a – функция, однородная по i -й переменной, $a_{\pm 0}^i$ – ее предельные значения по i -й переменной в точке $x = 0$,

$$\mu^i(S^{\alpha_1} \otimes S^{\alpha_2}) = (s(\xi))^{\alpha_i} S^{\alpha_j},$$

где $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1$; $j, i = 1, 2$, $i \neq j$; $s(\xi)$ – матрица (2.2).

Доказательство осуществляется применением пространственного изоморфизма (2.3) к операторам алгебры $\mathcal{A}^i$.

Комбинируя леммы 3.6 и 3.7, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $\sigma_\xi^i = \mu^i \circ \theta_\xi^i$ – композиция морфизмов, определенных в леммах 3.5–3.7. Тогда оператор A из алгебры $S_2\Phi$ i -сильно обратим в точке $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда операторы $\sigma_\xi^i(A)(\eta)$ обратимы для всех $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Достаточно заметить, что обратимость о.-ф. $\{\sigma_\xi^i(A)(\eta)\}$ в алгебре $C_{2 \times 2}^0(\overline{\mathbb{R}}, S_1 L_\infty(\mathbb{R}))$ эквивалентна обратимости всех операторов $\sigma_\xi^i(A)(\eta)$, $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$.

2. Ниже исследуется вопрос об обратимости бисингулярных операторов $A \in S_2\Phi$ по идеалу $\mathcal{K}^{12}$ (12-обратимость) в алгебре $\tilde{\mathcal{L}}^0$. Как отмечалось выше, для этого можно использовать локальный принцип Гохберга–Крупника [16, с.353–356] по системе локализующих классов $\{M_\tau^{12}\}$, $\tau = (\xi, \eta) \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$. Последнее нуждается в некотором уточнении. Строго говоря, локальный принцип следует применять к элементам факторалгебры $\tilde{\mathcal{L}}^0/\mathcal{K}^{12}$ по системе локализующих классов $\{[M_\tau^{12}]_{12}\}$, где $[M_\tau^{12}]_{12}$ – множество факторклассов $[a]_{12}$ элементов $a \in M_\tau^{12}$ в факторалгебре $\tilde{\mathcal{L}}^0/\mathcal{K}^{12}$. Удобнее, однако, иметь дело с операторами, а не с их факторклассами. Для этого достаточно заметить, что $[M_\tau^{12}]_{12}$ -эквивалентность факторклассов $[A]_{12}$ и $[B]_{12}$ операторов A и B из $\tilde{\mathcal{L}}^0$ равносильна следующему условию:

$$\inf_{a \in M_\tau^{12}} \|(A - B)a\| = \inf_{a \in M_\tau^{12}} \|a(A - B)\| = 0,$$

которое мы будем называть *12-локальной эквивалентностью операторов A и B в точке τ* и обозначать $A \stackrel{\tau, 12}{\sim} B$. Последнее утверждение есть следствие того факта, что для любой точки $\tau \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$ и оператора K из идеала $\mathcal{K}^{12}$ выполняются соотношения

$$\inf_{a \in M_\tau^{12}} \|Ka\| = \inf_{a \in M_\tau^{12}} \|aK\| = 0.$$

Кроме того, $[M_\tau^{12}]_{12}$ -обратимость элемента $[A]_{12}$ равносильна обратимости факторкласса $[A]_{12,\tau}$ в факторалгебре $S_2\Phi/(S_2\Phi \cap \mathcal{J}_\tau^{12})$, где $\mathcal{J}_\tau^{12}$ – идеал всех операторов из $\tilde{\mathcal{L}}^0$, для которых $A \stackrel{\tau,12}{\sim} 0$. Это доказывается аналогично лемме 3.5 с использованием предложений 1.1 и 1.2. Последнее свойство оператора A будем для краткости называть *12-локальной обратимостью оператора A в точке τ* .

Далее, заметим, что класс Φ содержит функции, которые, в отличие от непрерывных функций или кусочно непрерывных функций с достаточно регулярными линиями разрыва, вообще говоря, “плохо” локализируются в точках из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Поэтому в общем случае вопрос о 12-локальной обратимости бисингулярных операторов остается открытым. Если же ограничиться классами “хорошо” локализуемых коэффициентов, то ситуация сводится к исследованию обратимости элементов некоторых канонических алгебр бисингулярных операторов, удовлетворяющих определенным условиям инвариантности. Эти результаты получены в § 2.

Прежде всего отметим простой результат для характеристических операторов вида

$$A = \sum a_{ij} P_{ij}, \quad (3.6)$$

где $i, j = +$ или $i, j = -$, $a_{ij} \in \Phi$, $P_{\pm\pm} = (1/4)(I \pm S) \otimes (I \pm S)$.

ТЕОРЕМА 3.2 [12]. Пусть для каждой точки $\tau = (\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ существуют окрестность U_τ и константы $\alpha_{ij}(\tau) \neq 0$ такие, что

$$\sum_{i,j} \operatorname{ess\,sup}_{(x,y) \in U_\tau} \left| 1 - \frac{a_{ij}(x,y)}{\alpha_{ij}(\tau)} \right| < 1. \quad (3.7)$$

Тогда оператор вида (3.6) обратим по идеалу $\mathcal{K}^{12}$ в алгебре $\tilde{\mathcal{L}}^0$, причем его 12-регуляризатор можно выбрать из алгебры $S_2\Phi$.

Комбинируя теоремы 3.1 и 3.2, получаем достаточные условия фредгольмовости характеристических бисингулярных операторов.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть A – характеристический бисингулярный оператор вида (3.2). Если выполняется условие (3.7) и для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и $\eta \in \mathbb{R}$ операторы $\sigma_\xi^i(A)(\eta)$ ($i = 1, 2$), определенные в теореме 3.1, обратимы, то оператор A является фредгольмовым оператором.

