Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, Уравнения Монжа–Ампера и тензорные функторы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 6, 145–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:53:29

УДК 517.95

Д. В. Туницкий

Уравнения Монжа–Ампера и тензориальные функторы

Рассмотрены дифференциально-геометрические структуры, ассоциированные с уравнениями Монжа–Ампера на многообразиях и их применения к контактной линейаризации этих уравнений. Рассмотрены также категория уравнений Монжа–Ампера, морфизмами которой служат контактные диффеоморфизмы, и ряд ее подкатегорий. Основное внимание уделено подкатегориям уравнений Монжа–Ампера, объекты которых локально контактно эквивалентны уравнениям, линейным относительно вторых производных (полулинейным), линейным относительно производных, почти линейным, линейным относительно вторых производных и не зависящим от первых, линейным, линейным и не зависящим от первых производных, имеющим постоянные коэффициенты, эволюционным. Построен ряд функторов из категории уравнений Монжа–Ампера и некоторых ее подкатегорий в категорию тензориальных объектов, т.е. в категорию многозначных сечений тензорных расслоений. В частности, для всякого уравнения Монжа–Ампера в общем положении построена отвечающая ему псевдориманова метрика. Построенные функторы позволяют установить эффективно проверяемые признаки принадлежности уравнений Монжа–Ампера к перечисленным выше подкатегориям.

Библиография: 21 наименование.

Ключевые слова: уравнение Монжа–Ампера, контактная линейаризация, дифференциально-геометрические структуры.

Введение

Если не оговорено противное, то все используемые ниже объекты считаются гладкими, т.е. бесконечно дифференцируемыми, а все многообразия – связными хаусдорфовыми паракомпактными и вещественными. Для любого расслоения $\mathfrak{P}$ через $\Gamma(\mathfrak{P})$ обозначим множество всех сечений этого расслоения. Для любого подмножества $\mathfrak{T}$ модуля $\mathfrak{M}$ через $(\mathfrak{T})$ обозначается минимальный подмодуль в $\mathfrak{M}$, содержащий все элементы множества $\mathfrak{T}$. При рассмотрении конструкций, связанных с теорией пучков, будем придерживаться терминологии, принятой в руководстве [1]. Все встречающиеся пучки являются пучками модулей над структурным пучком соответствующих функций базового многообразия.

Начальные § 1–5 имеют вводный характер. Основные конструкции и результаты излагаются в § 6, 7. В § 8, 9 приведены доказательства основных результатов.

§ 1. Уравнения Монжа–Ампера

Пусть M – пятимерное многообразие и C^∞ – структурный пучок этого многообразия, т. е. пучок гладких функций над M . Тем самым, для любого открытого подмножества U многообразия M множество $C^\infty(U)$ состоит из всех гладких на множестве U функций. Через l^n обозначим пучок гладких n -форм над M , так что $l^n(U) = \Gamma(\Lambda^n(U))$.

Пучки l^n , $n = 0, \dots, 5$, являются пучками C^∞ -модулей над многообразием M . Рассмотрим локально свободный одномерный подпучок

$$I_0 \subset l^1 \quad (1.1)$$

и его слой над точкой m многообразия M :

$$I_0(m) = \varinjlim_{U \ni m} I_0(U), \quad (1.2)$$

где прямой предел берется по всем открытым окрестностям U точки m . Пучок (1.1) является невырожденным в точке m , если для всякого ростка ω_0 из слоя (1.2) такого, что $\omega_0(m) \neq 0$, выполняется неравенство

$$d\omega_0(m) \wedge d\omega_0(m) \wedge \omega_0(m) \neq 0. \quad (1.3)$$

Невырожденный во всех точках многообразия M подпучок (1.1) называется *контактным*, а его сечения $\omega_0 \in I_0(U)$ – *контактными формами*. Векторное подрасслоение

$$L \subset TM \quad (1.4)$$

с отвечающим контактному пучку (1.1) слоем

$$L(m) = \{ \xi \in T_m M : \xi \lrcorner \omega_0(m) = 0 \text{ при всех } \omega_0 \in I_0(m) \}$$

называется *контактным*. Очевидно, что оно четырехмерно, невырождено и определяет на M контактную структуру.

Фиксируем на многообразии M контактный пучок I_0 . Определим в l^2 подпучок J , порожденный контактными формами и их внешними дифференциалами:

$$J(U) = \{ a \wedge \omega_0 + b d\omega_0 : \omega_0 \in I_0(U), a \in l^1(U), b \in C^\infty(U) \}. \quad (1.5)$$

Это локально свободный пятимерный подпучок пучка дифференциальных 2-форм на M . Следуя терминологии, используемой в статье [2], назовем факторпучок

$$l_\varepsilon^2 = l^2 / J \quad (1.6)$$

пучком *эффективных* 2-форм на контактном многообразии M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть U – открытое подмножество многообразия M и линейная дифференциальная форма $\tilde{\omega}_0 \in I_0(U)$ отлична от нуля во всех точках $m \in U$. Тогда для всякого сечения $\nu \in l^2(U)/J(U)$ найдется такая дифференциальная 2-форма $\omega \in l^2(U)$, что $\nu = \omega + J(U)$, и

$$\omega \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0 = 0 \quad (1.7)$$

для любой линейной дифференциальной формы $\omega_0 \in I_0(U)$.

Действительно, по условию имеем $\nu = \mu + J(U)$, где $\mu \in l^2(U)$. Согласно неравенству (1.3) уравнение

$$\mu \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = b d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0$$

однозначно определяет функцию b на множестве U . Положим

$$\omega = \mu - b d\tilde{\omega}_0.$$

Очевидно, что $\omega \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = 0$, причем указанным образом дифференциальная форма ω определяется однозначно с точностью до слагаемого, пропорционального контактной форме ω_0 . В силу одномерности контактного пучка I_0 для любой формы $\omega_0 \in I_0(U)$ на U найдется такая функция c , что $\omega_0 = c\tilde{\omega}_0$. Следовательно,

$$\omega \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0 = \omega \wedge (dc \wedge \tilde{\omega}_0 + c d\tilde{\omega}_0) \wedge c\tilde{\omega}_0 = 0,$$

и ω удовлетворяет условию (1.7).

Дифференциальные 2-формы ω , удовлетворяющие условию (1.7), будем называть *эффективными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. а) Подпучок

$$I \subset l^2 \tag{1.8}$$

называется *пучком Монжа–Ампера*, если факторпучок I/J является локально свободным одномерным подпучком пучка эффективных форм (1.6).

б) Уравнением Монжа–Ампера, заданным пучком Монжа–Ампера (1.8), называется система внешних дифференциальных уравнений

$$I = 0, \quad I_0 = 0. \tag{1.9}$$

с) Погружение $\sigma: V \rightarrow M$ двумерного многообразия V называется *решением* уравнения Монжа–Ампера (1.9), если $\sigma^*\omega = 0$, $\sigma^*\omega_0 = 0$ для всех $\omega \in I(U)$, $\omega_0 \in I_0(U)$ и всякого открытого подмножества $U \subseteq M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Согласно определению 1.2 всякое уравнение Монжа–Ампера (1.9) задается пятимерным многообразием M , контактным пучком I_0 и пучком Монжа–Ампера I . Другими словами, уравнения Монжа–Ампера находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками (M, I_0, I) . Ниже, в зависимости от контекста, уравнениями Монжа–Ампера называются как системы внешних дифференциальных уравнений вида (1.9), так и отвечающие им тройки (M, I_0, I) .

Предположим, что контактная форма $\omega_0 \in I_0(U)$ и эффективная 2-форма $\omega \in I(U)$ отличны от нуля во всех точках подмножества $U \subseteq M$. *Пфафф-аном* эффективной формы ω относительно контактной формы ω_0 называется функция $\text{Pf}(\omega, \omega_0): U \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая равенству

$$\omega \wedge \omega \wedge \omega_0 = \text{Pf}(\omega, \omega_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0. \tag{1.10}$$

Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.9). Выберем какую-либо контактную форму $\omega_0 \in I_0(U)$, отличную от нуля в точке m . По определению 1.2, а) и

замечанию 1.1 существует эффективная 2-форма $\omega \in I(U)$, отличная от нуля в точке m . Уравнение Монжа–Ампера (1.9) принадлежит *эллиптическому* (соответственно, *параболическому* либо *гиперболическому*) *типу* в точке m , если в этой точке $\text{Pf}(\omega, \omega_0) > 0$ (соответственно, $\text{Pf}(\omega, \omega_0) = 0$ либо $\text{Pf}(\omega, \omega_0) < 0$). Уравнение Монжа–Ампера принадлежит *эллиптическому* (соответственно, *параболическому* либо *гиперболическому*) *типу* на многообразии M , если оно принадлежит эллиптическому (соответственно, параболическому либо гиперболическому) типу во всех точках многообразия M .

Это определение не зависит от выбора эффективной 2-формы ω из $I(U)$ и контактной формы ω_0 из $I_0(U)$. Действительно, если $\tilde{\omega} \in I(U)$, $\tilde{\omega}(m) \neq 0$, и $\tilde{\omega}_0 \in I_0(U)$, $\tilde{\omega}_0(m) \neq 0$, – другие эффективная и контактная формы, то в некоторой окрестности точки m имеют место равенства

$$\tilde{\omega} = a_2\omega + a_1 \wedge \omega_0, \quad \tilde{\omega}_0 = b\omega_0.$$

Отсюда, с одной стороны, по определению (1.10) получаем

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}_0 = \text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0 = b^3 \text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0,$$

а с другой – имеем

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}_0 = a_2^2 b \omega \wedge \omega \wedge \omega_0 = a_2^2 b \text{Pf}(\omega, \omega_0) d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0.$$

Поэтому в силу условия невырожденности (1.3)

$$b^2 \text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0) = a_2^2 \text{Pf}(\omega, \omega_0)$$

и знаки $\text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0)$ и $\text{Pf}(\omega, \omega_0)$ совпадают.

ПРИМЕР 1.4. Традиционно уравнением Монжа–Ампера называют соотношение вида

$$A + Bz_{xx} + 2Cz_{xy} + Dz_{yy} + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0 \quad (1.11)$$

(см. [3, с. 491]). Здесь коэффициенты A, B, C, D и E – заданные в связной области V пространства $\mathbb{R}^5$ параметров x, y, p, q и z функции, где x и y – независимые переменные, $z = z(x, y)$ – неизвестная функция и использованы обозначения Монжа $p = z_x, q = z_y$.

Левой части уравнения (1.11) соответствует дифференциальная 2-форма

$$w = A dx \wedge dy + B dp \wedge dy + C(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + D dx \wedge dq + E dp \wedge dq \quad (1.12)$$

в области V параметров x, y, p, q и z [2]. Как известно, на $\mathbb{R}^5$ определена стандартная контактная линейная форма

$$v = dz - p dx - q dy. \quad (1.13)$$

Поскольку

$$w \wedge dv = 0, \quad (1.14)$$

то условие (1.7) выполнено и 2-форма (1.12) является эффективной. Кроме того, для этой формы выполнено условие

$$\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner w = 0,$$

ликвидирующее произвол в выборе слагаемого, пропорционального контактной форме (1.13) (см. замечание 1.1). Очевидно, что между левыми частями уравнений вида (1.11) и дифференциальными 2-формами вида (1.12) имеется взаимно однозначное соответствие.

Для формы (1.13) во всех точках выполнено условие невырожденности (1.3), и потому она порождает в V контактный пучок (1.1):

$$I_0(U) = (v|_U) \quad (1.15)$$

для $U \subseteq V$. Пучок (1.5) в данном случае порожден формами v и dv ,

$$J(U) = (b \wedge v|_U, dv|_U : b \in l^1(U)), \quad (1.16)$$

а соответствующий уравнению (1.11) пучок Монжа–Ампера (1.8) порожден формами v , dv и w : для открытого подмножества U области V

$$I(U) = (b \wedge v|_U, dv|_U, w|_U : b \in l^1(U)). \quad (1.17)$$

Из (1.17) и (1.16) ясно, что фактормодуль $I(U)/J(U)$ одномерен над кольцом $C^\infty(U)$ и, тем самым, одномерен соответствующий факторпучок I/J .

Таким образом, выражения (1.15)–(1.17) однозначно сопоставляют уравнению (1.11) контактный пучок I_0 и пучок Монжа–Ампера I так, что системы внешних дифференциальных уравнений (1.9) и

$$w = 0, \quad v = 0 \quad (1.18)$$

эквивалентны.

Пфаффиан формы (1.12) относительно формы (1.13) в соответствии с определением (1.10) вычисляется по формуле

$$\text{Pf}(w, v) = -AE + BD - C^2. \quad (1.19)$$

Заметим, что правая часть выражения (1.19) совпадает по абсолютной величине и обратна по знаку дискриминанту характеристической формы уравнения Монжа–Ампера (1.11) [3, прил. 1 к гл. 5, § 2]. Иными словами, сформулированное выше определение типа уравнения Монжа–Ампера (1.9) в рассматриваемом случае совпадает с традиционным.

ПРИМЕР 1.5. Рассмотрим обратную ситуацию. Выберем произвольное уравнение Монжа–Ампера (1.9). Фиксируем некоторую точку $m \in M$ и рассмотрим контактный пучок (1.1) и его слой (1.2) над этой точкой. По определению невырожденности для всякого такого ростка ω_0 из слоя (1.2), что $\omega_0(m) \neq 0$, выполняется неравенство (1.3). Следовательно, по теореме Дарбу найдется такая локальная система координат (U, φ) , $m \in U \subseteq M$,

$$\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^5, \quad (1.20)$$

что $\omega_0 = \varphi^*v$, где v – стандартная контактная линейная форма (1.13) [4, прилож. 1]. Следовательно, аналогично примеру 1.4 ограничение контактного пучка I_0 на окрестность U порождено формой φ^*v :

$$I_0(U) = (\varphi^*v), \quad (1.21)$$

а пучка J – формами φ^*v и φ^*dv :

$$J(U) = (b \wedge \varphi^*v, \varphi^*dv : b \in l^1(U)).$$

По определению 1.2, сужая в случае необходимости окрестность U точки m , всегда можно добиться того, чтобы для отвечающего уравнению (1.9) факторпучка I/J модуль $I(U)/J(U)$ был свободным и одномерным. Другими словами, найдется такая дифференциальная 2-форма ν над U , отличная от нуля во всех точках U , что $\nu + J(U)$ служит базисным сечением фактормодуля $I(U)/J(U)$. Посредством карты (1.20) зададим на множестве $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^5$ дифференциальную 2-форму

$$\omega = (\varphi^{-1})^*\nu.$$

Получаем, что ограничение пучка Монжа–Ампера I на окрестность U порождено формами $\varphi^*\omega$, φ^*v и φ^*dv :

$$I(U) = (\varphi^*\omega, b \wedge \varphi^*v, \varphi^*dv : b \in l^1(U)). \quad (1.22)$$

Положим $c_1 = \frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega$ и найдем функцию c_0 из уравнения

$$\omega \wedge dv \wedge v = c_0 dv \wedge dv \wedge v.$$

Тогда 2-форма $w = \omega - c_0 dv + c_1 \wedge v$ определена в области $\varphi(U)$ и удовлетворяет условию эффективности (1.7), а для модуля $I(U)$ справедливо представление (1.22). Форма w эффективна, имеет вид (1.12) и определена однозначно с точностью до ненулевого скалярного множителя.

