Общероссийский математический портал

Д. С. Теляковский, О принципе Фрагмена–Линделёфа для субгармонических функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 2, 201–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/im239>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:27:25

УДК 517.5

Д. С. Теляковский

О принципе Фрагмена–Линделёфа для субгармонических функций

Рассматриваются субгармонические в области $D \subset \mathbb{C}$ функции $f(z)$, которые не превосходят некоторой постоянной C во всех точках $\partial D \setminus \zeta$, $\zeta \in \partial D$. Теоремы типа Фрагмена–Линделёфа дают такую зависящую от структуры области D оценку сверху а priori возможного роста $f(z)$ при $z \rightarrow \zeta$, что удовлетворяющие этой оценке функции будут не превосходить C во всей области D . Получена теорема типа Фрагмена–Линделёфа, в которой ограничение на возможный рост $f(z)$ при $z \rightarrow \zeta$ выражено через нижнюю плотность относительно плоской меры Лебега множества $\mathbb{C} \setminus D$ в точке ζ .

Библиография: 3 наименования.

Пусть функция $f(z)$ субгармонична в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$. Будем говорить, что $f(z)$ не превосходит некоторого действительного числа C в точке $\xi \in \partial D$, если

$$\overline{\lim} f(z) \leq C, \quad z \rightarrow \xi, \quad z \in D.$$

Как обычно, положим $f^+(z) := \max(f(z), 0)$.

Приведем классическую теорему типа Фрагмена–Линделёфа для субгармонических функций на плоскости.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ограниченная область D лежит в угле раствора $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leq 2$, с вершиной в точке $z = 0$, причем точка $z = 0$ лежит на ∂D . Пусть внутри области D функция $f(z)$ субгармонична и во всех точках границы ∂D , за исключением, быть может, только точки $z = 0$, не превосходит некоторого числа C . Тогда если

$$f^+(z) = o(|z|^{-1/\alpha}), \quad z \rightarrow 0, \quad z \in D,$$

то неравенство $f(z) \leq C$ выполнено во всей области D .

Эта теорема получается из теоремы, приведенной в [1, с. 85] при замене переменной $z = 1/w$. Здесь ограничение на рост функции $f(z)$ при $z \rightarrow 0$ связано с раствором угла с вершиной в точке $z = 0$, внутри которого лежит область определения функции $f(z)$. В настоящей работе доказана теорема типа Фрагмена–Линделёфа, в которой эти ограничения зависят от нижней плотности ρ (относительно плоской меры Лебега) множества $\mathbb{C} \setminus D$ в точке $z = 0$.

Напомним, что *нижней плотностью* измеримого множества E в точке ξ (принадлежащей замыканию E) называется величина

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{meas}_2\{z: z \in E, |z - \xi| \leq r\}}{\text{meas}_2\{z: |z - \xi| \leq r\}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-01366).

ТЕОРЕМА 2. [2]. *Существует такая положительная постоянная β , что если область $D \Subset \mathbb{C}$ содержит точку $z = 0$ на своей границе ∂D , причем нижняя плотность множества $\mathbb{C} \setminus D$ в этой точке равна ρ , то любая субгармоническая внутри D функция $f(z)$, которая не превосходит некоторой постоянной C в каждой точке ∂D , за возможным исключением разве лишь точки $z = 0$, и удовлетворяет оценке*

$$f^+(z) = o(|z|^{-\beta\rho}), \quad z \rightarrow 0, \quad z \in D, \quad (1)$$

не превосходит постоянной C во всей области D .

В теоремах типа Фрагмена–Линделёфа для решений однородных эллиптических уравнений некоторых классов условия на рост функции при уходе на бесконечность, выражающиеся через “плотность” области в бесконечности, были рассмотрены Е. М. Ландисом [3]. Ландис рассматривал эллиптическое однородное уравнение

$$\sum_{j,k} A_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + Cu = 0,$$

коэффициенты $A_{j,k}$ и C которого удовлетворяют определенным условиям, причем “плотность” области в бесконечности должна быть достаточно велика. В нашем случае рассматриваются субгармонические функции, а если субгармоническая функция $u(z)$ имеет непрерывные вторые частные производные, то $u(z)$ удовлетворяет неоднородному эллиптическому уравнению и на плотность дополнения к области нет никаких условий.

Сравним полученную теорему с теоремой типа Фрагмена–Линделёфа в классической форме. При этом будем считать, что неотрицательная функция $f(z)$ субгармонична в области D , точка $z = 0$ лежит на границе области ∂D и во всех точках $\partial D \setminus \{0\}$ функция $f(z)$ не превосходит некоторой постоянной.

Пусть область D лежит в некотором угле с вершиной в точке $z = 0$. Тогда согласно классической теореме типа Фрагмена–Линделёфа, если функция $f(z)$ не ограничена в D , рост $f(z)$ при $z \rightarrow 0$ должен быть достаточно быстрым. Самый медленный рост возможен, если область D лежит в развернутом угле (случай $\alpha = 2$). В этом случае если $f(z) = o(|z|^{-1/2})$ при $z \rightarrow 0$, $z \in D$, то функция $f(z)$ ограничена в D ; для того чтобы $f(z)$ была в D неограниченной, требуется, чтобы вдоль некоторой последовательности точек $\{z_k\}$, $z_k \in D$, $z_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, для некоторого $c = \text{const} > 0$ функция $f(z)$ при $z \rightarrow 0$ росла не медленнее, чем $c|z|^{-1/2}$. Функция $\varphi(z) := \text{Re } z^{-1/2}$ в круге $|z| \leq 1$ с разрезом по отрезку $[-1, 0]$ дает пример неограниченной функции с минимально возможным ростом при $z \rightarrow 0$. Итак, если функция $f(z)$ не ограничена в области D , лежащей в угле с вершиной в точке $z = 0$, то она растёт при $z \rightarrow 0$ достаточно быстро.

Если точка $z = 0$ достижима снаружи области D , то неограниченная в D функция $f(z)$ не может расти при $z \rightarrow 0$ медленно. Найдется такое $\beta > 0$, что если функция $f(z)$ удовлетворяет оценке $f(z) = o(|z|^{-\beta})$ при $z \rightarrow 0$, $z \in D$, то функция $f(z)$ ограничена в D .

Если точка $z = 0$ недостижима снаружи области D , то для любого $\varepsilon > 0$ можно построить функцию $f(z)$, неограниченную в области D , которая будет удовлетворять оценке $f(z) = o(|z|^{-\varepsilon})$, причем нижняя плотность $\mathbb{C} \setminus D$ в точке $z = 0$ будет

положительной. Соответствующий пример можно получить при помощи функции

$$\psi_a(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^n}\right)^{2^n},$$

где $a > 2$. Это целая функция порядка $\log_a 2$. Точка $z = a^n$ является нулем $\psi_a(z)$ порядка 2^n , и для некоторого $q = q(a) > 0$ в круге $D(a^n, qa^n)$ выполнено неравенство $|\psi_a(z)| \leq 1$. Положим

$$\varphi(z) := \log^+ \left| \psi_a \left(\frac{1}{z} \right) \right|, \quad D := \{z \in D(0, 1) : \varphi(z) > 0\}.$$

Тогда для любого положительного δ функция $\varphi(z)$ удовлетворяет оценке $\varphi(z) = o(|z|^{-(\log_a 2 + \delta)})$ при $z \rightarrow 0$, $z \in D$, и нижняя плотность $\mathbb{C} \setminus D$ в точке $z = 0$ положительна. При достаточно большом a функция $\varphi(z)$ будет иметь сколь угодно медленный степенной рост при $z \rightarrow 0$.

Введем обозначения. Через $C(\xi, r)$ обозначим окружность с центром в точке ξ радиуса r , через $D(\xi, r)$ – круг с центром в точке ξ радиуса r , через $R(\xi, r_1, r_2)$, $r_1 < r_2$, – кольцо $D(\xi, r_2) \setminus D(\xi, r_1)$. Если A – некоторое множество, то положим $A(\xi, r) := A \cap D(\xi, r)$, $A(\xi, r_1, r_2) := A \cap R(\xi, r_1, r_2)$. Характеристическую функцию множества A будем обозначать через $\chi_A(z)$.

При доказательстве теоремы нам потребуется рассмотреть n -значное отображение плоскости $\mathbb{C}_{(w)} \setminus \{0\}$ на плоскость $\mathbb{C}_{(z)} \setminus \{0\}$, которое задается аналитической функцией $z = w^{1/n}$. Субгармонической на $\mathbb{C}_{(w)} \setminus \{0\}$ функции $F(w)$ при отображении $z = \varphi(w)$ соответствует субгармоническая на $\mathbb{C}_{(z)} \setminus \{0\}$ функция $f(z)$. Множеству нулей E функции $F(w)$ при этом будет соответствовать множество нулей $\varphi(E)$ функции $f(z)$.

