Общероссийский математический портал

А. Г. Ченцов, К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 3, 185–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/im242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:12:21

УДК 519.6

А. Г. Ченцов

**К вопросу о корректном расширении
некоторых неустойчивых задач управления
с интегральными ограничениями**

Рассматривается релаксация интегральных ограничений в интересах восстановления естественной асимптотики множеств допустимых элементов и их информационных образов – “достижимых” множеств. Данная асимптотика может быть “утеряна” при ортодоксальной обработке данных. Возможные применения предлагаемых процедур связаны, в частности, с задачей об исследовании асимптотического поведения областей достижимости управляемых систем при исчезающе малом ослаблении системы ограничений.

Библиография: 28 наименований.

§ 1. Содержательное обсуждение задачи

Предметом нашего рассмотрения будут некоторые задачи, связанные с исследованием вопросов достижимости желаемых “состояний” в условиях ограничений интегрального характера. Обсудим один простой пример из области теории управления линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие задачи могут возникать и в аппроксимативных конструкциях решения дифференциальных уравнений в частных производных. Мы исследуем сейчас асимптотику областей достижимости (ОД) [1]–[3] в заданный момент времени; начальное состояние системы полагается заданным, а несущественные преобразования, связанные с использованием формулы Коши, выполненными. В данном параграфе используем содержательный способ рассуждений.

Итак, фиксируем моменты времени $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ (здесь и ниже $\mathbb{R}$ – вещественная прямая), $t_0 < \vartheta_0$, определяющие начало и конец управляемого процесса, происходящего в n -мерном (фазовом) пространстве $\mathbb{R}^n$; этот процесс разворачивается под воздействием управления-программы в виде r -вектор-функции f с компонентами $f_1, \dots, f_r$, определенными на “стрелке” $I \triangleq [t_0, \vartheta_0[$ (здесь и ниже $\triangleq$ – равенство по определению). Мы полагаем сейчас, что каждая из упомянутых компонент f_i есть неотрицательная кусочно-постоянная (к.-п.) и непрерывная справа (н.спр.) вещественнозначная (в/з) функция на I . Условие неотрицательности нередко бывает связано со следующим обстоятельством. Именно, в качестве $f_1, \dots, f_r$ здесь

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (008-94) и Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00458).

могут использоваться функции, характеризующие интенсивность подачи “топлива” в соответствующий канал управляемой системы при изменении времени. В этой постановке речь идет, следовательно, об управлении распределением единого энергоресурса между несколькими каналами системы управления. Предположение о неотрицательности $f_1, \dots, f_r$ представляется в данном случае вполне естественным, коль скоро эти функции определяют пропорции выделяемого подсистемам “топлива”. Через F обозначаем сейчас множество всех (покомпонентно: к.-п., н.спр. и неотрицательных) управляющих программ $f = (f_1, \dots, f_r)$ вышеупомянутого типа. Выбор $f \in F$ осуществляется обычно с соблюдением целого ряда ограничений; одно из таких ограничений нередко задается уже упоминаемым фактически условием

$$\sum_{j=1}^r \int_{t_0}^{\vartheta_0} f_j(t) dt \leq c, \quad (1.1)$$

где $c \in [0, \infty[$ – заданная (ресурсная) константа, характеризующая общий запас “топлива”.

Другой пример интегральных ограничений (ИО), непосредственно определяющих условия на выбор $f \in F$, доставляет условие чередования импульсов и пауз [4, с. 13, 14] в работе “двигателя”. Некоторые типы ИО реализуются после “пересчета” краевых условий и фазовых ограничений (ФО). Опуская сейчас обсуждение весьма трудных для исследования моментов, связанных с релаксацией ИО, соответствующих изначальным ФО, мы обсудим только варианты этих ИО, порождаемые краевыми условиями (в связи с приближенной реализацией в виде ИО различных типов ФО следует отметить общие конструкции [4], [5]). В то же время каждая программа $f \in F$ переводит начальное состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в некоторую точку $x_f(\vartheta_0) \in \mathbb{R}^n$, часть координат которой представляет для нас интерес с точки зрения достижения поставленной цели. Мы, как обычно [1], [2], называем эти координаты *геометрическими* (случай совпадения “геометрического” пространства с фазовым не исключается). В упомянутом пространстве геометрических координат мы и строим ОД в виде совокупности соответствующих проекций векторов $x_f(\vartheta_0)$ при переборе всевозможных допустимых в смысле имеющихся ИО (см., в частности, (1.1)) управлений $f \in F$. К сожалению, свойство устойчивости здесь может отсутствовать: уже при ослаблении ИО возможно скачкообразное расширение ОД. Поскольку малые нарушения ИО практически неизбежны, приходится использовать регуляризацию задачи о построении ОД. Принцип расширения [6], [7] пространства (управлений) F , в идейном отношении несколько отличный от традиционных методов теории некорректных задач [8]–[10], определяет естественный тип регуляризации, соответствующий релаксации ограничений (последовательное ослабление ИО с построением предела возникающих ОД для возмущенных версий исходной задачи).

Мы рассмотрим сейчас пример такого подхода для задачи управления линейной системой с фиксированным временем окончания (момент ϑ_0), используя несущественное преобразование, подобное [2, с. 160], с целью исключения фазового вектора

из правой части системы. Кроме того, мы сразу рассматриваем нашу управляемую систему в виде совокупности двух подсистем. Для первой подсистемы, используя понятие вектора геометрических координат, мы определяем ОД при ИО, порождаемых, с одной стороны, условием (1.1), а с другой – краевым условием для второй подсистемы. Содержательный пример такой постановки можно извлечь, например, из следующей задачи космической навигации, рассматривая последнюю в линейном приближении.

В одной из естественных постановок весьма актуальной задачи о сборе космического “мусора” используется на промежуточных этапах решения следующий вариант задачи Эйлера–Ламберта [11] для управляемой материальной точки (МТ) в центральном поле силы тяжести. Именно, в плоскости исходной орбиты МТ подбором импульсного управления организуется перевод (управляемой МТ) в точку прошивания этой плоскости соответствующим фрагментом “мусора”, перемещающимся по своей орбите. Момент окончания процесса и краевое условие, таким образом, задаются жестко. В то же время представляет интерес анализ ОД по скоростным координатам. В частности, это может оказаться важным с целью последующего уменьшения относительной скорости в точке встречи посредством формирования корректирующего импульса в момент, близкий к ϑ_0 . Простейшая моделирующая линейная система для описания упомянутой МТ (уравнение которой нелинейно) может быть получена из модели “тонкого слоя” в смысле полосы высот, “охватывающей” возможные варианты движения МТ на сравнительно малом промежутке времени, т.е. из модели “околокругового” движения.

Вернемся к линейной модели двух подсистем

$$\dot{y}(t) = B_1(t)f(t) + \varphi_1(t), \quad (1.2)$$

$$\dot{z}(t) = B_2(t)f(t) + \varphi_2(t), \quad (1.3)$$

начальные состояния $y(t_0) = y_0$ и $z(t_0) = z_0$ которых заданы, а момент окончания процесса управления фиксирован и совпадает с ϑ_0 . Фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ исходной системы можно рассматривать в виде “совокупности” всевозможных составных векторов (y, z) при должной перенумерации их компонент. Тогда вектор $y(\vartheta_0) = y_f(\vartheta_0)$ терминального состояния системы (1.2) можно интерпретировать (если f – допустимое управление) как точку ОД (исходной системы) по геометрическим координатам. Точку $z(\vartheta_0) = z_f(\vartheta_0)$, т.е. терминальное состояние (1.3), рассматриваем в виде “контрольной”; мы требуем, чтобы выполнялось условие $z_f(\vartheta_0) \in Z$, где Z – заданное множество. Матрицанты $B_1(\cdot)$ и $B_2(\cdot)$ определены на I и возникают в результате естественных (для задач с фиксированным временем окончания) преобразований типа [2, с. 160]; вектор-функции $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ полагаются известными. Кроме того, выбор $f \in F$ стесняем условием (1.1), хотя в некоторых постановках представляет интерес исследование “неограниченных” в смысле (1.1) задач об исследовании ОД; в этих специально оговариваемых случаях мы опускаем (1.1). Полагаем сейчас, что все компоненты $B_1(\cdot)$, $B_2(\cdot)$, $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$

допускают сколь угодно точное и равномерное на I приближение к.-п. и н.спр. в/з функциями; множество Z полагаем замкнутым в топологии покоординатной сходимости соответствующего (системе (1.3)) конечномерного арифметического пространства, допускающего естественное отождествление с подпространством фазового пространства $\mathbb{R}^n$ исходной системы. Значения терминальных состояний $y_f(\vartheta_0)$ и $z_f(\vartheta_0)$ систем (1.2), (1.3) можно получить (покомпонентно исполняемым) интегрированием их правых частей с дополнительным сдвигом: в первом случае имеется в виду “сдвиг” y_0 , а во втором – “сдвиг” z_0 . Тогда ОД G системы (1.2) есть множество всех векторов $y_f(\vartheta_0)$ при переборе $f \in F$ с соблюдением (1.1) и краевого условия $z_f(\vartheta_0) \in Z$, которое с помощью некоторых простых преобразований может быть сведено к дополнительному по отношению к (1.1) ИО. К сожалению, “малое” ослабление упомянутой системы ограничений уже в простейших случаях приводит к “скачку” ОД G . Так, например, из [5, гл. I, II] можно легко извлечь соответствующие примеры неустойчивых задач управления МТ, имеющие смысл аналогов вышеупомянутой содержательной задачи космической навигации.

В наиболее простом случае такого рода можно рассматривать в качестве (1.2) преобразование скорости скалярной МТ, а в качестве (1.3) – преобразование ее координаты (в очевидной редакции второго закона Ньютона следует полагать $n = 2$, уравнения (1.2) и (1.3) скалярными, $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \equiv 0$; $B_1(\cdot)$ следует заменить функцией на I , тождественно равной 1, а $B_2(\cdot)$ – функцией, сопоставляющей моменту $t \in I$ число $\vartheta_0 - t$). Если $Z = \{z_0\}$ (в “нередуцированном” варианте исходной задачи это означает, что краевое условие реализуется без воздействия управлений), то $G = \{y_0\}$, в то время как при ослабленном краевом условии $|z_f(\vartheta_0) - z_0| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, ОД становится отрезком $[y_0, y_0 + c]$ (см. (1.1)), а при “снятии” ресурсного ограничения (1.1) – полупрямой $[y_0, \infty[$. Разумеется, данная модель может быть существенно усложнена. Так, например, уже в случае управления МТ возможно появление в (1.2), (1.3) разрывных зависимостей $B_1(\cdot)$, $B_2(\cdot)$; это обстоятельство можно связать с частичным сбросом массы либо (в векторном варианте) с оперативной (в идеале – мгновенной) переориентацией двигательной установки. В этих случаях существенно усложняется проблема предельного представления достижимых состояний, а также их аппроксимативной реализации в классе приближенных решений, поскольку, как уже ясно из простейшего примера, упомянутая реализация касается, вообще говоря, не точек “обычной” ОД (или даже ее замыкания), но состояний, в известном смысле “виртуальных” и по этой причине труднопредсказуемых.

В упомянутой простейшей задаче управления скалярной МТ такими “виртуальными” состояниями являются точки из $]y_0, y_0 + c]$ (если в этом примере отбросить, как в [5, § 1.1], ИО (1.1), то “виртуальными” становятся уже все точки из $]y_0, \infty[$). В связи с отмеченными затруднениями естественным образом возникает вопрос о регулярном (в смысле некоторых методов, базирующихся на использовании расширений пространства реализуемых управлений) представлении таких “виртуальных” терминальных состояний системы (1.2), отвечающих асимп-

тотике управлений, приближенно соблюдающих условие (1.1) и Z -ограничение (т.е. краевое условие) для системы (1.3). Оказывается [5], такое регулярное представление может быть получено посредством введения так называемых обобщенных управлений, т.е. посредством обобщенных версий (1.1)–(1.3) с использованием неотрицательных векторных конечно-аддитивных (к.-а.) мер [4], [5], [12], определенных на семействе $\mathcal{J}$ ($\mathcal{J}$ – полуалгебра множеств) всех промежутков $[a, b[$, $t_0 \leq a \leq b \leq \vartheta_0$.

Итак, вместо (1.2) и (1.3) будем использовать обобщенные реакции на упомянутые векторные к.-а. меры $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$; эти реакции определяются интегрированием правых частей (1.2), (1.3) с добавлением y_0 и z_0 соответственно при условии, что вместо векторных интегралов “первых слагаемых” в (1.2) и (1.3) используются следующие их (обобщенные) аналоги:

$$\left(\sum_{j=1}^r \int_I B_{1,i,j}(t) \mu_j(dt) \right)_{i \in \overline{1,p}}, \quad (1.4)$$

$$\left(\sum_{j=1}^r \int_I B_{2,i,j}(t) \mu_j(dt) \right)_{i \in \overline{1,q}}. \quad (1.5)$$

Здесь p и q – натуральные числа, определяющие размерность фазовых пространств подсистем (1.2) и (1.3) соответственно (в смысле исходной системы мы имеем обычно представление $n = p + q$, отвечающее конструкции “геометрического” пространства, в котором определяется ОД). Итак, (1.4) следует использовать при расширении (1.2), а (1.5) – при расширении (1.3). Логика данного расширения вполне аналогична [4, (6.5.2)]. Таким образом, каждой (неотрицательной покомпонентно) векторной к.-а. мере μ сопоставляются обобщенные траектории $\tilde{y}_\mu = \tilde{y}_\mu(\cdot)$ и $\tilde{z}_\mu = \tilde{z}_\mu(\cdot)$ систем, получаемые расширением (1.2) и (1.3) соответственно. Нас будут интересовать лишь их терминальные состояния $\tilde{y}_\mu(\vartheta_0)$ и $\tilde{z}_\mu(\vartheta_0)$. Выбор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ стесняем при этом условиями

$$\left(\sum_{i=1}^r \mu_i(I) \leq c \right) \& (\tilde{z}_\mu(\vartheta_0) \in Z); \quad (1.6)$$

“обобщенное управление” μ , удовлетворяющее (1.6), называем *допустимым*.

Множество всех векторов $\tilde{y}_\mu(\vartheta_0)$, где μ допустимо в смысле (1.6), назовем *обобщенной ОД* для системы (1.2). Оказывается, что эта обобщенная ОД есть в точности множество всех “виртуальных” терминальных состояний системы (1.2) в условиях, когда реализующие эти состояния последовательности обычных управлений соблюдают (1.1) и Z -ограничение (для системы (1.3)) с высокой, но все же конечной и, более того, с “нарастающей” степенью точности; точное же соблюдение упомянутых ограничений для элементов упомянутых последовательностей не требуется.

Итак, мы располагаем требуемым регулярным представлением в терминах (1.4)–(1.6). На самом же деле на основе (1.4)–(1.6) можно получать суждения об аналогах свойства устойчивости (последнее свойство очень часто в “чистом виде” отсутствует). Эти суждения связаны с естественным желанием заменить ОД невозмущенной задачи обобщенной ОД в интересах обоснованной оценки возможностей системы по достижении поставленной цели. Такая замена будет, по-видимому, удачной, если упомянутая обобщенная ОД окажется в определенном смысле “устойчивой” по отношению к изменению основных факторов, способствующих ее появлению в качестве самостоятельного объекта. К числу этих факторов следует отнести прежде всего сам способ ослабления “жестких” ограничений исходной задачи. Инвариантность обобщенной ОД по отношению к вариации этого способа “в широких пределах” является исключительно важным свойством. В настоящей работе мы стремимся к установлению данного свойства, имея целью получение в виде обобщенной ОД, отвечающей условию (1.6), обоснованной оценки возможностей управляющей стороны по реализации терминальных состояний при исчезающе малом ослаблении краевых условий.