Перейдем к исследованию 12-обратимости бисингулярных операторов с “хорошо” локализуемыми коэффициентами.

Пусть Γ – сложный контур на плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящий из простых ограниченных кривых типа Ляпунова, которые попарно не пересекаются: $\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \gamma_j$. Обозначим через R_Γ^2 множество точек, полученное из $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Gamma$ добавлением обоих берегов разрезов каждой кривой γ_j , сливающихся в концевых точках, если γ_j – разомкнутая кривая. Топологизируем R_Γ^2 , допуская для точек разрезов, отличных от концов, односторонние окрестности. В результате получим, что R_Γ^2 является компактным хаусдорфовым пространством. Далее, будем предполагать, что кривые γ_j удовлетворяют следующему условию: для каждой внутренней точки $(\xi, \eta) \in \gamma_j$ существует окрестность U , в которой кривая γ_j допускает параметризацию $y = y(x)$ или $x = x(y)$ такую, что существует замена переменной $x = \xi + \phi(t)$

или $y = \eta + \phi(t)$, $t \in [-\delta, \delta]$, $\delta > 0$, причем $\phi(t)$ непрерывно дифференцируема, $\phi'(t)(> 0)$ удовлетворяет условию Гёльдера и кривая γ_j в окрестности U определяется уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \xi + \phi(t), & \text{или} & & x &= \xi + \psi_\varrho(t), \\ y &= \eta + \psi_\varrho(t) & & & y &= \eta + \phi(t), \end{aligned}$$

где $\psi_\varrho(t)$ – однородная функция вида $\psi_\varrho(t) = \pm |t|^\varrho (\operatorname{sgn} t)^\varepsilon$, $\varrho > 0$, $\varepsilon = 0, 1$.

Если имеет место первый случай, то будем говорить, что точка (ξ, η) имеет тип $(1, \psi_\varrho)$, во втором случае – тип $(2, \psi_\varrho)$. Например, легко проверяется, что для окружности $\gamma = \{(x, y); x^2 + y^2 = R^2\}$ имеем при $\xi\eta > 0$

$$\begin{aligned} x &= \xi + \phi(t), & y &= \eta - t, \\ \phi(t) &= -\xi + \operatorname{sgn} \xi \sqrt{\xi^2 + 2t\eta - t^2}; \end{aligned}$$

при $\xi\eta < 0$

$$\begin{aligned} x &= \xi + \phi(t), & y &= \eta + t, \\ \phi(t) &= -\xi + \operatorname{sgn} \xi \sqrt{\xi^2 - 2t\eta - t^2}; \end{aligned}$$

если же $(\xi, \eta) = (0, \pm R)$ или $(\xi, \eta) = (\pm R, 0)$, то

$$\begin{aligned} x &= \phi(t), & \text{или} & & x &= \pm R \mp t^2, \\ y &= \pm R \mp t^2 & & & y &= \phi(t), \end{aligned}$$

где $\phi(t) = t\sqrt{2R - t^2}$.

Обозначим через $C(R_\Gamma^2)$ множество всех непрерывных на R_Γ^2 функций. Ясно, что $C(R_\Gamma^2) \subset \Phi$, причем отображения $x \rightarrow a(x, \cdot)I$ и $y \rightarrow a(\cdot, y)I$ при $a \in C(R_\Gamma^2)$ являются сильно непрерывными о.-ф. из $\mathbb{R}$ в $\operatorname{End} L_2(\mathbb{R})$.

Пусть $PC(\mathbb{R})$ – множество кусочно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций. Обозначим через Ψ алгебру функций вида $a + b + cd$, где $a, c \in C(R_\Gamma^2)$ и $b, d \in PC = PC(\mathbb{R}) \otimes PC(\mathbb{R})$. Очевидно, что $\Psi \subset \Phi$.

Рассмотрим C^* -алгебру $S_2\Psi$, порожденную бисингулярными операторами в $L_2(\mathbb{R}^2)$, с коэффициентами из Ψ . Покажем, что исследование 12-локальной обратимости элементов из алгебры $S_2\Psi$ сводится к исследованию обратимости элементов некоторых канонических алгебр бисингулярных операторов с определенными условиями инвариантности. Именно, обозначим через $\mathcal{A}^1(\Psi_\varrho)$ ($\mathcal{A}^2(\Psi_\varrho)$) C^* -алгебру операторов, порожденную операторами $S \otimes I$, $I \otimes S$ и операторами умножения на функции $\operatorname{sgn} x$, $\operatorname{sgn} y$, $\operatorname{sgn}(y - \psi_\varrho(x))$ ($\operatorname{sgn}(x - \psi_\varrho(y))$). Отметим, что операторы из $\mathcal{A}^i(\psi_\varrho)$ обладают следующими свойствами инвариантности:

$$\tau_\alpha \otimes \tau_\beta A = A \tau_\alpha \otimes \tau_\beta$$

при любых $\alpha, \beta > 0$, связанных условием $\beta = \alpha^\varrho$ при $i = 1$, $\alpha = \beta^\varrho$ при $i = 2$.