ЛЕММА 1. Пусть $E \subset D(0, R)$ – множество, которое в каждом круге $D(0, r)$, $r \in (0, R]$, имеет среднюю плотность $\rho(r) := \text{meas}_2 E \cap D(0, r) / (\pi r^2)$ не меньше ρ . Тогда при отображении $z = \varphi(z)$ образ $\varphi(E)$ множества E в каждом круге $D(0, r)$, $r \in (0, R^{1/n}]$, также имеет среднюю плотность $P(r)$ не меньше ρ , $P(r) := \text{meas}_2 \varphi(E) \cap D(0, r) / (\pi r^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество E измеримо относительно плоской меры Лебега, то для почти всех $r \in (0, R]$ множество $E \cap C(0, r)$ измеримо относительно линейной меры Лебега. Для таких радиусов r положим $\alpha(r) := \text{meas}_1 E \cap C(0, r) / (2\pi r)$. Выразим величину $\rho(r)$ через $\alpha(r)$:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{\text{meas}_2 E \cap D(0, r)}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \text{meas}_1 E \cap C(0, t) dt \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \frac{\text{meas}_1 E \cap C(0, t)}{2\pi t} 2\pi t dt = \frac{2}{r^2} \int_0^r \alpha(t) t dt. \end{aligned}$$

По условию леммы на $(0, R]$ выполнено неравенство $\rho(r) \geq 0$. Следовательно, для всех $r \in (0, R]$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{r^2} \int_0^r \alpha(t) t dt \geq \rho.$$

Аналогично положим $A(r) := \text{meas}_1 \varphi(E) \cap C(0, r)/(2\pi r)$, $r \in (0, R^{1/n}]$. Для каждого $r \in (0, R^{1/n}]$ будет справедливо представление

$$P(r) = \frac{\text{meas}_2 \varphi(E) \cap D(0, r)}{\pi r^2} = \frac{2}{r^2} \int_0^r A(t) t dt.$$

По определению отображения $w = \varphi(z)$ величины $\alpha(r)$ и $A(r)$ связаны соотношением $A(r) = \alpha(r^n)$. Используя это для каждого $r \in (0, R^{1/n}]$, получаем

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \alpha(t^n) t dt = \frac{2}{r^2} \int_0^r \frac{\alpha(t^n) t^n dt^n}{n t^{2(n-1)}} \\ &= \frac{2}{nr^2} \int_0^r \frac{d \int_0^{t^n} \alpha(u) u du}{n t^{2(n-1)}} \\ &= \frac{2}{nr^2} \left[\frac{1}{t^{2(n-1)}} \int_0^{t^n} \alpha(u) u du \Big|_0^r - \int_0^r \left(\int_0^{t^n} \alpha(u) u du \right) d \frac{1}{t^{2(n-1)}} \right] \\ &= \frac{2}{nr^2} \left[\frac{1}{r^{2(n-1)}} \int_0^{r^n} \alpha(u) u du + 2(n-1) \int_0^r \left(\int_0^{t^n} \alpha(u) u du \right) \frac{dt}{t^{2n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{n} \frac{2}{(r^n)^2} \int_0^{r^n} \alpha(u) u du + \frac{2(n-1)}{nr^2} \int_0^r \left(\frac{2}{(t^n)^2} \int_0^{t^n} \alpha(u) u du \right) t dt. \end{aligned}$$

Так как r , а значит, и t в этих соотношениях лежат в промежутке $(0, R^{1/n}]$, то $r^n, t^n \in (0, R]$. Поэтому выполнены соотношения

$$\frac{2}{(r^n)^2} \int_0^{r^n} \alpha(u) u du \geq \rho, \quad \frac{2}{(t^n)^2} \int_0^{t^n} \alpha(u) u du \geq \rho.$$

Следовательно,

$$P(r) \geq \frac{1}{n} \rho + \frac{2(n-1)}{nr^2} \int_0^r \rho t dt = \rho.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если нижняя плотность ρ множества $\mathbb{C} \setminus D$ равна нулю, то непосредственно из неравенства (1) следует, что функция $f(z)$ в области D ограничена. Тогда по обобщенному принципу максимума неравенство $f(z) \leq C$ выполнено во всей области D . Будем считать, что $\rho > 0$.

Можно считать, что средняя плотность множества $\mathbb{C} \setminus D$ в каждом круге $D(0, r)$ достаточно маленького радиуса, не меньше ρ . В противном случае уменьшим постоянную β .

Предположим, что теорема не верна и функция $f(z)$ в области D неограничена. На $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ определим функцию $\psi(z)$, положив

$$\psi(z) = \begin{cases} \max(f(z), C+1), & z \in D, \\ C+1, & z \in \mathbb{C}_0 \setminus D. \end{cases}$$

Функция $\psi(z)$ субгармонична. Действительно, внутри области D она субгармонична как максимум двух субгармонических функций, а в некоторой окрестности

каждой точки множества $\mathbb{C}_0 \setminus D$ функция $\psi(z)$ тождественно равна $C + 1$ и поэтому субгармонична.

Возьмем некоторый круг $D(0, R)$. В кольце $R(0, R/2, R)$ функция $\psi(z)$ ограничена некоторым числом C_1 . Вместо $\psi(z)$ будем рассматривать функцию $\psi(z) - \max(C_1, C + 1)$. Для доказательства ограниченности функции $f(z)$ в области D достаточно доказать ограниченность $\psi(z)$ в проколотом круге $D(0, R) \setminus \{0\}$.

Обозначим через E множество, на котором $\psi(z)$ обращается в нуль, $E := \{z \in \mathbb{C} : \psi(z) = 0\}$. По определению функции $\psi(z)$ множество $\mathbb{C}_0 \setminus D$ лежит в E . Поэтому нижняя плотность множества E в точке $z = 0$ не меньше ρ . Таким образом, неотрицательная субгармоническая в $D(0, R) \setminus \{0\}$ функция $\psi(z)$ удовлетворяет оценке

$$\psi(z) = o(|z|^{-\beta\rho}) \quad \text{при } z \rightarrow 0,$$

причем в точке $z = 0$ нижняя плотность множества E , на котором $\psi(z)$ обращается в нуль, не меньше ρ . Будем считать, что радиус R взят настолько малым, что в каждом круге $D(0, r)$, $r < R$, средняя плотность множества E не меньше ρ .

Рассмотрим преобразование $w = \varphi(z) = z^{1/n}$, где $n \geq 3$ – натуральное число, значение которого будет уточнено позднее. При этом преобразовании проколотый круг $D(0, R) \setminus \{0\}$ на плоскости $\mathbb{C}_z$ перейдет в проколотый круг $D(0, R^{1/n}) \setminus \{0\}$ на плоскости $\mathbb{C}_w$, субгармонической на $D(0, R) \setminus \{0\}$ функции $\psi(z)$ будет соответствовать субгармоническая на $D(0, R^{1/n}) \setminus \{0\}$ функция $\Psi(w) = \Psi(z^{1/n}) = \psi(z)$. Это неотрицательная функция, которая удовлетворяет оценке

$$\Psi(w) = \psi(w^n) = o(|w|^{-\beta\rho n}) \quad \text{при } w \rightarrow 0, \quad (2)$$

причем согласно лемме 1 в кругах $D(0, r)$, $r \leq R^{1/n}$, средняя плотность множества $\varphi(E)$, на котором функция $\Psi(w)$ обращается в нуль, не меньше ρ . Поэтому в точке $w = 0$ нижняя плотность множества $\varphi(E)$ не меньше ρ .

Положим $M(r) = \max \Psi(w)$, $w \in C(0, r)$, $r \in (0, R^{1/n}]$. Поскольку в кольце $R(0, (R/2)^{1/n}, R^{1/n})$ функция $\Psi(w)$ тождественно равна нулю, то по принципу максимума функция $M(r)$ не убывает на $(0, R^{1/n}]$. Оценим $M(r)$ снизу при $r \rightarrow +0$.

По построению значения функции $\Psi(w)$ совпадают в точках $we^{i2\pi k/n}$, $k = 0, \dots, n-1$, которые переходят друг в друга при поворотах вокруг точки $w = 0$ на углы, кратные $2\pi/n$. При отображении $w = z^{1/n}$ окружность $C(0, r^n)$ с разрезом в какой-либо точке перейдет в дугу окружности $C(0, r)$ угловой меры $2\pi/n$. Поэтому $M(r) = \max \Psi(w)$, $w \in \Gamma$, где Γ – произвольная дуга окружности $C(0, r)$ угловой меры $2\pi/n$.

При доказательстве теоремы будут рассматриваться подобные секторы Δ_l кольца $R(0, r_l, r_{l+1})$, $l = 1, 2, \dots$, которые получаются при пересечении кольца $R(0, r_l, r_{l+1})$ с некоторым углом величины $2\pi/n$ с вершиной в точке $w = 0$. В качестве r_0 будет взят произвольный радиус, для которого $M(r_0) > 0$. Секторы Δ_l будут выбираться так, чтобы центр круга D_l , описанного вокруг Δ_l , находился в точке ξ , в которой $\Psi(\xi) = M(|\xi|)$. Отметим, что сектор Δ_l “изнутри” и сектор Δ_{l+1} “снаружи” ограничивает одна и та же окружность $C(0, r_l)$. Пропорции секторов Δ_l полностью определены отношением $q = r_l/r_{l+1}$, которое равно коэффициенту подобия соседних секторов. Величина коэффициента q будет уточнена после

доказательства леммы 3. Пока единственным условием на пропорции секторов Δ_l будет условие, чтобы круг D_l лежал снаружи от окружности $C(0, |\xi_{l+1}|)$.