Как и в примере 1.4, тип уравнения (1.9) в окрестности U вычисляется в соответствии со знаком пфаффиана (1.19).

Представления (1.21) и (1.22) показывают, что в общем случае уравнения Монжа–Ампера (1.9) локально ситуация полностью исчерпывается уравнениями вида (1.18), (1.12), (1.13).

Более точно, нами доказана следующая

ЛЕММА 1.6. *Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.9) на многообразии M . Для любой точки $m \in M$ найдутся такие окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20), что выполняются представления (1.21) и (1.22), где w и v – формы вида (1.12) и (1.13) соответственно.*

Непосредственная проверка показывает, что справедливо обратное утверждение, а именно

ЛЕММА 1.7. *Пусть для пятимерного многообразия M существуют атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$ локальных систем координат $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^5$ и соответствующее ему множество эффективных 2-форм*

$w_\alpha = A_\alpha dx \wedge dy + B_\alpha dp \wedge dy + C_\alpha(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + D_\alpha dx \wedge dq + E_\alpha dp \wedge dq$, *отличных от нуля во всех точках области $\varphi(U_\alpha)$. Для всякого открытого множества $U \subseteq M$, индекса α и контактной формы (1.13) положим*

$$I_{\alpha,0}(U) = (\varphi_\alpha^*v|_{U \cap U_\alpha}),$$

$$I_\alpha(U) = (\varphi_\alpha^*w_\alpha|_{U \cap U_\alpha}, b \wedge \varphi_\alpha^*v|_{U \cap U_\alpha}, \varphi_\alpha^*dv|_{U \cap U_\alpha} : b \in l^1(U \cap U_\alpha)).$$

Предположим, что условия согласования

$$I_{\alpha,0}(U_\beta) = I_{\beta,0}(U_\alpha), \quad I_\alpha(U_\beta) = I_\beta(U_\alpha)$$

выполнены для всех $\alpha, \beta \in A$. Тогда модули

$$I_0(U) = \{\omega_0 \in l^1(U) : \omega_0|_{U \cap U_\alpha} \in I_{\alpha,0}(U), \alpha \in A\},$$

$$I(U) = \{\omega \in l^2(U) : \omega|_{U \cap U_\alpha} \in I_\alpha(U), \alpha \in A\}$$

образуют на многообразии M контактный пучок и пучок Монжа–Ампера соответственно и, тем самым, задают на M уравнение Монжа–Ампера (1.9) согласно определению 1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. По лемме 1.6 всякое уравнение Монжа–Ампера (1.9) на многообразии M можно “разобрать” на “части”, каждая из которых представима уравнением вида (1.11) в пространстве $\mathbb{R}^5$. Обратно, по лемме 1.7 набор согласованных “частей”, представимых уравнениями вида (1.11) в пространстве $\mathbb{R}^5$, можно “собрать” в соответствующее уравнение Монжа–Ампера (1.9) на многообразии M . В связи с этим мы будем использовать следующую терминологию: *уравнение Монжа–Ампера (1.9) на многообразии M допускает локальное представление вида (1.11) в пространстве $\mathbb{R}^5$.*

§ 2. Контактная эквивалентность уравнений Монжа–Ампера

Пусть наряду с уравнением Монжа–Ампера

$$Q = (M, I_0, I) \tag{2.1}$$

на многообразии M задано еще одно уравнение Монжа–Ампера

$$\tilde{Q} = (\tilde{M}, \tilde{I}_0, \tilde{I}) \tag{2.2}$$

на многообразии $\tilde{M}$. Диффеоморфизм

$$f: \tilde{M} \rightarrow M \tag{2.3}$$

называется *контактной эквивалентностью* уравнений (2.1) и (2.2), если выполняются равенства

$$f^*(I_0) = \tilde{I}_0, \quad f^*(I) = \tilde{I}, \tag{2.4}$$

т. е. если для всякого открытого множества $U \subseteq \tilde{M}$

$$f^*(I_0(f(U))) = \tilde{I}_0(U), \quad f^*(I(f(U))) = \tilde{I}(U). \tag{2.5}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В силу первого условия (2.4) диффеоморфизм (2.3) является контактным, поскольку переводит контактное расслоение многообразия M в контактное расслоение многообразия $\tilde{M}$.

ПРИМЕР 2.2 (продолжение примера 1.4). Рассмотрим контактно эквивалентные уравнения Монжа–Ампера (2.1) и (2.2). Согласно лемме 1.6 для любой точки $\tilde{m} \in \tilde{M}$ найдутся такие окрестность $\tilde{U}$ этой точки и координатный диффеоморфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^5$, что

$$\tilde{I}_0(\tilde{U}) = (\tilde{\varphi}^*v), \quad \tilde{I}(\tilde{U}) = (\tilde{\varphi}^*\tilde{w}, \tilde{b} \wedge \tilde{\varphi}^*v, \tilde{\varphi}^*dv : \tilde{b} \in l^1(\tilde{U})),$$

где v – стандартная контактная линейная форма (1.13), а $\tilde{w}$ – эффективная 2-форма вида

$$\tilde{w} = \tilde{A} dx \wedge dy + \tilde{B} dp \wedge dy + \tilde{C}(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + \tilde{D} dx \wedge dq + \tilde{E} dp \wedge dq.$$

Аналогично, для точки $m = f(\tilde{m}) \in M$ найдутся такие окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20), что выполняются представления (1.21) и (1.22). При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $U = f(\tilde{U})$. По определению контактной эквивалентности имеют место равенства (2.5). Тем самым, для прообразов $f^*\omega_0$ и $f^*\omega$ дифференциальных форм $\omega_0 = \varphi^*v$ и $\omega = \varphi^*w$ относительно диффеоморфизма (2.3) справедливы равенства

$$f^*(\omega_0) = (\tilde{\omega}_0),$$

$$f^*(\omega, b \wedge \omega_0, d\omega_0 : b \in l^1(U)) = (\tilde{\omega}, \tilde{b} \wedge \tilde{\omega}_0, d\tilde{\omega}_0 : \tilde{b} \in l^1(\tilde{U})),$$

где $\tilde{\omega}_0 = \tilde{\varphi}^*v$, $\tilde{\omega} = \tilde{\varphi}^*w$. Другими словами, имеют место равенства

$$f^*\omega_0 = c_0\tilde{\omega}_0, \quad f^*\omega = c_1\tilde{\omega} + b \wedge \tilde{\omega}_0, \quad (2.6)$$

где c_0 и c_1 – функции, а b – линейная дифференциальная форма, определенные в области $\tilde{U}$. Отсутствие в правой части второго равенства из (2.6) слагаемого, пропорционального $d\tilde{\omega}_0$, объясняется тем, что условие эффективности (1.7) инвариантно относительно контактной эквивалентности, т. е. эффективная форма отображается в эффективную.

Заметим, что если рассмотреть композицию диффеоморфизмов

$$f_{\tilde{U}} = \varphi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \rightarrow \varphi(U),$$

то равенства (2.6) можно записать в эквивалентном виде

$$f_{\tilde{U}}^*v = \tilde{c}_0v, \quad f_{\tilde{U}}^*w = \tilde{c}_1\tilde{w} + \tilde{b} \wedge v,$$

где

$$\tilde{c}_0 = (\tilde{\varphi}^{-1})^*c_0, \quad \tilde{c}_1 = (\tilde{\varphi}^{-1})^*c_1, \quad \tilde{b} = (\tilde{\varphi}^{-1})^*b.$$

Контактная эквивалентность сохраняет тип уравнений. Более точно, справедлива

ЛЕММА 2.3. Пусть диффеоморфизм (2.3) осуществляет контактную эквивалентность уравнений (2.1) и (2.2). Тогда эти уравнения имеют один и тот же тип в точках $\tilde{m}$ и $f(\tilde{m})$ для всех $\tilde{m} \in \tilde{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В §1 было показано, что знак пфаффиана $\text{Pf}(\omega, \omega_0)$ уравнения (2.1) не зависит ни от выбора эффективной 2-формы ω из $I(U)$, ни от выбора контактной формы ω_0 из $I_0(U)$. В частности, эти формы можно выбрать таким же образом, как и в примере 2.2. Тогда по определению (1.10) пфаффиана, используя равенства (2.6), с одной стороны, имеем

$$\begin{aligned} f^*\text{Pf}(\omega, \omega_0)f^*(d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0) &= f^*(\omega \wedge \omega \wedge \omega_0) = c_1^2c_0\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}_0 \\ &= c_1^2c_0\text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0)d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0, \end{aligned}$$

а с другой – имеем

$$f^* \text{Pf}(\omega, \omega_0) f^*(d\omega_0 \wedge d\omega_0 \wedge \omega_0) = c_0^3 f^* \text{Pf}(\omega, \omega_0) d\tilde{\omega}_0 \wedge d\tilde{\omega}_0 \wedge \tilde{\omega}_0.$$

Сопоставляя правые части полученных равенств, заключаем, что

$$c_0^2 f^* \text{Pf}(\omega, \omega_0) = c_1^2 \text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0).$$

Тем самым, для любой точки $\tilde{m} \in \tilde{M}$ знаки пфаффианов $\text{Pf}(\omega, \omega_0)$ и $\text{Pf}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_0)$ в точках $f(\tilde{m})$ и $\tilde{m}$ соответственно совпадают. Лемма доказана.

§ 3. Характеристические векторы

Рассмотрим комплексное касательное расслоение $T^{\mathbb{C}}M = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TM$ многообразия M . Комплексный вектор $\xi \in T_m^{\mathbb{C}}M$ называется *характеристическим вектором* уравнения (2.1) в точке $m \in M$, если

$$\xi \lrcorner I_0(m) = 0, \quad \xi \lrcorner J(m) \equiv \xi \lrcorner I(m) \pmod{I_0(m)}. \quad (3.1)$$

Здесь $I_0(m)$, $J(m)$ и $I(m)$ – слои соответствующих пучков над точкой m . Запись (3.1) означает, что для любых ростков ω_0 , ψ и ω :

$$\omega_0 \in I_0(m), \quad \psi \in J(m), \quad \omega \in I(m),$$

выполняются равенства

$$\xi \lrcorner \omega_0(m) = 0, \quad (\xi \lrcorner \psi(m)) \wedge (\xi \lrcorner \omega(m)) \wedge \omega_0(m) = 0. \quad (3.2)$$

Положим

$$H = \bigcup_{m \in M} H(m), \quad (3.3)$$

где

$$H(m) = \{ \xi \in T_m^{\mathbb{C}}M : \xi \lrcorner I_0(m) = 0, \xi \lrcorner J(m) \equiv \xi \lrcorner I(m) \pmod{I_0(m)} \}. \quad (3.4)$$

ПРИМЕР 3.1 (продолжение примера 1.4). Выясним, как устроено множество (3.3) в случае уравнения (1.11) в области V пространства $\mathbb{R}^5$, или, что то же самое, в случае системы (1.18), (1.12), (1.13). В силу представлений (1.15)–(1.17) и соотношений (3.2) принадлежность вектора $\xi \in T_m^{\mathbb{C}}V$ множеству (3.4) равносильна тому, что

$$\xi \lrcorner v = 0, \quad (3.5)$$

и компланарны ковекторы $\xi \lrcorner dv$, $\xi \lrcorner w$ и v . Последнее означает существование такого комплексного числа λ , для которого

$$(\xi \lrcorner (w - \lambda dv)) \wedge v = 0. \quad (3.6)$$

Выполнение соотношений (3.5), (3.6) для $\xi \neq 0$ обеспечивает равенство

$$(w - \lambda v) \wedge (w - \lambda dv) \wedge v = 0,$$

из которого согласно (1.14) заключаем, что

$$w \wedge w \wedge v + \lambda^2 dv \wedge dv \wedge v = 0. \quad (3.7)$$

Сопоставляя (3.7) с (1.10), получаем относительно λ уравнение

$$\lambda^2 + \text{Pf}(w, v) = 0. \quad (3.8)$$

Положим $\Delta = \sqrt{|\text{Pf}(w, v)|}$. Тогда корни λ_1 и λ_2 уравнения (3.8) вычисляются следующим образом. В тех точках, где уравнение (1.11) эллиптически,

$$\lambda_j = i(-1)^{3-j} \Delta \quad (3.9)$$

(здесь i – мнимая единица, $j = 1, 2$), и

$$\lambda_j = (-1)^{3-j} \Delta \quad (3.10)$$

в тех точках, где уравнение (1.11) гиперболично либо параболично.

Определим для $j = 1, 2$ и $m \in V \subseteq \mathbb{R}^5$

$$H_j(m) = \{\xi \in T_m^{\mathbb{C}} V = C^5 : \xi \lrcorner v = 0, \xi \lrcorner (w - \lambda_j dv) = 0\}, \quad (3.11)$$

где параметр λ_j вычислен в соответствии с (3.9), (3.10). Можно показать, что $H_j(m)$ – линейное пространство, порожаемое векторами

$$\begin{aligned} e_{j1} &= E \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C + \lambda_j) \frac{\partial}{\partial p} - B \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j2} &= B \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C - \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial p}, \\ e_{j3} &= E \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - D \frac{\partial}{\partial p} + (C - \lambda_j) \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j4} &= (C + \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + D \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial q}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке m области V пространства $\mathbb{R}^5$. Ясно, что если уравнение параболично в точке m , т. е. $\text{Pf}(w, v) = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и

$$H_1(m) = H_2(m). \quad (3.13)$$

Если $\text{Pf}(w, v) \neq 0$, то

$$H_1(m) \cap H_2(m) = 0, \quad (3.14)$$

потому что из принадлежности ξ к пересечению $H_1(m) \cap H_2(m)$ в силу соотношений (3.11) и (3.9), (3.10) вытекают равенства (3.5) и $\xi \lrcorner dv = 0$, т. е. $\xi = 0$.