В связи с обсуждаемой выше задачей об управлении скалярной МТ следует отметить, что именно обобщенная ОД содержит все “виртуальные” состояния для подсистемы (1.2), так что упомянутая ОД может рассматриваться в качестве искомого регулярного (а по сути – обобщенного) представления достижимых в практическом смысле терминальных состояний. Особо следует оговорить, что приближенная реализация этих состояний может при условии (1.1) быть доведена до наиболее приемлемой формы, характеризуемой погружением в наперед выбранную окрестность обобщенной ОД ее аналога в классе обычных управлений при замене в краевом условии множества Z его достаточно малой окрестностью. При отказе от (1.1) картина аппроксимативной реализации обобщенной ОД становится более сложной; соответствующие суждения о роли этой ОД сохраняют (в идейном отношении) свою силу, но формализуются уже в терминах совпадения множеств притяжения. Заметим, однако, что само условие (1.1) может быть очевидным образом погружено в Z -ограничение для подсистемы (1.3) посредством добавления к фазовому вектору этой подсистемы r “новых” компонент, изменение которых порождается “прямым” интегрированием $f_1, \dots, f_r$ при нулевых начальных условиях. Для формирования системы начальных условий вектор z_0 следует при этом дополнить “набором” из r нулей. В новой редакции можно говорить о краевых условиях в виде единственного по существу требования к выбору управляющей программы $f \in F$. Эти условия могут включать или не включать требование (1.1) посредством задания естественного для соответствующей содержательной задачи множества Z . С этих пор мы не выделяем (1.1) в виде отдельного условия, допуская его возможную реализацию в составе единого Z -ограничения. Отметим, наконец, что само Z -ограничение в своем первоначальном варианте

легко редуцируется к виду

$$\int_{t_0}^{t_0} B_2(t)f(t) dt \in Z_1, \quad (1.7)$$

где множество Z_1 получено сдвигом Z . Разумеется, аналогичную трансформацию к интегральным ограничениям допускает и расширенный вариант краевых условий, т.е. второе требование в (1.6).

Итак, итогом наших эквивалентных преобразований является ИО (1.7), требующее, как мы уже убедились при рассмотрении простейшей модели управляемой МТ, регуляризации (и при том весьма “нестандартной”), о которой шла речь в связи с (1.6). В основе этой регуляризации (а по смыслу данная процедура есть именно регуляризация, хотя и материализуемая несколько необычно с точки зрения теории некорректных задач) заложен принцип расширения, доставляющий рассматриваемой задаче целый ряд полезных свойств, важных с практической точки зрения и интересных в теоретическом отношении. В рамках конструкции, именуемой здесь регуляризацией, осуществляется по сути дела “исправление” исследуемого объекта (пучок траекторий, ОД), что приводит, вообще говоря, к

отличию последнего, в редакции, отвечающей упомянутой регуляризующей конструкции на основе расширения пространства управлений, от “обычной” его версии, используемой в невозмущенной задаче.

Сейчас мы коснемся другой содержательной постановки, для которой условие типа (1.7) будет естественным эквивалентным представлением в виде системы ИО. Речь пойдет о так называемых стохастических ограничениях [5, гл. 6]. Мы ограничимся анализом только одного частного случая, имеющего смысл некоторой проблемы моментов [1], [13], [14]; этот частный случай связан с вопросом о прогнозировании среднего значения одного случайного вектора при использовании информации об эмпирическом среднем, определяемым по выборке значений другого случайного вектора. Мы ограничиваемся здесь содержательным обсуждением простейшей версии; см. в этой связи [4, гл. IX] и [5, гл. 6]. Отметим здесь же, что предлагаемая версия относится к гипотетической ситуации и касается ретроспективного в некотором смысле анализа; тем не менее она приводит к некоторым полезным выводам, которые имеет смысл учитывать при организации процедур обработки статистической информации (в связи с рассматриваемыми вопросами целесообразно отметить исследования в области робастной статистики; см., например, [15], [16], а также [17] в связи с конструкциями регуляризаций). Мы будем использовать здесь общие конструкции [18] для построения надлежащих аналогов (1.7).

Итак, пусть задано пространство элементарных событий $(\Omega, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ есть некоторая σ -алгебра подмножеств непустого множества Ω (здесь можно было бы ограничиться предположением о том, что $\mathcal{A}$ – полуалгебра подмножеств Ω , но мы

делать этого не будем, следуя в этой части традиционным определениям теории вероятностей). Пусть, кроме того, задана некоторая ненулевая мера $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty[$; для наших рассуждений существенна только ее конечная аддитивность. Относительно “истинного” вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P_0)$ известно только, что вероятность P_0 (в общем случае также к.-а.) имеет плотность f_0 относительно $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ в классе ограниченных $\mathcal{A}$ -измеримых в/з функций на Ω . Разумеется, функция f_0 неотрицательна и нормирована относительно λ . Пусть, далее, s и h – два ограниченных случайных вектора, что подразумевает $\mathcal{A}$ -измеримость всех компонент $s_1, \dots, s_m$ и $h_1, \dots, h_n$ этих “векторов” s и h соответственно (m и n – натуральные числа). Относительно компонент s имеется информация, полученная из их достаточно представительных выборок и сводящаяся к знанию вектора $a = (a_1, \dots, a_m)$ эмпирических средних; при этом постулируется, что (для интегралов, определяемых простейшей схемой [4], [5])

$$\int_{\Omega} s_1 f_0 d\lambda \approx a_1, \quad \dots, \quad \int_{\Omega} s_m f_0 d\lambda \approx a_m. \quad (1.8)$$

Предположение о знании исследователем только величин $a_1, \dots, a_m$ может показаться несколько искусственным (мы обсуждаем ниже также более общий случай), но мы и рассматриваем (1.8) только в иллюстративных целях. Можно представить себе, однако, следующую гипотетическую схему “вторичной” (по отношению к исходным выборкам) обработки. Именно, пусть в действительности наблюдается реализация только одной ограниченной случайной величины S и после ее “предварительной” обработки определены относительные частоты ν_i событий $\{S(\omega) < c_i\}$, где “набор” (c_i) – конечная сетка, соответствующая дискретизации (конечного) интервала значений S . Данные частоты ν_i могут быть приняты в качестве оценок для вероятностей наступления упомянутых событий. В свою очередь эти вероятности суть математические ожидания индикаторов множеств $S^{-1}([-\infty, c_i]) \in \mathcal{A}$. Эти индикаторы могут использоваться в качестве некоторых из компонент s_i при допущении о том, что $a_i \triangleq \nu_i$ для таких i . В качестве остальных компонент a могут, в частности, использоваться выборочные моменты реализаций S , $|S|$, S^2 и т.д.; при этом конструирование соответствующих реализаций (на основе имеющейся реализации S) может сопровождаться погрешностями вычислений. Таким образом, у нас возникает гипотетический случайный вектор s , часть компонент которого порождена индикаторами характерных событий и ответственна за относительные частоты; эта часть может использоваться для моделирования “дискретизированной” вероятности, а другая часть отвечает выборочным моментам в том смысле, что последние полагаются близкими к истинным моментам соответствующих порядков. Мы приходим к одному из вариантов (1.8); разумеется, настоящий пример является модельным и вовсе не предлагается в качестве рецепта для организации процедур статистической обработки информации. Вместе с тем полезно заметить, что “частотная” часть компонент s обладает определенной грубостью в смысле ослабления требований совмещения (относительных частот) с истинными значениями вероятности P_0 , в то

время как другая часть этим свойством, вообще говоря, не обладает. Это соображение имеет смысл учитывать при организации регуляризующих процедур (см. [17]). В связи с упомянутой грубостью отметим свойства, установленные в [4, § 9.4] и в [5, гл. 6]. Возвращаясь к (1.8), отметим, что на самом деле для нас существенно только то, что мы каким-то образом сумели получить в виде вектора a “хорошую” оценку среднего (математического ожидания) s . Однако сама плотность f_0 нам неизвестна. Замена в (1.8) приближенных равенств точными может приводить, как показывают простые примеры, к существенным ошибкам (скачкам). В этой связи мы привлекаем ослабленные аналоги соответствующей проблемы моментов, т.е. условия

$$\left| \int_{\Omega} s_1 f d\lambda - a_1 \right| \leq \varepsilon, \quad \dots, \quad \left| \int_{\Omega} s_m f d\lambda - a_m \right| \leq \varepsilon, \quad (1.9)$$

где $\varepsilon > 0$ следовало бы подобрать в соответствии с содержательным требованием (1.8), т.е. “исключить” потерю f_0 в соответствующем (системе (1.9)) множестве допустимых элементов. По существу же (1.8) означает реализацию (1.9) при некотором “малом” значении $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$. Однако это число ε_0 неизвестно исследователю, так что конкретизировать параметр точности ε в (1.9) не представляется возможным. Можно, однако, предложить некоторую модель, оперирующую с ограничениями типа (1.9) при $\varepsilon \downarrow 0$. Напомним, что в условиях, содержательно характеризующих посредством (1.8), требуется дать обоснованный прогноз возможной реализации вектора $h(\omega)$ в виде математического ожидания

$$\left(\int_{\Omega} h_1 f d\lambda, \dots, \int_{\Omega} h_n f d\lambda \right) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.10)$$

где $f = f_0$. При использовании модельных условий (1.9) можно ориентироваться только на построение множества всех векторов (1.10) при переборе функций плотности f , соблюдающих (1.9). Мы имеем в этом случае своеобразную ОД “в среднем”, соответствующую ε -ослаблению проблемы моментов, получающейся из (1.8) при замене приближенных равенств точными. В условиях $\varepsilon \downarrow 0$ мы имеем, следовательно, множество притяжения, или асимптотический вариант ОД “в среднем”. Точки этого множества снова могут рассматриваться как “виртуальные”.

ПРИМЕЧАНИЕ. Отметим, что упомянутый вариант проблемы моментов есть частный случай условия

$$\left(\int_{\Omega} s_1 f d\lambda, \dots, \int_{\Omega} s_m f d\lambda \right) \in \mathbb{Z} \quad (1.11)$$

на выбор ограниченной ($\mathcal{A}$ -измеримой) плотности вероятности относительно $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. В (1.11) $\mathbb{Z}$ замкнутое подмножество $\mathbb{R}^m$. В свою очередь (1.11)

можно редуцировать (см. [4, § 9.4]). Именно, обозначим через $\mathbb{F}$ множество всех неотрицательных $\mathcal{A}$ -измеримых ограниченных в/з функций на Ω . Тогда (1.11) эквивалентно условию

$$\left(\int_{\Omega} s_1 f d\lambda, \dots, \int_{\Omega} s_m f d\lambda, \int_{\Omega} f d\lambda \right) \in \mathbb{Z}_1, \quad (1.12)$$

где $\mathbb{Z}_1$ есть множество всех векторов $z = (z_1, \dots, z_m, z_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$, у которых $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}$, а $z_{m+1} = 1$. Заметим, что (1.12) – аналог (1.7), если только в этом последнем соотношении $r = 1$. Введение в (1.12) аналога $B_2(\cdot)$ из (1.7) не составляет труда. Отметим, наконец, что в рассматриваемой сейчас задаче о соблюдении (с высокой степенью точности) стохастических ограничений нетрудно построить и “векторный” аналог, т.е. реализовать в данной задаче случай, когда, как и в (1.7), объектом исследования (на основе косвенной информации) является конечный набор плотностей вероятности, для которых заданы ограничения на моменты. Таким образом, можно говорить о (1.7) и (1.11) как о конкретных реализациях некоторой общей системы ИО, которая может быть освобождена от содержательной нагрузки и подчинена соображениям построения единой математической теории. Мы ограничились сейчас сопоставлением невозмущенных версий (1.7) и (1.11), но с учетом утверждений [5, гл. 4, 6] можно и асимптотические версии этих условий объединить единой схемой; в связи с (1.12) полезно отметить важную роль условия ступенчатости “части” компонент матрицанта в системе ИО общего вида (см. [4, гл. VI]; [5, гл. 4, 6]). Разумеется, в упомянутой общей постановке, объединяющей (1.7) и (1.12), появляются новые возможности; они реализуются в виде утверждений, в какой-то степени более общих, чем требуется в соответствующей содержательной задаче. Однако эти обстоятельства могут на самом деле служить основой для новых выводов содержательного характера. Так, например, в связи с (1.12) можно поставить вопрос о влиянии малых нарушений условий нормировки, типичных для задач об определении плотностей вероятности.

В заключение параграфа отметим [5, гл. 6], что подобно (1.6) в нашей последней задаче для регулярного представления “виртуальных” элементов $\mathbb{R}^n$, отвечающих пределам векторов (1.10) при нарастающей точности соблюдения естественной проблемы моментов (см. (1.9) при $\varepsilon \downarrow 0$), также используются к.-а. меры, а точнее, к.-а. вероятности. Соответствующий аналог (1.11) имеет вид

$$\left(\int_{\Omega} s_1 dP, \dots, \int_{\Omega} s_m dP \right) \in \mathbb{Z}, \quad (1.13)$$

где в качестве P следует выбирать к.-а. вероятность, обращающуюся в нуль на λ -нулевых множествах. Условие (1.13) допускает естественную редукцию подобно тому, как (1.11) приводится к виду (1.12). Именно, это условие (1.13) преобразуется к ограничению

$$\left(\int_{\Omega} s_1 d\mu, \dots, \int_{\Omega} s_m d\mu, \mu(\Omega) \right) \in \mathbb{Z}_1 \quad (1.14)$$

на выбор неотрицательной к.-а. меры μ с областью определения $\mathcal{L}$, обращающейся в нуль на λ -нулевых множествах. Условие (1.14) аналогично расширенному варианту (1.7), являющемуся естественной трансформацией второй части (1.6). Таким образом, и расширенные варианты исследуемых условий для случая задачи управления, и задачи прогнозирования при стохастических ограничениях в логическом отношении совпадают. Мы имеем, следовательно, основание для построения единой теории расширения ИО в классе конечно-аддитивных мер, стесняемых единым специальным условием слабой абсолютной λ -непрерывности [19]. Отсутствие этого условия в случае задачи управления является “кажущимся”. Дело в том, что в случае пространства-стрелки $(I, \mathcal{J})$ с функцией длины (в качестве аналога λ) данное условие выполняется автоматически; см. в этой связи [4, с. 89]. Таким образом, и в отношении редуцированной версии (1.6) можно полагать, что мы оперируем к.-а. мерами со свойством слабой абсолютной непрерывности. Теперь, после обстоятельной мотивировки, мы приступаем к изложению общей конструкции расширения в классе векторных к.-а. мер, имея в виду возможность различных ее приложений. Здесь наряду с обсуждавшимися ранее задачами отметим [4, с. 154–160], [5, § 5.10], где рассматривалась связь двойственных конструкций выпуклого программирования и расширений в классе к.-а. мер.

Обсудим теперь совсем кратко основной для данной работы вопрос об универсальных свойствах множеств притяжения. Для большей наглядности будем рассматривать только случай задачи управления при ограничениях (1.7), природа которых обсуждалась ранее (в случае задачи прогнозирования средних значений случайного вектора h содержательная постановка требует, вероятно, предварительного обсуждения методов регуляризации, дополняющих расширение в классе к.-а. вероятностей; см. в этой связи [5, с. 277–282]).