Каждый сектор Δ_l определяется некоторым углом величины $2\pi/n$ с вершиной в точке $w = 0$. Кроме того, при отображении $w = \varphi(z) = z^{1/n}$ каждой точке $z \neq 0$ соответствуют n различных точек, которые переходят друг в друга при поворотах вокруг точки $w = 0$ на углы, кратные $2\pi/n$. Значит, независимо от расположения сектора Δ_l в кольце $R(0, r_l, r_{l-1})$ мера пересечения $\mu_l := \text{meas}_2 \varphi(E) \cap \Delta_l$ будет одной и той же. Поэтому средняя плотность $\rho_l := \text{meas}_2(\varphi(E) \cap \Delta_l) / \text{meas}_2 \Delta_l$ множества $\varphi(E)$ в Δ_l не зависит от расположения сектора Δ_l и равна средней плотности $\varphi(E)$ в $R(0, r_l, r_{l-1})$ и, значит,

$$\text{meas}_2 \varphi(E)(0, r_l, r_{l-1}) = n\mu_l.$$

Следовательно, поскольку средняя плотность множества $\varphi(E)$ в кругах $D(0, r)$, $r \leq R^{1/n}$, не меньше ρ , то для любого номера j

$$\sum_{l=j}^{\infty} \mu_l \geq \rho \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l. \quad (3)$$

Оценим снизу величины $\Psi(\xi_k)$. Для этого нам потребуется вспомогательная лемма.

ЛЕММА 2. Пусть ξ – точка, в которой $\Psi(\xi) = M(|\xi|) > 0$. Возьмем такой кольцевой сектор Δ раствора $2\pi/n$, $\xi \in \Delta$, у которого точка ξ является центром круга $D_\Delta = D(\xi, r)$, описанного вокруг Δ . Пусть ρ_Δ – средняя плотность множества $\varphi(E)$ в Δ , т.е. $\rho_\Delta = \text{meas}_2(\varphi(E) \cap \Delta) / \text{meas}_2 \Delta$. Тогда в круге D_Δ найдется точка ζ , в которой

$$\Psi(\zeta) > \left(1 + \rho_\Delta \frac{2 \text{meas}_2 \Delta}{\pi r^2}\right) \Psi(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Окружность $C(0, |\xi|)$ делит круг $D(\xi, r)$ на две части. Обозначим через D_1 часть круга $D(\xi, r)$, лежащую снаружи, а через D_2 – часть круга, лежащую внутри окружности $C(0, |\xi|)$. Положим

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \Delta \cap D_1, & \Delta_2 &:= \Delta \cap D_2, \\ S_1 &:= \text{meas}_2 \Delta_1, & S_2 &:= \text{meas}_2 \Delta_2, \\ \rho_1 &:= \text{meas}_2(\varphi(E) \cap \Delta_1) / S_1, & \rho_2 &:= \text{meas}_2(\varphi(E) \cap \Delta_2) / S_2. \end{aligned}$$

В круге $D(\xi, r)$ функция $\Psi(w)$ ограничена. Поэтому найдется положительное число δ , для которого $\max_{D(\xi, r)} \Psi(w) = (1 + \delta)\Psi(\xi)$. Оценим снизу величину δ . По принципу максимума функция $\Psi(w)$ снаружи окружности $C(0, |\xi|)$ не превосходит $\Psi(\xi)$. По неравенству среднего для субгармонических функций

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &\leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(\xi, r)} \Psi(w) du dv = \frac{1}{\pi r^2} \left(\iint_{D_1} + \iint_{D_2} \right) \\ &< \frac{1}{\pi r^2} ((1 + \delta)\Psi(\xi) \text{meas}_2 D_2 + \Psi(\xi) \text{meas}_2 D_1). \end{aligned}$$

Поскольку на множестве $\varphi(E)$ функция $\Psi(w)$ равна нулю, то отсюда получаем

$$\begin{aligned}\Psi(\xi) &< \frac{\Psi(\xi)}{\pi r^2} ((1 + \delta)(\text{meas}_2 D_2 - p_2 S_2) + (\text{meas}_2 D_1 - p_1 S_1)) \\ &= \frac{\Psi(\xi)}{\pi r^2} (\text{meas}_2(D_1 \cup D_2) - (\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2) + \delta(\text{meas}_2 D_2 - p_2 S_2)) \\ &< \frac{\Psi(\xi)}{\pi r^2} (\pi r^2 - \rho_\Delta \text{meas}_2 \Delta + \delta \text{meas}_2 D_2) = \Psi(\xi) + \delta \frac{\text{meas}_2 D_2}{\pi r^2} - \rho_\Delta \frac{\text{meas}_2 \Delta}{\pi r^2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\rho_\Delta \frac{\text{meas}_2 \Delta}{\pi r^2} < \delta \frac{\text{meas}_2 D_2}{\pi r^2}.$$

Так как $\text{meas}_2 D_2 < \text{meas}_2 D(0, r)/2 = \pi r^2/2$, то

$$\rho_\Delta \frac{\text{meas}_2 \Delta}{\pi r^2} < \frac{\delta}{2},$$

и, значит,

$$\delta > \rho_\Delta \frac{2 \text{meas}_2 \Delta}{\pi r^2}.$$

Лемма доказана.

Поскольку секторы Δ_l подобны, то отношение $2 \text{meas}_2 \Delta_l / \text{meas}_2 D_l$ не зависит от l . Обозначим эту величину через L . Так как $\Delta_l \subset D_l$, то $\text{meas}_2 \Delta_l < \text{meas}_2 D_l$, и поэтому $L < 2$. Ясно, что L зависит от коэффициента подобия q и от n .

Согласно лемме 2 в каждом круге D_l найдется точка ζ_l , в которой

$$\Psi(\zeta_l) > (1 + L\rho_l)\Psi(\xi_l). \quad (4)$$

Секторы Δ_l строились так, чтобы круг D_l целиком лежал во внешности окружности $C(0, |\xi_{l+1}|)$. Поэтому $|\xi_{l+1}| < |\zeta_l|$. Поскольку при $r \searrow 0$ функция $M(r)$ не убывает, то из неравенства (4) следует, что

$$\Psi(\xi_{l+1}) = M(|\xi_{l+1}|) > M(|\zeta_l|) \geq \Psi(\zeta_l) > (1 + L\rho_l)\Psi(\xi_l).$$

Это соотношение выполняется для каждого номера l , поэтому для каждого j

$$\Psi(\xi_{j+1}) > \Psi(\xi_1) \prod_{l=1}^j (1 + L\rho_l), \quad (5)$$

и для любых номеров j и k , $j > k$,

$$\Psi(\xi_{j+1}) > \Psi(\xi_k) \prod_{l=k}^j (1 + L\rho_l). \quad (6)$$

Сектор Δ_l назовем *избыточным*, если $\rho_l > \rho$.

Если избыточных секторов нет, то все величины $\rho_l \leq \rho$. Это значит, что для каждого сектора Δ_l мера $\mu_l = \text{meas}_2 \varphi(E) \cap \Delta_l \leq \rho \text{meas}_2 \Delta_l$. Тогда из неравенства (3) следует, что значения всех ρ_l равны $\rho \text{meas}_2 \Delta_l$ и, значит, все $\rho_l = \rho$. Из соотношения (5) в этом случае будет следовать, что для всех $j = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\Psi(\xi_{j+1}) > (1 + L\rho)^j \Psi(\xi_1). \quad (7)$$

Предположим теперь, что избыточные секторы существуют. Занумеруем их в порядке возрастания номеров: пусть это секторы Δ_{k_t} , $k_{t+1} > k_t$, $t = 1, 2, \dots$. Мы будем по очереди рассматривать секторы Δ_{k_t} .