Проведенные при рассмотрении примера 3.1 рассуждения доказывают, что для уравнения (1.11) справедлива

ЛЕММА 3.2. Множество (3.4) характеристических векторов уравнения (1.11) в точке $m \in V$ представимо как объединение

$$H(m) = H_1(m) \cup H_2(m), \quad (3.15)$$

где $H_1(m)$ и $H_2(m)$ – двумерные линейные пространства, вычисленные в соответствии с (3.11). Если уравнение (1.11) параболично в точке m , то выполнено равенство (3.13), а если оно в этой точке эллиптически либо гиперболично, то выполнено равенство (3.14). Объединение

$$H_j = \bigcup_{m \in V} H_j(m) \quad (3.16)$$

при $j = 1, 2$ является двумерным комплексным подрасслоением, порожденным в $T^{\mathbb{C}}V$ векторными полями (3.12), среди которых ровно два линейно независимых в каждой точке t области V пространства $\mathbb{R}^5$.

Обозначим через $L^{\mathbb{C}}$ комплексификацию контактного расслоения (1.4). Ясно, что $L^{\mathbb{C}}$ является комплексным векторным подрасслоением расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ комплексной коразмерности 1. Комбинируя леммы 3.2 и 1.6, заключаем, что имеет место

ЛЕММА 3.3. *Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (2.1) на многообразии M . Для любой точки $t_0 \in M$ найдутся окрестность этой точки U и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 ограничения $L^{\mathbb{C}}|_U$ контактного расслоения на U , обладающие следующими свойствами. Расслоения H_1, H_2 и $L^{\mathbb{C}}|_U$ тривиальны, и множество (3.4) характеристических векторов уравнения (2.1) в точке $t \in U$ представимо как объединение (3.15). Если уравнение (1.9) параболично в точке $t \in U$, то выполнено равенство (3.13), а если оно в этой точке эллиплично либо гиперболично, то выполнено равенство (3.14).*

Из леммы 3.3 вытекает, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3.4. а) Пусть уравнение (2.1) либо эллиплично, либо гиперболично на многообразии M . Тогда объединение (3.3) является локально тривиальным расслоением над M , типичным слоем которого служит букет $\mathbb{C}^2 \vee \mathbb{C}^2$ комплексных плоскостей с отмеченными нулями. При этом для каждой точки $t \in M$ линейная оболочка слоя $H(t)$ совпадает с комплексификацией $L^{\mathbb{C}}$ контактного подрасслоения (1.4): $\text{span}(H(t)) = L^{\mathbb{C}}$.

б) Пусть уравнение (2.1) параболично. Тогда объединение (3.3) является локально тривиальным расслоением над M , типичным слоем которого служит комплексная плоскость $\mathbb{C}^2$.

Таким образом, в случае уравнений Монжа–Ампера постоянного типа множество характеристических векторов (3.3) является расслоением, которое называется *характеристическим расслоением* уравнения Монжа–Ампера (2.1).

Следуя работе Т. Моримото [5], введем производные множества характеристических векторов.

Рассмотрим произвольное многообразие U и некоторое подрасслоение W его комплексного касательного пространства $T^{\mathbb{C}}U$. Производные подрасслоения $W^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, определяются по индукции следующим образом. Нулевая производная совпадает с исходным подрасслоением: $W^{(0)} = W$. Предположим, что для $k \geq 0$ определена производная $W^{(k)}$. Тогда слой $W^{(k+1)}(m)$ производной $W^{(k+1)}$ над точкой $m \in U$ является векторным подпространством в $T_m^{\mathbb{C}}U$, порожденным векторами $X(m)$ и $[Y, Z](m)$, где X, Y – произвольные локальные сечения $W^{(k)}$, а Z – произвольное локальное сечение W . В случае, когда многообразие U пятимерно, а подрасслоение W двумерно, в каждой точке t ситуация исчерпывается следующими пятью случаями:

- 0) $W^{(1)}(m) = W(m)$;
- 1) $W(m) \subsetneq W^{(1)}(m) = W^{(2)}(m)$, $\dim_{\mathbb{C}} W^{(1)}(m) = 3$;

- 2) $W(m) \subsetneq W^{(1)}(m) \subsetneq W^{(2)}(m) = W^{(3)}(m)$, $\dim_{\mathbb{C}} W^{(1)}(m) = 3$, $\dim_{\mathbb{C}} W^{(2)}(m) = 4$;
 3) $W(m) \subsetneq W^{(1)}(m) \subsetneq W^{(2)}(m) \subsetneq W^{(3)}(m) = T_m^{\mathbb{C}}U$, $\dim_{\mathbb{C}} W^{(1)}(m) = 3$, $\dim_{\mathbb{C}} W^{(2)}(m) = 4$;
 4) $W(m) \subsetneq W^{(1)}(m) \subsetneq W^{(2)}(m) = T_m^{\mathbb{C}}U$, $\dim_{\mathbb{C}} W^{(1)}(m) = 3$.

Вернемся к уравнению Монжа–Ампера (2.1). Выберем окрестность U точки $m \in M$ и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 контактного расслоения $L^{\mathbb{C}}|_U$ в соответствии с леммой 3.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. а) Для целого неотрицательного числа l производной l -го порядка от множества характеристических векторов H называется подмножество комплексных касательных векторов

$$H^{(l)} = \bigcup_{m \in M} H^{(l)}(m), \quad (3.17)$$

где

$$H^{(l)}(m) = H_1^{(l)}(m) \cup H_2^{(l)}(m). \quad (3.18)$$

б) Уравнение (2.1) принадлежит классу $H_{k,l}$ в точке m , $k, l = 0, \dots, 4$, $k \geq l$, если для одного из расслоений H_1 и H_2 имеет место случай k), а для другого – случай l). Уравнение Монжа–Ампера (2.1) принадлежит классу $H_{k,l}$ на многообразии M , если оно принадлежит типу $H_{k,l}$ во всех точках многообразия M .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. а) Очевидно, что определение 3.5, а), б) инвариантно относительно выбора окрестности U и подрасслоений H_1 и H_2 .

б) Вообще говоря, производная $H^{(l)}$ не обязательно является расслоением. Действительно, слой $H^{(l)}(m)$ – это объединение векторных пространств $H_1^{(l)}(m)$ и $H_2^{(l)}(m)$, размерности которых в общем случае зависят от выбора точки m .

с) Для гиперболических уравнений Монжа–Ампера при $0 \leq l < k \leq 5$ класс $H_{k,l}$ непуст. Для параболических и эллиптических уравнений при $l < k$ класс $H_{k,l}$ пуст в силу равенства (3.13) и леммы 4.1, с).

Для последующего изложения важно, что классы $H_{k,l}$ инвариантны относительно контактных диффеоморфизмов. Более точно, имеют место два следующих утверждения.

ЛЕММА 3.7. Рассмотрим уравнения (2.1) и (2.2) на многообразиях M и $\tilde{M}$ соответственно и некоторый диффеоморфизм (2.3), удовлетворяющий равенствам (2.4). Выберем для уравнения (2.2) открытое подмножество $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ и расслоения $\tilde{H}_1$ и $\tilde{H}_2$ над ним согласно лемме 3.3. Тогда множество $U = f(\tilde{U})$ и расслоения $H_1 = f_*(\tilde{H}_1)$, $H_2 = f_*(\tilde{H}_2)$ удовлетворяют лемме 3.3 для уравнения (2.1). Кроме того,

$$f_*(\tilde{H}_1^{(l)}(m) \cap \tilde{H}_2^{(r)}(m)) = H_1^{(l)}(f(m)) \cap H_2^{(r)}(f(m))$$

для всех $m \in \tilde{U}$ и целых неотрицательных l и r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [6, лемма 2] и [7, лемма 6.2, (a)].

Из леммы 3.7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Пусть выполнены все условия леммы 3.7. Тогда

$$f_*(\tilde{H}_1^{(l)}(m) \cup \tilde{H}_2^{(r)}(m)) = H_1^{(l)}(f(m)) \cup H_2^{(r)}(f(m))$$

для всех $m \in \tilde{U}$ и целых неотрицательных l и r . В частности,

$$f_*(\tilde{H}_1^{(l)}(m)) = H^{(l)}(f(m)).$$

§ 4. Свойства характеристических расслоений

Все встречающиеся в настоящем параграфе уравнения Монжа–Ампера считаются либо эллиптическими, либо гиперболическими во всей области своего определения.

ЛЕММА 4.1. Рассмотрим уравнение Монжа–Ампера (1.9) на многообразии M и его характеристическое расслоение (3.3). Пусть U – открытое подмножество многообразия M , ω_0 – линейная дифференциальная форма из $I_0(U)$, отличная от нуля во всех точках $m \in U$, и ξ_1, ξ_2 – линейно независимые сечения ограничения характеристического расслоения $H|_U$: $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(H|_U)$. Справедливы следующие свойства:

а) если при всех $m \in U$ векторы $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$ не лежат в одной и той же плоскости, принадлежащей слою $H(m)$, то и эти векторы, и ковекторы $\xi_1 \lrcorner d\omega_0(m), \xi_2 \lrcorner d\omega_0(m)$ косоортгональны относительно $d\omega_0(m)$, т.е.

$$\begin{aligned} (\xi_1 \wedge \xi_2) \lrcorner d\omega_0(m) &= 0, \\ (\xi_1 \lrcorner d\omega_0(m)) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0(m)) \wedge d\omega_0(m) &= 0; \end{aligned}$$

б) если при всех $m \in U$ векторы $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$ лежат в одной и той же плоскости, принадлежащей слою $H(m)$, то модуль $I(U)$ порожден формами $\omega_0, d\omega_0$ и $(\xi_1 \lrcorner d\omega_0) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0)$, иначе говоря,

$$I(U) = (b \wedge \omega_0, d\omega_0, (\xi_1 \lrcorner d\omega_0) \wedge (\xi_2 \lrcorner d\omega_0) : b \in I^1(U));$$

с) слой $H(m) \subseteq T_m^{\mathbb{C}}M$ замкнут относительно операции комплексного сопряжения, т.е. $\overline{H}(m) = H(m)$, более точно, если уравнение Монжа–Ампера (1.9) эллиплично в точке $m \in M$, то двумерные комплексные подпространства $H_1(m)$ и $H_2(m)$ из леммы 3.3 комплексно сопряжены, $\overline{H}_j(m) = H_{3-j}(m)$, $j = 1, 2$, а если оно гиперболично, то эти пространства вещественны, $\overline{H}_j(m) = H_j(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что свойства а), б) и с) носят локальный характер. По лемме 1.6 всякое уравнение (1.9) на многообразии M локально сводится к случаю системы (1.18), (1.12), (1.13) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$. Поэтому доказываемые свойства достаточно установить лишь для этого случая, что осуществляется на основании формул (1.12), (1.13) и (3.9)–(3.12) путем непосредственной проверки. Лемма доказана.

Рассмотрим окрестность U точки $m \in M$ и двумерные комплексные подрасслоения H_1 и H_2 контактного расслоения $L^{\mathbb{C}}|_U$, выбранные в соответствии с леммой 3.3. Для этих подрасслоений имеет место

ЛЕММА 4.2. а) *Объединение пересечений первых производных подрасслоений H_1 и H_2 :*

$$h_U = \bigcup_{m \in U} H_1^{(1)}(m) \cap H_2^{(1)}(m), \quad (4.1)$$

является одномерным вещественным подрасслоением расслоения $T^{\mathbb{C}}U$, для которого справедливо разложение в прямую сумму:

$$TU = h_U \oplus L|_U. \quad (4.2)$$

б) *Соотношение*

$$h|_U = h_U \quad (4.3)$$

корректно определяет одномерное вещественное подрасслоение h расслоения TM , для которого справедливо разложение в прямую сумму:

$$TM = h \oplus L. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По лемме 1.6 для модуля $I(U)$ выполнено представление (1.22). Поэтому доказываемое утверждение достаточно установить лишь для случая системы (1.18), (1.12), (1.13) на многообразии $\mathbb{R}^5$. Пусть ξ_{j1}, ξ_{j2} – базисные сечения расслоения H_j : $\xi_{j1}, \xi_{j2} \in \Gamma(H_j)$. По определению (3.11), (3.16) этого расслоения имеем $v|_{H_j} = 0$, откуда по свойству скобки Ли получаем

$$[\xi_{j1}, \xi_{j2}] \lrcorner v = -(\xi_{j1} \wedge \xi_{j2}) \lrcorner dv.$$

По лемме 4.1, а) отсюда заключаем, что

$$[\xi_{j1}, \xi_{j2}] \lrcorner v \neq 0.$$

Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} H_j^{(1)} = 3$, и $h_U = H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)}$ – одномерное подрасслоение, ограничение на которое контактной формы v отлично от нуля. Последний факт означает, что h_U пересекается с $\ker(v)$ только в нуле. Вещественность h_U следует из леммы 4.1, с).

б) Для любой точки $m \in M$ выберем удовлетворяющую лемме 1.6 окрестность U этой точки и удовлетворяющие лемме 3.3 расслоения H_1 и H_2 . Из леммы 3.3 ясно, что соответствующие линейные пространства $H_1(m)$ и $H_2(m)$ определены однозначно с точностью до порядка нумерации. Поэтому пересечение $H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)}$ не зависит от выбора окрестности U точки m и расслоений H_1 и H_2 , т.е. определение (4.3) корректно. Разложение (4.4) вытекает из (4.2). Лемма доказана.