Итак, в случае ИО (1.7), определяющих невозмущенную задачу о построении ОД системы (1.2), представляет интерес исследование ослабленных аналогов (1.7). Множество Z_1 заменяется своей окрестностью, причем в общем “неограниченном” случае (1.7), когда ресурсное требование (1.1) может отсутствовать “в составе” упомянутой результирующей системы (1.7), традиционно используемые ε -окрестности (в смысле подходящей нормы $\mathbb{R}^q$) не образуют уже, вообще говоря, фундаментальной системы окрестностей Z_1 при переборе всех $\varepsilon > 0$. В этой связи мы рассматриваем отдельно схемы ослабления (1.7) в классе всевозможных окрестностей Z_1 и в классе ε -окрестностей, где $\varepsilon > 0$. Более того, в последнем случае мы предоставляем “системе” и другие возможности приближенной реализации (1.7). По сути дела мы ставим, таким образом, вопрос о более или менее полном асимптотическом варианте (1.7); данный вопрос в целом ряде практически интересных случаев решается положительно с точки зрения существования общей асимптотики ОД и ее адекватного представления в терминах обобщенной ОД. Что же касается асимптотики множеств допустимых управлений, то при используемом ниже погружении этих множеств в пространство к.-а. мер данный

вопрос решается положительно всегда. Структура “универсального” множества притяжения определяется при этом в терминах редуцированного варианта системы ограничений (1.6), в составе которой может быть опущена первая часть (условия (1.6)). В последующем изложении мы используем, однако, одно естественное обобщение. Именно, в условиях, подобных (1.7), (1.12), мы допускаем возможность использования матрицантов с бесконечным множеством “строк”, а в качестве аналогов $Z_1, \mathbb{Z}_1$ – возможность использования множеств в функциональных пространствах. В связи с постановками задач управления можно отметить, что необходимость такого обобщения мотивируется, в частности, соображениями учета ФО и сведения упомянутых ФО к ИО.

§ 2. Топологические конструкции: обсуждение подхода

Мы рассматриваем далее вопросы асимптотической достижимости в топологических пространствах (ТП). В этой связи представляется целесообразным дополнить обсуждение содержательных задач § 1 изложением идеи топологической регуляризации задачи о достижимости элементов ТП в условиях возмущаемых ограничений. Приводимые здесь рассуждения допускают очевидную интерпретацию в терминах задачи об исследовании асимптотики ОД и задачи определения регуляризированной версии ОД “в среднем” (см. также [5, гл. 6]).

Итак, мы обсуждаем сейчас выбор элемента f из заданного непустого множества F произвольной природы. Предполагается заданным оператор s , переводящий F в (непустое) множество $\mathbf{X}$, а также множество $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, определяющее следующее ограничение на выбор $f \in F$: $s(f) \in \mathbf{Y}$. Тогда $F_\partial \triangleq s^{-1}(\mathbf{Y}) = \{f \in F \mid s(f) \in \mathbf{Y}\}$ есть соответствующее множество допустимых элементов, или, короче, допустимое множество (ДМ). Предположим, что имеется еще третье множество $\mathbf{H}$ и задан оператор h из F в $\mathbf{H}$. Тогда образ $h^1(F_\partial) = \{h(f) \mid f \in F_\partial\}$ имеет смысл своеобразной ОД в $\mathbf{H}$ при наличии $\mathbf{Y}$ -ограничения $s(f) \in \mathbf{Y}$. Если множество $\mathbf{Y}$ будет каким-то образом возмущено, то вместо $h^1(F_\partial)$ мы получим другое, вообще говоря, множество. Вопрос о близости последнего к $h^1(F_\partial)$ имеет смысл исследования устойчивости упомянутой абстрактной ОД. Для его корректной постановки следует оснастить $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$ топологиями τ и θ соответственно, так что речь пойдет о ТП $(\mathbf{X}, \tau)$ и $(\mathbf{H}, \theta)$. Возмущение $\mathbf{Y}$ осуществляется обычно посредством замены этого множества некоторой окрестностью $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$, в результате чего реализуется новое ДМ $\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O}) \triangleq s^{-1}(\mathcal{O})$ и, следовательно, новая ОД $h^1(\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O}))$. Если окрестность $\mathcal{O}$ “сужается” к множеству $\mathbf{Y}$, то возникает естественный вопрос об асимптотике упомянутых ОД, а также вопрос о соотношении этой асимптотики и невозмущенной ОД $h^1(F_\partial)$. Очень часто (см. § 1) $h^1(F_\partial)$ не характеризует упомянутую асимптотику, так что предел множеств $h^1(\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O}))$ при “сужении” $\mathcal{O}$ к множеству $\mathbf{Y}$ и множество $h^1(F_\partial)$ существенно различаются.

Вопрос о представлении возникающего (в виде вышеупомянутого предела) множества притяжения в ТП $(\mathbf{H}, \theta)$ приобретает в этих условиях (характерных для неустойчивых задач о достижимости) особую остроту. Как уже отмечалось в § 1,

для его решения можно использовать (и это неоднократно применялось в теории экстремальных задач; см., например, [6], [7]) специальным образом сконструированное пространство $\mathbf{F}$ обобщенных элементов, в которое так или иначе погружается F и на которое продолжаются отображения s и h , участвующие в исходной постановке (при построении такого пространства в § 1 мы использовали в этих целях интегральные аналоги (1.4), (1.5); в более общей ситуации см. расширение формулы Коши в классе к.-а. управлений-мер [4, с.132]). В итоге мы получаем новые операторы s_0 и h_0 , действующие из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$ соответственно; эти операторы зачастую удается выбрать непрерывными, что весьма важно для последующих преобразований, имеющих смысл регуляризации. Более того, продолжение s_0 оператора s нередко удается организовать таким образом, что в виде $s_0^{-1}(\mathbf{Y})$ реализуется объект, ответственный за асимптотику ДМ $\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O})$ при неограниченном “сужении” окрестности $\mathcal{O}$ к множеству $\mathbf{Y}$. В свою очередь $h_0^1(s_0^{-1}(\mathbf{Y}))$ определяет в целом ряде практически интересных случаев асимптотику ОД $h^1(\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O}))$. Конструкции такого типа использовались в [6], [7] в условиях компактификации пространства “обычных” управлений в нелинейной системе с геометрическими (понтрягинскими) ограничениями. Более того, соответствующий компактификатор здесь удается, как правило, выбрать метризуемым. Это чрезвычайно полезное обстоятельство нашло широкое применение в конструкциях скользящих режимов (см. [2], [6], [7] и др.). В случае задач управления с импульсными ограничениями процедуры компактификации являются более сложными при наличии разрывных зависимостей в системе условий эти компактификации объективно требуют реализации в классе к.-а. мер, что связано с известной теоремой [12, гл. IV] о представлении линейного непрерывного функционала на пространстве (разрывных) функций, определяемых в виде равномерных пределов ступенчатых отображений. Тогда мы получаем в типичных для теории управления случаях ресурсно ограниченных задач неметризуемые компактификаторы, наглядное представление о которых дают условия типа (1.6), (1.13) и (1.14) после их естественной унификации (см. [4, гл. VI], [5, гл. 4]); последняя будет реализована ниже для более общего случая ИО, при которых ДМ не обладают, вообще говоря, свойствами компактификаций в классе к.-а. мер.

Основное внимание в настоящей работе уделяется исследованию “универсальных” свойств множеств типа $s_0^{-1}(\mathbf{Y})$, $h_0^1(s_0^{-1}(\mathbf{Y}))$; речь идет прежде всего об “универсальности” этих объектов по отношению к классу возможных возмущений $\mathbf{Y}$ -ограничения. Так, например, при рассмотрении ДМ $\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O})$ можно использовать семейство всех окрестностей $\mathcal{O}$ множества $\mathbf{Y}$ или какую-то “часть” этого семейства. Кроме того, можно изменить топологию τ . В последнем случае представляется естественным следующее сопоставление: наряду с “полным” семейством τ -окрестностей множества $\mathbf{Y}$ целесообразно рассмотреть “неполное” семейство окрестностей $\mathbf{Y}$ в топологии $\tilde{\tau}$, для которой $\tilde{\tau} \subset \tau$. Здесь следует отметить, что τ – параметр аппроксимативной версии исходной постановки, так что представляет интерес степень влияния его изменений на результат (напомним, что в невозму-

шенной версии задачи о достижимости упомянутый параметр отсутствует). Мы допускаем и другие различия вариантов ослабления ИО. Тем не менее в очень широких пределах упомянутых изменений способов возмущения ИО асимптотика ДМ и ОД остается неизменной. В этом и состоит основной результат статьи. Именно, мы укажем достаточно “широкие” границы диапазона всевозможных версий асимптотической постановки, обслуживаемой соответствующим вариантом множеств $s_0^{-1}(\mathbf{Y})$, $h_0^1(s_0^{-1}(\mathbf{Y}))$. Прикладная сторона вопроса была в достаточной мере проиллюстрирована в § 1. Сейчас мы представим еще одну интерпретацию. Именно, данную проблему можно рассматривать с точки зрения регуляризации задачи определения образа множества, допускающего различные варианты возмущения. Постановки § 1 можно рассматривать как частные случаи.

§ 3. Общие определения

Мы рассматриваем далее асимптотическую версию задачи о достижимости, ориентируясь на топологическую схему § 2. Нам потребуется в этой связи система обозначений и ряд определений, которые в основном согласуются с [4], [5]. Мы используем также символику [20], [21], включая применение кванторов, связок и естественных соглашений: def (по определению), $\triangleq$ (равно по определению). Через B^A обозначаем множество всех функций, действующих из множества A в множество B ; для функции $f \in B^A$ и множества C , $C \subset A$, обозначаем через $(f \upharpoonright C)$ сужение (след) f на множество C , а через $f^1(C)$ – образ C при отображении f (см. [12, с. 13], [13, с. 10]). Через $\mathcal{P}(T)$ обозначаем семейство всех подмножеств множества T , $2^T \triangleq \mathcal{P}(T) \setminus \{\emptyset\}$, $\text{Fin}(T)$ – семейство всех непустых конечных подмножеств T . Следуя [22], [23], окрестности точек и множеств в ТП определяем не только в виде открытых множеств. Для ТП (X, τ) и множества $M \in \mathcal{P}(X)$ (т.е. при $M \subset X$) обозначаем посредством $\tau \upharpoonright_M$ топологию M , индуцированную [23, с. 77] из (X, τ) , а через $\text{cl}(M, \tau)$ – замыкание M в (X, τ) ; кроме того, полагаем в упомянутом случае, что $N_\tau[M]$ есть по определению семейство всех окрестностей [22, с. 19] M в ТП (X, τ) . Если же (X, τ) – ТП и $x \in X$, то $N_\tau(x) \triangleq N_\tau[\{x\}]$ есть семейство всевозможных τ -окрестностей точки x в смысле [22, с. 19], [23, с. 62].

Условимся обозначать через $\mathcal{B}(X)$ множество всех непустых семейств $\mathcal{X}$ подмножеств множества X (т.е. множество всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(X)$), для каждого из которых

$$\forall A \in \mathcal{X}, \quad \forall B \in \mathcal{X} \quad \exists C \in \mathcal{X}: C \subset A \cap B;$$

$\{\mathcal{H} \in \mathcal{B}(X) \mid \emptyset \notin \mathcal{H}\}$ есть множество всех базисов фильтров X [22, с. 81]. Мы активно используем в доказательствах сходимость по Мору–Смиту [23], обозначая направленности (см. [23]) посредством триплетов, у которых два первых элемента составляют непустое направленное множество (НМ), а третий является оператором, определенным на данном НМ (см. [4, с. 38] в связи с упомянутым соглашением, а также в связи с обозначениями для сходимости по Мору–Смиту). Эта сходи-

мость используется также в представлении [4, с. 42], которое по сути дела неоднократно используется ниже при естественной интерпретации пределов многозначных зависимостей в терминах множеств притяжения (см. также конструкции [5, гл. 3]). В этой связи представляется целесообразной минимальная сводка понятий, связанных с данной сходимостью. Если $(A, \preceq, h)$ есть направленность в множестве B , то через $(B - \text{ass})[A; \preceq; h]$ обозначаем семейство всех множеств $H \in \mathcal{P}(B)$, для каждого из которых

$$\exists \alpha \in A: \forall a \in A \quad (\alpha \preceq a) \implies (h(a) \in H);$$

тем самым определен фильтр множества B , ассоциированный [24, с. 102] с направленностью $(A, \preceq, h)$. В терминах таких фильтров определяется сходимость направленностей (направленность $(D, \preceq, h)$ в ТП (X, τ) сходится к точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда $N_\tau(x) \subset (X - \text{ass})[D; \preceq; h]$).

Другое и более важное для нас применение ассоциированного фильтра связано с представлением множеств притяжения (см. [4, с. 42], [5, с. 35]; по поводу секвенциальной реализации этих множеств см. [5, с. 38]). В этой связи введем точное определение (см. [20], [21]): если непустое множество X оснащено семейством $\mathcal{X} \in \mathcal{B}(X)$, заданы ТП (Y, τ) и оператор $s \in Y^X$, то обозначаем через $(\tau - \text{LIM})[\mathcal{X} \mid s]$ *пересечение всех множеств* $\text{cl}(s^1(U), \tau)$, $U \in \mathcal{X}$. В силу представлений [4, с. 42], [5, с. 35] мы имеем здесь множество притяжения в классе приближенных решений-направленностей; во многих случаях (см. [5, с. 38]) для исчерпывающего представления $(\tau - \text{LIM})[\mathcal{X} \mid s]$ (в классе приближенных решений) достаточно использовать последовательности (такой случай имеет, в частности, место для содержательных задач § 1, связанных с построением ОД в конечномерном пространстве). Напомним, что упомянутая интерпретация [4], [5] позволяет рассматривать $(\tau - \text{LIM})[\mathcal{X} \mid s]$ в виде множества всех обобщенных пределов направленностей в Y , каждая из которых получается суперпозицией s и такой направленности в X , для которой соответствующий ассоциированный фильтр содержит семейство $\mathcal{X}$. Направленности в X с упомянутым свойством ассоциированного фильтра мы рассматриваем в этой связи как приближенные (в смысле соблюдения “асимптотических” ограничений) решения, что идейно согласуется с подходом [6, гл. III]). Отметим естественную разновидность $\mathcal{X}$, связанную с построениями § 2. Если X и T – непустые множества, $u \in T^X$ и $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(T))$, то через $u^{-1}[\mathcal{H}]$ обозначаем семейство всех множеств $u^{-1}(H)$, $H \in \mathcal{H}$. В качестве $\mathcal{H}$ мы будем использовать (“полное” или “неполное”) семейство окрестностей множества в соответствующем ТП. Это последнее множество соответствует по смыслу множеству $\mathbf{Y}$ из § 2, а введение семейства окрестностей отвечает идее регуляризации, связанной с заменой $\mathbf{Y}$ окрестностями (см. § 2), которые затем “стягиваются” к $\mathbf{Y}$. Легко видеть, что для фиксированных множества X , $X \neq \emptyset$, ТП (T, τ) , оператора $s \in T^X$ и множества $M \in \mathcal{P}(T)$ всегда $s^{-1}[N_\tau[M]] \in \mathcal{B}(X)$. Наряду с таким (полным) семейством будем рассматривать его “часть”, отвечающую подсемейству $N_\tau[M]$, т.е. некоторой системе окрестностей M , причем фундаментальность последней предполагаться не будет. Так, например, в наиболее

распространенном случае, когда $M \subset \mathbb{R}^m$, где m – натуральное число, $M \neq \emptyset$ и множество M замкнуто, семейство всех ε -окрестностей M в евклидовой (для определенности) метрике $\mathbb{R}^m$ не составляет, вообще говоря, фундаментальной системы окрестностей (множества M). Нам понадобятся в этой связи специальные окрестностнозначные отображения.