Рассмотрим фиксированную внутреннюю точку (ξ, η) кривой Γ . Предположим, что в окрестности этой точки кривая Γ допускает параметризацию $x = \xi + \phi(t)$, $y = \eta + \psi_\varrho(t)$, т.е. (ξ, η) имеет тип $(1, \psi_\varrho)$. Продолжим отображение $t \rightarrow \phi(t)$ до диффеоморфизма $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, тождественного в некоторой окрестности точки ∞ . Обозначим через θ_ζ унитарный оператор сдвига, действующий по формуле

$$(\theta_\zeta f)(x) = |\zeta'(x)|^{1/2} f(\zeta(x)).$$

Отметим, что коммутатор $[\theta_\zeta, S]$ является компактным оператором [23, с. 35]. Введем оператор суперпозиции $H = (\theta_\zeta T_\xi) \otimes T_\eta$, действующий по формуле

$$(Hf)(x, y) = |\zeta'(x)|^{1/2} f(\xi + \zeta(x), \eta + y).$$

Пусть A – оператор из $S_2\Psi$; тогда существует единственный оператор $A_{\xi, \eta} \in \mathcal{A}^1(\psi_\varrho)$, для которого $HAH^{-1} \stackrel{(0,0),12}{\sim} A_{\xi, \eta}$. Действительно, для образующих алгебры $S_2\Psi$ имеем

$$HS \otimes IH^{-1} \stackrel{(0,0),12}{\sim} S \otimes I, \quad HI \otimes SH^{-1} = I \otimes S;$$

если $a \in \text{ПС}$ и $a_{\pm\pm} = \lim_{x \rightarrow \xi \pm 0, y \rightarrow \eta \pm 0} a(x, y)$, то

$$HaIH^{-1} \stackrel{(0,0),12}{\sim} \left(\sum a_{ij} \chi^i(x) \chi^j(y) \right) I,$$

где $i, j = +, -$; если $a \in C(\mathbb{R}_\Gamma^2)$ и $a \equiv a^\pm(\xi, \eta) = \lim_{y \rightarrow \eta \pm 0} a(\xi, y)$, то

$$HaIH^{-1} \stackrel{(0,0),12}{\sim} (a^+ \chi^+(y - \psi_\varrho(x)) + a^- \chi^-(y - \psi_\varrho(x))) I.$$

По мультипликативности и аддитивности оператор $A_{\xi, \eta}$ определяется для всех операторов $A \in S_2\Psi$, имеющих вид (3.1).

Вследствие леммы 3.4 имеем

$$\|A_{\xi, \eta}\| = \|A_{\xi, \eta} a\| \leq \|H(A + K)H^{-1}a\| + \|(H(A + K)H^{-1} - A_{\xi, \eta})a\|,$$

где a – произвольный элемент из $M_{(0,0)}^{12}$. Фиксируя произвольное $\varepsilon > 0$ и выбирая операторы $K \in \mathcal{J}_{\xi, \eta}^{12}$ и $a \in M_{(0,0)}^{12}$ так, что

$$\begin{aligned} \|A + K\| &\leq \|A\|_{12, (\xi, \eta)} + \varepsilon, \\ \|(H(A + K)H^{-1} - A_{\xi, \eta})a\| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

получаем $\|A_{\xi, \eta}\| \leq \|A\|_{12, (\xi, \eta)} + \varepsilon$, что ввиду произвольности ε дает $\|A_{\xi, \eta}\| \leq \|A\|_{12, (\xi, \eta)}$. Далее, имеем $\|A\|_{12, (\xi, \eta)} = \|HAH^{-1}\|_{12, (0,0)} = \|A_{\xi, \eta}\|_{12, (0,0)} \leq \|A_{\xi, \eta}\|$ и, таким образом, справедливо равенство

$$\|A_{\xi, \eta}\| = \|A\|_{12, (\xi, \eta)}. \quad (3.8)$$

По непрерывности соответствие $A \rightarrow A_{\xi, \eta}$ распространяется на всю алгебру $S_2\Psi$ с сохранением равенства (3.8). Обозначим определенное выше соответствие $A \rightarrow A_{\xi, \eta}$ через $\theta_{\xi, \eta}^{12}$. Тогда справедлива

ЛЕММА 3.8. Пусть (ξ, η) – внутренняя точка кривой Γ , имеющая тип (i, ψ_ϱ) . Отображение $\theta_{\xi, \eta}^{12}: S_2\Psi \rightarrow \mathcal{A}^i(\psi_\varrho)$ является морфизмом C^* -алгебр, порождающим изоморфизм

$$\frac{S_2\Psi}{S_2\Psi \cap \mathcal{J}_{\xi, \eta}^{12}} \overset{*}{\sim} \mathcal{A}^i(\psi_\varrho).$$

В частности, оператор A из алгебры $S_2\Psi$ 12-локально обратим в точке $(\xi, \eta) \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда оператор $\theta_{\xi, \eta}^{12}(A)$ обратим.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Алгебра $\mathcal{A}^i(\psi_\varrho)$ совпадает с алгеброй $\mathcal{A}_{\varepsilon, \varrho}$, исследованной в п. 3 из § 2.

Наконец, рассмотрим произвольную точку $(\xi, \eta) \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$, не являющуюся внутренней точкой кривой Γ . В этом случае строится морфизм $\theta_{\xi, \eta}^{12}: S_2\Psi \rightarrow \mathcal{A}^{12}$, где $\mathcal{A}^{12}$ – C^* -алгебра, определенная и исследованная в п. 3 из § 2.

ЛЕММА 3.9. Морфизм $\theta_{\xi, \eta}^{12}$ однозначно определяется заданием на образующих:

$$\begin{aligned} \theta_{\xi, \eta}^{12}(S \otimes I) &= S \otimes I, & \theta_{\xi, \eta}^{12}(I \otimes S) &= I \otimes S, \\ \theta_{\xi, \eta}^{12}(aI) &= \sum a_{ij} \chi^i(x) \chi^j(y) I, \end{aligned}$$

где $i, j = +, -$; $a_{\pm\pm} = \lim a(x, y)$ при $x \rightarrow \xi \pm 0$, $y \rightarrow \pm 0$ и порождает изоморфизм

$$\frac{S_2\Psi}{S_2\Psi \cap \mathcal{J}_{\xi, \eta}^{12}} \overset{*}{\sim} \mathcal{A}^{12}.$$

Применение локального принципа Гохберга–Крупника приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3.4. Оператор A из алгебры $S_2\Psi$ 12-обратим тогда и только тогда, когда для всех точек $(\xi, \eta) \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$ обратимы операторы $\theta_{\xi, \eta}^{12}(A)$.