ПРИМЕР 4.3. В качестве примера вычислим базисное векторное поле расслоения h для полулинейного уравнения

$$A(x, y, z_x, z_y, z) + z_{xx} + \varepsilon z_{yy} = 0. \quad (4.5)$$

Здесь $\varepsilon = 1$ в случае уравнения эллиптического типа и $\varepsilon = -1$ в случае гиперболического типа. Согласно выражениям (3.12) в рассматриваемом случае

характеристические расслоения H_j при $j = 1, 2$ порождаются векторными полями

$$\begin{aligned} e_{j1} &= \lambda_j \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j2} &= \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} - \lambda_j \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\lambda_j = i(-1)^{3-j}$ в случае, когда уравнение (4.5) эллиплично, т.е. $\varepsilon = 1$, и $\lambda_j = (-1)^{3-j}$ в случае, когда это уравнение гиперболично, т.е. $\varepsilon = -1$. Первая производная $H_j^{(1)}$ порождается векторными полями (4.6) и их скобкой Ли:

$$[e_{j1}, e_{j2}] = 2\lambda_j \frac{\partial}{\partial z} - e_{j1}(A) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (4.7)$$

Непосредственные вычисления показывают, что пересечение $h = H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)}$ порождается векторным полем

$$e_0 = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial p} + \varepsilon A_q \frac{\partial}{\partial q} \right). \quad (4.8)$$

ЛЕММА 4.4. *Рассмотрим два уравнения (2.1) и (2.2) на многообразии M (т.е. $\widetilde{M} = M$) и отвечающие этим уравнениям характеристические расслоения H и $\tilde{H}$. Равенство $Q = \tilde{Q}$ верно тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{H} = H. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Q = \tilde{Q}$, то выполнение (4.9) очевидно. Пусть выполнено равенство (4.9). По следствию 3.4, а) отвечающие уравнениям (2.1) и (2.2) контактные пучки совпадают: $I_0 = \tilde{I}_0$. Тем самым, по лемме 4.1, б) заключаем, что $I = \tilde{I}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. *Рассмотрим уравнения (2.1) и (2.2) на многообразиях M и $\tilde{M}$ соответственно, отвечающие этим уравнениям характеристические расслоения H и $\tilde{H}$ и некоторый диффеоморфизм (2.3). Равенства (2.4) выполняются тогда и только тогда, когда*

$$f_*(\tilde{H}) = H. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены равенства (2.4). Тогда для любого открытого подмножества $U \subseteq \tilde{M}$ и сечения $\xi \in \Gamma(H|_{f(U)})$ имеем

$$\begin{aligned} f^*(\xi \lrcorner I(f(U))) &= f_*^{-1}\xi \lrcorner f^*(I(f(U))) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{I}(U), \\ f^*(\xi \lrcorner J(f(U))) &= f_*^{-1}\xi \lrcorner f^*(J(f(U))) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{J}(U), \\ f^*(\xi \lrcorner I_0(f(U))) &= f_*^{-1}\xi \lrcorner f^*(I_0(f(U))) = f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{I}_0(U) \end{aligned}$$

в силу замечания 2.1. Отсюда по определению (3.4)

$$f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{I}_0(U) = 0, \quad f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{I}(U) \equiv f_*^{-1}\xi \lrcorner \tilde{J}(U) \pmod{\tilde{I}_0(U)}.$$

Следовательно, $f_*^{-1}\xi \in \Gamma(\tilde{H}|_U)$, и равенство (4.10) выполнено.

Пусть выполнено равенство (4.10). По доказанному характеристическим расслоением уравнения $(M, f^*(I_0), f^*(I))$ служит $f_*^{-1}(H)$ и согласно (4.10) имеем $f_*^{-1}(H) = \tilde{H}$. Отсюда по лемме 4.4 получаем (2.4). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. *Предположим, что выполнены условия леммы 4.5. Пусть h – одномерное расслоение, построенное для уравнения (2.1) согласно лемме 4.2, а $\tilde{h}$ – аналогичное расслоение, построенное для уравнения (2.2). Если выполнены равенства (2.4), то*

$$f_*(\tilde{h}) = h. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение (4.11) вытекает из лемм 4.5, 3.7 и определений (4.1), (4.3). Следствие доказано.

§ 5. Категория уравнений Монжа–Ампера

В соответствии с замечанием 1.3 в качестве класса объектов $\text{Ob}(\text{МА})$ категории уравнений Монжа–Ампера выберем тройки Q , состоящие из пятимерного многообразия M , контактного пучка I_0 и пучка Монжа–Ампера I :

$$Q = (M, I_0, I). \quad (5.1)$$

Для двух произвольных уравнений Монжа–Ампера (5.1) и

$$\tilde{Q} = (\tilde{M}, \tilde{I}_0, \tilde{I}) \quad (5.2)$$

множество морфизмов

$$\text{Hom}_{\text{МА}}(\tilde{Q}, Q) \quad (5.3)$$

состоит из всех контактных эквивалентностей этих уравнений, т. е. из всех диффеоморфизмов

$$f: \tilde{M} \rightarrow M, \quad (5.4)$$

для которых выполнены условия

$$f^*(I_0) = \tilde{I}_0, \quad f^*(I) = \tilde{I}. \quad (5.5)$$

Попросту говоря, объекты категории МА – это уравнения Монжа–Ампера с двумя независимыми переменными, а морфизмы – это контактные замены независимых и зависимых переменных, переводящие одно уравнение в другое.

Наряду с категорией МА всех уравнений Монжа–Ампера рассмотрим ряд ее полных подкатегорий, т. е. подкатегорий, в которых морфизмами выступают все контактные эквивалентности соответствующих уравнений.

Объектами подкатегорий МА_e , МА_p и МА_h служат соответственно эллиптические, параболические и гиперболические на всем многообразии уравнения Монжа–Ампера. Объекты подкатегории $H_{k,l}$, $k, l = 0, \dots, 4$, $k \geq l$, – это уравнения Монжа–Ампера, принадлежащие классу $H_{k,l}$ на всем многообразии M в соответствии с определением 3.5, b).

Замечание 1.8 естественным образом приводит к постановке следующей задачи. Допускает ли данное уравнение Монжа–Ампера (5.1) на многообразии M локальное представление вида (1.11) в пространстве $\mathbb{R}^5$, левая часть которого имеет специальный вид?

Для того чтобы вложить в словосочетание “специальный вид” конкретный смысл, сформулируем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Рассмотрим на некотором многообразии M произвольное уравнение Монжа–Ампера (5.1) постоянного типа. Будем говорить, что это уравнение:

а) *локально линейно относительно вторых производных* (локально полулинейно), если оно допускает локальное представление вида

$$A(x, y, z_x, z_y, z) + z_{xx} + \varepsilon z_{yy} = 0, \quad (5.6)$$

где $\varepsilon = 1$ для эллиптического уравнения, $\varepsilon = 0$ для параболического уравнения и $\varepsilon = -1$ для гиперболического уравнения;

б) *локально линейно относительно производных*, если оно допускает локальное представление вида (5.6), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = A_0(x, y, z) + A_1(x, y, z)z_x + A_2(x, y, z)z_y; \quad (5.7)$$

с) *локально почти линейно*, если оно допускает локальное представление вида (5.6), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = A_0(x, y, z) + A_1(x, y)z_x + A_2(x, y)z_y; \quad (5.8)$$

д) *локально линейно относительно вторых производных и независимо от первых*, если оно допускает локальное представление вида (5.6), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = A(x, y, z); \quad (5.9)$$

е) *локально линейно*, если оно допускает локальное представление вида (5.6), (5.8), где

$$A_0(x, y, z) = a_0(x, y) + a_1(x, y)z; \quad (5.10)$$

ф) *локально линейно и независимо от первых производных*, если оно допускает локальное представление вида (5.6), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = a_0(x, y) + a_1(x, y)z; \quad (5.11)$$

г) *имеет локально постоянные коэффициенты*, если оно допускает локальное представление вида (5.6), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = 0; \quad (5.12)$$

h) *локально эволюционно*, если оно параболично и допускает локальное представление вида (5.6) с отличной от нуля производной свободного члена A по z_y :

$$A_{z_y}(x, y, z_x, z_y, z) \neq 0. \quad (5.13)$$

Терминология определения 5.1 объясняется тем, что линейное относительно вторых производных уравнение (1.11) локально контактно эквивалентно уравнению вида (5.6) [3, гл. 3, § 1], любое уравнение Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами A , B , C , D и E допускает локальное представление вида (5.6), (5.12), а неравенство (5.13) позволяет в случае $\varepsilon = 0$ разрешить уравнение (5.6) относительно z_y и тем самым привести его к эволюционному уравнению

$$z_y = a(x, y, z, z_x, z_{xx}). \quad (5.14)$$

Уравнения Монжа–Ампера, удовлетворяющие условиям а)–h) определения 5.1, также являются объектами полных подкатегорий категории МА. Подкатеорию локально линейных относительно вторых производных уравнений обозначим через MA_{s-l} (semi-linear), подкатеорию локально линейных относительно производных уравнений – через MA_{d-l} (derivative-linear), подкатеорию локально почти линейных уравнений – через MA_{a-l} (almost-linear), подкатеорию локально линейных относительно вторых и независимых от первых производных уравнений – через $\text{MA}_{d-l, \text{ind}}$ (derivative-linear, independent), подкатеорию локально линейных уравнений – через MA_{lin} , подкатеорию уравнений с локально постоянными коэффициентами – через MA_{const} и подкатеорию локально эволюционных уравнений – через MA_{evol} .

Подкатегория локально линейных и не зависящих от первых производных уравнений является пересечением подкатегорий:

$$\text{MA}_{\text{lin}} \cap \text{MA}_{s-l, \text{ind}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Полная подкатегория S категории МА уравнений Монжа–Ампера называется *замкнутой*, если из условий

$$\tilde{Q} \in \text{Ob}(S), \quad Q \in \text{Ob}(\text{MA}), \quad \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q) \neq \emptyset$$

вытекает, что $Q \in S$.

ЛЕММА 5.3. Подкатегории MA_e , MA_p , MA_h , $H_{k,l}$, $k, l = 0, \dots, 4$, $k \geq l$, MA_{s-l} , MA_{d-l} , MA_{a-l} , $\text{MA}_{d-l, \text{ind}}$, MA_{lin} , $\text{MA}_{\text{lin}} \cap \text{MA}_{s-l, \text{ind}}$, MA_{const} и MA_{evol} замкнуты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.3 замкнуты подкатегории MA_e , MA_p и MA_h , а по следствию 3.8 – подкатегории $H_{k,l}$, $k, l = 0, 1, 2, 3, 4$, $k \geq l$. Замкнутость подкатегорий MA_{s-l} , MA_{d-l} , MA_{a-l} , $\text{MA}_{d-l, \text{ind}}$, MA_{lin} , $\text{MA}_{\text{lin}} \cap \text{MA}_{s-l, \text{ind}}$, MA_{const} и MA_{evol} следует непосредственно из определения 5.1.

§ 6. Тензорные функторы

Определим для двух фиксированных неотрицательных целых чисел k и l тензорную категорию $\text{TC}(k, l)$. Рассмотрим некоторое многообразие M и расслоение

$$\pi: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_k^l M \rightarrow M \quad (6.1)$$

комплексных тензоров типа (k, l) над M . Пусть

$$\mathfrak{S}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_k^l M) = \{\mathfrak{s} \subseteq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_k^l M: \mathfrak{s} \neq \emptyset\}$$

– множество всех непустых подмножеств пространства $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_k^l M$. Многочисленным сечением расслоения (6.1) будем называть такое отображение

$$\varkappa: M \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_k^l M),$$

что его композиция с проекцией (6.1) – тождественное отображение:

$$\pi \circ \varkappa = \text{Id}_M.$$

Иными словами, $\varkappa(m) \subseteq \pi^{-1}(m)$ для любого $m \in M$. Объектами $\text{Ob}(\text{ТС}(k, l))$ тензоримальной категории $\text{ТС}(k, l)$ служат многозначные сечения расслоений (6.1) над всевозможными многообразиями M . Будем называть их *тензоримальными объектами типа (k, l)* .

Рассмотрим наряду с многообразием M и многозначным сечением $\varkappa$ еще одно многообразие $\widetilde{M}$ и многозначное сечение $\widetilde{\varkappa}$ расслоения комплексных тензоров типа (k, l) над ним. Множество морфизмов $\text{Hom}_{\text{МС}(k, l)}(\widetilde{\varkappa}, \varkappa)$ состоит из всех диффеоморфизмов $f: \widetilde{M} \rightarrow M$ многообразий $\widetilde{M}$ и M , для которых выполняется соотношение

$$f \circ \widetilde{\varkappa} = \varkappa \circ f.$$

Если обычным образом интерпретировать подмножества из расслоения тензоров $T_k^l M$ как подмножества соответствующих полилинейных отображений l векторов и k ковекторов, то в развернутой форме это соотношение представляет собой следующее равенство подмножеств:

$$\widetilde{\varkappa}(\xi_1, \dots, \xi_k; f^* \eta^1, \dots, f^* \eta^l) = \varkappa(f_* \xi_1, \dots, f_* \xi_k; \eta^1, \dots, \eta^l),$$

справедливое для всех $\xi_1, \dots, \xi_k \in (T_m^* \widetilde{M})^{\mathbb{C}}$ и $\eta^1, \dots, \eta^l \in T_{f(\widetilde{m})}^{\mathbb{C}} M$.

Примерами объектов тензоримальной категории $\text{ТС}(k, l)$ являются комплексные тензорные поля типа (k, l) на многообразии M и любые подрасслоения расслоения (6.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Функтор из произвольной полной подкатегории S уравнений Монжа–Ампера в тензоримальную категорию $\text{ТС}(k, l)$ называется *тензоримальным функтором типа (k, l)* .

ПРИМЕР 6.2. В §3 для всякого уравнения Монжа–Ампера (5.1) в соответствии с определением (3.3), (3.4) было построено отвечающее ему множество $H = H(Q)$ комплексных характеристических векторов. По лемме 3.2 для произвольной точки m многообразия M пересечение $H(Q) \cap T_m^{\mathbb{C}} M$ непусто. Тем самым было построено отображение $H: \text{Ob}(\text{МА}) \rightarrow \text{Ob}(\text{ТС}(0, 1))$.

Если (5.2) – еще одно уравнение Монжа–Ампера, то для всякого морфизма $f \in \text{Hom}_{\text{МА}}(\widetilde{Q}, Q)$ положим $H(f) = f$. Иными словами, всякий морфизм f из $\text{Hom}_{\text{МА}}(\widetilde{Q}, Q)$ является диффеоморфизмом, и H тождественно отображает его на себя. По следствию 3.8

$$f \circ H(\widetilde{Q}) = H \circ f(\widetilde{Q}),$$

поэтому H является тензоримальным функтором из категории МА в категорию $\text{ТС}(0, 1)$. Дословно повторяя проведенные рассуждения для построенного в соответствии с определением (3.17), (3.18) производного множества характеристических векторов $H^{(k)} = H^{(k)}(Q)$, получаем для всякого $k = 0, 1, 2, \dots$ тензоримальный функтор $H^{(k)}$ из категории МА в категорию $\text{ТС}(0, 1)$. Очевидно, что $H^{(0)} = H$.