Если (X, τ) – ТП, $X \neq \emptyset$, Q – непустое множество (параметров) и $M \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathcal{O}_M(Q, \tau)$ условимся обозначать множество всех операторов

$$\Lambda: X \times Q \rightarrow \mathcal{P}(X) \quad (3.1)$$

таких, что $\forall x \in M, \forall q \in Q \quad \Lambda(x, q) \in N_\tau(x)$. Конкретная природа операторов (3.1) может быть весьма различной. В частности, в метрическом пространстве можно сопоставлять точке $x \in X$ и числу $\varepsilon > 0$ открытый шар радиуса ε с центром в x ; в этом случае ε играет роль q . Данный пример легко распространяется на случай псевдометрических пространств. Возвращаясь к общему случаю, отметим, что для произвольных непустых множеств X и Q , топологии τ множества X , $M \in \mathcal{P}(X)$, оператора $\Lambda \in \mathcal{O}_M(Q, \tau)$ и значения $q \in Q$ объединение всех множеств $\Lambda(x, q)$, $x \in M$, есть окрестность M , т.е. элемент семейства $\mathbb{N}_\tau[M]$. Сейчас мы несколько усовершенствуем нужный вариант окрестностнозначных отображений. Если (X, τ) – ТП, $X \neq \emptyset$, Q – непустое множество и $M \in \mathcal{P}(X)$, то через $(\text{Unif})[Q; \tau \mid M]$ обозначаем множество всех операторов $\Lambda \in \mathcal{O}_M(Q, \tau)$ (см. (3.1)) таких, что $\forall q_1 \in Q, \forall q_2 \in Q \quad \exists q_3 \in Q: \forall x \in M$

$$\Lambda(x, q_3) \subset \Lambda(x, q_1) \cap \Lambda(x, q_2). \quad (3.2)$$

В (3.2) мы постулируем возможность равномерного в пределах M “уточнения” значений отображения (3.1), окрестностнозначного на M . Эта возможность, как правило, реализуется в постановках прикладных задач, определяя естественные “уровни” ослабления условий. В одних случаях эти “уровни” характеризуются “размером” метрической окрестности соответствующего множества, в других – зафиксированными параметрами канонической окрестности точки в тихоновском произведении ТП, причем упомянутая фиксация выдерживается в пределах всего множества M , наделяемого окрестностью. Если (X, τ) , Q и M удовлетворяют условиям, определяющим (3.2), а $\Lambda \in (\text{Unif})[Q; \tau \mid M]$, то семейство $\mathcal{U}(Q, \tau, M \mid \Lambda)$ всех множеств

$$\bigcup_{x \in M} \Lambda(x, q), \quad q \in Q, \quad (3.3)$$

содержится в множестве $\mathcal{B}(X)$ и одновременно является подсемейством семейства $\mathbb{N}_\tau[M]$. В (3.3) мы использовали (по сути дела) процедуру равномеризации, навязывая всем точкам интересующего нас множества M одно и то же значение параметра, порождающего окрестности отдельных точек M . В случае метрического пространства таким образом можно вводить (на основе (3.3)) ε -окрестности M ,

что типично для многих прикладных задач управления. Полезно отметить следующее свойство монотонности: если (X, τ) – ТП, $X \neq \emptyset$, а Q – непустое множество, то для всяких множеств $M_1 \in \mathcal{P}(X)$ и $M_2 \in \mathcal{P}(X)$ из $M_1 \subset M_2$ следуют вложения $\mathcal{O}_{M_2}(Q, \tau) \subset \mathcal{O}_{M_1}(Q, \tau)$ и $(\text{Unif})[Q; \tau \mid M_2] \subset (\text{Unif})[Q; \tau \mid M_1]$; это позволяет во многих случаях ограничиваться рассмотрением множества $(\text{Unif})[Q; \tau \mid X]$. Если (U, τ) и (V, ϑ) суть ТП, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, то через $C(U, \tau, V, \vartheta)$ обозначаем множество всех непрерывных [22]–[24] операторов из (U, τ) в (V, ϑ) . В дальнейшем будет использоваться следующее легко проверяемое общее утверждение об асимптотической эквивалентности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть X и Q – непустые множества, $(\mathbb{T}, \tau_1)$ и $(\mathbf{T}, \tau_2)$ – ТП, $\mathbb{T} \neq \emptyset$, $\mathbf{T} \neq \emptyset$, $M \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$, $\Lambda \in (\text{Unif})[Q; \tau_1 \mid \mathbb{T}]$, $s \in \mathbb{T}^X$, $\omega \in \mathbf{T}^X$ и выполняются условия

$$(\exists g \in C(\mathbf{T}, \tau_2, \mathbb{T}, \tau_1): s = g \circ \omega) \& \left(\forall t \in \mathbb{T} \setminus M \exists q_t \in Q: \left(\bigcup_{x \in M} \Lambda(x, q_t) \right) \cap \Lambda(t, q_t) = \emptyset \right). \quad (3.4)$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$(\tau_2 - \text{LIM})[s^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]] \mid \omega] = (\tau_2 - \text{LIM})[s^{-1}[\mathcal{U}(Q, \tau_1, M \mid \Lambda)] \mid \omega]. \quad (3.5)$$

Содержательный смысл предложения 3.1 состоит в установлении общей асимптотики, понимаемой в смысле конструкций § 2, при использовании “окрестностной” регуляризации в двух вариантах: “полном” и “неполном”. Последний отвечает идее некоторой естественной равномеризации окрестностной конструкции в духе (3.3), частный случай которой обсуждается ниже (после доказательства). Объектами исследования являются при этом множества притяжения в смысле [4, с. 42], [5, с. 35, 38]. Их совпадение можно квалифицировать как асимптотическую эквивалентность двух семейств окрестностей множества M в вопросах определения ограничений асимптотического характера. Обсудим схему доказательства, фиксируя оператор g в соответствии с (3.4). Обоснования требует только вложение множества в правой части (3.5) в (предельное) множество, определяемое левой частью (3.5). Пусть μ – точка множества в правой части (3.5), так что $\mu \in \mathbf{T}$ и для некоторой направленности $(A, \preceq, h)$ в X имеют место вложение $s^{-1}[\mathcal{U}(Q, \tau_1, M \mid \Lambda)] \subset (X - \text{ass})[A; \preceq; h]$ и сходимости $(A, \preceq, \omega \circ h)$ к μ в $(\mathbf{T}, \tau_2)$; здесь мы используем представление [4, с. 42]. Выберем $U \in s^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]]$ и $V \in \mathbb{N}_{\tau_1}[M]$ так, что $U = s^{-1}(V)$. С учетом (3.4) имеем $g(\mu) \in M$, так что $V \in N_{\tau_1}(g(\mu))$. В силу непрерывности g имеем теперь $V \in (\mathbb{T} - \text{ass})[A; \preceq; g \circ \omega \circ h]$, и поскольку $g \circ \omega \circ h = s \circ h$, выполняется $U \in (X - \text{ass})[A; \preceq; h]$. Поскольку выбор U был произвольным, имеем вложение $s^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]] \subset (X - \text{ass})[A; \preceq; h]$; это означает, что $\mu \in (\tau_2 - \text{LIM})[s^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]] \mid \omega]$. Итак, установлено, что множество

в правой части (3.5) – подмножество множества притяжения в левой части этого соотношения, что и требовалось доказать.

Заметим, что условие (3.4) выполняется во многих случаях, возникающих при топологическом оснащении пространств, в которых рассматриваются ОД управляемых систем, пучки их решений и т.п. Опуская сейчас обсуждение (более специальной) первой части соотношения (3.4), ограничимся следующим частным случаем в отношении второй его части. Именно, если $\mathbb{T}$ оснащено псевдометрикой [23] (и, в частности, метрикой) ρ , порождающей τ_1 , то Q можно отождествить с полуосью $]0, \infty[$, а Λ определить в виде правила, сопоставляющего точке $x \in \mathbb{T}$ и числу $q = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, открытый шар в $(\mathbb{T}, \rho)$ с центром x и радиусом q . Если при этом M замкнуто в ТП $(\mathbb{T}, \tau_1)$, а это условие непременно выполняется и в общем случае предложения 3.1, мы имеем второе утверждение в (3.4) с очевидностью.

В дальнейшем используются конструкции тихоновских произведений в качестве естественного обобщения конечномерных пространств, применяемых в задачах о построении ОД (см. § 1). Мы отмечали уже, что целесообразность такого обобщения мотивируется соображениями учета ФО; имеются и другие основания для рассмотрения этих, более общих постановок. В связи с упомянутыми обстоятельствами условимся о следующих обозначениях. Если (U, τ) – ТП, а P – непустое множество (индексов), то через $\bigotimes^P(\tau)$ обозначаем естественную топологию множества U^P (всех операторов из P в U), соответствующую тихоновскому произведению [22]–[24] экземпляров (U, τ) с индексным множеством P . Нам потребуется и частный случай конечных произведений экземпляров ТП; мы введем для этого специальное обозначение. Полагаем далее $\mathcal{N} \triangleq \{1, 2, \dots\}$ и $\forall k \in \mathcal{N}$ $\overline{1, k} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid i \leq k\}$; в последнем случае мы имеем “начальный” отрезок натурального ряда с правым концом k . Если T – множество и $m \in \mathcal{N}$, то вместо $T^{\overline{1, m}}$ используем более традиционное обозначение T^m (так что по смыслу T^m соответствует выражению $T \times \dots \times T$ (m раз); если же, кроме того, τ – топология T , полагаем $\bigotimes^m[\tau] \triangleq \bigotimes^{\overline{1, m}}(\tau)$, что доставляет в виде $(T^m, \bigotimes^m[\tau])$ новое ТП, являющееся произведением m экземпляров исходного ТП (T, τ) . Через $\tau_{\mathbb{R}}$ (через τ_{∂}) условимся обозначать обычную $|\cdot|$ -топологию (дискретную топологию) вещественной прямой $\mathbb{R}$. Полезно отметить, что (при $m \in \mathcal{N}$) $\bigotimes^m[\tau_{\mathbb{R}}]$ есть “обычная” топология покоординатной сходимости, активно используемая в § 1.

§ 4. Векторные конечно-аддитивные меры как инструмент расширения пространства решений

Мы фиксируем непустое множество E и полуалгебру $\mathcal{L}$ [5, с. 38] подмножеств E ; $(E, \mathcal{L})$ – аналог “стандартного” измеримого пространства [6] (мы допускаем, в частности, возможность реализации $\mathcal{L}$ в виде σ -алгебры подмножеств E , получая при этом упомянутый “стандартный” случай). Мы видели уже в § 1, что возможны различные конкретизации $(E, \mathcal{L})$ в упомянутых содержательных задачах: $(I, \mathcal{J})$, $(\Omega, \mathcal{A})$ и др. Следуя в основном символике [4], [5], [20], [21], введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ всех в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограни-

ченную вариацию; придерживаемся при этом естественного соглашения: в пространствах функционалов линейные операции, умножение и упорядоченность определяются поточечно. Конус $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ всех неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$ порождает $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Фиксируем $\eta \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, так что $(E, \mathcal{L}, \eta)$ – аналог “стандартного” пространства с мерой (это “стандартное” пространство реализуется в упомянутом выше случае, когда $\mathcal{L}$ есть σ -алгебра множеств, а η – счетно-аддитивная мера). Если дополнить пространство $(I, \mathcal{J})$ § 1 функцией длины (промежутков из $\mathcal{J}$), то мы получим вариант $(E, \mathcal{L}, \eta)$, приспособленный к использованию в задачах управления системами (1.2), (1.3), причем $\mathcal{L}$ есть в данном случае всего лишь полуалгебра множеств. Для $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ вводим вариацию $v_\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ (см. [4, с. 62], [5, с. 39], [12, гл. III]). Рассматривая $v_\mu(E)$ как функционал на $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, мы получаем сильную норму (пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L})$). С получающимся в итоге нормированным пространством (на самом деле банаховым) связано весьма полезное представление линейных непрерывных функционалов на пространстве разрывных функций (см. [12, гл. IV]). Для его естественного описания рассмотрим линейное многообразие $B_0(E, \mathcal{L})$ всевозможных ступенчатых (относительно $(E, \mathcal{L})$) в/з функций на E ; см. [4, с. 67]. Замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных в/з функций на E с традиционной sup -нормой $\|\cdot\|$ [12, с. 261] обозначаем [4, с. 67] через $B(E, \mathcal{L})$, получая банахово пространство (подпространство $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$) с топологически сопряженным пространством $B^*(E, \mathcal{L})$, изометрически изоморфным $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме (см. [4, с. 70], [5, с. 41], [12, с. 280]). Оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ естественной (с точки зрения “отождествления” $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $B^*(E, \mathcal{L})$) *-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$, получая локально-выпуклый σ -компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})). \quad (4.1)$$

Используем теорему Алаоглу [12, с. 459] (следствие теоремы Тихонова [23, с. 192]) для исчерпывающей характеристики свойства компактности в ТП (4.1); в этой связи см. [4, с. 71]. Мы используем простейшую конструкцию интегрирования [4, с. 68–70] для построения изометрического изоморфизма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(E, \mathcal{L})$. Пусть $B_0^+(E, \mathcal{L})$ и $B^+(E, \mathcal{L})$ – конусы неотрицательных элементов пространств $B_0(E, \mathcal{L})$ и $B(E, \mathcal{L})$ соответственно. Элементы упомянутых конусов будем использовать в качестве компонент векторных управляющих “программ”. Заметим, что векторный характер “управлений” определяется потребностями прикладных задач о построении ОД и пучков траекторий, подобных обсуждаемым в § 1. Условимся относительно обозначений для интегралов, рассматриваемых как функции множеств. Если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $f \in B(E, \mathcal{L})$, обозначаем (как и в [4, с. 70]) через $f * \mu$ неопределенный μ -интеграл f , $f * \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. В качестве μ будем, в частности, использовать к.-а. меру η ; введем также конус $(\text{add})_+^+[\mathcal{L}; \eta]$ всевозможных в/з к.-а. мер $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ со свойством: если $L \in \mathcal{L}$ и $\eta(L) = 0$, то $\mu(L) = 0$. В этой связи см. [4, с. 79] и [19]. В отношении $\mu \in (\text{add})_+^+[\mathcal{L}; \eta]$ используем аппроксимативную конструкцию [4, с. 83, 84]. Эта конструкция здесь применяется (в доказательствах)

в “векторном” варианте, как и в [20], [21]. Данное обстоятельство не усложняет принципиально аппроксимативную схему [4, с. 83, 84], [5, с. 48–50], и мы не рассматриваем ее здесь более подробно. Кроме того, мы не рассматриваем здесь свойства плотности множества неопределенных η -интегралов в пространстве к.-а. мер на $\mathcal{L}$ со свойством (слабой) η -непрерывности (см. [4, гл. IV], [5, гл. 3]). Отметим только, что упомянутые аппроксимативные свойства имеют место как в смысле σ -компакта (4.1), так и в смысле некоторых иных топологий $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Для наших последующих целей существенна лишь топология

$$\tau_0(\mathcal{L}) \triangleq \bigotimes^{\mathcal{L}} (\tau_{\partial})|_{\mathbb{A}(\mathcal{L})} \quad (4.2)$$