Перед тем как начать последовательно рассматривать избыточные секторы, докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 3. Пусть коэффициент подобия соседних секторов $q \geq \sqrt{3}$, а μ_k , μ_m – положительные числа, не превосходящие мер $\text{meas}_2 \Delta_k$, $\text{meas}_2 \Delta_m$, $k > m$, соответственно. Пусть δ – положительное число такое, что $\delta \leq \mu_k$ и $\mu_m + \delta \leq \text{meas}_2 \Delta_m$. Тогда

$$\left(1 + L \frac{\mu_k - \delta}{\text{meas}_2 \Delta_k}\right) \left(1 + L \frac{\mu_m + \delta}{\text{meas}_2 \Delta_m}\right) < \left(1 + L \frac{\mu_k}{\text{meas}_2 \Delta_k}\right) \left(1 + L \frac{\mu_m}{\text{meas}_2 \Delta_m}\right). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку секторы Δ_k и Δ_m подобны с коэффициентом подобия q^{k-m} , то

$$\text{meas}_2 \Delta_m = q^{2(k-m)} \text{meas}_2 \Delta_k. \quad (9)$$

Распишем выражение, стоящее в левой части неравенства (8):

$$\begin{aligned} & \left(1 + L \frac{\mu_k - \delta}{\text{meas}_2 \Delta_k}\right) \left(1 + L \frac{\mu_m + \delta}{\text{meas}_2 \Delta_m}\right) = \left(1 + L \frac{\mu_k}{\text{meas}_2 \Delta_k}\right) \left(1 + L \frac{\mu_m}{\text{meas}_2 \Delta_m}\right) \\ & - \frac{L\delta}{\text{meas}_2 \Delta_k} \left(1 + L \frac{\mu_m}{\text{meas}_2 \Delta_m}\right) + \frac{L\delta}{\text{meas}_2 \Delta_m} \left(1 + L \frac{\mu_k}{\text{meas}_2 \Delta_k}\right) \\ & - \frac{L^2 \delta^2}{\text{meas}_2 \Delta_k \text{meas}_2 \Delta_m}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать неравенство (8), надо проверить, что сумма трех последних слагаемых в этой сумме отрицательна. Последнее слагаемое отрицательно. Покажем, что при наших предположениях сумма второго и третьего слагаемых положительна. Учитывая (9) и то, что $\mu_k \leq \text{meas}_2 \Delta_k$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{L\delta}{\text{meas}_2 \Delta_m} \left(1 + L \frac{\mu_2}{\text{meas}_2 \Delta_k}\right) - \frac{L\delta}{\text{meas}_2 \Delta_k} \left(1 + L \frac{\mu_2}{\text{meas}_2 \Delta_m}\right) \\ & = \frac{L\delta}{\text{meas}_2 \Delta_k} \left(\frac{1}{q^{2(k-m)}} \left(1 + L \frac{\mu_k}{\text{meas}_2 \Delta_k}\right) - 1 - L \frac{\mu_m}{q^{2(k-m)} \text{meas}_2 \Delta_k} \right) \\ & = \frac{L\delta}{\text{meas}_2 \Delta_k} \left(\frac{1}{q^{2(k-m)}} - 1 + \frac{L(\mu_k - \mu_m)}{q^{2(k-m)} \text{meas}_2 \Delta_k} \right) \\ & < \frac{L\delta}{\text{meas}_2 \Delta_k} \left(\frac{1 + L}{q^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Как было отмечено после доказательства леммы 2, величина L меньше двух. Поэтому при $q \geq \sqrt{3}$ последний член в предыдущей цепочке соотношений будет неположительным. Лемма доказана.

Величина коэффициента подобия соседних секторов q выбирается из условий:

- а) круг D_l должен лежать снаружи от окружности $C(0, |\xi_{l+1}|)$;
- б) выражение $(1 + L)/q^2 - 1$ должно быть неположительно.

Рассмотрим первый избыточный сектор Δ_{k_1} .

Введем обозначения: для $j = 1, 2, \dots$ положим

$$\begin{aligned} \mu_{1,j} &:= \text{meas}_2 \varphi(E) \cap \Delta_j (= \mu_j); \\ \rho_{1,j} &:= \frac{\mu_{1,j}}{\text{meas}_2 \Delta_j} (= \rho_j); \quad \delta_{1,j} := \mu_{1,j} - \rho \text{meas}_2 \Delta_j. \end{aligned}$$

Соотношение (3) с использованием обозначений $\mu_{1,l}$ запишется так: при каждом j будет выполнено неравенство

$$\sum_{l=j}^{\infty} \mu_{1,l} \geq \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l, \quad (3_1)$$

а соотношение (5) так: для каждого j

$$\Psi(\xi_{j+1}) > \Psi(\xi_1) \prod_{l=1}^j (1 + L\rho_{1,l}). \quad (5_1)$$

Ясно, что $\rho_{1,k_1} > \rho$. Поскольку Δ_{k_1} – первый избыточный сектор, то для всех секторов Δ_l , $l < k_1$, величины $\rho_{1,l}$ не больше ρ .

Сначала рассмотрим случай, когда для всех секторов Δ_l , $l < k_1$, значения $\rho_{1,l}$ равны ρ .

Непосредственно из неравенства (5₁) видно, что

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_{k_1+1}) &> \Psi(\xi_1) \prod_{l=1}^{k_1} (1 + L\rho_{1,l}) \\ &= \Psi(\xi_1)(1 + L\rho)^{k_1-1}(1 + L\rho_{1,k_1}) > \Psi(\xi_1)(1 + L\rho)^{k_1}. \end{aligned} \quad (10_1)$$

В этом случае положим

$$\begin{aligned} \mu_{2,l} &:= \begin{cases} \mu_{1,l}, & l \neq k_1, \\ \rho \text{meas}_2 \Delta_l, & l = k_1; \end{cases} \\ \rho_{2,l} &:= \frac{\mu_{2,l}}{\text{meas}_2 \Delta_l}; \quad \delta_{2,l} := \mu_{2,l} - \rho \text{meas}_2 \Delta_l; \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ясно, что для всех $l \leq k_1$ значение $\rho_{2,l}$ равно ρ . Поэтому из неравенств (6) и (10₁) для всех $j > k_1$

$$\Psi(\xi_{j+1}) > \Psi(\xi_1) \prod_{l=1}^j (1 + L\rho_{2,l}).$$

Для так определенных величин $\mu_{2,l}$ при каждом j будет выполнено следующее неравенство, аналогичное неравенству (3₁):

$$\sum_{l=j}^{\infty} \mu_{2,l} \geq \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l.$$

Действительно, $\mu_{2,l} = \mu_{1,l}$ при $l > k_1$, и поэтому при $j > k_1$ неравенство (3₂) является записью неравенства (3₁) с использованием других обозначений. В частности, при $j = k_1 + 1$ имеем

$$\sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{2,l} \geq \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l.$$

Отсюда, учитывая, что $\mu_{2,l} = \rho \text{meas}_2 \Delta_l$ при $l \leq k_1$, получаем, что при $j \leq k_1$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{2,l} &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{2,l} + \sum_{l=j}^{k_1} \mu_{2,l} \\ &\geq \rho \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l + \rho \sum_{l=j}^{k_1} \text{meas}_2 \Delta_l = \rho \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l. \end{aligned}$$

Рассмотрение первого избыточного сектора Δ_{k_1} в этом случае закончено. Перейдем к рассмотрению второго избыточного сектора Δ_{k_2} .

Предположим теперь, что хотя бы для одного сектора Δ_l , $l < k_1$, величина $\rho_{1,l}$ меньше ρ . Занумеруем такие секторы в порядке убывания номеров. Пусть $m_{1,1} > m_{1,2} > \dots > m_{1,p_1}$ – номера всех секторов Δ_l , $l < k_1$, для которых $\rho_{1,l} < \rho$; для остальных секторов Δ_l , $l < k_1$, $l \neq m_{1,t}$, $t = 1, \dots, p_1$, величины $\rho_{1,l}$ равны ρ .

Найдем минимальный номер $s_1 \leq p_1$, для которого

$$\delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{s_1} \delta_{1,m_{1,t}} \leq 0.$$

Ясно, что если

$$\delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{s_1} \delta_{1,m_{1,t}} = 0,$$

то $s_1 = p_1$. Если

$$\delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{p_1} \delta_{1,m_{1,t}} \geq 0,$$

то положим $s_1 := p_1$.

Если $s_1 > 1$, то сначала последовательно рассмотрим секторы $\Delta_{m_{1,t}}$, $t = 1, \dots, s_1 - 1$. По определению номера s_1

$$\delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{s_1-1} \delta_{1,m_{1,t}} > 0.$$

Так как все величины $\delta_{1,m_1,l}$ отрицательны, то из этого неравенства следует, что для каждого $u = 1, \dots, s_1 - 1$

$$\delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^u |\delta_{1,m_1,t}| > 0.$$

Поэтому

$$\mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^u |\delta_{1,m_1,t}| = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1} + \delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^u |\delta_{1,m_1,t}| > \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}. \quad (11)$$

По определению величин $\delta_{1,l}$ для всех $t = 1, \dots, s_1 - 1$

$$\mu_{1,m_1,t} + |\delta_{1,m_1,t}| = \mu_{1,m_1,t} - \delta_{1,m_1,t} = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,t} < \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,t}. \quad (12)$$

Так как по соотношению (11) при $u = 1$ выполнено неравенство $\mu_{1,k_1} - |\delta_{1,m_1,1}| > 0$, а по соотношению (12) при $t = 1$ выполнено неравенство $\mu_{1,m_1,1} + |\delta_{1,m_1,1}| < \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,1}$, то согласно лемме 3

$$\begin{aligned} & \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1}}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_1,1}}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,1}}\right) \\ & > \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - |\delta_{1,m_1,1}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_1,1} + |\delta_{1,m_1,1}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,1}}\right) \\ & = \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - |\delta_{1,m_1,1}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) (1 + L\rho). \end{aligned} \quad (12_{1,1})$$

Если $s_1 > 2$, то так как по (11) при $u = 2$

$$(\mu_{1,k_1} - |\delta_{1,m_1,1}|) - |\delta_{1,m_1,2}| = \mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^2 |\delta_{1,m_1,t}| > 0$$