Прежде чем привести другие примеры тензоримальных функторов, рассмотрим одну вспомогательную конструкцию. Пусть U – произвольное многообразие, а W_1 и W_2 – два подрасслоения его комплексного касательного пространства $T^{\mathbb{C}} U$. Предположим, что эти подрасслоения удовлетворяют двум следующим условиям:

(А) W_1 и W_2 дизъюнкты, т. е. для любой точки u многообразия U выполнено $W_1(u) \cap W_2(u) = 0$;

(В) первая производная $W_1^{(1)}$ расслоения W_1 принадлежит сумме $W_1 + W_2$, другими словами, для любых двух сечений X и Y подрасслоения W_1 , $X, Y \in \Gamma(W_1)$, их скобка Ли является сечением суммы подрасслоений W_1 и W_2 :

$$[X, Y] \in \Gamma(W_1 + W_2).$$

По свойству (А) сумма $W_1 + W_2$ подрасслоений W_1 и W_2 является прямой. Поэтому соответствующие проекции

$$\pi_1: W_1 \oplus W_2 \rightarrow W_1, \quad \pi_2: W_1 \oplus W_2 \rightarrow W_2$$

позволяют разложить тождественное отображение прямой суммы подрасслоений W_1 и W_2 в сумму проекций π_1 и π_2 :

$$\text{Id}_{W_1 \oplus W_2} = \pi_1 + \pi_2. \quad (6.2)$$

Положим

$$T(X, Y) = \pi_2([X, Y]) \quad (6.3)$$

для любых двух сечений X и Y подрасслоения W_1 . Имеет место

ЛЕММА 6.3. Пусть подрасслоения W_1 и W_2 комплексного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}U$ удовлетворяют условиям (А) и (В). Тогда выражение (6.3) однозначно определяет на подрасслоении W_1 2-форму со значениями в подрасслоении W_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что отображение (6.3) кососимметрично и линейно. Это вытекает из свойства (В) и разложения (6.2), поскольку по определению (6.3) для любых функций a_1 и a_2 на многообразии U и любых сечений X_1 , X_2 и Y подрасслоения W_1 выполнено

$$T(X_1, X_2) = -T(X_2, X_1), \quad T(a_1 X_1 + a_2 X_2, Y) = a_1 T(X_1, Y) + a_2 T(X_2, Y).$$

Лемма доказана.

Фиксируем некоторое уравнение Монжа–Ампера Q и предположим, что оно либо эллиптически, либо гиперболично:

$$Q \in \text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h). \quad (6.4)$$

Выберем для произвольной точки $m \in M$ окрестность U и комплексные векторные расслоения H_1 и H_2 над U в соответствии с леммой 3.3. По леммам 4.2, 3.3 и следствию 3.4 для $T^{\mathbb{C}}U$ имеет место разложение

$$T^{\mathbb{C}}U = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2, \quad (6.5)$$

где $H_0 = h|_U$. Обозначим через π_j , $j = 0, 1, 2$, операторы проектирования

$$\pi_j: T^{\mathbb{C}}U \rightarrow H_j, \quad (6.6)$$

определенные разложением (6.5).

По построению расслоения h (см. лемму 4.2) ясно, что $H_j^{(1)} = H_0 \oplus H_1$. Тем самым, для четырех пар подрасслоений $W_1 = H_1$ и $W_2 = H_0$, $W_1 = H_2$ и $W_2 = H_0$, $W_1 = H_0 \oplus H_1$ и $W_2 = H_2$, $W_1 = H_0 \oplus H_2$ и $W_2 = H_1$ условия (A) и (B) выполнены. Поэтому согласно лемме 6.3 выражение

$$T_j(X, Y) = \pi_0([X, Y])$$

при $j = 1, 2$ корректно определяет на подрасслоении H_j 2-форму T_j со значениями в подрасслоении H_0 , а выражение

$$T_{0j}(X, Y) = \pi_{3-j}([X, Y])$$

при $j = 1, 2$ корректно определяет на подрасслоении $H_0 \oplus H_j$ 2-форму T_{0j} со значениями в подрасслоении H_{3-j} .

Построенные 2-формы T_j и T_{0j} естественным образом продолжаются до комплексных тензорных полей типа $(2, 1)$ на окрестности U :

$$T_j(X, Y) = \pi_0([\pi_j(X), \pi_j(Y)]), \quad (6.7)$$

$$T_{0j}(X, Y) = \pi_{3-j}([\pi_0 \oplus \pi_j(X), \pi_0 \oplus \pi_j(Y)]). \quad (6.8)$$

Очевидно, что в результате такого продолжения свертка полученных тензорных полей по любой допустимой паре индексов равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Тензорные поля (6.7) и (6.8) можно построить с помощью кручения Нейенхейса (скобки Нейенхейса) операторов проектирования (6.6). Напомним [8, гл. 1, § 3], что для двух произвольных тензорных полей A_1 и A_2 типа $(1, 1)$ их *кручением* $[A_1, A_2]$ называется тензорное поле типа $(2, 1)$, переводящее произвольную пару векторных полей X и Y в векторное поле

$$\begin{aligned} [A_1, A_2](X, Y) = & [A_1X, A_2Y] + [A_2X, A_1Y] + A_1A_2[X, Y] + A_2A_1[X, Y] \\ & - A_1[X, A_2Y] - A_1[A_2X, Y] - A_2[X, A_1Y] - A_2[A_1X, Y]. \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что для $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} T_j(X, Y) &= \frac{1}{2}[\pi_0, \pi_0](\pi_j(X), \pi_j(Y)), \\ T_{0j}(X, Y) &= \frac{1}{2}[\pi_{3-j}, \pi_{3-j}](\pi_0 \oplus \pi_j(X), \pi_0 \oplus \pi_j(Y)). \end{aligned}$$

Выразим тензорные поля (6.7) и (6.8) в локальных координатах. По лемме 3.3 расслоения H_1 и H_2 тривиальны над U . Поэтому согласно лемме 4.2 над U тривиально и расслоение H_0 . Другими словами, существуют определенные на U базисные сечения e_{j1} , e_{j2} расслоений H_j , $j = 1, 2$, и базисное сечение e_0 расслоения H_0 . В силу разложения (6.5) сечения

$$e_0, e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} \quad (6.9)$$

образуют базис комплексного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}U$. Обозначим двойственный к нему базис через

$$\omega_0, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}. \quad (6.10)$$

Тогда

$$\pi_j(X) = \omega_{j1}(X)e_{j1} + \omega_{j2}(X)e_{j2}, \quad T_j(X, Y) = \omega_0([e_{j1}, e_{j2}])(\omega_{j1} \wedge \omega_{j2})(X, Y)e_0.$$

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned} \pi_0 \oplus \pi_j(X) &= \omega_0(X)e_0 + \omega_{j1}(X)e_{j1} + \omega_{j2}(X)e_{j2}, \\ T_{0j}(X, Y) &= (\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}])(\omega_0 \wedge \omega_{j1})(X, Y) \\ &\quad + \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}])(\omega_0 \wedge \omega_{j2})(X, Y))e_{3-j,1} + (\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j1}])(\omega_0 \wedge \omega_{j1})(X, Y) \\ &\quad + \omega_{3-j,2}([e_0, e_{j2}])(\omega_0 \wedge \omega_{j2})(X, Y))e_{3-j,2}. \end{aligned}$$

Тем самым, при $j = 1, 2$

$$T_j = e_0 \otimes \omega_0([e_{j1}, e_{j2}])(\omega_{j1} \wedge \omega_{j2}), \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} T_{0j} &= e_{3-j,1} \otimes (\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}])(\omega_0 \wedge \omega_{j1}) + \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}])(\omega_0 \wedge \omega_{j2})) \\ &\quad + e_{3-j,2} \otimes (\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j1}])(\omega_0 \wedge \omega_{j1}) + \omega_{3-j,2}([e_0, e_{j2}])(\omega_0 \wedge \omega_{j2})). \end{aligned} \quad (6.12)$$

ПРИМЕР 6.5 (продолжение примера 4.3). Теперь вычислим тензорные поля (6.7), (6.8) для полулинейного уравнения (4.5). В примере 4.3 было установлено, что векторные поля e_{j1} , e_{j2} из (4.6) служат базисными сечениями характеристического расслоения H_j , а векторное поле e_0 из (4.8) – базисным сечением расслоения H_0 . Прямая проверка показывает, что линейные дифференциальные формы

$$\begin{aligned} \omega_0 &= v = dz - p dx - q dy, \\ \omega_{j1} &= \frac{1}{2\lambda_j} \left(A dx + dp - \lambda_j dq + (A_p - \varepsilon \lambda_j A_q) \frac{v}{2} \right), \quad \omega_{j2} = \frac{1}{2\lambda_j} (\lambda_j dx - dy), \end{aligned} \quad (6.13)$$

$j = 1, 2$, образуют двойственный к e_0 , e_{j1} , e_{j2} базис. Поскольку скобка Ли векторных полей e_{j1} и e_{j2} имеет вид (4.7), то

$$v([e_{j1}, e_{j2}]) = 2\lambda_j,$$

и в силу (6.11)

$$T_j = 2\lambda_j e_0 \otimes (\omega_{j1} \wedge \omega_{j2}). \quad (6.14)$$

Аналогичным образом, скобки Ли векторных полей e_0 , e_{j1} и e_0 , e_{j2} имеют вид

$$\begin{aligned} [e_0, e_{j1}] &= \frac{1}{2} \left(e_{j1}(A_p) \frac{\partial}{\partial p} + \varepsilon e_{j1}(A_q) \frac{\partial}{\partial q} \right), \\ [e_0, e_{j2}] &= \frac{1}{2} \left((-A_p + \varepsilon \lambda_j A_q) \frac{\partial}{\partial z} + (-2e_0(A) + e_{j2}(A_p)) \frac{\partial}{\partial p} + \varepsilon e_{j2}(A_q) \frac{\partial}{\partial q} \right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

поэтому

$$\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j1}]) = \omega_{3-j,2}([e_0, e_{j2}]) = 0,$$

и согласно выражению (6.12) для $j = 1, 2$ справедливо представление

$$T_{0j} = e_{3-j,1} \otimes (\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}])(\omega_0 \wedge \omega_{j1}) + \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}])(\omega_0 \wedge \omega_{j2})). \quad (6.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}]) &= \frac{1}{4\lambda_{3-j}}(e_{j1}(A_p) - \varepsilon\lambda_{3-j}e_{j1}(A_q)) = -\frac{\varepsilon}{4}(\varepsilon A_{pp} + 2\lambda_j A_{pq} - A_{qq}), \\
 \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}]) &= \frac{1}{4\lambda_{3-j}} \left(-2e_0(A) + e_{j2}(A_p) - \varepsilon\lambda_{3-j}e_{j2}(A_q) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(A_p - \varepsilon\lambda_{3-j}A_q)(A_p - \varepsilon\lambda_j A_q) \right) \\
 &= -\frac{1}{4\lambda_j} \left(\frac{A_p^2 + \varepsilon A_q^2}{2} - 2A_z + A_{px} + A_{qy} - AA_{pp} \right. \\
 &\quad \left. - \lambda_j(A_{py} - \varepsilon A_{qx} + \varepsilon AA_{qp}) + p(A_{pz} + \varepsilon\lambda_j A_{qz}) \right. \\
 &\quad \left. + q(A_{qz} - \lambda_j A_{pz}) \right), \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

поскольку $\lambda_{3-j} = -\lambda_j$, и

$$\frac{-A_p^2 - \varepsilon A_q^2}{2} - 2e_0(A) = \frac{A_p^2 + \varepsilon A_q^2}{2} - 2A_z.$$

Пусть m – произвольная точка многообразия M и U – некоторая окрестность этой точки, удовлетворяющая лемме 3.3. Обозначим через T_1^U , T_2^U , T_{01}^U и T_{02}^U тензорные объекты, построенные над этой окрестностью согласно выражениям (6.7), (6.8). Имеет место

ТЕОРЕМА 6.6. *Для всякого уравнения Монжа–Ампера (6.4) на многообразии M существуют однозначно определенные тензорные объекты*

$$T = T(Q), \quad T_0 = T_0(Q), \quad T_{12} = T_{12}(Q), \quad T_{012} = T_{012}(Q) \tag{6.18}$$

типа $(2, 1)$, для ограничения которых на любое открытое множество U , удовлетворяющее утверждению леммы 3.3, имеют место равенства

$$T|_U = T_1^U + T_2^U, \quad T_0|_U = T_{01}^U + T_{02}^U, \tag{6.19}$$

$$T_{12}|_U = \{T_1^U\} \cup \{T_2^U\}, \quad T_{012}|_U = \{T_{01}^U\} \cup \{T_{02}^U\}. \tag{6.20}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аналогии с доказательством леммы 4.2, б) для произвольной точки $m \in M$ выберем удовлетворяющую лемме 1.6 окрестность U этой точки и удовлетворяющие лемме 3.3 расслоения H_1^U и H_2^U . Из леммы 3.3 ясно, что эти расслоения определены однозначно с точностью до порядка нумерации, а по лемме 4.2 однозначно определено расслоение $H_0 = h_U$. Тем самым, над окрестностью U разложение (6.5) однозначно определяет оператор проектирования π_0 и с точностью до порядка нумерации однозначно определяет операторы проектирования π_1 и π_2 из (6.6). Поэтому по построению (6.7) и (6.8) суммы (6.19) и объединения (6.20) не зависят от выбора окрестности U точки m и расслоений H_1 и H_2 . Теорема доказана.

Справедлива

ЛЕММА 6.7. *Тензорные объекты (6.18) обладают следующими свойствами:*

(а) свертка любого из этих объектов по верхнему и любому из нижних индексов равна нулю;

(б) объекты $T(Q)$ и $T_0(Q)$ – вещественные тензорные поля.

Доказательство леммы 6.7 будет приведено в § 8.

Предположим, что наряду с уравнением Монжа–Ампера (6.4) задано еще одно уравнение Монжа–Ампера

$$\tilde{Q} \in \text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)$$

и некоторый морфизм $f \in \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q)$ этих уравнений. Положим

$$T(f) = f, \quad T_0(f) = f, \quad T_{12}(f) = f, \quad T_{012}(f) = f. \quad (6.21)$$

ТЕОРЕМА 6.8. *Определение (6.21), выражения (6.7), (6.8) и равенства (6.19), (6.20) корректно определяют тензориальные функторы T , T_0 , T_{12} , T_{012} из категории $\text{MA}_e \cup \text{MA}_h$ в категорию $\text{TC}(2, 1)$. Иначе говоря, для тензориальных объектов (6.18) справедливы коммутационные соотношения*

$$\begin{aligned} f \circ T(\tilde{Q}) &= T \circ f(\tilde{Q}), & f \circ T_0(\tilde{Q}) &= T_0 \circ f(\tilde{Q}), \\ f \circ T_{12}(\tilde{Q}) &= T_{12} \circ f(\tilde{Q}), & f \circ T_{012}(\tilde{Q}) &= T_{012} \circ f(\tilde{Q}). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 6.8 будет приведено в § 8.