Комбинируя этот результат с теоремой 3.1 и применяя теорему 1.1, приходим к следующему критерию фредгольмовости бисингулярных операторов.

ТЕОРЕМА 3.5. Оператор A из алгебры $S_2\Psi$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда:

- 1) для любой внутренней точки (ξ, η) кривой Γ обратимы операторы $\theta_{\xi, \eta}^{12}(A)$;
- 2) для любой точки $(\xi, t) \in \dot{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ обратимы операторы $\sigma_\xi^i(A)(t)$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что в случае, когда (ξ, η) не является внутренней точкой кривой Γ , обратимость оператора $\theta_{\xi, \eta}^{12}(A)$ следует из обратимости операторов $\theta_\xi^1(A)$ и $\theta_\eta^2(A)$. Это следует из легко проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} T_{2, \eta} \theta_\xi^1(A) T_{2, \eta}^{-1} &\overset{(0,0),12}{\sim} \theta_{\xi, \eta}^{12}(A), & \eta &\neq \infty, \\ T_{1, \xi} \theta_\eta^2(A) T_{1, \xi}^{-1} &\overset{(0,0),12}{\sim} \theta_{\xi, \eta}^{12}(A), & \xi &\neq \infty, \\ \theta_\xi^1(A) &\overset{(0,\infty),12}{\sim} \theta_{\xi, \infty}^{12}(A), & \eta &= \infty, \\ \theta_\eta^2(A) &\overset{(\infty,0),12}{\sim} \theta_{\infty, \eta}^{12}(A), & \xi &= \infty. \end{aligned}$$

§ 4. Индекс бисингулярных операторов

Вопрос о вычислении индекса бисингулярных операторов был исследован для непрерывных коэффициентов в [24], [25], для коэффициентов класса PC – в [26].

Ниже рассматривается вычисление индекса бисингулярных операторов из C^* -алгебры $S_2(R_\Gamma^2)$. Эта алгебра порождается характеристическими бисингулярными операторами с коэффициентами класса $C(R_\Gamma^2)$, причем предполагается, что кривая Γ разрывов коэффициентов удовлетворяет следующим условиям: $\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \gamma_j$, где γ_j – простые разомкнутые кривые типа Ляпунова, попарно не пересекающиеся и допускающие параметризацию вида $\gamma_j = \{(x, y); y = y_j(x), x \in [a_j, b_j]\}$, где $y'_j(x) \neq 0$ при $x \in [a_j, b_j]$. Отметим, что к кривой Γ предъявляются более жесткие требования, чем в § 3.

Излагаемый в этом параграфе подход связан с редукцией к случаю непрерывных коэффициентов. Точнее, устанавливается следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть A – Φ -оператор из алгебры $S_2C(R_\Gamma^2)$. Тогда существуют Φ -операторы A_j ($j = 1, \dots, N$) из алгебр $S_2C(R_{\gamma_j}^2)$ и функция $g(x, y) \neq 0$ класса $C(R_\Gamma^2)$ такие, что оператор

$$\tilde{A} = A_1 A_2 \dots A_N g I \quad (4.1)$$

принадлежит C^* -алгебре $S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$ бисингулярных операторов с непрерывными коэффициентами из класса $C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$. В частности, оператор $\tilde{A}$ 12-эквивалентен характеристическому бисингулярному оператору A_0 вида

$$A_0 = (P_{++}a + P_{+-}b + P_{-+}c + P_{--}d)I,$$

где a, b, c, d – функции класса $C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$.

Из факторизационной формулы (4.1) следует, что

$$\text{ind } \tilde{A} = \sum_{j=1}^N \text{ind } A_j + \text{ind } A, \quad (4.2)$$

и, таким образом, вычисление индекса оператора A сводится к исследованному случаю непрерывных коэффициентов, так как индексы операторов A_j определяются в процессе их построения.

Доказательство теоремы 4.1 базируется на результатах § 2 и ряде лемм.

ЛЕММА 4.1. Пусть A – оператор из алгебры $S_2C(R_\Gamma^2)$, a – функция класса $C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$, равная нулю в некоторой окрестности кривой Γ . Тогда операторы aA, AaI принадлежат алгебре $S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если d – функция из $C(R_\Gamma^2)$, то ad – функция из $C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$, если B – оператор из $S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$, то операторы $[aI, B]dI$, $d[aI, B]$ принадлежат $S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$ (здесь $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор операторов). Последнее следует из того, что $[aI, B]$ принадлежит $\mathcal{K}^{12} \cap S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$ и, следовательно, равномерно аппроксимируется суммами операторов вида $D \otimes K$ и $K \otimes D$, где $D \in S_1C(\dot{\mathbb{R}})$, $K \in \mathcal{K}$. В то же время операторы $(K \otimes I)dI$, $(I \otimes K)dI$, $d(K \otimes I)$, $d(I \otimes K)$ являются операторами умножения на непрерывные на $\dot{\mathbb{R}}$ компактнозначные оператор-функции и, следовательно, принадлежат $\mathcal{K}^{12} \cap S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$.