и по (12) при $t = 2$

$$\mu_{1,m_1,2} + |\delta_{1,m_1,2}| = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,2} < \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,2},$$

то согласно лемме 3

$$\begin{aligned} & \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - |\delta_{1,m_1,1}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_1,2}}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,2}}\right) \\ & > \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{l=1}^2 |\delta_{1,m_1,l}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_1,2} + |\delta_{1,m_1,2}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{m_1,2}}\right) \\ & = \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{l=1}^2 |\delta_{1,m_1,l}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) (1 + L\rho). \end{aligned} \quad (13_{1,2})$$

Аналогично рассуждая, дальше получаем, что для каждого номера $u = 1, \dots, s_1 - 1$ выполнено неравенство (при $u = 1$ будем считать, что сумма $\sum_{t=1}^{u-1}$ не содержит ни одного слагаемого и равна нулю)

$$\begin{aligned} & \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{u-1} |\delta_{1,m_1,t}|}{\text{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_1,u}}{\text{meas}_2 \Delta_{m_1,t}}\right) \\ & > \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{l=1}^t |\delta_{1,m_1,l}|}{\text{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) (1 + L\rho). \end{aligned} \quad (13_{1,u})$$

Из соотношений $(13_{1,1})$ – $(13_{1,s_1-1})$ следует, что

$$\begin{aligned} & \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1}}{\text{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \prod_{t=1}^{s_1-1} \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_1,t}}{\text{meas}_2 \Delta_{m_1,t}}\right) \\ & > \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_1,t}|}{\text{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) (1 + L\rho)^{s_1-1}. \end{aligned} \quad (14_1)$$

Будем считать, что произведение $\prod_{t=1}^0$ равно 1, а сумма $\sum_{t=1}^0$ не содержит ни одного слагаемого и равна нулю. Это позволит считать, что соотношение (14_1) выполнено и в случае, когда $s_1 = 1$.

Теперь рассмотрим сектор Δ_{m_1,s_1} . Положим

$$\delta_1 = \min \left\{ \delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_1,t}|, |\delta_{1,m_1,s_1}| \right\}.$$

Ясно, что $\delta_1 > 0$. Учитывая, что $\delta_{1,m_1,s_1} < 0$, получаем

$$\begin{aligned} \mu_{1,m_1,s_1} + \delta_1 & \leq \mu_{1,m_1,s_1} + |\delta_{1,m_1,s_1}| = \mu_{1,m_1,s_1} - \delta_{1,m_1,s_1} \\ & = \rho \text{meas}_2 \Delta_{m_1,s_1} < \text{meas}_2 \Delta_{m_1,s_1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_1,t}| - \delta_1 & \geq \mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_1,t}| - \left(\delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_1,t}| \right) \\ & = \mu_{1,k_1} - \delta_{1,k_1} = \rho \text{meas}_2 \Delta_{k_1}. \end{aligned}$$

Поэтому применима лемма 3, согласно которой

$$\begin{aligned} & \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_1,t}|}{\text{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_1,s_1}}{\text{meas}_2 \Delta_{m_1,s_1}}\right) \\ & \geq \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_1,t}| - \delta_1}{\text{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_1,s_1} + \delta_1}{\text{meas}_2 \Delta_{m_1,s_1}}\right). \end{aligned} \quad (13_{1,s_1})$$

Рассмотрим значения, которые может принимать величина δ_1 .

1°. Сначала рассмотрим случай, когда

$$\delta_1 = \delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,t}}| \leq |\delta_{1,m_{1,s_1}}| = -\delta_{1,m_{1,s_1}}.$$

Поскольку в этом случае

$$\mu_{1,m_{1,s_1}} + \delta_1 \leq \mu_{1,m_{1,s_1}} - \delta_{1,m_{1,s_1}} = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_{1,s_1}}$$

и

$$\mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,t}}| - \delta_1 = \mu_{1,k_1} - \delta_{1,k_1} = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1},$$

то из (13_{1,s₁}) следует, что

$$\begin{aligned} & \left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{l=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,l}}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_{1,s_1}}}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{m_{1,s_1}}}\right) \\ & \geq (1 + L\rho) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_{1,s_1}} + \delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,t}}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{m_{1,s_1}}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (14₁) вытекает, что

$$\begin{aligned} & (1 + L\rho_{1,k_1}) \prod_{t=1}^{s_1} (1 + L\rho_{1,m_{1,t}}) \\ & > (1 + L\rho)^{s_1} \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_{1,s_1}} + \delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,t}}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{m_{1,s_1}}}\right). \end{aligned} \quad (15_{1^\circ})$$

Положим

$$\mu_{2,l} := \begin{cases} \mu_{1,l}, & l \neq k_1, m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1}, \\ \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l, & l = k_1, m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}, \\ \mu_{1,m_{1,s_1}} + \delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,t}}|, & l = m_{1,s_1}, \end{cases}$$

$$\rho_{2,l} := \frac{\mu_{2,l}}{\operatorname{meas}_2 \Delta_l}, \quad \delta_{2,l} := \mu_{2,l} - \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l, \quad l = 1, 2, \dots$$

С использованием этих обозначений неравенство (15_{1°}) запишется так:

$$(1 + L\rho_{1,k_1}) \prod_{t=1}^{s_1} (1 + L\rho_{1,m_{1,t}}) > (1 + L\rho_{2,k_1}) \prod_{t=1}^{s_1} (1 + L\rho_{2,m_{1,t}}).$$

Отсюда, так как при $l \neq k_1, m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1}$ величины $\mu_{2,l}$ равны $\mu_{1,l}$, получаем с учетом (5₁) и (6), что при всех $j \geq k_1$ выполнено неравенство (5₂):

$$\Psi(\xi_{j+1}) > \Psi(\xi_1) \prod_{l=1}^j (1 + L\rho_{2,l}).$$

Покажем, что для так определенных величин $\mu_{2,l}$ при каждом j будет выполнено неравенство (3₂):

$$\sum_{l=j}^{\infty} \mu_{2,l} \geq \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l.$$

Заметим сначала, что для всех l , $k_1 \geq l \geq m_{1,s_1} + 1$, значения $\mu_{2,l}$ равны $\rho \text{meas}_2 \Delta_l$. Действительно, при $l = k_1, \dots, m_{1,s_1-1}$ это выполнено непосредственно по определению величин $\mu_{2,l}$. Как уже отмечалось, для секторов Δ_l с номерами $l < k_1$, $l \neq m_{1,1}, \dots, m_{1,p_1}$, величина $\mu_{1,l}$ равна $\rho \text{meas}_2 \Delta_l$. Поэтому для номеров l , $k_1 \geq l \geq m_{1,s_1} + 1$, $l \neq k_1, \dots, m_{1,s_1-1}$, величины $\mu_{2,l}$ также равны $\rho \text{meas}_2 \Delta_l$.

Для номеров $l > k_1$ величины $\mu_{2,l}$ равны $\mu_{1,l}$, и поэтому при $j > k_1$ неравенство (3₂) является записью неравенства (3₁) с использованием других обозначений. В частности, при $j = k_1 + 1$ имеем

$$\sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{2,l} = \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} \geq \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l.$$

Поэтому, учитывая, что для номеров l , $k_1 \geq l \geq m_{1,s_1} + 1$, значения $\mu_{2,l}$ равны $\rho \text{meas}_2 \Delta_l$, получаем, что при j , $k_1 \geq j \geq m_{1,s_1} + 1$, неравенство (3₂) выполнено:

$$\begin{aligned} \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{2,l} &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{2,l} + \sum_{l=j}^{k_1} \mu_{2,l} \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + \rho \sum_{l=j}^{k_1} \text{meas}_2 \Delta_l \geq \rho \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим $j = m_{1,s_1}$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{2,l} &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{2,l} + \sum_{l=m_{1,s_1}}^{k_1} \mu_{2,l} \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + \mu_{2,k_1} + \sum_{\substack{l=m_{1,s_1}+1 \\ l \neq m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}}}^{k_1-1} \mu_{2,l} + \sum_{t=1}^{s_1-1} \mu_{2,m_{1,t}} + \mu_{2,m_{1,s_1}} \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + \rho \text{meas}_2 \Delta_{k_1} + \sum_{\substack{l=m_{1,s_1}+1 \\ l \neq m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}}}^{k_1-1} \mu_{1,l} \\ &\quad + \rho \sum_{t=1}^{s_1-1} \text{meas}_2 \Delta_{m_{1,t}} + \mu_{1,m_{1,s_1}} + \delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{s_1-1} \delta_{1,m_{1,t}} \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + (\rho \text{meas}_2 \Delta_{k_1} + \delta_{1,k_1}) + \sum_{\substack{l=m_{1,s_1}+1 \\ l \neq m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}}}^{k_1-1} \mu_{1,l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=1}^{s_1-1} (\rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{1,m_{1,t}} + \delta_{1,m_{1,t}}) + \mu_{1,m_{1,s_1}} \\
& = \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + \mu_{1,k_1} + \sum_{\substack{l=m_{1,s_1}+1 \\ l \neq k_1, m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}}}^{k_1-1} \mu_{1,l} \\
& + \sum_{t=1}^{s_1-1} \mu_{1,m_{1,t}} + \mu_{1,m_{1,s_1}} = \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{1,l}.
\end{aligned}$$

Следовательно, так как при $j = m_{1,s_1}$ выполнено неравенство (3₁), то при этом j выполнено и неравенство (3₂).