Из теоремы 6.8 и известных функториальных свойств стандартных операций над тензорами вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.9. *Для тензориальных функторов (6.18), (6.21) имеют место следующие утверждения:*

а) тензорные произведения

$$T \otimes T_0, \quad T_0 \otimes T_0, \quad T_{12} \otimes T_{012}, \quad T_{012} \otimes T_{012} \quad (6.22)$$

определяют тензориальные функторы из категории $\text{MA}_e \cup \text{MA}_h$ в категорию $\text{TC}(4, 2)$;

б) свертки тензориальных объектов (6.22)

$$\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0), \quad \text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0), \quad \text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012}), \quad \text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012}) \quad (6.23)$$

по первому и второму верхним и третьему и первому нижним индексам соответственно определяют тензориальные функторы из категории $\text{MA}_e \cup \text{MA}_h$ в категорию $\text{TC}(2, 0)$;

с) симметрические

$$\begin{aligned} \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0)), & \quad \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0)), \\ \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012})), & \quad \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012})) \end{aligned} \quad (6.24)$$

и кососимметрические

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0)), & \quad \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0)), \\ \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012})), & \quad \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012})) \end{aligned} \quad (6.25)$$

части тензориальных объектов (6.23) являются тензориальными функторами из категории $\text{MA}_e \cup \text{MA}_h$ в категорию $\text{TC}(2, 0)$;

d) *внешние дифференциалы*

$$\begin{aligned} d(\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0))), & \quad d(\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0))), \\ d(\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012}))), & \quad d(\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012}))) \end{aligned} \quad (6.26)$$

кососимметрических тензорных объектов (6.25) являются тензорными функторами из категории $\text{MA}_e \cup \text{MA}_h$ в категорию $\text{TC}(3, 0)$.

Фиксируем произвольную точку $m \in M$, ее окрестность U и комплексные векторные расслоения H_1 и H_2 над U в соответствии с леммой 3.3 так, чтобы для касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}U$ имело место разложение (6.5). Выберем также адаптированные к этому разложению базисные векторные поля (6.9) и двойственные им базисные линейные дифференциальные формы (6.10). Согласно (6.7), (6.8) и (6.11), (6.12) имеем

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{31}^{12}(T_j \otimes T_j) &= \text{Tr}_{31}^{12}(T_j \otimes T_{3-j}) = \text{Tr}_{31}^{12}(T_j \otimes T_{0j}) = \text{Tr}_{31}^{12}(T_{0j} \otimes T_{0j}) = 0, \\ \text{Tr}_{31}^{12}(T_{3-j} \otimes T_{0j}) &= \text{Tr}_{31}^{12}(e_0 \otimes \omega_0([e_{3-j,1}, e_{3-j,2}])(\omega_{3-j,1} \wedge \omega_{3-j,2}) \\ &\quad \otimes (e_{3-j,1} \otimes (\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}])(\omega_0 \wedge \omega_{j1}) + \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}])(\omega_0 \wedge \omega_{j2})) \\ &\quad + e_{3-j,2} \otimes (\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j1}])(\omega_0 \wedge \omega_{j1}) + \omega_{3-j,2}([e_0, e_{j2}])(\omega_0 \wedge \omega_{j2})))) \\ &= \omega_0([e_{3-j,1}, e_{3-j,2}])(\omega_{3-j,2} \otimes (\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}])\omega_{j1} + \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}])\omega_{j2}) \\ &\quad - \omega_{3-j,1} \otimes (\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j1}])\omega_{j1} + \omega_{3-j,2}([e_0, e_{j2}])\omega_{j2})), \\ \text{Tr}_{31}^{12}(T_{0,3-j} \otimes T_{0j}) &= \text{Tr}_{31}^{12}((e_{j1} \otimes (\omega_{j1}([e_0, e_{3-j,1}])\omega_0 \wedge \omega_{3-j,1}) + \omega_{j1}([e_0, e_{3-j,2}])\omega_0 \wedge \omega_{3-j,2})) \\ &\quad + e_{j2} \otimes (\omega_{j2}([e_0, e_{3-j,1}])\omega_0 \wedge \omega_{3-j,1}) + \omega_{j2}([e_0, e_{3-j,2}])\omega_0 \wedge \omega_{3-j,2})) \\ &\quad \otimes (e_{3-j,1} \otimes (\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}])\omega_0 \wedge \omega_{j1}) + \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}])\omega_0 \wedge \omega_{j2})) \\ &\quad + e_{3-j,2} \otimes (\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j1}])\omega_0 \wedge \omega_{j1}) + \omega_{3-j,2}([e_0, e_{j2}])\omega_0 \wedge \omega_{j2}))) \\ &= \omega_0 \otimes \omega_0 (\omega_{j1}([e_0, e_{3-j,1}])\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}]) + \omega_{j1}([e_0, e_{3-j,2}])\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j1}]) \\ &\quad + \omega_{j2}([e_0, e_{3-j,1}])\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}]) + \omega_{j2}([e_0, e_{3-j,2}])\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j2}])) \end{aligned}$$

при $j = 1, 2$. Тем самым, для тензорных произведений ограничений тензорных объектов (6.19), (6.20) на окрестность U получаем (для краткости явно не указываем зависимость от уравнения Q и окрестности U):

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0) &= \text{Tr}_{31}^{12}(T_1 + T_2) \otimes (T_{01} + T_{02}) = \text{Tr}_{31}^{12}(T_1 \otimes T_{02}) + \text{Tr}_{31}^{12}(T_2 \otimes T_{01}) \\ &= \omega_0([e_{11}, e_{12}])(\omega_{12} \otimes (\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{22}) \\ &\quad - \omega_{11} \otimes (\omega_{12}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{12}([e_0, e_{22}])\omega_{22})) \\ &\quad + \omega_0([e_{21}, e_{22}])(\omega_{22} \otimes (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}) \\ &\quad - \omega_{21} \otimes (\omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12})). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Отсюда для кососимметрической части этой свертки получаем

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0)) &= \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_1 \otimes T_{02}) + \text{Tr}_{31}^{12}(T_2 \otimes T_{01})) \\ &= (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{12}]))\omega_{12} \wedge \omega_{21} \\ &\quad + (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{12}]))\omega_{12} \wedge \omega_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{11}]))\omega_{11} \wedge \omega_{21} \\
& - (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{11}]))\omega_{11} \wedge \omega_{22},
\end{aligned} \tag{6.28}$$

а для симметрической имеем

$$\begin{aligned}
\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0)) &= \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_1 \otimes T_{02}) + \text{Tr}_{31}^{12}(T_2 \otimes T_{01})) \\
&= (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{12}]))\omega_{12} \odot \omega_{21} \\
&\quad + (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{12}]))\omega_{12} \odot \omega_{22} \\
&\quad - (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{11}]))\omega_{11} \odot \omega_{21} \\
&\quad - (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{11}]))\omega_{11} \odot \omega_{22}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0) &= \text{Tr}_{31}^{12}(T_{01} + T_{02}) \otimes (T_{01} + T_{02}) = \text{Tr}_{31}^{12}(T_{01} \otimes T_{02}) + \text{Tr}_{31}^{12}(T_{02} \otimes T_{01}) \\
&= 2\omega_0 \otimes \omega_0(\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) \\
&\quad + \omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}])), \\
\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0)) &= 0, \\
\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0)) &= 2\omega_0 \odot \omega_0(\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) \\
&\quad + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) + \omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) \\
&\quad + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}])).
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Для многозначных сечений получаем соответственно

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012}) &= \{0, \text{Tr}_{31}^{12}(T_1 \otimes T_{02}), \text{Tr}_{31}^{12}(T_2 \otimes T_{01})\} \\
&= \{0, \omega_0([e_{11}, e_{12}]) (\omega_{12} \otimes (\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{22}) \\
&\quad - \omega_{11} \otimes (\omega_{12}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{12}([e_0, e_{22}])\omega_{22})), \\
&\quad \omega_0([e_{21}, e_{22}]) (\omega_{22} \otimes (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}) \\
&\quad - \omega_{21} \otimes (\omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12})) \},
\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}
\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012})) &= \{0, \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_1 \otimes T_{02})), \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_2 \otimes T_{01}))\} \\
&= \{0, \omega_0([e_{11}, e_{12}]) (\omega_{12} \wedge (\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{22}) \\
&\quad - \omega_{11} \wedge (\omega_{12}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{12}([e_0, e_{22}])\omega_{22})), \\
&\quad \omega_0([e_{21}, e_{22}]) (\omega_{22} \wedge (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}) \\
&\quad - \omega_{21} \wedge (\omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12})) \},
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012})) &= \{0, \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_1 \otimes T_{02})), \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_2 \otimes T_{01}))\} \\
&= \{0, \omega_0([e_{11}, e_{12}]) (\omega_{12} \odot (\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{22}) \\
&\quad - \omega_{11} \odot (\omega_{12}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{12}([e_0, e_{22}])\omega_{22})), \\
&\quad \omega_0([e_{21}, e_{22}]) (\omega_{22} \odot (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}) \\
&\quad - \omega_{21} \odot (\omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12})) \},
\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012}) &= \{0, \text{Tr}_{31}^{12}(T_{01} \otimes T_{02}), \text{Tr}_{31}^{12}(T_{02} \otimes T_{01})\} \\
&= \{0, (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) \\
&\quad + \omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]))\omega_0 \otimes \omega_0\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012})) &= \{0\}, \\
\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012})) &= \{0, (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) \\
&\quad + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) + \omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) \\
&\quad + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]))\omega_0 \odot \omega_0\}.
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.10 (продолжение примера 6.5). Вычислим тензориальные объекты (6.23)–(6.25) для случая полулинейного уравнения (4.5). Как было установлено в примере 6.5, при $j = 1, 2$

$$\omega_{3-j,2}([e_0, e_{j1}]) = \omega_{3-j,2}([e_0, e_{j2}]) = 0.$$

Поэтому согласно (6.14) и (6.16) имеем

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{31}^{12}(T_{3-j} \otimes T_{0j}) &= 2\lambda_{3-j}\omega_{3-j,2} \otimes (\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}])\omega_{j1} + \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}])\omega_{j2}), \\
\text{Tr}_{31}^{12}(T_{0,3-j} \otimes T_{0j}) &= \omega_{j1}([e_0, e_{3-j,1}])\omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}])\omega_0 \otimes \omega_0.
\end{aligned}$$

Отсюда для тензорных полей получаем

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0) &= 2\lambda_1(\omega_{12} \otimes (\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{22}) \\
&\quad - \omega_{22} \otimes (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0)) &= 2\lambda_1(\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{12} \wedge \omega_{21} \\
&\quad + (\omega_{11}([e_0, e_{22}]) + \omega_{21}([e_0, e_{12}]))\omega_{12} \wedge \omega_{22} + \omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} \wedge \omega_{22}), \quad (6.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0)) &= 2\lambda_1(\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{12} \odot \omega_{21} \\
&\quad + (\omega_{11}([e_0, e_{22}]) - \omega_{21}([e_0, e_{12}]))\omega_{12} \odot \omega_{22} - \omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} \odot \omega_{22}), \quad (6.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0) &= 2\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_0 \otimes \omega_0, \\
\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0)) &= 0, \quad (6.36)
\end{aligned}$$

$$\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0)) = 2\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_0 \odot \omega_0.$$

Аналогично, для многозначных сечений имеем

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012}) &= \{0, \text{Tr}_{31}^{12}(T_1 \otimes T_{02}), \text{Tr}_{31}^{12}(T_2 \otimes T_{01})\} \\
&= \{0, 2\lambda_1\omega_{12} \otimes (\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{22}), \\
&\quad 2\lambda_2\omega_{22} \otimes (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12})\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012})) &= \{0, 2\lambda_1\omega_{12} \wedge (\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{22}), \\
&\quad 2\lambda_2\omega_{22} \wedge (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12})\}, \quad (6.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012})) &= \{0, 2\lambda_1\omega_{12} \odot (\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_{21} + \omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{22}), \\
&\quad 2\lambda_2\omega_{22} \odot (\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11} + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12})\},
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012}) &= \{0, \text{Tr}_{31}^{12}(T_{01} \otimes T_{02}), \text{Tr}_{31}^{12}(T_{02} \otimes T_{01})\} \\
&= \{0, \omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_0 \otimes \omega_0\}, \\
\text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012})) &= \{0\}, \\
\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{012} \otimes T_{012})) &= \{0, \omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}])\omega_0 \odot \omega_0\}.
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.11. Пусть Q – эллиптическое или гиперболическое уравнение Монжа–Ампера (6.4) на многообразии M . Соответствующие этому уравнению согласно следствию 6.9, с) симметрические тензорные поля $\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0))(Q)$ и $\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0))(Q)$ по лемме 6.7, (b) являются вещественными билинейными формами. При этом согласно (6.30) симметрическая билинейная форма $\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0))(Q)$ тогда и только тогда невырождена на определенном равенством (4.3) одномерном расслоении h , когда

$$\begin{aligned} & \omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) + \omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) \\ & + \omega_{22}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) + \omega_{22}([e_0, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]) \neq 0. \end{aligned}$$

Аналогично, согласно соотношению (6.29) симметрическая билинейная форма $\text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0))(Q)$ тогда и только тогда невырождена на определенном в соответствии с (1.4) контактном расслоении L , когда

$$\begin{aligned} & (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{12}])) \\ & \times (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{11}])) \\ & - (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{12}])) \\ & \times (\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{11}])) \neq 0. \end{aligned}$$

Тем самым, если для каждой точки $m \in M$ выполнены последние два неравенства, то в силу разложения (4.4) вещественная билинейная форма

$$ds^2(Q) = \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_0 \otimes T_0))(Q) + \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0))(Q) \quad (6.38)$$

невырождена и, следовательно, является псевдоримановой метрикой на многообразии M . Пусть MA_{p-R} (pseudo-Riemannian) – множество уравнений Монжа–Ампера, удовлетворяющих указанным условиям невырожденности квадратичной формы (6.38). Поскольку эти условия являются неравенствами, то уравнения Монжа–Ампера из множества MA_{p-R} находятся в общем положении. Тем самым, для всякого уравнения Монжа–Ампера в общем положении выражение (6.38) определяет псевдориманову метрику. При этом если Q и $\tilde{Q}$ – контактно эквивалентные уравнения Монжа–Ампера и диффеоморфизм f – соответствующая контактная эквивалентность этих уравнений, то по следствию 6.9, с) этот диффеоморфизм является изометрией, т. е.