Поэтому если оператор A имеет вид $A = d_1B_1 \dots d_nB_n$, где d_i – функции из $C(R_\Gamma^2)$, B_j – операторы из $S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$, то оператор aA можно представить в виде

$$aA = B_1ad_1d_2B_2 \dots + [ad_1I, B_1]d_2B_2 \dots$$

В этом представлении второе слагаемое принадлежит $\mathcal{K}^{12} \cap S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$, поэтому, применяя аналогичный прием к первому слагаемому, окончательно получаем, что оператор aA принадлежит алгебре $S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$.

На всю алгебру утверждение распространяется предельным переходом.

ЛЕММА 4.2. $\mathcal{K}^{12} \cap S_2C(R_\Gamma^2) = \mathcal{K}^{12} \cap S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду предыдущей леммы достаточно установить, что для любого компактного оператора $K \in \text{End } L_2(\mathbb{R})$ выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(K \otimes I) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(I \otimes K) = 0 \quad (4.3)$$

в смысле операторной нормы, где a_ε – функция из $C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$, $0 \leq a_\varepsilon \leq 1$, и a_ε отлична от нуля лишь в ε -окрестности кривой Γ . Ясно, что достаточно рассмотреть в качестве K одномерный оператор вида

$$(Kf)(x) = \phi(x) \int_{\mathbb{R}} \psi(t)f(t) dt,$$

где ϕ, ψ – функции из пространства $L_2(\mathbb{R})$. Тогда соотношение (4.3) следует из равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_y \|a_\varepsilon(\cdot, y)\phi\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0.$$

ЛЕММА 4.3. Пусть A – оператор из алгебры $S_2C(R_\Gamma^2)$ такой, что для любой точки $z = (x, y)$ из Γ выполняется соотношение

$$A \stackrel{z, 12}{\sim} \sum P_{ij} a_{ij}^z I,$$

где a_{ij}^z – функции класса $C(R_\Gamma^2)$. Тогда существуют функции b_{ij} из $C(R_\Gamma^2)$ такие, что

$$A = \sum P_{ij} b_{ij} I + K_{12}, \quad (4.4)$$

где K_{12} – оператор из $S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{K}^{12}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z = (x, y) \notin \Gamma$, то очевидно, что $A \stackrel{z,12}{\sim} \sum a_{ij}^z P_{ij}$, где a_{ij}^z – некоторые константы. 12-локальная полунепрерывность семейства операторов $A_z = \sum P_{ij} a_{ij}^z I$ влечет локальную полунепрерывность семейств функций $a_{ij}^z \in C(R_\Gamma^2)$. Поэтому, положив $b_{ij}(z) = a_{ij}^z$ при $z \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}} \setminus \Gamma$, получим, что b_{ij} – непрерывные функции на $\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}} \setminus \Gamma$, непрерывно продолжающиеся до функции из $C(R_\Gamma^2)$, за которой мы сохраним обозначение b_{ij} . Ясно, что оператор $\sum P_{ij} b_{ij} I$ является 12-огигающим семейства $\{A_z\}$, $z \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$. Поэтому выполняется равенство (4.4), в котором $K_{12} \in S_2C(R_\Gamma^2) \cap \mathcal{K}^{12}$. Для завершения доказательства остается использовать лемму 4.2.

ЛЕММА 4.4. Пусть A – оператор из алгебры $\mathcal{B}$, a – функция класса $C_0(\mathbb{R}^2)$, т.е. непрерывная функция с компактным в $\mathbb{R}^2$ носителем, и $\gamma \supset \text{supp } a \cap \{(x, y); x = y\}$ – некоторый отрезок. Тогда операторы aA , AaI принадлежат алгебре $S_2C(R_\gamma^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что алгебра $\mathcal{B}$ порождается операторами

$$I \otimes S, \quad S \otimes I, \quad \zeta_+ I \quad (\zeta_+(x, y) = \chi^+(y - x)).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $a(x, y) = a_1(x)a_2(y)$, где $a_i \in C_0(\mathbb{R})$. Ясно, что $a\zeta_+ \in C(R_\gamma^2)$. Далее, пусть $A = d_1 B_1 \dots d_n B_n$, где d_j – функции вида $d_j = \alpha_j^+ \zeta_+ + \alpha_j^- \zeta_-$, $\alpha_j^\pm = \text{const}$, B_j – операторы вида $B_j = S^{\varepsilon_j} \otimes S^{\delta_j}$, $\varepsilon_j, \delta_j = 0, 1$. Представим функцию a в форме $a = bc^n$, где $b = (a/|a|)|a|^{1/(n+1)}$, $c = |a|^{1/(n+1)}$ – функции из $C_0(\mathbb{R}^2)$. Имеем

$$aA = bd_1[c^n I, B_1]d_2 B_2 \dots + bd_1 B_1 c^n d_2 B_2 \dots \quad (4.5)$$

Учитывая, что коммутатор $[fI, S]$ для $f \in C_0(\mathbb{R})$ является компактным оператором, получаем, что $[c^n I, B_1]$ допускает представление

$$[c^n I, B_1] = D_1 K_1(x)I + D_2 K_2(y)I + K, \quad (4.6)$$

где K – компактный оператор в $L_2(\mathbb{R}^2)$, $K_1(\cdot), K_2(\cdot)$ – компактнозначные непрерывные о.-ф. с компактными носителями в $\mathbb{R}$, D_1, D_2 – операторы типа операторов B_j . Ввиду сильной непрерывности оператор-функций $x \rightarrow d_j(x, \cdot)I$, $y \rightarrow d_j(\cdot, y)I$ на $\mathbb{R}$ получаем, что оператор $[c^n I, B_1]d_2 I$ имеет представление, аналогичное (4.6). То же самое имеет место для оператора $[c^n I, B_1]d_2 B_2$ вследствие того, что коммутаторы $[K_1(x)I, S \otimes I]$, $[K_2(y)I, I \otimes S]$ являются компактными операторами в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Повторяя это рассуждение, убеждаемся, что первое слагаемое в (4.5) принадлежит $\mathcal{K}^{12} \cap S_2C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Второе слагаемое исследуется аналогичным образом. Поэтому приходим к выводу, что $aA \in S_2C(R_\gamma^2)$. На всю алгебру $\mathcal{B}$ утверждение распространяется предельным переходом.