Поскольку при $l < m_{1,s_1}$ все $\mu_{2,l} = \mu_{1,l}$, то, учитывая неравенство (3₁), получаем, что для каждого $j < m_{1,s_1}$ выполнено неравенство (3₂):

$$\sum_{l=j}^{\infty} \mu_{2,l} = \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{2,l} + \sum_{l=j}^{m_{1,s_1}-1} \mu_{2,l} = \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{1,l} \geq \rho \sum_{l=j}^{\infty} \operatorname{meas}_2 \Delta_l.$$

2°. Теперь рассмотрим случай, когда

$$\delta_1 = |\delta_{1,m_{1,s_1}}| = -\delta_{1,m_{1,s_1}} \leq \delta_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,t}}|. \quad (16)$$

Поскольку в этом случае

$$\begin{aligned}
\mu_{1,m_{1,s_1}} + \delta_1 &= \mu_{1,m_{1,s_1}} - \delta_{1,m_{1,s_1}} = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_{1,s_1}}, \\
\mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,t}}| - \delta_1 &\geq \mu_{1,k_1} - \delta_{1,k_1} = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1},
\end{aligned}$$

то из (13_{1,s_1}) следует, что

$$\left(1 + L \frac{\mu_{1,k_1} - \sum_{t=1}^{s_1-1} |\delta_{1,m_{1,t}}|}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{k_1}}\right) \left(1 + L \frac{\mu_{1,m_{1,s_1}}}{\operatorname{meas}_2 \Delta_{m_{1,s_1}}}\right) \geq (1 + L\rho)^2.$$

Отсюда и из неравенства (14₁) следует, что

$$(1 + L\rho_{1,k_1}) \prod_{t=1}^{s_1} (1 + L\rho_{1,m_{1,t}}) > (1 + L\rho)^{s_1+1}. \quad (15_{2^\circ})$$

Положим

$$\begin{aligned}
\mu_{2,l} &:= \begin{cases} \mu_{1,l}, & l \neq k_1, m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1}, \\ \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l, & l = k_1, m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1}, \end{cases} \\
\rho_{2,l} &:= \frac{\mu_{2,l}}{\operatorname{meas}_2 \Delta_l}, \quad \delta_{2,l} := \mu_{2,l} - \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l, \quad l = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

С использованием этих обозначений неравенство (15_{2°}) запишется следующим образом:

$$(1 + L\rho_{1,k_1}) \prod_{t=1}^{s_1} (1 + L\rho_{1,m_{1,t}}) > (1 + L\rho_{2,k_2}) \prod_{t=1}^{s_1} (1 + L\rho_{2,m_{1,t}}).$$

Поэтому, учитывая, что при $l \neq k_1, m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1}$ величины $\mu_{2,l}$ равны $\mu_{1,l}$, получаем с учетом (5₁) и (6), что для всех $j \geq k_1$ выполнено неравенство (5₂):

$$\Psi(\xi_{j+1}) > \Psi(\xi_1) \prod_{l=1}^j (1 + L\rho_{2,l}).$$

Покажем, что для так определенных величин $\mu_{2,l}$ при каждом номере j будет выполнено неравенство (3₂).

Аналогично тому, как это было сделано в п. 1°, легко убедиться в том, что для всех l , $m_{1,s_1} \leq l \leq k_1$, значения $\mu_{2,l}$ равны $\rho \text{ meas}_2 \Delta_l$.

Для номеров $l > k_1$ величины $\mu_{2,l}$ равны $\mu_{1,l}$, и поэтому при $j > k_1$ неравенство (3₂) является записью неравенства (3₁) с использованием других обозначений. При $j = k_1 + 1$ имеем, в частности, что

$$\sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{2,l} = \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} \geq \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l.$$

Используя эти соотношения и учитывая, что для всех номеров l , $m_{1,s_1} \leq l \leq k_1$, значения $\mu_{2,l}$ равны $\rho \text{ meas}_2 \Delta_l$, получаем, что при всех j , $m_{1,s_1} \leq j \leq k_1$, выполнено неравенство (3₂):

$$\begin{aligned} \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{2,l} &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{2,l} + \sum_{l=j}^{k_1} \mu_{2,l} \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + \rho \sum_{l=j}^{k_1} \text{meas}_2 \Delta_l \geq \rho \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l. \end{aligned}$$

Разберем по отдельности случаи, когда $s_1 = p_1$ и $s_1 < p_1$.

а) Сначала предположим, что $s_1 = p_1$. Тогда для всех l , $l < m_{1,s_1} = m_{1,p_1}$, величины $\mu_{2,l}$ по определению равны $\mu_{1,l}$. Поэтому из неравенства (3₂), которое уже было проверено при $j = m_{1,s_1}$, следует, что для всех $j < m_{1,s_1}$

$$\begin{aligned} \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{2,l} &= \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{2,l} + \sum_{l=j}^{m_{1,s_1}-1} \mu_{2,l} \\ &= \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{2,l} + \rho \sum_{l=j}^{m_{1,s_1}-1} \text{meas}_2 \Delta_l \geq \rho \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l. \end{aligned}$$

Неравенство (3₂) в этом случае проверено для всех j .

б) Теперь предположим, что $s_1 < p_1$. Из соотношения (16) следует, что

$$\delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{s_1} \delta_{1,m_{1,t}} \geq 0.$$

Так как $s_1 < p_1$, то по своему определению величина s_1 в этом случае равна минимальному номеру, для которого

$$\delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{s_1} \delta_{1,m_{1,t}} \leq 0.$$

Поэтому в этом случае

$$\delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{s_1} \delta_{1,m_{1,t}} = 0.$$

Используя это соотношение и учитывая, что при $l = k_1, m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1}$ величины $\mu_{2,l}$ равны $\rho \text{ meas}_2 \Delta_l$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{2,l} &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{2,l} + \sum_{l=m_{1,s_1}}^{k_1} \mu_{2,l} \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + \mu_{2,k_1} + \sum_{\substack{l=m_{1,s_1}+1 \\ l \neq m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}}}^{k_1-1} \mu_{1,l} + \sum_{t=1}^{s_1} \mu_{2,m_{1,t}} \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + \mu_{2,k_1} + \sum_{\substack{l=m_{1,s_1}+1 \\ l \neq m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}}}^{k_1-1} \mu_{1,l} + \sum_{t=1}^{s_1} \mu_{2,m_{1,t}} \\ &\quad + \left(\delta_{1,k_1} + \sum_{t=1}^{s_1} \delta_{1,m_{1,t}} \right) \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + (\rho \text{ meas}_2 \Delta_{k_1} + \delta_{1,k_1}) + \sum_{\substack{l=m_{1,s_1}+1 \\ l \neq m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}}}^{k_1-1} \mu_{1,l} \\ &\quad + \sum_{t=1}^{s_1} (\rho \text{ meas}_2 \Delta_{m_{1,t}} + \delta_{1,m_{1,t}}) \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \mu_{1,l} + \mu_{1,k_1} + \sum_{\substack{l=m_{1,s_1}+1 \\ l \neq m_{1,1}, \dots, m_{1,s_1-1}}}^{k_1-1} \mu_{1,l} + \sum_{t=1}^{s_1} \mu_{1,m_{1,t}} \\ &= \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{1,l}. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку при $l < m_{1,s_1}$ все величины $\mu_{2,l}$ равны $\mu_{1,l}$, получаем, что при каждом $j < m_{1,s_1}$ будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{2,l} &= \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{2,l} + \sum_{l=j}^{m_{1,s_1}-1} \mu_{2,l} \\ &= \sum_{l=m_{1,s_1}}^{\infty} \mu_{1,l} + \sum_{l=j}^{m_{1,s_1}-1} \mu_{1,l} = \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{1,l}. \end{aligned}$$

Поскольку для величин $\mu_{1,l}$ при всех j выполнены соотношения (3₁), то неравенства (3₂) полностью проверены и в этом случае.

На этом рассмотрение первого избыточного сектора Δ_{k_1} завершено. Для Δ_{k_1} были определены величины $\mu_{2,l}$, $\rho_{2,l}$ и $\delta_{2,l}$, $l = 1, 2, \dots$, для которых при всех j выполнено неравенство (3₂), а при всех $j \geq k_1$ – неравенство (5₂). Кроме того, непосредственно из определения видно, что величины $\mu_{2,j}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

- 1¹) для всех $l > k_1$ имеем $\mu_{2,l} = \mu_{1,l}$;
- 2¹) для всех $l \leq k_1$ имеем $\mu_{2,l} \leq \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l$;
- 3¹) для всех l , $m_{1,s_1} + 1 \leq l \leq k_1$, имеем $\mu_{2,l} = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l$;
- 4¹) для всех $l < m_{1,s_1}$ имеем $\mu_{2,l} = \mu_{1,l}$;
- 5¹) для всех $l < m_{1,p_1}$ имеем $\mu_{2,l} = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l$.