$$f^*(ds^2(\tilde{Q})) = ds^2(Q).$$

Другими словами, выражение (6.38) определяет функтор из категории MA_{p-R} уравнений Монжа–Ампера в общем положении в категорию псевдоримановых метрик. В случае локально полулинейного уравнения условия невырожденности квадратичной формы (6.38) согласно равенствам (6.35) и (6.36) сводятся к одному единственному неравенству

$$\omega_{21}([e_0, e_{11}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) \neq 0. \quad (6.39)$$

В частности, для полулинейного уравнения (4.5) в силу выражений (6.17) это неравенство принимает вид

$$(\varepsilon A_{pp} + A_{qq})^2 \neq -4\varepsilon A_{pq}^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.12. Все построения, проведенные в примерах 6.5 и 6.10, носят конструктивный характер и по существу являются алгоритмами. Действительно, для их осуществления требуется выполнение лишь конечного числа стандартных алгебраических операций и операций частного дифференцирования над свободным членом A полулинейного уравнения (4.5). В случае общего уравнения Монжа–Ампера все тензориальные объекты (6.18), (6.22)–(6.26) из теорем 6.6, 6.8 и следствия 6.9 строятся аналогично. Естественно, что объем вычислений при этом может быть достаточно большим. Однако конструктивно-алгоритмический характер этих вычислений позволяет запрограммировать их на языке какой-либо из широко распространенных систем компьютерной алгебры (Maple, Matematica и т. п.) и выполнять в автоматизированном режиме.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.13. Основным инструментом всех построений настоящего параграфа служит конструкция, описанная в лемме 6.3. Именно на ней и на локальном разложении касательного пространства в прямую сумму (6.5) основаны все описанные выше построения и результаты. Эту лемму можно обобщить следующим образом. Пусть дано произвольное n -мерное многообразие M и подрасслоение его комплексного касательного расслоения H , $H \subset T^{\mathbb{C}}M$, типичным слоем которого служит букет дизъюнктивных подпространств с отмеченными нулями. Предположим, что в каждой точке многообразия M этот букет порождает всё касательное пространство. Другими словами, для всякой точки $m \in M$ существуют окрестность U и векторные подрасслоения $H_j \subset T^{\mathbb{C}}U$, $j = 1, \dots, k$, такие, что

$$H|_U = \bigcup_{j=1}^k H_j, \quad T^{\mathbb{C}}U = \bigoplus_{j=1}^k H_j.$$

В частности, такие разложения имеют место в случае многообразия M со структурой почти произведения. Тогда использование конструкции, аналогичной описанной в лемме 6.3, позволяет построить на многообразии M тензориальные объекты, аналогичные объектам (6.18), (6.22)–(6.26), и доказать для них результаты, аналогичные теоремам 6.6, 6.8 и следствию 6.9.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.14. Рассмотрим конструкцию, альтернативную по отношению к конструкции, описанной в лемме 6.3. Как и в случае леммы 6.3, предположим, что U – произвольное многообразие, а W_1 и W_2 – два подрасслоения его комплексного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}U$, удовлетворяющие условию (A). Условие (B) заменим на условие

(B') для любых двух сечений X_1 и X_2 подрасслоений W_1 и W_2 , $X_1 \in \Gamma(W_1)$, $X_2 \in \Gamma(W_2)$, их скобка Ли является сечением суммы подрасслоений W_1 и W_2 ,

$$[X_1, X_2] \in \Gamma(W_1 + W_2).$$

Вместо тензорного поля (6.3) определим для $j = 1, 2$ оператор дифференцирования ∇^j сечений векторного расслоения W_j вдоль сечений векторного расслоения W_{3-j} :

$$\nabla_{X_{3-j}}^j X_j = \pi_j([X_{3-j}, X_j]).$$

Непосредственная проверка показывает, что этот оператор линеен относительно X_{3-j} и удовлетворяет условию Лейбница относительно X_j . Тем самым, он является частично определенным ковариантным дифференцированием сечений векторного расслоения W_j . Применение этой конструкции позволяет построить для всякого уравнения Монжа–Ампера в общем положении отвечающую ему *аффинную характеристическую связность* (см. [7], [9]). Отметим, что и для этой конструкции оператора ковариантного дифференцирования ∇^j в полной мере справедливо замечание, аналогичное замечанию 6.13.

§ 7. Контактная линеаризация

Рассмотрим задачу локальной контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера на многообразиях. Ниже будут сформулированы эффективно проверяемые условия того, что данное уравнение Монжа–Ампера локально полулинейно (линейно относительно вторых производных), локально линейно относительно производных, локально почти линейно, локально линейно относительно вторых и независимо от первых производных, локально линейно, локально линейно и независимо от первых производных, имеет локально постоянные коэффициенты в соответствии с частями а)–h) определения 5.1.

Из примера 2.2 ясно, что рассматриваемая задача по существу сводится к нахождению для двух фиксированных точек $\tilde{m}$ и m пространства $\mathbb{R}^5$ окрестностей $\tilde{M}$ и M этих точек и такого контактного диффеоморфизма (2.3), который осуществляет контактную эквивалентность уравнения (1.11) и либо уравнения (5.6), либо (5.6), (5.7), либо (5.6), (5.8), либо (5.6), (5.9), либо (5.6), (5.8), (5.10), либо (5.6), (5.11), либо (5.6), (5.12), либо (5.14) соответственно. Другими словами, рассматриваемая задача сводится к установлению локальной контактной эквивалентности двух уравнений Монжа–Ампера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$. В такой постановке задача о локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера восходит к исследованиям С. Ли семидесятых–восемидесятых годов XIX в. Перечислим некоторые публикации, посвященные проблеме локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера в евклидовом пространстве.

В работах [10]–[13] опубликован ряд результатов о локальной линеаризации параболических и гиперболических уравнений Монжа–Ампера посредством контактных диффеоморфизмов. Эти результаты сформулированы в терминах промежуточных интегралов. Подробные доказательства некоторых из них можно найти в монографии [14, гл. 2].

В статьях [15] и [16] найден критерий локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа–Ампера эллиптического и гиперболического типов, имеющих хотя бы одну инфинитезимальную контактную симметрию, уравнению с постоянными коэффициентами.

Заметка [5] посвящена контактной классификации комплексно-аналитических уравнений Монжа–Ампера с транзитивной группой симметрий. В частности, в этой работе объявлено о возможности сопоставления всякому комплексно-аналитическому уравнению Монжа–Ампера общего положения связности

Картана типа $SL(3, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{C})$. Аналогичные исследования для вещественных уравнений Монжа–Ампера гиперболического типа были проведены в [17] и [18].

Формулировка результата о локальной контактной эквивалентности уравнения Монжа–Ампера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ линейному уравнению опубликована в статьях [19] и [20]. Этот результат сформулирован в терминах относительных контактных инвариантов, а основным техническим приемом является расщепление комплекса де Рама, порожденное разложением кокасательного пространства.

Некоторые результаты о контактной редукции уравнений Монжа–Ампера к полулинейным, линейным относительно производных и уравнениям с постоянными коэффициентами доказаны автором в работе [6]. В статье [7] содержится подробное обоснование конструктивного алгоритма, позволяющего естественным образом сопоставлять всякому уравнению Монжа–Ампера в общем положении аффинную связность. Обобщение этого алгоритма изложено в работе [9].

Дополнительную информацию как о перечисленных выше, так и о ряде других фактов можно найти в книге [21].

Перейдем от краткого исторического обзора к непосредственному решению рассматриваемой задачи. Согласно замечанию 1.8 всякое уравнение Монжа–Ампера можно “собрать” из “частей” – уравнений вида (1.11) на пространстве $\mathbb{R}^5$. Начнем с установления условий, при которых эти “части” полулинейны, т. е. имеют вид

$$A(x, y, z_x, z_y, z) + z_{xx} + \varepsilon z_{yy} = 0, \quad (7.1)$$

где $\varepsilon = 1$ для эллиптического уравнения, $\varepsilon = 0$ для параболического уравнения и $\varepsilon = -1$ для гиперболического уравнения. Другими словами, когда уравнение Монжа–Ампера

$$Q = (M, I, I_0) \in \text{Ob}(\text{MA}) \quad (7.2)$$

локально полулинейно в соответствии с частью а) определения 5.1, т. е. допускает локальное представление вида (7.1). Справедлива

ТЕОРЕМА 7.1. *Если уравнение Монжа–Ампера (7.2) имеет на многообразии M постоянный тип и является объектом категории $H_{k,l}$ при $0 \leq l \leq k \leq 2$, то оно локально полулинейно, т. е. служит объектом категории MA_{s-1} . Иными словами, при $0 \leq l \leq k \leq 2$ имеет место включение*

$$(\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_p) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \cap \text{Ob}(H_{k,l}) \subseteq \text{Ob}(\text{MA}_{s-1}).$$

Доказательство теоремы 7.1 приведено в § 9.

Рассмотрим уравнение (7.2), являющееся объектом категории $H_{2,2}$, которое либо гиперболично, либо эллиплично. Сформулируем условия, при которых это уравнение локально линейно относительно производных в соответствии с п. б) определения 5.1, т. е. допускает локальное представление вида (7.1), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = A_0(x, y, z) + A_1(x, y, z)z_x + A_2(x, y, z)z_y. \quad (7.3)$$

Рассмотрим множество характеристических векторов $H = H(Q)$ и производную второго порядка $H^{(2)} = H^{(2)}(Q)$ этого множества, отвечающие уравнению (7.2) (см. определение 3.5), а также их пересечение

$$h^{(2)}(Q) = H^{(2)}(Q) \cap H(Q) = \bigcup_{m \in M} (H^{(2)}(m) \cap H(m)). \quad (7.4)$$

По определению 6.1 пересечение (7.4) является тензориальным объектом типа $(0, 1)$. Пусть

$$\omega_{\text{sym}}(Q) = \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0))(Q), \quad (7.5)$$

$$\omega_{\text{alt}}(Q) = \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0))(Q) \quad (7.6)$$

– соответствующие уравнению (7.2) согласно следствию 6.9, с) симметрическое и кососимметрическое тензорные поля типа $(2, 0)$. По лемме 6.7 эти поля вещественны. Для всякого симметрического либо кососимметрического тензорного поля $\mathfrak{T}$ типа $(2, 0)$ на многообразии M введем обозначение

$$h^{(2)} \lrcorner \mathfrak{T} = 0,$$

символизирующее, что для любой точки m многообразия M и любых касательных векторов $\xi \in h^{(2)}(m)$ и $\eta \in T_m^{\mathbb{C}}M$ выполняется равенство

$$\mathfrak{T}(\xi, \eta) = 0.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 7.2. *Предположим, что уравнение Монжа–Ампера (7.2) принадлежит на многообразии M либо гиперболическому, либо эллиптическому типу и является объектом категории $H_{2,2}$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(а) Уравнение (7.2) локально линейно относительно производных, т. е. служит объектом категории MA_{d-1} .

(b) Справедливо соотношение $h^{(2)}(Q) \lrcorner \omega_{\text{sym}}(Q) = 0$.

(c) Справедливо соотношение $h^{(2)}(Q) \lrcorner \omega_{\text{alt}}(Q) = 0$.

Иными словами, имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \text{Ob}(\text{MA}_{d-1}) \cap \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ &= \{Q \in \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : h^{(2)}(Q) \lrcorner \omega_{\text{sym}}(Q) = 0\} \\ &= \{Q \in \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : h^{(2)}(Q) \lrcorner \omega_{\text{alt}}(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 7.2 приведено в § 9.

ПРИМЕР 7.3. Непосредственно из определений (6.19), (6.8) тензорного поля T_0 и конструкции производной распределения второго порядка (см. определение 3.5, а)) вытекает, что

$$H^{(2)}(m) \cap H(m) = T_0(T_m^{\mathbb{C}}M, T_m^{\mathbb{C}}M).$$

Иными словами, тензориальный объект (7.4) – это образ поля T_0 :

$$h^{(2)} = h^{(2)}(Q) = \text{im } T_0(Q).$$

В частности, для полулинейного уравнения (7.1), являющегося объектом категории $H_{2,2}$, в каждой точке m пространства $\mathbb{R}^5$

$$h^{(2)}(m) = h_1^{(2)}(m) \cup h_2^{(2)}(m),$$

где касательное подпространство $h_j^{(2)}(m)$ одномерно и согласно (6.16) порождено базисным вектором $e_{j1}(m)$, $j = 1, 2$, заданным соотношением (4.6). В силу принадлежности уравнения классу $H_{2,2}$ из выражения (6.35) выводим

$$e_{j1}(m) \lrcorner \omega_{\text{sym}}(Q) = (-1)^j 2\lambda_1 \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}]) \omega_{3-j,2},$$

а из выражения (6.34) получаем

$$e_{j1}(m) \lrcorner \omega_{\text{alt}}(Q) = (-1)^{3-j} 2\lambda_1 \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j1}]) \omega_{3-j,2}.$$

Тем самым, в случае полулинейного уравнения (7.1) класса $H_{2,2}$ получаем, что условия (b) и (c) теоремы 7.2 эквивалентны и сводятся к выполнению равенств

$$\omega_{12}([e_0, e_{22}]) = \omega_{22}([e_0, e_{12}]) = 0. \quad (7.7)$$

Пусть дано локально линейное относительно производных уравнение (7.2), которое либо гиперболично, либо эллиплично. Выясним, при каких условиях это уравнение локально почти линейно в соответствии с п. с) определения 5.1, т. е. допускает локальное представление вида (7.1), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = A_0(x, y, z) + A_1(x, y)z_x + A_2(x, y)z_y. \quad (7.8)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 7.4. *Предположим, что (7.2) – локально линейное относительно производных уравнение, принадлежащее на многообразии M либо гиперболическому, либо эллиптическому типу. Это уравнение тогда и только тогда локально почти линейно, т. е. служит объектом категории MA_{a-1} , когда выполнено условие*

$$d\omega_{\text{alt}}(Q) = 0. \quad (7.9)$$

Иными словами, имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \text{Ob}(\text{MA}_{a-1}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ &= \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_{d-1}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : d\omega_{\text{alt}}(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 7.4 приведено в § 9.