ЛЕММА 4.5. Пусть $\{A(t)\}$ – о.-ф. из $C^0([a, b], \mathcal{B})$. Тогда существует оператор A из алгебры $S_2C(R_\gamma^2)$ ($\gamma = \{(x, x); x \in [a, b]\}$) такой, что для любой точки $z = (t, t)$ отрезка γ выполняется соотношение $A \stackrel{z,12}{\sim} A(t)$, причем $\|A\| \leq c \sup_t \|A(t)\|$, где c – некоторая абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим о.-ф. $\{A(t)\}$ на всю вещественную ось, полагая $A(t) = A(b)$ при $t > b$ и $A(t) = A(a)$ при $t < a$. Пусть χ – функция из $C_0(\mathbb{R}^2)$, равная единице в некоторой окрестности отрезка γ . Определим семейство операторов $\{A_{\xi, \eta}\}$, $(\xi, \eta) \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$, формулой

$$A_{\xi, \eta} = \zeta_{\xi}(x)\chi(x, y)A(\xi),$$

где ζ_{ξ} – функция из $C(\dot{\mathbb{R}})$, равная единице в некоторой окрестности точки ξ , причем при $\xi \in (a, b)$ ее носитель удовлетворяет условию $\text{supp } \zeta_{\xi} \subset (a, b)$. Ввиду леммы 4.4 все операторы $A_{\xi, \eta}$ принадлежат алгебре $S_2C(R_{\gamma}^2)$ (здесь, конечно, существенно, что $A(t)$ при $t = a, b$ является бисингулярным характеристическим оператором с постоянными коэффициентами). Далее, семейство $\{A_{\xi, \eta}\}$, $(\xi, \eta) \in \dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}$, 12-локально полунепрерывно. Действительно, взяв произвольную точку (ξ, η) для любой точки (θ, s) , где θ принадлежит окрестности ξ , в которой ζ_{ξ} равна единице, имеем

$$\|b(x)(A_{\xi, \eta} - A_{\theta, s})\| \leq \|A(\xi) - A(\theta)\|,$$

где $b \in C(\dot{\mathbb{R}})$ выбрана так, что b равна единице в некоторой окрестности θ , причем на $\text{supp } b$ функции ζ_{ξ} и ζ_{θ} равны единице. После этого существование оператора A следует из теоремы об 12-огигающей.

ЛЕММА 4.6. Пусть K – одномерный оператор вида

$$(Kf)(\eta) = \phi(\eta) \int_{\mathbb{R}} \psi(\theta)f(\theta) d\theta,$$

где $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^2)^1$. Пусть A -оператор из алгебры $\mathcal{B}$, отвечающий паре $(0, K)$ (см. теорему 2.4) и $a(x) \in C_0(\mathbb{R})$, $\text{supp } a \subset [a, b]$; тогда $a(x)A \in S_2C(R_{\gamma}^2)$, $\gamma = \{(x, x); x \in [a, b]\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 4.4 достаточно показать, что

$$\|a(x)b_R(y)A\| \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$, где $b_R(y) = 1 - b(y/R)$, $b \in C_0(\mathbb{R})$, $0 \leq b \leq 1$, $b(y) = 1$ при $-1 \leq y \leq 1$. Так как (см. формулу (2.13))

$$A = D^{-1}\tau_{|\xi|}^{-1}K\tau_{|\xi|}\chi^+(\xi)D,$$

то достаточно установить, что

$$\|a(x)b_R(y+x)F^{-1} \otimes F^{-1}\tau_{|\xi|}^{-1}K\| \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$. (Здесь F – оператор одномерного преобразования Фурье.) Положим $\hat{\phi}(y) = (F^{-1}\phi)(y)$ и, считая, что $\hat{\phi} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $\text{supp } \hat{\phi} \subset (0, \infty)$, определим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-1}(|\xi|^{1/2}\hat{\phi}(\xi))(x).$$

¹В процессе доказательства ϕ подчиняется более жестким условиям.

Тогда простые вычисления дают

$$(F^{-1} \otimes F^{-1})\tau_{|\xi|}^{-1}K\chi^+(\xi)g = \frac{\chi^+(y)}{y^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi\left(\frac{x-s}{y}\right) \psi(\theta) \hat{g}(s, \theta) ds d\theta,$$

где $g(\xi, \theta) \in L_2(\mathbb{R}^2)$, $\hat{g}(s, \theta) = (F^{-1} \otimes Ig)(s, \theta)$. Ввиду оценки

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} \Phi\left(\frac{x-s}{y}\right) \psi(\theta) \hat{g}(s, \theta) ds d\theta \right| \\ & \leq \|\psi\|_{L_2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{x-s}{y}\right) \right| \|\hat{g}(s, \cdot)\|_{L_2}^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{x-s}{y}\right) \right| ds \right\}^{1/2} \\ & \leq \|\psi\|_{L_2} \max_x |\Phi(x)|^{1/2} \|\Phi\|_{L_1}^{1/2} |y|^{1/2} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

приходим к выводу, что достаточно выполнения соотношения

$$\left\| a(x)b_R(y+x) \frac{\chi^+(y)}{y} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$.

Последнее очевидно, так как носитель рассматриваемой функции содержится в области $[a, b] \times [R-b, \infty)$.