подпространства $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \bigotimes^{\mathcal{L}} (\tau_{\partial}))$ (тихоновское произведение экземпляров $\mathbb{R}$ в дискретной топологии). Мы применяем (4.1) и (4.2) в “векторном” варианте, фиксируя $r \in \mathcal{N}$ и используя предварительно естественную процедуру перехода к подпространствам, следующую в идейном отношении содержательным постановкам § 1. Именно, мы оснащаем конус $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ топологиями $\tau_*^+(\mathcal{L})$ и $\tau_0^+(\mathcal{L})$ подпространств ТП (4.1) и (4.2) соответственно (см. [4, с. 80]) и ограничиваемся в дальнейшем рассмотрением неотрицательных (покомпонентно) “управлений”: это “наборы” типа $(f_1, \dots, f_r)$, где $f_i \in B^+(E, \mathcal{L})$, и $(\mu_1, \dots, \mu_r)$, где $\mu_j \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Мы определяем эти наборы как функции на “отрезке” $\overline{1, r}$, что не является, конечно, обязательным; для этих функций мы допускаем возможность выбора из соответствующих (конечных) декартовых произведений, полагая

$$\begin{aligned} ((\text{add})_r^+[\mathcal{L}] &\triangleq (\text{add})_+[\mathcal{L}]^r) \& ((\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta] \triangleq (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]^r) \& \\ (B_r^+[E; \mathcal{L}] &\triangleq B^+(E, \mathcal{L})^r) \& (B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}] \triangleq B_0^+(E, \mathcal{L})^r) \& \\ \left(\mathbf{N}_r^+(\mathcal{L}) &\triangleq \left\{ \bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})]; \bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})] \right\} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В частности, в виде элементов $(\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta]$ мы имеем фактически “наборы” $(\mu_1, \dots, \mu_r)$, где $\mu_i \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$, а в виде элементов $B_{0,r}^+[E, \mathcal{L}]$ – “наборы” $(f_1, \dots, f_r)$, где $f_j \in B_0^+(E, \mathcal{L})$. Последним в (4.3) указано двухэлементное множество, которое “составлено” из топологий множества $(\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$, причем [4, с. 80]

$$\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] \subset \bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})] \quad (4.4)$$

(заметим в связи с (4.4), что топологии, используемые в (4.1) и (4.2), вообще говоря, несравнимы [4, с. 80, 93, 94]). Эти топологии (см. (4.4)) играют важную роль в последующих построениях. В связи с топологиями, участвующими в (4.4), отметим, что сходимость в соответствующих ТП исчерпывающим образом характеризуется сходимостью компонент соответствующих направленностей в смысле ТП (4.1) и (4.2); более подробное изложение конструкций, связанных с (4.3),

см. в [5, § 3.8]. В частности, теорема 3.8.2 монографии [5] в явном виде определяет конструкцию приближенного решения (см. также [5, с.163]), обеспечивающего аппроксимативную реализацию элемента $(\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta]$ в классе $B_{0,r}^+[E, \mathcal{L}]$ (простейших векторных “управлений”). В этой конструкции используется вышеупомянутая покомпонентная характеристика сходимости по Морю–Смиту для пространств, участвующих в (4.4), и свойства [5, с.48–50], относящиеся к “скалярному” случаю.

§ 5. Абстрактная система интегральных ограничений и ее релаксация

Из содержательных постановок § 1 естественным образом возникает потребность в исследовании весьма общей версии ИО, призванной охватить все варианты упомянутых конкретных ограничений. Идеология таких “объемлющих” постановок рассматривалась в [4, гл. 5, 6] и в [5, гл. 4]; она вполне соответствует и топологической схеме § 2. Мы сосредоточимся вначале на обсуждении самих ИО, откладывая пока вопросы исследования аналогов ОД. Речь пойдет, следовательно, о ДМ и их асимптотике, для исследования которой будет использовано пространство обобщенных элементов – векторных к.-а. мер (см. § 4).

Фиксируем:

- 1) непустое множество Γ ;
- 2) оператор

$$(\gamma, i) \mapsto S_{\gamma, i}: \Gamma \times \overline{1, r} \rightarrow B(E, \mathcal{L}); \quad (5.1)$$

- 3) замкнутое в ТП $(\mathbb{R}^\Gamma, \bigotimes^\Gamma(\tau_\mathbb{R}))$ множество Y , $Y \subset \mathbb{R}^\Gamma$.

Рассмотрим ИО

$$\left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma, i} f_i d\eta \right)_{\gamma \in \Gamma} \in Y \quad (5.2)$$

на выбор вектор-функции $(f_i)_{i \in \overline{1, r}} \in B_r^+[E: \mathcal{L}]$. Содержательные примеры задач управления в § 1 касались случая конечного множества Γ , однако, как отмечалось в связи с потребностями учета ФО, здесь возможен интересный для приложений случай, когда (в упомянутых задачах) в качестве Γ используется бесконечное подмножество промежутка управления (мы не обсуждали в § 1 этот случай на примерах ввиду его большей сложности; см. в этой связи [4], [5]). В остальном (5.2) может рассматриваться в виде абстрактного аналога (1.7). Аналогичные соображения можно высказать и в отношении сведения к виду (5.2) стохастических ограничений § 1. Уже отмечалось, что в конкретных задачах, включающих ИО вида (5.2), свойство устойчивости соответствующих аналогов ОД зачастую отсутствует (см. также примеры [4, гл. I] и [5, гл. 1, 2]). Это вынуждает к исследованию различных регуляризаций, о которых (на содержательном уровне) говорилось в § 1. Упомянутые регуляризации мы будем рассматривать сразу для общей системы ИО (5.2).

Как уже говорилось, объектом нашего исследования в настоящем параграфе будут ДМ, отвечающие ослабленным условиям. Для обслуживания этих последовательно ослабляемых условий мы привлекаем расширение ИО в классе векторных к.-а. мер, имея в виду утверждения [4], [5] типа “ослабленных” аппроксимативных аналогов теоремы Радона–Никодима для к.-а. мер. Упомянутое расширение ИО имеет вид (см. [5, гл. 4]) условия

$$\left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma,i} d\mu_i \right)_{\gamma \in \Gamma} \in Y \quad (5.3)$$

на выбор обобщенного “управления” $(\mu_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta]$. Через $\tilde{\Omega}$ обозначаем ДМ для условия (5.3), так что

$$\tilde{\Omega} \triangleq \left\{ (\mu_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta] \mid \left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma,i} d\mu_i \right)_{\gamma \in \Gamma} \in Y \right\}. \quad (5.4)$$

Разумеется, (5.4) можно интерпретировать в терминах прообраза множества Y при действии некоторого интегрального оператора, определяемого выражением в левой части (5.3). Удобно, однако, ввести подобный оператор на более “широком” множестве всех (неотрицательных) векторных к.-а. мер. Именно, рассмотрим оператор $\mathbb{S}^*$, действующий из $(\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$ в $\mathbb{R}^\Gamma$ по правилу

$$\mathbb{S}^*((\mu_i)_{i \in \overline{1,r}}) \triangleq \left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma,i} d\mu_i \right)_{\gamma \in \Gamma}. \quad (5.5)$$

Кроме того, рассмотрим сужение $\mathbb{S} \triangleq (\mathbb{S}^* \mid (\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta])$ оператора $\mathbb{S}^*$ на $(\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta]$. Итак, $\mathbb{S}$ есть отображение

$$(\mu_i)_{i \in \overline{1,r}} \mapsto \left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma,i} d\mu_i \right)_{\gamma \in \Gamma} : (\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta] \rightarrow \mathbb{R}^\Gamma, \quad (5.6)$$

откуда следует (см. (5.4)–(5.6)), что $\tilde{\Omega} = \mathbb{S}^{-1}(Y)$ есть пересечение прообраза множества Y в силу оператора $\mathbb{S}^*$ и множества $(\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta]$. В силу легко проверяемой непрерывности оператора $\mathbb{S}^*$ как отображения из ТП

$$\left((\text{add})_r^+[\mathcal{L}], \bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] \right) \quad (5.7)$$

в $(\mathbb{R}^\Gamma, \bigotimes^\Gamma(\tau_\mathbb{R}))$ вытекает, что прообраз Y в силу отображения $\mathbb{S}^*$ есть замкнутое множество в ТП (5.7). С другой стороны, множество $(\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta]$ также является замкнутым в ТП (5.7), что легко следует из общих утверждений [4, гл. IV]

и [5, гл. 3]. Таким образом, $\tilde{\Omega}$ есть множество, замкнутое в ТП (5.7), что уже характеризует его как некоторую регуляризацию ДМ для условия (5.2). На самом деле можно утверждать большее, что требует, однако, формализации конструкций, связанных с ослаблением ИО (5.2). Будем исходить из идеи релаксаций § 2. В этой связи мы введем наряду с (5.6) простейший в некотором роде оператор $\mathbf{s}: B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}] \rightarrow \mathbb{R}^\Gamma$, полагая $\forall (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$

$$\mathbf{s}((f_i)_{i \in \overline{1,r}}) \triangleq \left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma,i} f_i d\eta \right)_{\gamma \in \Gamma}. \quad (5.8)$$

Мы имеем в виде $\mathbf{s}$ (5.8) аналог $\mathbb{S}$, определенный, однако, на всюду плотном (с точностью до несущественных преобразований) подмножестве области определения $\mathbb{S}$. В этой связи полезно отметить, что $\mathbb{S}$ является фактически “продолжением” (распространением) $\mathbf{s}$. Дело в том, что в силу известных представлений [4, с.70] (5.8) приводится к виду

$$\mathbf{s}((f_i)_{i \in \overline{1,r}}) = \left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma,i} d(f_i * \eta) \right)_{\gamma \in \Gamma}. \quad (5.9)$$

В связи с представлением (5.9) возникает естественная потребность в определении процедур погружения “обычных управлений” в пространство обобщенных элементов. Мы введем, однако, эти процедуры в несколько более общем виде. Именно, через $\mathbb{I}$ обозначаем оператор, действующий из $(\text{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[E; \mathcal{L}]$ в $(\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$ по правилу

$$\mathbb{I}(\mu, (f_i)_{i \in \overline{1,r}}) \triangleq (f_i * \mu)_{i \in \overline{1,r}}. \quad (5.10)$$

Мы следуем здесь фактически конструкции [20, с. 65]; (5.10) есть оператор (векторного) интегрирования. Его аргументом является пара (μ, f) , где μ – в/з неотрицательная к.-а. мера на $\mathcal{L}$, а f в содержательном отношении есть “набор” $(f_1, \dots, f_r)$; результатом применения оператора $\mathbb{I}$ к данной паре является “набор” $(f_1 * \mu, \dots, f_r * \mu)$. С оператором $\mathbb{I}$ (5.10) естественно связать сечение $\mathbb{I}_\eta \triangleq \mathbb{I}(\eta, \cdot)$, получая отображение из $B_r^+[E; \mathcal{L}]$ в $(\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta]$, действующее по правилу $\mathbb{I}_\eta(f) \triangleq \mathbb{I}(\eta, f)$. Наконец, введем $\mathbf{i}_\eta \triangleq (\mathbb{I}_\eta \mid B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}])$, получая оператор из $B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$ в $(\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta]$ со значениями

$$\mathbf{i}_\eta((f_i)_{i \in \overline{1,r}}) \triangleq (f_i * \eta)_{i \in \overline{1,r}}. \quad (5.11)$$

Этот последний оператор нам сейчас потребуется в связи с (5.9). Действительно, из (5.5), (5.9) и (5.11) вытекает, что

$$\mathbf{s}((f_i)_{i \in \overline{1,r}}) = \mathbb{S}^*(\mathbf{i}_\eta((f_i)_{i \in \overline{1,r}})) = \mathbb{S}(\mathbf{i}_\eta((f_i)_{i \in \overline{1,r}})) \quad (5.12)$$

в каждой точке множества $B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$. Из (5.12) вытекает, что $\mathbf{s} = \mathbb{S}^* \circ \mathbf{i}_\eta = \mathbb{S} \circ \mathbf{i}_\eta$. Мы заметим в этой связи, что $\forall H \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\Gamma)$

$$(\text{Adm})[H] \triangleq \mathbf{s}^{-1}(H) = \mathbf{i}_\eta^{-1}(\mathbb{S}^{-1}(H)). \quad (5.13)$$

В качестве H мы будем использовать, как правило, окрестности Y в различных топологиях. Наша цель будет состоять в построении “максимально широкой вилки” ограничений асимптотического характера, т.е. по существу “вилки” вариатов ослабления ИО, с одним и тем же множеством притяжения в классе приближенных решений (последовательностей или направленностей в зависимости от постановки задачи); более того, это общее множество притяжения в пространстве “обобщенных управлений” будет, как мы увидим, характеризоваться обобщенным ДМ $\tilde{\Omega}$. Кроме того, наша цель состоит также в получении “универсальной” в широком классе возможных вариантов возмущения ИО асимптотики аналогов ОД, что позволяет по сути дела использовать эту асимптотику для целей обоснованной оценки возможностей по достижению элементов функциональных пространств, т.е. желаемых состояний, при нарастающей точности соблюдения ИО (5.2). Итак, будем рассматривать “жесткий” и “мягкий” варианты введения возмущений в систему ИО. Начнем с “жесткого” варианта. Пусть

$$\Gamma_0 \triangleq \{\gamma \in \Gamma \mid \forall i \in \overline{1, r} \ S_{\gamma, i} \in B_0(E, \mathcal{L})\} \quad (5.14)$$

(множество ступенчатозначности оператора (5.1)). Пусть, кроме того, $\forall y \in \mathbb{R}^\Gamma$, $\forall K \in \text{Fin}(\Gamma)$, $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$N_0(y, K, \varepsilon) \triangleq \{h \in \mathbb{R}^\Gamma \mid (\forall \gamma \in K \cap \Gamma_0 \ y(\gamma) = h(\gamma)) \& (\forall \gamma \in K \setminus \Gamma_0 \ |y(\gamma) - h(\gamma)| < \varepsilon)\}. \quad (5.15)$$

Будем использовать (5.14), (5.15) для целей построения “жесткой” топологии пространства $\mathbb{R}^\Gamma$; данную топологию мы стремимся сделать сильнее, чем естественная топология поточечной сходимости. Это связано с желанием получить в общем “неограниченном” случае своеобразный аналог невозмущенной задачи, что годилось бы при исследовании вопросов устойчивости. Итак, рассмотрим семейство $\mathcal{J}_0$ всех множеств $G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\Gamma)$ таких, что $\forall g \in G \ \exists K \in \text{Fin}(\Gamma)$, $\exists \varepsilon \in]0, \infty[: N_0(g, K, \varepsilon) \subset G$. Тогда имеем ТП

$$(\mathbb{R}^\Gamma, \mathcal{J}_0): \bigotimes_{\Gamma} (\tau_{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{J}_0. \quad (5.16)$$

Разумеется, $\mathcal{J}_0$ – хаусдорфова топология $\mathbb{R}^\Gamma$. Отметим одно полезное представление ТП (5.16), полагая $\Gamma_1 \triangleq \Gamma \setminus \Gamma_0$. Если $\Gamma_0 \neq \emptyset$ и $\Gamma_1 \neq \emptyset$, то ТП $(\mathbb{R}^\Gamma, \mathcal{J}_0)$ (5.16)

гомеоморфно произведению [23, с. 125] ТП $(\mathbb{R}^{\Gamma_0}, \bigotimes^{\Gamma_0}(\tau_{\partial}))$ и $(\mathbb{R}^{\Gamma_1}, \bigotimes^{\Gamma_1}(\tau_{\mathbb{R}}))$, причем конкретный гомеоморфизм такого рода сводится к сопоставлению функционалу $h \in \mathbb{R}^{\Gamma}$ упорядоченной пары $((h \mid \Gamma_0), (h \mid \Gamma_1))$. При $\Gamma_0 = \emptyset$ имеем $\mathcal{J}_0 = \bigotimes^{\Gamma}(\tau_{\mathbb{R}})$, а в случае $\Gamma_0 = \Gamma$, напротив, $\mathcal{J}_0 = \bigotimes^{\Gamma}(\tau_{\partial})$.