Перейдем к рассмотрению второго избыточного сектора Δ_{k_2} .

Аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении сектора Δ_{k_1} , при рассмотрении сектора Δ_{k_2} будут определены величины $\mu_{3,l}$, $\rho_{3,l}$, $\delta_{3,l}$, $l = 1, 2, \dots$, для которых при всех j выполняется неравенство (3₃), а при всех $j > k_2$ выполняется неравенство (5₃). Кроме того, величины $\mu_{3,l}$ удовлетворяют условиям 1²)–5²).

Предположим, что были рассмотрены первые $h - 1$ избыточных секторов. При рассмотрении $(h - 1)$ -го избыточного сектора $\Delta_{k_{h-1}}$ были определены величины $\mu_{h,l}$, $\rho_{h,l}$, $\delta_{h,l}$, $l = 1, 2, \dots$, для которых при всех j выполняется неравенство

$$\sum_{l=j}^{\infty} \mu_{h,l} \geq \sum_{l=j}^{\infty} \operatorname{meas}_2 \Delta_l, \quad (3_h)$$

а при всех $j > k_{h-1}$ – неравенство

$$\Psi(\xi_{j+1}) > \Psi(\xi_1) \prod_{l=1}^j (1 + L\rho_{h,l}). \quad (5_{h-1})$$

Величины $\mu_{h,l}$, кроме того, удовлетворяют следующим условиям:

- 1^{h-1}) для всех $l > k_{h-1}$ имеем $\mu_{h,l} = \mu_{1,l}$;
- 2^{h-1}) для всех $l \leq k_{h-1}$ имеем $\mu_{h,l} \leq \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l$;
- 3^{h-1}) для всех l , $m_{h-1,s_{h-1}} + 1 \leq l \leq k_{h-1}$, имеем $\mu_{h,l} < \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l$;
- 4^{h-1}) для всех $l < m_{1,s_1}$ имеем $\mu_{h,l} = \mu_{h-1,l}$;
- 5^{h-1}) для всех $l < m_{h-1,p_{h-1}}$ имеем $\mu_{h,l} = \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l$.

Рассмотрим теперь избыточный сектор Δ_{k_h} .

Если для всех секторов Δ_l , $l < k_h$, значения $\rho_{h,l}$ равны ρ , то положим

$$\mu_{h+1,l} := \begin{cases} \mu_{h,l}, & l \neq k_h, \\ \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l, & l = k_h. \end{cases}$$

Предположим теперь, что для некоторых секторов Δ_l , $l < k_h$, величина $\rho_{h,j}$ меньше ρ . Занумеруем такие секторы в порядке убывания номеров. Пусть $m_{h_1} > m_{h_2} > \dots > m_{h,p_h}$ – номера секторов Δ_l , $l < k_h$, для которых $\rho_{h,l} < \rho$. Для остальных секторов Δ_l , $l < k_h$, $l \neq m_{h,1}, m_{h,2}, \dots, m_{h,p_h}$, величина $\rho_{h,l}$ равна ρ . Найдем минимальный номер $s_h \leq p_h$, для которого

$$\delta_{h,k_h} + \sum_{t=1}^{s_h} \delta_{h,m_{h,t}} \leq 0.$$

Если

$$\delta_{h,k_h} + \sum_{t=1}^{p_h} \delta_{h,m_{h,t}} \geq 0,$$

то положим $s_h := p_h$.

Если

$$|\delta_{h,m_{h,s_h}}| \geq \delta_{h,k_h} - \sum_{t=1}^{s_h-1} |\delta_{h,m_{h,t}}|,$$

то положим

$$\mu_{h+1,l} := \begin{cases} \mu_{h,l}, & l \neq k_h, m_{h,1}, \dots, m_{h,s_h}, \\ \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l, & l = k_h, m_{h,1}, \dots, m_{h,s_h-1}, \\ \mu_{h,m_{h,s_h}} + \delta_{h,k_h} - \sum_{t=1}^{s_h-1} |\delta_{h,m_{h,t}}|, & l = m_{h,s_h}. \end{cases}$$

Если

$$|\delta_{h,m_{h,s_h}}| \leq \delta_{h,k_h} - \sum_{t=1}^{s_h-1} |\delta_{h,m_{h,t}}|,$$

то положим

$$\mu_{h+1,l} := \begin{cases} \mu_{h,l}, & l \neq k_h, m_{h,1}, \dots, m_{h,s_h}, \\ \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l, & l = k_h, m_{h,1}, \dots, m_{h,s_h}. \end{cases}$$

Используя таким образом определенные величины $\mu_{h+1,l}$, определим величины $\rho_{h+1,l}$ и $\delta_{h+1,l}$, $l = 1, 2, \dots$, положив

$$\rho_{h+1,l} := \frac{\mu_{h+1,l}}{\operatorname{meas}_2 \Delta_l}, \quad \delta_{h+1,l} := \mu_{h+1,l} - \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l.$$

Для так определенных величин $\mu_{h+1,l}$, $\rho_{h+1,l}$ и $\delta_{h+1,l}$, аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении сектора Δ_{k_1} , можно показать, что для всех j справедливо неравенство

$$\sum_{l=j}^{\infty} \mu_{h+1,l} \geq \sum_{l=j}^{\infty} \operatorname{meas}_2 \Delta_l, \quad (3_{h+1})$$

а для всех $j \geq k_h$ справедливо неравенство

$$\Psi(\xi_{j+1}) > \Psi(\xi_1) \prod_{l=1}^j (1 + L\rho_{h+1,l}). \quad (5_{h+1})$$

Причем величины $\mu_{h+1,l}$, кроме того, удовлетворяют условиям:

- 1^h) для всех $l > k_h$ имеем $\mu_{h+1,l} = \mu_{h,l} = \dots = \mu_{1,l}$;
- 2^h) для всех $l \leq k_h$ имеем $\mu_{h+1,l} \leq \rho \text{ meas}_2 \Delta_l$;
- 3^h) для всех l , $m_{h,s_h} + 1 \leq l \leq k_h$, имеем $\mu_{h+1,l} = \rho \text{ meas}_2 \Delta_l$;
- 4^h) для всех $l < m_{h,s_h}$ имеем $\mu_{h+1,l} = \mu_{h,l}$;
- 5^h) для всех $l < m_{h,p_h}$ имеем $\mu_{h+1,l} = \rho \text{ meas}_2 \Delta_l$.

Действуя таким образом, для каждого избыточного сектора Δ_{k_h} для всех секторов Δ_l будут определены величины $\mu_{h+1,l}$, $\rho_{h+1,l}$ и $\delta_{h+1,l}$.

Избыточных секторов может быть либо конечное, либо бесконечное число.

Рассмотрим сначала случай, когда избыточных секторов конечное число. Пусть Δ_{k_H} – последний избыточный сектор. Тогда для всех номеров $l > k_H$ величины $\mu_{1,l}$, а следовательно, по свойству 1^H) и величины $\mu_{H+1,l}$ не превосходят $\rho \text{ meas}_2 \Delta_l$. По свойству 2^H) для всех $l \leq k_H$ величины $\mu_{H+1,l}$ не больше $\rho \text{ meas}_2 \Delta_l$. Поэтому, учитывая неравенство (3_{H+1}), получаем, что для каждого номера j

$$\rho \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l \stackrel{(3_{H+1})}{\leq} \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{H+1,l} \leq \rho \sum_{l=j}^{\infty} \text{meas}_2 \Delta_l.$$

Эти неравенства могут выполняться, только если для всех номеров l величины $\mu_{H+1,l}$ равны $\rho \text{ meas}_2 \Delta_l$, т.е. только если для всех l значение $\rho_{H+1,l}$ равно ρ . В этом случае из неравенства (5_{H+1}) следует, что для всех $j \geq k_H$

$$\Psi(\xi_{j+1}) > (1 + L\rho)^j \Psi(\xi_1). \quad (17)$$

Теперь рассмотрим случай, когда избыточных секторов бесконечно много.

Предположим сначала, что для некоторой последовательности избыточных секторов $\Delta_{k_{h_a}}$, $h_1 < h_2 < \dots$, при всех $l \leq k_{h_a}$ величины $\mu_{h_a,l}$ равны $\rho \text{ meas}_2 \Delta_l$. В этом случае при $l \leq k_{h_a}$ все $\rho_{h_a+1,l}$ равны ρ , и из неравенства (5_{h_a+1}) следует, что при $j_a := k_{h_a}$

$$\Psi(\xi_{j_a+1}) > (1 + L\rho)^{j_a} \Psi(\xi_1). \quad (18)$$

Предположим теперь, что для каждого избыточного сектора Δ_{k_h} с достаточно большим номером найдется сектор Δ_l , $l < k_h$, у которого $\mu_{h+1,l} < \rho \text{ meas}_2 \Delta_l$. Пусть такие секторы найдутся для всех избыточных секторов Δ_{k_h} , номера которых $h \geq h_0$.