ЛЕММА 4.7. Пусть $a, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \phi \subset (0, \infty)$, $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, K, τ, A – операторы вида

$$\begin{aligned} (Kf)(y) &= \phi(y) \int_{\mathbb{R}} \psi(\eta) f(\eta) d\eta, \\ (\tau f)(x, y) &= |x|^{-1/2} f\left(x, \frac{y}{x}\right), \\ (Ag)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(x-\xi) g(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где $\hat{a} = Fa$ – преобразование Фурье функции a . Тогда оператор

$$T = (A \otimes I\tau - \tau A \otimes I)I \otimes K$$

является компактным оператором в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить L_2 -суммируемость ядра оператора T , определяемого выражением $K(x, \xi, y, \eta) = k(x, \xi, y)\psi(\eta)$, где

$$k(x, \xi, y) = \hat{a}(x-\xi)|y|^{-1/2} \left(\theta\left(\frac{y}{\xi}\right) - \theta\left(\frac{y}{x}\right) \right), \quad \theta(s) = s^{1/2}\phi(s).$$

Пусть, например, $x > 0$, $\xi < 0$, т.е. $(x, \xi) \in \mathbb{R}_{+-}^2$; тогда

$$\|k\|_{L_2(\mathbb{R}_{+-}^2 \times \mathbb{R})} \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\theta(y)|^2 \frac{dy}{|y|} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\hat{a}(s)|^2 |s| ds \right\}^{1/2}.$$

Если же, например, $(x, \xi) \in \mathbb{R}_{++}^2$, то после замен $\xi = yt$, $x = ys$, $y = \varrho/(s-t)$ получаем

$$\|k\|_{L_2(\mathbb{R}_{++}^2 \times \mathbb{R})} \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\hat{a}(\varrho)|^2 |\varrho| d\varrho \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}_{++}^2} \frac{|\theta(1/t) - \theta(1/s)|^2}{|t-s|^2} dt ds \right\}^{1/2} < \infty.$$

ЛЕММА 4.8. Пусть A – фредгольмов оператор из алгебры $S_2C(R_\Gamma^2)$, γ – одна из кривых γ_j . Тогда существуют фредгольмов оператор A_γ из алгебры $S_2C(R_\gamma^2)$ и функция a из $C(R_\gamma^2)$ такие, что $A_\gamma A \stackrel{z,12}{\sim} aI$ для любой точки $z \in \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что, не нарушая общности, можно считать, что γ является отрезком прямой: $\gamma = \{(x, x); x \in [a, b]\}$. Рассмотрим произвольную точку $z = (t, t) \in \gamma$; тогда для оператора A существует единственный оператор $A(t) \in \mathcal{B}$ такой, что $A \stackrel{z,12}{\sim} A(t)$, причем $\{A(t)\} \in C^0([a, b], \mathcal{GB})$. Используя факторизационную теорему 2.5, представим о.-ф. $\{A(t)\}$ в виде

$$A(t) = Q_\theta(t)(I + A_1(t)) \dots (I + A_N(t))G_\kappa(t),$$

где $\{A_j(t)\} \in C^0([a, b], \mathcal{B})$, $\sup_{j,t} \|A_j(t)\| < \varepsilon < 1$, $\{Q_\theta(t)\}, \{G_\kappa(t)\}$ – о.-ф. вида (2.16), (2.15). Согласно лемме 4.5 существуют операторы A_j из алгебры $S_2C(R_\gamma^2)$ с $\|A_j\| < c\varepsilon < 1$ такие, что для любой точки $z = (t, t) \in \gamma$ выполняется соотношение $A_j \stackrel{z,12}{\sim} A_j(t)$. Ясно, что при достаточно малом ε операторы $I + A_j$ обратимы в алгебре $S_2C(R_\gamma^2)$. Далее, заметим, что для коэффициентов оператора $G_\kappa(t)$ выполняется соотношение $b(t, x, y)/a(t, x, y) = \bar{\alpha}(t)$. Продолжим функцию α на всю вещественную ось, положив $\alpha(t) = 1$ вне $[a, b]$, и рассмотрим оператор $R = I \otimes P_+ + \bar{\alpha}(t)I \otimes P_-$. Он обратим в алгебре $S_2C(R_\gamma^2)$ и в каждой точке $z = (t, t)$, $t \in [a, b]$, 12-локально эквивалентен оператору $G_\kappa(t)a^{-1}(t, x, y)I$.

Рассмотрим оператор $Q_\theta(t)$ вида (2.16). Обращая оператор $T_\theta(t)$ вида (2.17), получаем

$$T_\theta^{-1}(t) = I + (\beta_+(t)\chi^+(\xi) + \beta_-(t)\chi^-(\xi))Q,$$

где $\beta_\pm(t) = 1/\alpha_\pm(t) - 1$. Продолжим функции $\beta_\pm$ нулем на всю вещественную ось и рассмотрим оператор

$$A = I + \beta_+(x)Q_+ + \beta_-(x)Q_-,$$

где $Q_\pm = U^{-1}Q\chi^\pm(\xi)U$. В силу леммы 4.4 оператор A принадлежит алгебре $S_2C(R_\gamma^2)$ и в каждой точке $z = (t, t) \in \gamma$ является 12-локально эквивалентным оператору $I + \beta_+(t)Q_+ + \beta_-(t)Q_-$. Кроме того, вследствие леммы 4.7 оператор A унитарно эквивалентен оператору

$$\tilde{A} = I + (B_+\chi^+ + B_-\chi^-)I \otimes Q + T,$$

где $B_\pm = F\beta_\pm F^{-1}$ – операторы свертки в $L_2(\mathbb{R})$, T – компактный оператор в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Ясно, что $\text{ind } A$ совпадает с индексом парного оператора свертки $I + (B_+\chi^+ + B_-\chi^-)I$ (см., например, [18]). Теперь, полагая

$$A_\gamma = R^{-1}(I + A_N)^{-1} \dots (I + A_1)^{-1}A,$$

получаем оператор, удовлетворяющий нужным условиям. Действительно, в каждой точке $z = (t, t)$, $t \in [a, b]$, имеем $A_\gamma A \stackrel{z,12}{\sim} a(t, x, y)I$. Поэтому в качестве функции $a \in C(R_\gamma^2)$ можно взять функцию вида $\chi(x, y)a(x, x, y)$, где χ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ и равна единице в некоторой окрестности γ .