ЛЕММА 5.1. *Оператор $\mathbb{S}^*$ непрерывен в смысле ТП*

$$\left((\text{add})_r^+[\mathcal{L}], \bigotimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})] \right) \quad (5.17)$$

$u(\mathbb{R}^{\Gamma}, \mathcal{J}_0)$ (5.16): $\mathbb{S}^* \in C((\text{add})_r^+[\mathcal{L}], \bigotimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})], \mathbb{R}^{\Gamma}, \mathcal{J}_0)$.

Доказательство леммы весьма очевидно, хотя и несколько громоздко. Оно вытекает из определения и свойств $*$ -слабой топологии и тихоновского произведения ТП; следует учитывать также (4.4).

Мы заметим, что $\mathcal{Y}_0 \triangleq \mathbb{N}_{\mathcal{J}_0}[Y]$ (семейство всех окрестностей Y в ТП (5.16)) порождает семейство

$$\mathfrak{U}_0 \triangleq \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_0] \in \mathcal{B}(B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]) \quad (5.18)$$

в качестве “жестких” ограничений асимптотического характера; именно, нас будет интересовать множество притяжения $(\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_{\eta}]$ при $\tau \in \mathbf{N}_r^+(\mathcal{L})$. Используя идею “равномеризации” (см. § 3), введем теперь специальный тип окрестностей Y ; именно, $\forall K \in \text{Fin}(\Gamma)$, $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$N_Y^0(K, \varepsilon) \triangleq \bigcup_{y \in Y} N_0(y, K, \varepsilon) \in \mathcal{Y}_0. \quad (5.19)$$

Из (5.18), (5.19) вытекает, что $\forall K \in \text{Fin}(\Gamma)$, $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$(\text{adm})_0[K; \varepsilon] \triangleq (\text{Adm})[N_Y^0(K, \varepsilon)] \in \mathfrak{U}_0. \quad (5.20)$$

В свою очередь мы имеем в силу (5.20), что $\mathfrak{U}^0 \triangleq \{(\text{adm})_0[K; \varepsilon] : (K, \varepsilon) \in \text{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[\} \in \mathcal{B}(B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}])$, причем $\mathfrak{U}^0 \subset \mathfrak{U}_0$. Представляет интерес сопоставление семейств $\mathfrak{U}_0$ и $\mathfrak{U}^0$ в смысле их асимптотических свойств. Для этой цели мы будем использовать предложение 3.1.

ЛЕММА 5.2. $(\bigotimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})] - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_{\eta}] = (\bigotimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})] - \text{LIM})[\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_{\eta}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение следующую модель, соответствующую предложению 3.1. Именно, пусть $X \triangleq B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$, $Q \triangleq \text{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[$, $\mathbb{T} \triangleq \mathbb{R}^{\Gamma}$, $\tau_1 \triangleq \mathcal{J}_0$, $\mathbf{T} \triangleq (\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$, $\tau_2 \triangleq \bigotimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]$, $s \triangleq \mathbf{s}$, $\omega \triangleq \mathbf{i}_{\eta}$, $M \triangleq Y$, Λ – оператор, действующий из множества

$$\mathbb{T} \times Q = \mathbb{R}^{\Gamma} \times (\text{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[)$$

в $\mathcal{P}(\mathbb{T}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^\Gamma)$ по правилу $\Lambda(y, (K, \varepsilon)) \triangleq N_0(y, K, \varepsilon)$. Ясно, что отображение Λ окрестностнозначно на $\mathbb{T}$, т.е. $\Lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{T}}(Q, \tau_1)$. Более того, из (5.15) следует, что реализуется (3.2), т.е. $\Lambda \in (\text{Unif})[Q; \tau_1 \mid \mathbb{T}]$. Мы имеем, следовательно, “набор” объектов, аналогичный используемому в предложении 3.1. Проверим справедливость (3.4). Свойство $s = g \circ \omega$ для $g \triangleq \mathbb{S}^* \in C(\mathbb{T}, \tau_2, \mathbb{T}, \tau_1)$ (см. лемму 5.1) вытекает из соотношения (5.12) и его следствий. Пусть $t \in \mathbb{T} \setminus M$, т.е. $t \in \mathbb{R}^\Gamma$, но $t \notin Y$. В этом случае, поскольку (см. (5.16)) $\mathbb{T} \setminus M = \mathbb{R}^\Gamma \setminus Y \in \mathcal{J}_0$, для некоторых $P \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\chi \in]0, \infty[$ имеет место $N_0(t, P, \chi) \subset \mathbb{T} \setminus M$. Полагаем, что $q_t \triangleq (P, \chi/2)$. Тогда множество $\Lambda(t, q_t) = N_0(t, P, \chi/2)$ и объединение всех множеств $\Lambda(x, q_t)$, $x \in M$, не пересекаются, что завершает проверку (3.4). Следовательно,

$$\left(\bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_\eta] = (\tau_2 - \text{LIM}) [s^{-1}[\mathcal{U}(Q, \tau_1, M \mid \Lambda)] \mid \omega]. \quad (5.21)$$

Мы учли (5.18) и определение $\mathcal{J}_0$. В отношении представления семейства $\mathcal{U}(Q, \tau_1, M \mid \Lambda)$ отметим следующее обстоятельство. В силу (5.19) имеем при $(K, \varepsilon) \in Q$ совпадение $N_Y^0(K, \varepsilon)$ с объединением всех множеств $\Lambda(y, (K, \varepsilon))$, $y \in Y$. Это означает, что в нашем случае $s^{-1}[\mathcal{U}(Q, \tau_1, M \mid \Lambda)]$ есть семейство всех множеств $s^{-1}(N_Y^0(K, \varepsilon))$, $(K, \varepsilon) \in \text{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[$. При этом согласно (5.13), (5.20) имеет место равенство $(\text{adm})_0[K; \varepsilon] = s^{-1}(N_Y^0(K, \varepsilon))$ при $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$. С учетом определения $\mathfrak{U}^0$ мы получаем теперь совпадение $s^{-1}[\mathcal{U}(Q, \tau_1, M \mid \Lambda)] = \mathfrak{U}^0$, что достаточно в силу (5.21) для доказательства леммы.

В связи с леммой 5.2 полезно отметить представление предела для семейства, подобного $\mathfrak{U}^0$, полученное в [20] (см. [20, теорему 3.1]). Как следствие этого представления [20] имеем

$$\forall \tau \in \mathbf{N}_r^+(\mathcal{L}) \quad \tilde{\Omega} = (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta]. \quad (5.22)$$

В связи с этим важным положением (см. (5.22)) мы ограничимся лишь краткими замечаниями. Именно, согласно (5.8), (5.19) и (5.20) имеет место $\forall K \in \text{Fin}(\Gamma)$, $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$\begin{aligned} (\text{adm})_0[K; \varepsilon] &= \{(f_i)_{i \in \overline{1, r}} \in B_{0, r}^+[E; \mathcal{L}] \mid \exists y \in Y: \\ &\mathbf{s}((f_i)_{i \in \overline{1, r}}) \in N_0(y, K, \varepsilon)\} = \left\{ (f_i)_{i \in \overline{1, r}} \in B_{0, r}^+[E; \mathcal{L}] \mid \exists y \in Y: \right. \\ &\left(\forall \gamma \in K \cap \Gamma_0 \quad \sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma, i} f_i d\eta = y(\gamma) \right) \& \\ &\left. \left(\forall \gamma \in K \setminus \Gamma_0 \quad \left| \left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma, i} f_i d\eta \right) - y(\gamma) \right| < \varepsilon \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Из (5.23) вытекает, что $\mathfrak{U}^0$ есть семейство, асимптотически эквивалентное семейству Γ_0^* [20]: $(\forall H_1 \in \Gamma_0^* \exists H_2 \in \mathfrak{U}^0: H_2 \subset H_1) \& (\forall H^{(1)} \in \mathfrak{U}^0 \exists H^{(2)} \in \Gamma_0^*: H^{(2)} \subset H^{(1)})$. Это свойство с учетом монотонности операций замыкания и взятия образа позволяет утверждать, что $\forall \tau \in \mathbf{N}_r^+(\mathcal{L})$

$$(\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta] = (\tau - \text{LIM})[\Gamma_0^* \mid \mathbf{i}_\eta]. \quad (5.24)$$

С другой стороны, для каждого множества H , $H \subset B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$, имеет место $\mathbf{i}_\eta^1(H) = \mathbb{I}_\eta^1(H) = \{\mathbb{I}(\eta, f) : f \in H\} = \mathbb{I}^1(\{\eta\} \times H)$, так что множество в правой части (5.24) совпадает в силу определений § 3 с пересечением всех множеств $\text{cl}(\mathbb{I}^1(\{\eta\} \times H), \tau)$, $H \in \Gamma_0^*$. Теперь уже из (5.24) и теоремы 3.1 из [20] мы получаем (5.22). Это свойство можно дополнить. С этой целью мы вернемся к (5.24), учитывая, что $\tilde{\Omega}$ совпадает в силу (5.22) и леммы 5.2 с каждым из множеств

$$\begin{aligned} & \left(\bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_\eta], \quad \left(\bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta], \\ & \left(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta] \end{aligned}$$

(в последнем случае учтена также теорема 3.1 из [20]), причем

$$\begin{aligned} & \left(\left(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_\eta] \subset \left(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta] \right) \& \\ & \left(\left(\bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_\eta] \subset \left(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_\eta] \right) \end{aligned}$$

(мы учли (4.4)). Из этих свойств имеем $\forall \tau \in \mathbf{N}_r^+(\mathcal{L})$

$$\tilde{\Omega} = (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_\eta] = (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta]. \quad (5.25)$$

В свою очередь (5.25) (а это есть утверждение об “универсальной” регуляризуемости в терминах $\tilde{\Omega}$ (5.4)) допускает существенное развитие в терминах конструкций [20]. В интересах “расширения” диапазона возмущений, обслуживаемых множеством $\tilde{\Omega}$, мы рассмотрим другую схему ослабления ИО. В рамках этой схемы мы, в частности, изменим топологическое оснащение множества $\mathbb{R}^\Gamma$. Именно, мы вернемся к топологии $\bigotimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})$ последнего множества; однако и в этой топологии (которая, вообще говоря, слабее $\mathcal{S}_0$ в силу (5.16)) мы будем привлекать для построения асимптотики (ДМ) не все семейство окрестностей множества Y , а всего лишь подсемейство, полученное на основе равномеризации в духе предложения 3.1. По совокупности предположений дело сводится здесь к более “мягкому” варианту ослабления ИО. Мы следуем (по существу) в этой части определениям [20].

Если $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $\langle Y \mid K, \varepsilon \rangle$ обозначаем множество всех $z \in \mathbb{R}^K$ таких, что $\exists y \in Y: \forall \gamma \in K \ |y(\gamma) - z(\gamma)| \leq \varepsilon$. В этих множествах мы оперируем фактически векторами конечной размерности с тем, чтобы подчеркнуть, что в последующих конструкциях приближенной реализации элементов Y мы ориентируемся (как и всегда в конструкциях на основе тихоновского произведения) на реализацию близости значений функций в конечном числе точек области определения. Заметим, что использование вышеупомянутых множеств (K, ε) -совместимых элементов полезно по существу при построении дополнительной (по отношению к основным конструкциям настоящей работы) регуляризации с целью “компенсации” возможного, но не рассматриваемого здесь влияния неточной информации о множестве Y в постановке, когда “фрагменты” данного множества, определяемые в терминах (K, ε) , воспроизводятся исследователем неточно, но оценка соответствующей погрешности ему известна (см. [5, гл. VI], [25], [26] для несколько иных постановок задачи). Если $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$, $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $\Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon)$ обозначаем множество всех упорядоченных пар $(\mu, (f_i)_{i \in \overline{1, r}}) \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[E; \mathcal{L}]$ таких, что

$$((\mu \mid \mathcal{K}) = (\eta \mid \mathcal{K})) \& \left(\exists z \in \langle Y \mid K, \varepsilon \rangle: \forall \gamma \in K \left| \left(\sum_{i=1}^r \int_E S_{\gamma, i} f_i d\mu \right) - z(\gamma) \right| \leq \varepsilon \right). \quad (5.26)$$

В (5.26) мы допускаем возмущение к.-а. меры η , а требования к совмещению результирующего функционала на Γ с подходящим элементом Y здесь ослаблены до минимума; грубо говоря, мы идем здесь еще “дальше” по сравнению с конструкцией ДМ (5.23). Рассмотрим теперь семейство $\mathfrak{U}$ всех множеств $\Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon)$, $(\mathcal{K}, K, \varepsilon) \in \text{Fin}(\mathcal{L}) \times \text{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[$; легко видеть, что $\mathfrak{U} \in \mathcal{B}((\text{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[E; \mathcal{L}])$. Мы имеем теперь фактически “асимптотику” ДМ (5.26); при этом $\forall H \in \mathfrak{U} \ \exists H^0 \in \mathfrak{U}^0: \{\eta\} \times H^0 \subset H$. Это свойство, очевидным образом следующее из определений, доставляет оценку $(\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta] \subset (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U} \mid \mathbb{I}]$ для всякой топологии τ множества $(\text{add})_+^+[\mathcal{L}]$. На самом же деле справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5.1. *Обобщенное ДМ $\tilde{\Omega}$ определяет единую асимптотику для семейств $\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}^0$ и $\mathfrak{U}$, элементами которых являются ДМ при возмущении ИО (5.2); именно, $\forall \tau \in \mathbf{N}_r^+(\mathcal{L})$*

$$\tilde{\Omega} = (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_\eta] = (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta] = (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U} \mid \mathbb{I}].$$

Для доказательства наряду с (5.25) достаточно учесть утверждения [20, § 3] (см. также [26] для несколько иной постановки задачи).

В связи с использованием ТП (5.16) имеет смысл дополнить теорему 5.1 утверждением о представлении (в терминах $\tilde{\Omega}$) множества притяжения, отвечающего оснащению $\mathbb{R}^\Gamma$ топологией поточечной сходимости при условии использования “полного”, а не “усеченного” семейства окрестностей Y . Итак, пусть $\mathcal{Y}$ – семейство всех окрестностей множества Y в упомянутой топологии, т.е.

$$\mathcal{Y} \triangleq \mathbf{N}_\tau[Y] \mid_{\tau = \otimes \Gamma(\tau_\mathbb{R})}: \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_0. \quad (5.27)$$

Заметим, что при формализации условий совмещения интегрального функционала на Γ в (5.26) уже использовалась по существу окрестность из семейства $\mathcal{Y}$, но только окрестность специальная, отвечающая каноническому базису топологии $\bigotimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})$. Заметим, что в силу (5.27) $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \subset \mathfrak{U}_0$, что согласно теореме 5.1 означает сразу справедливость цепочки вложений

$$\tilde{\Omega} \subset \left(\bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{i}_\eta] \subset \left(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{i}_\eta];$$

мы учли здесь также (4.4). На самом деле здесь имеет место цепочка равенств. В самом деле, зафиксируем $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$, $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, так что $\mathbb{H} \triangleq \Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon) \in \mathfrak{U}$ и $\mathbb{G} \triangleq \{h \in \mathbb{R}^\Gamma \mid \exists y \in Y: \forall \gamma \in K \mid y(\gamma) - h(\gamma) \mid < \varepsilon\} \in \mathcal{Y}$. При этом $\mathbb{G}$ отвечает схеме с равномеризацией (см. § 3), применяемой в ТП $(\mathbb{R}^\Gamma, \bigotimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}))$; $\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{G}) \in \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]$ обладает (см. (5.26)) свойством $\mathbf{i}_\eta^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{G})) \subset \mathbb{I}^1(\mathbb{H})$, а тогда

$$\left(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{i}_\eta] \subset \text{cl} \left(\mathbb{I}^1(\mathbb{H}), \bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] \right)$$

(см. определения § 3), что в силу произвольного выбора $(\mathcal{K}, K, \varepsilon)$ доставляет оценку $(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM}) [\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{i}_\eta] \subset \tilde{\Omega}$ (см. теорему 5.1). Последнее означает справедливость вышеупомянутой цепочки равенств

$$\tilde{\Omega} = \left(\bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{i}_\eta] = \left(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM} \right) [\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{i}_\eta]. \quad (5.28)$$

Комбинируя теперь теорему 5.1 и (5.28), мы получаем $\forall \tau \in \mathbf{N}_r^+(\mathcal{L})$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}_0 \mid \mathbf{i}_\eta] = (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathbf{i}_\eta] \\ &= (\tau - \text{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{i}_\eta] = (\tau - \text{LIM})[\mathfrak{U} \mid \mathbb{I}]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Однако с принципиальной точки зрения семейства $\mathfrak{U}^0$ и $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]$ являются в некотором смысле “промежуточными”, в то время как $\mathfrak{U}_0$ и $\mathfrak{U}$ характеризуют “вилку” ограничений асимптотического характера, т.е. “жесткий” и “мягкий” варианты возмущения ИО; (5.29) определяет их общую асимптотику при погружении соответствующих ДМ в пространство обобщенных элементов.