Для избыточного сектора $\Delta_{k_{h_0}}$ неравенство $\mu_{h_0+1,l} < \rho \text{ meas}_2 \Delta_l$ выполнено при $l = m_{h_0,s_{h_0}+1}, \dots, m_{h_0,p_{h_0}}$ (быть может, $s_{h_0+1} = p_{h_0}$).

Покажем, что найдется избыточный сектор $\Delta_{k_{h_1}}$, $h_1 > h_0$, для которого номер $m_{h_1,s_{h_1}}$ равен номеру $m_{h_0,p_{h_0}}$. Предположим, что это не так. Тогда для всех

избыточных секторов Δ_{k_h} , $h > h_0$, номер m_{h,s_h} больше $m_{h_0,p_{h_0}}$. Поэтому в этом случае при каждом $h > h_0$ по свойству 4^h) получаем

$$\mu_{h+1,m_{h_0,p_{h_0}}} = \mu_{h_0+1,m_{h_0,p_{h_0}}} < \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_{h_0,p_{h_0}}}. \quad (19)$$

Отсюда при каждом $h > h_0$, учитывая соотношение 2^h) и то, что по своему определению при всех l и h величины $\mu_{h+1,l}$ меньше $\operatorname{meas}_2 \Delta_l$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=m_{h_0,p_{h_0}}}^{\infty} \mu_{h+1,l} &= \sum_{l=k_h+1}^{\infty} \mu_{h+1,l} + \sum_{l=m_{h_0,p_{h_0}}+1}^{k_h} \mu_{h+1,l} + \mu_{h+1,m_{h_0,p_{h_0}}} \\ &\leq \sum_{l=k_h+1}^{\infty} \operatorname{meas}_2 \Delta_{h+1,l} \\ &\quad + \rho \sum_{l=m_{h_0,p_{h_0}}+1}^{k_h} \operatorname{meas}_2 \Delta_l + \mu_{h+1,m_{h_0,p_{h_0}}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку при $h \rightarrow \infty$ номер $k_h \rightarrow \infty$, то и $\sum_{l=k_h+1}^{\infty} \operatorname{meas}_2 \Delta_{h+1,l} \rightarrow \infty$, и, переходя в неравенстве (20) к пределу при $h \rightarrow \infty$, получаем

$$\rho \sum_{l=m_{h_0,p_{h_0}}+1}^{k_h} \operatorname{meas}_2 \Delta_l + \mu_{h_0+1,m_{h_0,p_{h_0}}} \geq \sum_{l=m_{h_0,p_{h_0}}}^{\infty} \mu_{h+1,l}.$$

При $h > h_0$, используя неравенство (3_{h+1}), заменим правую часть этого неравенства на меньшую. Тогда

$$\rho \sum_{l=m_{h_0,p_{h_0}}+1}^{k_h} \operatorname{meas}_2 \Delta_l + \mu_{h_0+1,m_{h_0,p_{h_0}}} \geq \rho \sum_{l=m_{h_0,p_{h_0}}}^{\infty} \operatorname{meas}_2 \Delta_l.$$

Сокращая одинаковые слагаемые в правой и левой частях этого неравенства, получаем

$$\mu_{h_0+1,m_{h_0,p_{h_0}}} \geq \rho \operatorname{meas}_2 \Delta_{m_{h_0,p_{h_0}}},$$

а это противоречит неравенству (19). Таким образом, предположение о том, что для всех $h > h_0$ номер m_{h,s_h} больше $m_{h_0,p_{h_0}}$, неверно. Поэтому найдется избыточный сектор $\Delta_{k_{h_1}}$, для которого $m_{h_1,s_{h_1}} = m_{h_0,p_{h_0}}$. По свойствам 3^{h₁}) и 5^{h₁}) для всех секторов Δ_l , $l < k_{h_1}$, за исключением, быть может, одного только сектора $\Delta_{m_{h_1,s_{h_1}}} \left(\Delta_{m_{h_0,p_{h_0}}} \right)$, значения $\mu_{h_1+1,l}$ равны $\rho \operatorname{meas}_2 \Delta_l$ и, следовательно, $\rho_{h_1+1,l} = \rho$. Так как $\rho_{h_1+1,m_{h_1,p_{h_1}}} = \rho$, то из соотношения (5_{h₁+1}) получаем, что при $j_1 := k_{h_1}$

$$\Psi(\xi_{j_1+1}) > (1 + L\rho)^{j_1-1} \Psi(\xi_1).$$

Для избыточного сектора $\Delta_{k_{h_1}}$ неравенство $\mu_{h_1+1,L} < \rho \text{ meas}_2 \Delta_l$ выполнено по крайней мере при $l = m_{h_1, p_{h_1}}$. Аналогично тому, как это было сделано для избыточного сектора $\Delta_{k_{h_0}}$, для сектора $\Delta_{k_{h_1}}$ можно найти сектор $\Delta_{k_{h_2}}$, $h_2 > h_1$, для которого номер $m_{h_2, s_{h_2}}$ равен номеру $m_{h_1, p_{h_1}}$. Используя свойства 3^{h_2} и 5^{h_2} и соотношение (5_{h_2+1}) , можно показать, что при $j_2 := k_{h_2}$

$$\Psi(\xi_{j_2+1}) > (1 + L\rho)^{j_2-1} \Psi(\xi_1).$$

Повторяя эти рассуждения дальше, мы будем последовательно находить секторы $\Delta_{k_{h_a}}$, $h_a > h_{a-1}$, для которых номер $m_{h_a, s_{h_a}}$ равен номеру $m_{h_{a-1}, p_{h_{a-1}}}$. Для каждого такого сектора согласно свойствам 3^{h_a} и 5^{h_a} и соотношению (5_{h_a+1}) при $j_a := k_{h_a}$ выполнено неравенство

$$\Psi(\xi_{j_a+1}) > (1 + L\rho)^{j_a-1} \Psi(\xi_1). \quad (21)$$

Подведем итоги. Если избыточных секторов нет, то для всех j выполняется неравенство (7). Если избыточных секторов конечное число, то для всех $j \geq k_H$, где k_H – номер последнего избыточного сектора, выполнено неравенство (17). Если избыточных секторов бесконечно много и для некоторой их последовательности $\Delta_{k_{h_a}}$ для всех $l \leq k_{h_a}$ величины $\rho_{h_a+1,l}$ равны ρ , то для возрастающей последовательности номеров $j_a := k_{h_a}$ выполнено неравенство (18). Если, наконец, избыточных секторов бесконечно много и для каждого избыточного сектора Δ_{k_h} с достаточно большим номером найдется сектор Δ_l , $l < k_h$, у которого $\rho_{h_a+1,l} < \rho$, то существует такая возрастающая последовательность номеров j_a , для которых выполнены неравенства (21).

Таким образом, какова бы ни была структура множества E , найдутся такое число C и такая возрастающая последовательность номеров j_a , для которых будет выполнено следующее неравенство:

$$\Psi(\xi_{j_a+1}) > C(1 + L\rho)^{j_a}. \quad (22)$$

Точки $\xi_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, причем $|\xi_j| = q^{1-j} |\xi_1|$. Поэтому из неравенства (2) следует, что

$$\Psi(\xi_{j_a+1}) = o(|\xi_{j_a+1}|^{-\beta \rho n}) = o((q^{-\beta \rho n})^{-j_a}) \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Ясно, что соотношения (22) и (23) не могут быть выполнены одновременно, если

$$1 + L\rho > q^{\beta \rho n}.$$

Логарифмируя обе части этого неравенства, получаем равносильное соотношение

$$\log(1 + L\rho) > \beta \rho n \log q. \quad (24)$$

По своему определению величина ρ меньше 1, а L , как было отмечено после доказательства леммы 2, меньше 2. Поэтому $0 < L\rho < 2$, и, значит,

$$\log(1 + L\rho) > L\rho \frac{\log 3}{2}.$$

Следовательно, если

$$\beta n \rho \log q < L \rho \frac{\log 3}{2},$$

то будет выполнено и неравенство (24). Для этого достаточно взять любое положительное $\beta < L \log 3 / (2n \log q)$. При таком β неравенства (22) и (23) будут противоречить друг другу и, значит, наше предположение о том, что теорема не выполняется и функция $f(z)$ не ограничена в области D , не верно. Следовательно, в этом случае по обобщенному принципу максимума функция $f(z)$ не превосходит C в D . Теорема доказана.

Несложно проверить, что β можно положить равным 0.04. Вопрос о точности полученного результата остается открытым.

Автор приносит глубокую благодарность Е. П. Долженко и Е. М. Чирке за обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Привалов И. И. Субгармонические функции. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
2. Теляковский Д. С. Об одной теореме типа Фрагмена–Линделёфа для субгармонических функций: Тез. докл. Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”. М.: МИАН, 1995. С. 267.
3. Ландис Е. М. О принципе Фрагмена–Линделёфа для решений эллиптических уравнений // ДАН СССР. 1956. Т. 107. №4. С. 508–511.

Московский государственный
инженерно-физический институт

Поступило в редакцию
15.VIII.1995