Завершим доказательство теоремы 4.1. Пусть A – фредгольмов оператор из алгебры $S_2C(R_\Gamma^2)$ и A_j ($j = 1, 2, \dots, N$) – фредгольмовы операторы из алгебр $S_2C(R_{\gamma_j}^2)$ такие, что A_N – оператор, построенный в соответствии с леммой 4.8 для оператора A и кривой γ_N , A_{N-1} – соответствующий оператор для оператора $A_N A$ и кривой γ_{N-1} и т.д., A_1 – соответствующий оператор для оператора $A_2 A_3 \dots A_N A$ и кривой γ_1 .

Учитывая, что оператор A_j для всех точек вне γ_j 12-локально эквивалентен бисингулярному оператору с постоянными коэффициентами, получаем, что оператор $B = A_1 A_2 \dots A_N A$ удовлетворяет следующим соотношениям: $B \stackrel{z,12}{\sim} B_z a^z I$, где $z \in \Gamma$, B_z – бисингулярный оператор с постоянными коэффициентами, a^z – функция из $C(R_\Gamma^2)$. Применяя лемму 4.3, получим

$$B = \sum P_{ij} b_{ij} I + K,$$

где

$$K \in \mathcal{H}^{12} \cap S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}}), \quad b_{ij} \in C(R_\Gamma^2), \quad b_{ij} \neq 0.$$

Так как в каждой точке $z \in \Gamma$, $b_{ij} I \stackrel{z,12}{\sim} b_{ij}^z a^z I$, где b_{ij}^z – постоянные коэффициенты оператора B_z , a^z – функция из $C(R_\Gamma^2)$, то $(b_{ij}/b_{++}) I \stackrel{z,12}{\sim} (b_{ij}^z/b_{++}^z) I$, поэтому оператор $B(1/b_{++}) I$ принадлежит алгебре $S_2C(\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{R}})$, что и завершает доказательство теоремы 4.1.

Список литературы

1. Симоненко И. Б. О многомерных дискретных свертках // Математические исследования. 1968. Т. 3. № 1. С. 108–122.
2. Симоненко И. Б. К вопросу о разрешимости бисингулярных и полисингулярных уравнений // Функци. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 1. С. 93, 94.
3. Симоненко И. Б. Краевые задачи аналитических функций двух переменных и связанные с ними интегральные уравнения // ДАН СССР. 1971. Т. 198. № 3. С. 551, 552.
4. Пилиди В. С. О многомерных бисингулярных операторах // ДАН СССР. 1971. Т. 201. С. 787–789.
5. Пилиди В. С. Локальный метод в теории линейных операторных уравнений типа бисингулярных интегральных уравнений // Матем. анализ и его прилож. 1971. Т. 3. С. 81–105.
6. Пилиди В. С. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p // Матем. исследования. 1972. Т. 3. № 3. С. 167–175.
7. Дудучава Р. В. О бисингулярных интегральных операторах и операторах типа свертки на квадранте // ДАН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 279–282.
8. Дудучава Р. В. Бисингулярные интегральные операторы и граничные задачи теории аналитических функций в пространствах обобщенных функций // ДАН СССР. 1975. Т. 224. № 5. С. 996–999.
9. Дудучава Р. В. О бисингулярных интегральных операторах с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1976. Т. 101. № 4. С. 584–609.
10. Дудучава Р. В. Интегральные операторы свертки на квадранте с разрывными символами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 2. С. 382–412.
11. Сазонов Л. И. Бисингулярные характеристические операторы с разрывными коэффициентами в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ // Функци. анализ и его прилож. 1985. Т. 12. № 2. С. 90, 91.
12. Сазонов Л. И. О бисингулярных операторах с измеримыми коэффициентами // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. № 2. С. 389–398.

13. Диксмье Ж. C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
14. Симоненко И. Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. 1 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 3. С. 567–586; 2 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 4. С. 757–782.
15. Симоненко И. Б., Чинь Нзок Минь. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно непрерывными коэффициентами. Нётеровость. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1986.
16. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973.
17. Наймарк М. Ю. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
18. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
19. Сазонов Л. И. О бисингулярных операторах в пространстве $L_p(\mathbb{R}^2)$ с некоторыми условиями инвариантности // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 4. С. 74–82.
20. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
21. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.
22. Каруби М. K -теория. Введение. М.: Мир, 1981.
23. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
24. Пилиди В. С. Вычисление индекса бисингулярного оператора // Функц. анализ и его прилож. 1973. Т. 7. № 4. С. 93, 94.
25. Пилиди В. С. К вопросу об индексе бисингулярных операторов // Матем. анализ и его прилож. 1975. Т. 7. С. 123–136.
26. Дудучава Р. В. Об индексе бисингулярных интегральных операторов. 1 // Math. Nachr. В. 1979. В. 91 S. 431–460; 2 // Math. Nachr. В. 1979. В. 92 S. 289–307.

Поступило в редакцию
19.II.1996