§ 6. Асимптотическая достижимость в топологическом пространстве

В виде (5.29) мы имеем весьма универсальное представление асимптотики ДМ в терминах обобщенного ДМ $\tilde{\Omega}$. Однако с точки зрения приложений (см. § 1) наибольший интерес подобные утверждения представляют в случае, когда исследуются образы упомянутых ДМ в силу некоторого естественного преобразования,

диктуемого конкретными условиями содержательной задачи. В § 1 роль таких образов исполняли, как правило, ОД линейных управляемых систем; возможен вариант постановки, когда в таком качестве используются пучки решений упомянутых систем. Поэтому вполне естественным представляется построение некоторого “мостика”, соединяющего общие утверждения типа (5.29) и содержательные задачи, в которых основной интерес представляет исследование асимптотики ОД или их аналогов. Нам потребуется в этой связи некий “оператор системы”. При его построении мы пойдем по пути, в какой-то мере обратному по сравнению с конструкциями § 1. Именно, мы начнем с конструирования надлежащего аналога (1.4); соответствующая детализация рассматриваемого ниже общего случая для упомянутого варианта (см. (1.4)) не составляет труда.

Фиксируем ТП $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, $\mathbb{X} \neq \emptyset$, и (непрерывный) оператор $\bar{w} \in C((\text{add})_r^+[\mathcal{L}], \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})], \mathbb{X}, \mathcal{T})$. Заметим, что в задаче управления § 1 в качестве $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ следует использовать $\mathbb{R}^n$ в “обычной” топологии покоординатной сходимости, а в качестве $\bar{w}$ – отображение, получаемое сдвигом значений (1.4). В терминах $\bar{w}$ определяем “оператор системы” $W \triangleq \bar{w} \circ \mathbb{I}$, получая отображение

$$(\mu, (f_i)_{i \in \overline{1, r}}) \mapsto \bar{w}((f_i * \mu)_{i \in \overline{1, r}}): (\text{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[E; \mathcal{L}] \rightarrow \mathbb{X}; \quad (6.1)$$

в (6.1) μ играет роль возмущения η . Столь общий вариант W в сравнении с [4] требуется в связи с обслуживанием семейства $\mathfrak{U}$. По существу же “реализуемый” оператор следует определить в виде сечения $W(\eta, \cdot)$ (оператора W), переводящего $f \in B_r^+[E; \mathcal{L}]$ в $W(\eta, f) \in \mathbb{X}$. Пусть, кроме того, $\mathcal{W} \triangleq (W(\eta, \cdot) \mid B_{0, r}^+[E; \mathcal{L}])$. Последнее определение (сужения $W(\eta, \cdot)$) введено для большего удобства: $\mathcal{W}((f_i)_{i \in \overline{1, r}}) = \bar{w}((f_i * \eta)_{i \in \overline{1, r}})$ для $(f_i)_{i \in \overline{1, r}} \in B_{0, r}^+[E; \mathcal{L}]$. В содержательных постановках § 1 мы использовали именно детализацию $\mathcal{W}$ при сопоставлении управлению $f \in F$ вектора $y_f(\vartheta_0) \in \mathbb{R}^p$ терминального состояния системы (1.2). Легко видеть, что $\mathcal{W} = \bar{w} \circ \mathbf{i}_\eta$ (см. (5.11)). При этом справедлива следующая цепочка вложений:

$$\bar{w}^1(\tilde{\Omega}) \subset (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U}_0 \mid \mathcal{W}] \subset (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathcal{W}] \subset (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U} \mid W]. \quad (6.2)$$

Отметим в данном рассуждении, обоснование которого в существенной части аналогично рассуждению [4, с. 120], момент, связанный с использованием $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]$. Именно, из построений заключительной части § 5 вытекает, что

$$(\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U}_0 \mid \mathcal{W}] \subset (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathcal{W}].$$

С другой стороны, в терминах множеств $\mathbb{H}$ и $\mathbb{G}$, используемых при обосновании (5.28), можно утверждать, что

$$\mathcal{W}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{G})) = \bar{w}^1(\mathbf{i}_\eta^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{G}))) \subset \bar{w}^1(\mathbb{I}^1(\mathbb{H})) = W^1(\mathbb{H});$$

напомним, что множество $\mathbb{H} \in \mathfrak{U}$ было выбрано произвольно, а множество $\mathbb{G} \in \mathscr{V}$ построено в соответствии с этим $\mathbb{H}$. Разумеется, в этом случае $(\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathscr{V}] \mid \mathscr{W}] \subset \text{cl}(W^1(\mathbb{H}), \mathcal{T})$ в силу определений § 3. Последнее означает (в силу произвольности выбора $\mathbb{H}$) справедливость цепочки вложений

$$(\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U}_0 \mid \mathscr{W}] \subset (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathscr{V}] \mid \mathscr{W}] \subset (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U} \mid W]. \quad (6.3)$$

Вложения (6.2), (6.3) доставляют, в частности, полезное следствие: если $\tilde{\Omega} \neq \emptyset$, то в пространстве $\mathbb{X}$ для каждого из упоминаемых ранее семейств ДМ для ослабленных версий ИО (5.2) реализуются непустые множества притяжения, т.е. существуют соответствующие асимптотически достижимые элементы $\mathbb{X}$. Более сложным является вопрос о превращении (6.2), (6.3) в систему равенств. Один из подходов связан с компактификацией существенной части пространства обычных решений; он рассматривался в [20], [21], где специально были введены интегрально ограниченные варианты релаксации ИО. Этот же эффект может быть достигнут наложением специальных условий на параметры системы (5.2); характер налагаемых условий соответствует в идейном отношении условию 5.4.1 [4]. При выполнении условий такого рода утверждения о приближенной реализации $\bar{w}^1(\tilde{\Omega})$, а это и есть требуемая регуляризация аналогов ОД § 1, удастся свести к весьма удобной на практике “окрестностной” форме, что в идейном отношении подобно теоремам из [4, § 6.3], [5, § 4.3] и [21, § 2]. Эта важная сама по себе (с точки зрения выяснения условий асимптотической нечувствительности) конструкция мало связана, однако, с основным для данной работы вопросом о влиянии “набора” окрестностей Y на тип асимптотики в общем “неограниченном” случае (см. содержательное обсуждение в § 1). В этой связи мы рассмотрим только одно универсальное по отношению к ИО условие, обеспечивающее “перенос” (5.29) на случай анализа множеств достижимости в ТП. Из (5.29) и предложения 5.1 работы [21] вытекает

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\bar{w}$ есть отображение, почти совершенное [27, с. 287] в смысле топологий $\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})]$ и $\mathcal{T}$:

- 1) $\bar{w}$ -образ каждого замкнутого в ТП (5.7) подмножества $(\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$ замкнут в $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$;
- 2) для всякого $x \in \mathbb{X}$ множество $\bar{w}^{-1}(\{x\})$ компактно в ТП (5.7).

Тогда все множества, участвующие в (6.2) и (6.3), совпадают между собой.

Ограничимся детализацией утверждений [21]. Итак, рассмотрим в предложении 5.1 [21] следующую версию:

$$\begin{aligned} X &\triangleq (\text{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[E; \mathcal{L}], & Y &= (\text{add})_r^+[\mathcal{L}], \\ Z &\triangleq \mathbb{X}, & \chi &\triangleq \mathfrak{U}, & \tau &\triangleq \bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})], \\ \vartheta &\triangleq \mathcal{T}, & f &\triangleq W, & Q &\triangleq X, & m &\triangleq \mathbb{I}, & g &\triangleq \bar{w}. \end{aligned}$$

Тогда по определению W имеем $f = g \circ m$. Выберем в качестве семейства $\mathbb{H}$ [21, (5.3)] само $\chi = \mathfrak{U}$. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U} \mid W] &= (\vartheta - \text{LIM})[\chi \mid f] = g^1((\tau - \text{LIM})[\chi \mid m]) \\ &= \bar{w}^1\left(\left(\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})] - \text{LIM}\right)[\mathfrak{U} \mid \mathbb{I}]\right) = \bar{w}^1(\tilde{\Omega}) \end{aligned}$$

согласно (5.29). Из (6.2), (6.3) имеем теперь утверждение теоремы.

Теорема 6.1 доставляет “универсальное” относительно системы (5.2) распространение условий “широкой” асимптотической эквивалентности; в этой связи см. [5, § 4.3]. Мы отметим, однако, что для многих прикладных задач (см., в частности, § 1) конструкции, приводящие к теореме 6.1, оказываются избыточными. Поэтому полезно рассмотреть их весьма распространенный частный случай, когда множество Γ конечно.

§ 7. Некоторые аналоги устойчивости

Всюду в пределах данного параграфа предполагаем, что Γ (см. § 5) – конечное множество, так что ИО (5.2) есть непосредственный аналог (1.7). Разумеется, конечным оказывается в нашем случае и множество Γ_0 . Мы пойдем в своих предположениях дальше и допустим, что $\Gamma_0 = \Gamma$, так что (5.1) суть “ступенчатый” матрицант. В этих условиях $\mathcal{S}_0 = \bigotimes^\Gamma(\tau_\partial)$ есть дискретная топология $\mathbb{R}^\Gamma$. Уместно в этой связи ввести аналог (5.2) в классе $B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$ и соответствующее ему ДМ $\mathbf{s}^{-1}(Y)$. Из (5.15) вытекает, что по сути дела теперь достаточно использовать предположение $K = \Gamma$ в вопросах представления соответствующей асимптотики для семейства $\mathfrak{U}^0$. При этом $\Gamma \in \text{Fin}(\Gamma)$, и согласно (5.15) в нашем случае “ступенчатого” матрицанта имеет место $N_0(y, \Gamma, \varepsilon) = \{y\}$ для $y \in \mathbb{R}^\Gamma$ и $\varepsilon > 0$. В свою очередь из (5.19) вытекает, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad N_Y^0(\Gamma, \varepsilon) = Y \in \mathcal{Y}_0$. Это приводит в силу (5.13) и (5.20) к тому, что $\mathbf{s}^{-1}(Y) \in \mathfrak{U}^0$. Кроме того, полезно отметить, что $\mathbf{s}^{-1}(Y)$ есть на самом деле наименьшее по вложению множество из $\mathfrak{U}^0$, а тогда из определений § 3 вытекает (см. (5.22)), что $\forall \tau \in \mathbf{N}_r^+(\mathcal{L})$

$$\tilde{\Omega} = \text{cl}(\mathbf{i}_\eta^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau). \quad (7.1)$$

В частности, это означает, что $\tilde{\Omega} = \text{cl}(\{(f_i * \eta)_{i \in \overline{1,r}} : (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in \mathbf{s}^{-1}(Y)\}, \bigotimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})])$ замкнуто и в ТП (5.17). Мы сосредоточимся сейчас на исследовании аналогов ОД § 1. Здесь прежде всего полезно отметить, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U}^0 \mid \mathcal{W}] &= \text{cl}(\mathcal{W}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \mathcal{T}) = \text{cl}(\{\bar{w}((f_i * \eta)_{i \in \overline{1,r}}) : \\ &\quad (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in \mathbf{s}^{-1}(Y)\}, \mathcal{T}) = \text{cl}(\bar{w}^1(\mathbf{i}_\eta^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))), \mathcal{T}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть $\bar{w}$ есть замкнутое [27, с.62] отображение в смысле топологий $\bigotimes^r [\tau_*^+(\mathcal{L})]$ и $\mathcal{T}$. Тогда

$$\bar{w}^1(\tilde{\Omega}) = \text{cl}(\mathcal{W}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \mathcal{T}).$$

Доказательство есть очевидное следствие (7.1), (7.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть $\bar{w}$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 6.1, т.е. является почти совершенным [27, с.287] отображением относительно топологий $\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})], \mathcal{T}$. Тогда

$$(\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U} \mid W] = (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathcal{W}] = \text{cl}(\mathcal{W}^1(\mathfrak{s}^{-1}(Y)), \mathcal{T}). \quad (7.3)$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации теоремы 6.1 и предложения 7.1.

По своему смыслу предложение 7.2 есть утверждение об устойчивости, рассматриваемое в частном случае основной задачи. При этом анализируются условия “близости” возмущенных версий абстрактных ОД к замыканию аналогичной невозмущенной версии (в теореме 6.1 анализируются, вообще говоря, условия “близости” к обобщенной версии ОД, определяющей при этих условиях регуляризацию “обычной” ОД в терминах соответствующего множества притяжения). Для такого истолкования (7.3) целесообразно вернуться к (5.26) и аналогичным множествам, обслуживающим “асимптотику”, связанную с $\mathfrak{s}^{-1}[\mathcal{Y}]$. В связи с (5.26) отметим, что в качестве $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ здесь достаточно использовать Γ , т.е. рассматривать $\Omega(\mathcal{K}, \Gamma, \varepsilon)$, где $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$ и $\varepsilon > 0$. Это соответствует реализации в смысле (5.2) некоторого элемента Y с точностью не хуже, чем 2ε , при возможном искажении η на множествах $L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{K}$. Отметим, что в (7.3) мы используем при описании достижимого множества $\mathcal{W}^1(\mathfrak{s}^{-1}(Y))$ невозмущенной задачи даже меньше “управлений”, чем в (5.2), так как здесь используются только ступенчатые вектор-функции из $B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$. Появление операции замыкания в последнем множестве (7.3) в этой связи вполне естественно, коль скоро речь идет об использовании реализуемых с принципиальной точки зрения “управлений”, подобных элементам $F \S 1$. Подчеркнем, что в (7.3) мы имеем утверждение о фактической устойчивости “неограниченной” задачи с ИО в смысле получающегося аналога ОД.

§ 8. Структура множеств притяжения в метрическом пространстве

Вернемся к общему случаю, рассматриваемому в § 6, полагая, однако, что $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ является метризуемым ТП. Этот случай часто встречается в приложениях и в полной мере охватывает содержательные постановки § 1, связанные с исследованием асимптотики ОД линейных управляемых систем. Итак, пусть ρ – метрика [23], [24] множества $\mathbb{X}$, порождающая топологию $\mathcal{T}$, так что $(\mathbb{X}, \rho)$ – метрическое пространство, определяющее ТП $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. В интересах применения в рассматриваемом случае конструкций, связанных с получением конкретных достаточных условий асимптотической нечувствительности при возмущении части ограничений, введем $\forall c \in [0, \infty[$

$$\Xi_r^+(\mathcal{L} \mid c) \triangleq \left\{ (\mu_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (\text{add})_r^+(\mathcal{L}) \mid \sum_{i=1}^r \mu_i(E) \leq c \right\}. \quad (8.1)$$

Всякий раз (8.1) определяет непустое множество. По аналогии с условием 7.2 [28] введем следующее

УСЛОВИЕ 8.1. $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{X} \quad \forall a \in]0, \infty[\quad \exists b \in [0, \infty[\quad \forall \mu \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}] \setminus \Xi_r^+(\mathcal{L} \mid b)$

$$a \leq \rho(\mathbf{x}, \bar{w}(\mu)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Условие 8.1 достаточно для совершенности [27, с. 277] $\bar{w}$ в смысле ТП (5.7) и $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T}$ порождается метрикой ρ .*

В связи с обоснованием предложения 8.1 отметим, что последнее является практически очевидной модификацией конструкций [28, § 7], так что мы ограничимся следствием: если выполняется условие 8.1, то все множества, участвующие в (6.2), (6.3), совпадают между собой (конечно, имеется в виду случай, когда топология $\mathcal{T}$ порождена метрикой ρ).

Рассмотрим некоторые частные случаи, имеющие отношение к задачам § 1.

Фиксируем $p \in \mathcal{N}$ и полагаем далее $\mathbb{X} \triangleq \mathbb{R}^p$ (данный случай соответствует, в частности, проблеме построения ОД системы (1.2)). Метрику ρ будем для определенности задавать в следующем виде: если $x \in \mathbb{R}^p$ и $y \in \mathbb{R}^p$, то $\rho(x, y)$ есть по определению наибольшее из всевозможных чисел $|x(i) - y(i)|$, $i \in \overline{1, p}$, определяемых в виде модулей соответствующих компонент вектора разности. В виде $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T}$ есть ρ -топология $\mathbb{X}$, мы получаем p -мерное арифметическое пространство в “обычной” топологии покоординатной сходимости. Фиксируем матрицант

$$(i, j) \mapsto M_{i,j}: \overline{1, p} \times \overline{1, r} \rightarrow B^+(E, \mathcal{L}), \quad (8.2)$$

удовлетворяющий следующему условию, аналогичному [28].

УСЛОВИЕ 8.2. $\exists \alpha \in]0, \infty[\quad \forall j \in \overline{1, r} \quad \exists i \in \overline{1, p} \quad \forall x \in E \quad \alpha \leq M_{i,j}(x)$.

Рассмотрим теперь при $\tilde{w} \in \mathbb{R}^p$ в качестве $\bar{w}$ такой оператор из $(\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$ в $\mathbb{X} = \mathbb{R}^p$, что $\forall (\mu_j)_{j \in \overline{1, r}} \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$

$$\bar{w}((\mu_j)_{j \in \overline{1, r}}) \triangleq \tilde{w} + \left(\sum_{j=1}^r \int_E M_{i,j} d\mu_j \right)_{i \in \overline{1, p}}. \quad (8.3)$$

По смыслу (8.2), (8.3) соответствуют “оператору системы” (1.2) в ее естественном расширении (см. (1.4)), отвечающем терминальной задаче § 1 (см. также [4, (6.5.2)] в связи с расширением формулы Коши в случае скалярных управлений). Заметим, что $\bar{w}$ (8.3) – непрерывный оператор в смысле ТП (5.7) и $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, где $\mathbb{X} = \mathbb{R}^p$ и $\mathcal{T}$ – топология покоординатной сходимости $\mathbb{X}$. Эти соглашения поддерживаются и в дальнейшем. Вполне очевидно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Условия 8.2 достаточно для справедливости условия 8.1, если $\bar{w}$ конкретизируется в виде (8.3).*

Заметим, что в качестве x условия 8.1 следует полагать $\tilde{\omega}$ (см. (8.3)). Прочие рассуждения по доказательству предложения следуют из простейших свойств интеграла по неотрицательной к.-а. мере (см. [4, гл. III], [5, гл. III], [12, гл. III, IV]). Заметим в виде следствия, что при выполнении условия 8.2 оператор $\bar{w}$ (8.3) есть (см. предложение 8.1) почти совершенное отображение, и поэтому (см. теорему 6.1) все множества, участвующие в (6.2) и (6.3), совпадают между собой; иными словами, $\bar{w}^1(\tilde{\Omega})$ определяет (при условии 8.2) “универсальное” представление множеств притяжения, соответствующих различным типам ослабления условий. Если, кроме того, Γ – конечное множество и $\Gamma_0 = \Gamma$ (см. § 7), то условие 8.2 обеспечивает в силу предложений 7.2, 8.1 и 8.2 справедливость равенства (7.3), что означает по сути дела устойчивость невозмущенной задачи (заметим, что в силу отделимости ТП (4.1) мы получаем факт отделимости ТП (5.7), и, как следствие, для отображения $\bar{w}$ из § 6 свойства совершенности и почти совершенности эквивалентны [27, с. 277, 287]).

Теперь, возвращаясь к задачам § 1 об исследовании асимптотики ОД линейных управляемых систем (см. (1.2), (1.3)), рассмотрим конкретный пример задачи управления МТ на плоскости; “первичное” управляемое дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t), \quad \dot{x}_3(t) = m(t)f_1(t), \quad \dot{x}_4(t) = m(t)f_2(t), \quad (8.4)$$

рассматриваемое на отрезке $[0, 1]$ (так что в дальнейшем $t_0 \triangleq 0$ и $\vartheta_0 \triangleq 1$) при $f \in F$ и заданных начальных условиях $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^4$, мы сведем к виду (1.2), (1.3), имея в виду постановку § 1. Полагаем, что в (8.4) в виде $m(\cdot)$ используется в/з функция на I , допускающая равномерное (на I) приближение к.-п. и н.спр. в/з функциями, определенными на I ; будем, кроме того, предполагать, что $\exists \chi \in]0, \infty[: \forall t \in I \quad \chi \leq m(t)$. Итак, $m(\cdot)$ есть в/з функция, определяющая программируемое изменение массы МТ и такая, что ее значения строго положительны и, более того, отделены от нуля. В рассматриваемом примере полагаем $r \triangleq 2$, $n \triangleq 4$; множество F из § 1 используем в качестве множества возможных управлений. Мы полагаем далее $E \triangleq I$ и $\mathcal{L} \triangleq \mathcal{J}$, переходя к пространству-стрелке § 1; тогда $F = B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$ и $m(\cdot) \in B^+(E, \mathcal{L})$. Будем рассматривать постановку, намеченную в § 1: задано (краевое) условие на реализацию $(x_1(1), x_2(1))$ в виде требования о принадлежности замкнутому множеству; требуется исследовать асимптотику ОД по скоростным координатам $x_3(1)$ и $x_4(1)$ при исчезающе малом ослаблении упомянутых краевых условий (возможные прикладные аспекты см. в § 1; см. также [11]). В связи с представлением (1.2), (1.3) заметим, что в данном случае (при $t \in I$) $B_1(t)$ есть произведение скаляра $m(t)$ на единичную (2×2) -матрицу, а $B_2(t)$ – произведение скаляра $(1 - t)m(t)$ на упомянутую единичную матрицу, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ – нулевой вектор из $\mathbb{R}^2$. Определение y_0 и z_0 по известному x_0 не составляет труда.

В рассматриваемом случае “результатирующее” ИО есть требование принадлежности плоского вектора с компонентами

$$\int_0^1 (1-t)m(t)f_1(t) dt, \quad \int_0^1 (1-t)m(t)f_2(t) dt \quad (8.5)$$

замкнутому множеству Z_1 в плоскости $\mathbb{R}^2$ (мы исключаем (1.1), рассматривая потенциально неограниченную задачу). Что же касается ОД подсистемы (1.2), то в данном случае следует рассматривать (со сдвигом $y_0 \in \mathbb{R}^2$) множество всех плоских векторов

$$\left(\int_0^1 m(t)f_1(t) dt, \quad \int_0^1 m(t)f_2(t) dt \right) \quad (8.6)$$

при переборе $f = (f_1, f_2)$ в пределах F с соблюдением ИО, определяемого множеством Z_1 в терминах вектора с компонентами (8.5). Напомним, что Z_1 получено сдвигом исходного плоского множества Z , задающего краевые условия для подсистемы (1.3) в соответствии с конструкцией § 1. Разумеется, ОД невозмущенной задачи может оказаться “неудачной” характеристикой возможностей управляющей стороны в связи с возможной неустойчивостью. По этой причине имеет смысл использовать регуляризацию на основе замены множествами притяжения упомянутой ОД невозмущенной задачи. В этой связи рассмотрим погружение данной содержательной задачи в общую конструкцию § 5. Множество Γ определим как неупорядоченную пару $\{1; 2\} = \overline{1, 2}$. Далее, при $E = I$ и $\mathcal{L} = \mathcal{J}$ мы вводим матрицант S , полагая $\forall t \in I$

$$(S_{1,1}(t) \triangleq (1-t)m(t)) \& (S_{1,2}(t) \triangleq 0) \& (S_{2,1}(t) \triangleq 0) \& (S_{2,2}(t) \triangleq (1-t)m(t)).$$

Плоское замкнутое множество Y отождествляем с Z_1 . Тогда при условии, что $\eta: \mathcal{J} \rightarrow [0, \infty[$ есть “длина” ($\eta([a, b]) \triangleq b - a$ при $0 \leq a < b \leq 1$), мы в виде (5.2) получаем вышеупомянутое ограничение на реализацию вектора с компонентами (8.5), т.е. исходное краевое условие. В связи с (5.3) полезно отметить, что в нашем случае $(\text{add})_r^+[\mathcal{L} \mid \eta] = (\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$. Рассмотрим конкретизацию (5.3), (5.4): в нашем случае $\tilde{\Omega}$ есть множество всех $(\mu_i)_{i \in \overline{1, r}} \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$ (где $r = 2$) таких, что вектор с компонентами

$$\int_0^1 (1-t)m(t)\mu_1(dt), \quad \int_0^1 (1-t)m(t)\mu_2(dt) \quad (8.7)$$

есть элемент $Y = Z_1$. Разумеется, упомянутое ДМ обобщенной задачи, определяемое в терминах (8.7), удовлетворяет (5.29). В нетривиальном случае $m = m(\cdot)$ имеет место $\Gamma_0 = \emptyset$ (так, например, $\Gamma_0 = \emptyset$, если $m(\cdot)$ есть к.-п. и н.спр. функция на I); мы ограничимся данным случаем. Отметим (см. § 5), что при этих условиях $\mathcal{J}_0 = \bigotimes_{\Gamma}^{\Gamma}(\tau_{\mathbb{R}})$ есть обычная топология покоординатной сходимости $\mathbb{R}^2$. Мы рассмотрим распространение (5.2) на случай анализа асимптотики ОД. С этой целью

введем прежде всего нужную конкретизацию оператора $\bar{w}$ из § 6. Именно, векторной к.-а. мере $(\mu_i)_{i \in \overline{1, r}} \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$ мы будем сопоставлять в качестве $\bar{w}(\mu)$ вектор, получаемый сдвигом на y_0 вектора с компонентами

$$\int_I m d\mu_1 = \int_I m(t) \mu_1(dt), \quad \int_I m d\mu_2 = \int_I m(t) \mu_2(dt). \quad (8.8)$$

Непрерывность получающегося экземпляра $\bar{w}$ очевидна; легко видеть, что значения (8.8) определяются “расширением” аналогичных значений (8.6). Введем в рассмотрение матрицант (8.2), полагая (при $p = 2$ и $r = 2$), что $\forall t \in I$

$$(M_{1,1}(t) \triangleq m(t)) \& (M_{1,2}(t) \triangleq 0) \& (M_{2,1}(t) \triangleq 0) \& (M_{2,2}(t) \triangleq m(t)). \quad (8.9)$$

Легко видеть, что матрицант, определяемый в (8.9), удовлетворяет условию (8.2). В самом деле, пусть $\chi \in]0, \infty[$ – число, для которого выполняется $\forall t \in I \chi \leq m(t)$. Тогда в качестве числа α в формулировке условия 8.2 можно полагать χ . С учетом этого обстоятельства будем использовать матрицант с компонентами (8.9) для построения конкретной версии $\bar{w}$ по рецепту (8.3) при $\tilde{\omega} \triangleq y_0$. Как следствие, мы получаем в данном случае справедливость условия 8.1, а следовательно, и совершенность оператора $\bar{w}$, который в настоящей редакции сопоставляет векторной к.-а. мере $(\mu_i)_{i \in \overline{1, r}} \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$ плоский вектор с координатами

$$y_{01} + \int_I m d\mu_1, \quad y_{02} + \int_I m d\mu_2,$$

где y_{01} и y_{02} – компоненты y_0 . Мы имеем теперь (см. теорему 6.1) совпадение всех множеств, используемых в (6.2), (6.3). С практической точки зрения здесь важно отметить совпадение множеств

$$\bar{w}^1(\tilde{\Omega}), \quad (\mathcal{T} - \text{LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathcal{W}], \quad (\mathcal{T} - \text{LIM})[\mathfrak{U} \mid W]. \quad (8.10)$$

В связи с этим совпадением, демонстрирующим асимптотическую эквивалентность разных схем ослабления условий, заметим только, что в виде $\mathcal{Y}$ мы имеем семейство всех окрестностей замкнутого, но, вообще говоря, не ограниченного множества Y ; все эти окрестности используются при построении интегральных включений “вместо” точного Y -ограничения на реализацию вектора с компонентами (8.5), формируя надлежащее (второе в (8.10)) множество притяжения. В случае же рассмотрения семейства $\mathfrak{U}$ мы, как видно из (5.26), оперируем по сути дела только ε -окрестностями Y , варьируя $\varepsilon > 0$ (разумеется, здесь имеются и другие отличия в способе ослабления ИО (5.2), но мы на них сейчас не останавливаемся). Вышеупомянутое совпадение множеств (8.10), в частности, иллюстрирует фактическую избыточность всего семейства $\mathcal{Y}$ в сравнении с “набором” всех ε -окрестностей Y , несмотря на то, что последние не образуют, вообще говоря, фундаментальной системы окрестностей множества Y .

Список литературы

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.
4. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: Наука, 1993.
5. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997.
6. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
7. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1977.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
9. Иванов В. К. Некорректные задачи в топологических пространствах // Сиб. матем. журн. 1969. Т. 10. № 5. С. 1065–1074.
10. Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
11. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
13. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
14. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
15. Хьюбер Дж. П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.
16. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М.: Мир, 1989.
17. Тихонов А. Н., Уфимцев М. В. Статистическая обработка результатов экспериментов. М.: Изд-во МГУ, 1988.
18. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий // УМН. 1995. Т. 50. № 5(305). С. 223–242.
19. Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M. Theory of charges. A study of finitely additive measures. N.Y.: Acad. Press, 1983.
20. Ченцов А. Г. Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления. 1 // Изв. вузов. Математика. 1995. № 2. С. 60–71.
21. Ченцов А. Г. Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления. 2 // Изв. вузов. Математика. 1995. № 3. С. 62–73.
22. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
23. Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.
24. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.
25. Ченцов А. Г. К вопросу о регуляризации задачи построения множеств асимптотической достижимости // Век радио. Институт математики и механики УрО РАН. 1996. С. 210–239.
26. Ченцов А. Г. К вопросу об условиях асимптотической нечувствительности достижимого множества при возмущении части ограничений // Вестн. Челяб. ун-та. 1996. Вып. 1. С. 189–205.
27. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

28. *Ченцов А. Г.* Асимптотически достижимые элементы: нечувствительность к возмущению части условий и физическая реализуемость // Изв. вузов. Математика. 1993. № 5. С. 112–123.

Поступило в редакцию
27.VI.1997