ПРИМЕР 7.5. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^5$ линейное относительно производных уравнение (7.1), (7.3). По определению (6.13)

$$\begin{aligned} \omega_{12} \wedge \omega_{22} &= \frac{1}{2\lambda_1}(\lambda_1 dx - dy) \wedge \frac{1}{2\lambda_2}(\lambda_2 dx - dy) \\ &= \left(-\frac{1}{2\lambda_1}\lambda_1 \frac{1}{2\lambda_2} + \frac{1}{2\lambda_1} \frac{1}{2\lambda_2}\lambda_2 \right) dx \wedge dy = \frac{dx \wedge dy}{2\lambda_1}. \end{aligned}$$

Поэтому согласно определению (7.6), равенствам (7.7) и выражениям (6.34) и (6.17) имеем

$$\omega_{\text{alt}} = \frac{1}{2}(A_{1y} - \varepsilon A_{2x} - p\varepsilon A_{2z} + qA_{1z}) dx \wedge dy. \quad (7.10)$$

Следовательно,

$$d\omega_{\text{alt}} = \frac{1}{2}((A_{1yz} - \varepsilon A_{2xz} - p\varepsilon A_{2zz} + qA_{1zz}) dx \wedge dy \wedge dz \\ - \varepsilon A_{2z} dx \wedge dy \wedge dp + A_{1z} dx \wedge dy \wedge dq),$$

и, тем самым, условие (7.9) теоремы 7.4 сводится к равенствам

$$A_{1z} = A_{2z} = 0. \quad (7.11)$$

Комбинируя теоремы 7.2 и 7.4, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.6. Пусть уравнение Монжа–Ампера (7.2) принадлежит либо гиперболическому, либо эллиптическому типу на многообразии M и является объектом категории $H_{2,2}$. Это уравнение тогда и только тогда локально почти линейно, т. е. служит объектом подкатегории MA_{a-1} , когда выполнено одно из двух эквивалентных условий (b) или (c) теоремы 7.2 и условие (7.9). Иными словами, имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \text{Ob}(\text{MA}_{a-1}) \cap \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ &= \{Q \in \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : h^{(2)}(Q) \lrcorner \omega_{\text{sym}}(Q) = 0, \\ & \quad d\omega_{\text{alt}}(Q) = 0\} \\ &= \{Q \in \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : h^{(2)}(Q) \lrcorner \omega_{\text{alt}}(Q) = 0, \\ & \quad d\omega_{\text{alt}}(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение (7.2), которое локально полулинейно и либо гиперболично, либо эллиплично. Сформулируем условия, при которых это уравнение локально линейно относительно вторых и независимо от первых производных в соответствии с п. d) определения 5.1, т. е. допускает локальное представление вида (7.1), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = A(x, y, z). \quad (7.12)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 7.7. Предположим, что (7.2) – локально полулинейное уравнение, принадлежащее либо гиперболическому, либо эллиптическому типу на многообразии M . Это уравнение тогда и только тогда локально линейно относительно вторых и независимо от первых производных, т. е. служит объектом категории $\text{MA}_{d-1, \text{ind}}$, когда выполнено условие

$$\omega_{\text{alt}}(Q) = 0. \quad (7.13)$$

Иными словами, имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \text{Ob}(\text{MA}_{d-1, \text{ind}}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ &= \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_{s-1}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : \omega_{\text{alt}}(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 7.7 приведено в § 9.

ПРИМЕР 7.8. Рассмотрим полулинейное уравнение (7.1) на пространстве $\mathbb{R}^5$. Согласно определению (7.6) и выражению (6.34) условие (7.13) равносильно одновременному выполнению равенств (7.7) и равенства

$$\omega_{11}([e_0, e_{22}]) + \omega_{21}([e_0, e_{12}]) = 0. \quad (7.14)$$

Комбинируя теоремы 7.1 и 7.7, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.9. Пусть уравнение Монжа–Ампера (7.2) принадлежит либо гиперболическому, либо эллиптическому типу на многообразии M и является объектом категории $H_{k,l}$ при $0 \leq l \leq k \leq 2$. Это уравнение тогда и только тогда локально линейно относительно вторых и независимо от первых производных, когда выполнено условие (7.13). Иными словами, при $0 \leq l \leq k \leq 2$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \text{Ob}(\text{MA}_{d-l,\text{ind}}) \cap \text{Ob}(H_{k,l}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ &= \{Q \in \text{Ob}(H_{k,l}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : \omega_{\text{alt}}(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Пусть дано уравнение (7.2), которое локально линейно относительно производных и либо гиперболично, либо эллиплично. Сформулируем условия, при которых это уравнение локально линейно в соответствии с п. е) определения 5.1, т. е. допускает локальное представление вида (7.1), (7.8) при

$$A_0(x, y, z) = a_0(x, y) + a_1(x, y)z. \quad (7.15)$$

Обозначим через

$$\Omega(Q) = \text{Alt}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012}))(Q) \quad (7.16)$$

соответствующий уравнению (7.2) согласно следствию 6.9, с) тензориальный объект типа $(2, 0)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 7.10. Предположим, что (7.2) – локально линейное относительно производных уравнение, принадлежащее либо гиперболическому, либо эллиптическому типу на многообразии M . Это уравнение тогда и только тогда локально линейно, т. е. служит объектом категории MA_{lin} , когда выполнено условие

$$d\Omega(Q) = \{0\}. \quad (7.17)$$

Иными словами, имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \text{Ob}(\text{MA}_{\text{lin}}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ &= \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_{d-l}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : d\Omega(Q) = \{0\}\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 7.10 приведено в § 9.

ПРИМЕР 7.11. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^5$ линейное относительно производных уравнение (7.1), (7.3). Согласно определению (7.16), выражению (6.37) и равенствам (7.7) имеем

$$\Omega(Q) = \{0, 2\lambda_1\omega_{11}([e_0, e_{22}])\omega_{12} \wedge \omega_{22}, 2\lambda_2\omega_{21}([e_0, e_{12}])\omega_{22} \wedge \omega_{12}\}.$$

Отсюда по аналогии с примером 7.5 выводим

$$\Omega(Q) = \{0, \omega_{11}([e_0, e_{22}]) dx \wedge dy, \omega_{21}([e_0, e_{12}]) dx \wedge dy\}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае условие (7.17) сводится к соотношению

$$\begin{aligned} d\Omega(Q) = \{ & 0, \omega_{11}([e_0, e_{22}])_z dz \wedge dx \wedge dy + \omega_{11}([e_0, e_{22}])_p dp \wedge dx \wedge dy \\ & + \omega_{11}([e_0, e_{22}])_q dq \wedge dx \wedge dy, \omega_{21}([e_0, e_{12}])_z dz \wedge dx \wedge dy \\ & + \omega_{21}([e_0, e_{12}])_p dp \wedge dx \wedge dy + \omega_{21}([e_0, e_{12}])_q dq \wedge dx \wedge dy \} = \{0\}. \end{aligned}$$

Поскольку в этом случае представление (6.17) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_{3-j,1}([e_0, e_{j2}]) = -\frac{1}{4\lambda_j} \left(\frac{A_1^2 + \varepsilon A_2^2}{2} - 2(A_{0z} + pA_{1z} + qA_{2z}) + A_{1x} + A_{2y} \right. \\ \left. - \lambda_j(A_{1y} - \varepsilon A_{2x}) + p(A_{1z} + \varepsilon \lambda_j A_{2z}) + q(A_{2z} - \lambda_j A_{1z}) \right), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

то приходим к заключению, что условие (7.17) для уравнения (7.1), (7.3) равносильно равенствам

$$A_{0zz} = A_{1z} = A_{2z} = 0. \quad (7.18)$$

Комбинируя теоремы 7.2 и 7.10, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.12. Пусть уравнение Монжа–Ампера (7.2) принадлежит либо гиперболическому, либо эллиптическому типу на многообразии M и является объектом категории $H_{2,2}$. Это уравнение тогда и только тогда локально линейно, т. е. служит объектом категории MA_{lin} , когда выполнено одно из двух эквивалентных условий (b) или (c) теоремы 7.2 и условие (7.17). Иными словами, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\text{MA}_{\text{lin}}) \cap \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ = \{Q \in \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : h^{(2)}(Q) \lrcorner \omega_{\text{sym}}(Q) = 0, \\ d\Omega(Q) = 0\} \\ = \{Q \in \text{Ob}(H_{2,2}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : h^{(2)}(Q) \lrcorner \omega_{\text{alt}}(Q) = 0, \\ d\Omega(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Из теорем 7.10 и 7.7 получаем условия, при которых уравнение (7.2) локально линейно и независимо от первых производных в соответствии с п. f) определения 5.1, т. е. допускает локальное представление вида (7.1), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = a_0(x, y) + a_1(x, y)z. \quad (7.19)$$

СЛЕДСТВИЕ 7.13. Предположим, что (7.2) – локально полумлинейное уравнение, принадлежащее либо гиперболическому, либо эллиптическому типу на многообразии M . Это уравнение тогда и только тогда локально линейно и независимо от первых производных, т. е. одновременно служит объектом категорий MA_{lin} и $\text{MA}_{\text{d-l,ind}}$, когда выполнены условия (7.17) и (7.13). Иными словами, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\text{MA}_{\text{lin}}) \cap \text{Ob}(\text{MA}_{\text{d-l,ind}}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ = \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_{\text{d-l}}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : d\Omega(Q) = 0, \omega_{\text{alt}}(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Комбинируя теорему 7.1 и следствие 7.13, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.14. Пусть уравнение Монжа–Ампера (7.2) принадлежит либо гиперболическому, либо эллиптическому типу на многообразии M и является объектом категории $H_{k,l}$ при $0 \leq l \leq k \leq 2$. Это уравнение тогда и только тогда локально линейно и независимо от первых производных, т. е. одновременно служит объектом категорий MA_{lin} и $\text{MA}_{\text{d-l,ind}}$, когда одновременно выполнены условия (7.17) и (7.13). Иными словами, при $0 \leq l \leq k \leq 2$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \text{Ob}(\text{MA}_{\text{lin}}) \cap \text{Ob}(\text{MA}_{\text{d-l,ind}}) \cap \text{Ob}(H_{k,l}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \\ &= \{Q \in H_{k,l} \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) : d\Omega(Q) = 0, \omega_{\text{alt}}(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение (7.2), которое либо эллиплично, либо гиперболично. Сформулируем условия, при которых это уравнение имеет локально постоянные коэффициенты в соответствии с п. г) определения 5.1, т. е. допускает локальное представление вида (7.1), где

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = 0. \quad (7.20)$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} \Sigma(Q) &= \text{Sym}(\text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012}))(Q), \\ T(Q) &= \text{Tr}_{31}^{12}(T_{12} \otimes T_{012})(Q), \quad \omega(Q) = \text{Tr}_{31}^{12}(T \otimes T_0)(Q) \end{aligned}$$

соответствующие уравнению (7.2) согласно следствию 6.9, b) и c) тензоримальные объекты типа $(2, 0)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 7.15. Предположим, что уравнение (7.2) принадлежит либо гиперболическому, либо эллиптическому типу на многообразии M . Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) уравнение (7.2) имеет локально постоянные коэффициенты, т. е. служит объектом категории MA_{const} ;

(b) уравнение (7.2) является объектом категории $H_{1,1}$;

(c) справедливо равенство $\Omega(Q) = 0$;

(d) справедливо равенство $\Sigma(Q) = 0$;

(e) справедливо равенство $T(Q) = 0$;

(f) справедливо равенство $\omega(Q) = 0$;

(g) справедливы равенства $\omega_{\text{sym}}(Q) = \omega_{\text{alt}}(Q) = 0$.

Иными словами, имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \text{Ob}(\text{MA}_{\text{const}}) \cap (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) = (\text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h)) \cap \text{Ob}(H_{1,1}) \\ &= \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h) : \Omega(Q) = 0\} \\ &= \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h) : \Sigma(Q) = 0\} \\ &= \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h) : T(Q) = 0\} \\ &= \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h) : \omega(Q) = 0\} \\ &= \{Q \in \text{Ob}(\text{MA}_e) \cup \text{Ob}(\text{MA}_h) : \omega_{\text{sym}}(Q) = 0, \omega_{\text{alt}}(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 7.15 приведено в § 9.

В случае, когда уравнение (7.2) параболично, аналогом теоремы 7.15 служит

ТЕОРЕМА 7.16. *Параболическое уравнение Монжа–Ампера (7.2) тогда и только тогда имеет локально постоянные коэффициенты, т. е. служит объектом категории MA_{const} , когда оно является объектом категории $H_{0,0}$. Иными словами, имеет место равенство*

$$\text{Ob}(\text{MA}_{\text{const}}) \cap \text{Ob}(\text{MA}_p) = \text{Ob}(\text{MA}_p) \cap \text{Ob}(H_{0,0}).$$

Доказательство теоремы 7.16 приведено в § 9.

Пусть дано уравнение (7.2) параболического типа. Сформулируем условия, при которых это уравнение локально эволюционно в соответствии с п. h) определения 5.1, т. е. допускает локальное представление вида (7.1) при $\varepsilon = 0$ и

$$A_q(x, y, p, q, z) \neq 0. \quad (7.21)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 7.17. *Параболическое уравнение Монжа–Ампера (7.2) тогда и только тогда локально эволюционно, т. е. служит объектом категории MA_{evol} , когда оно является объектом категории $H_{2,2}$. Иными словами, имеет место равенство*

$$\text{Ob}(\text{MA}_{\text{evol}}) = \text{Ob}(\text{MA}_p) \cap \text{Ob}(H_{2,2}).$$

Доказательство теоремы 7.17 приведено в § 9.

ПРИМЕР 7.18. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^5$ полулинейное параболическое уравнение (7.1). Согласно выражениям (4.6) характеристическое расслоение $H = H_1 = H_2$ этого уравнения порождается векторными полями

$$e_1 = -\frac{\partial}{\partial q}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} - A_q \frac{\partial}{\partial p}.$$

В силу представления (4.7) их скобка Ли имеет вид

$$[e_1, e_2] = A_q \frac{\partial}{\partial p},$$

а повторные скобки Ли – вид

$$[e_1, [e_1, e_2]] = -A_{qq} \frac{\partial}{\partial p}, \quad [e_2, [e_1, e_2]] = (e_2(A_q) + A_p A_q) \frac{\partial}{\partial p} - A_q \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тем самым, полулинейное параболическое уравнение (7.1) тогда и только тогда принадлежит классу $H_{2,2}$, когда выполняется неравенство (7.21).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.19. Согласно замечанию 6.12 все построения, необходимые для проверки условий утверждений, сформулированных выше в данном параграфе, носят конструктивный характер. Действительно, для их проверки требуется выполнение лишь конечного числа стандартных алгебраических операций и операций частного дифференцирования над коэффициентами рассматриваемого уравнения Монжа–Ампера.

§ 8. Свойства тензориальных функторов

Данный параграф посвящен доказательству леммы 6.7 и теоремы 6.8.

Фиксируем произвольную точку $m_0 \in M$ и выберем удовлетворяющую лемме 1.6 окрестность U этой точки и удовлетворяющие лемме 3.3 расслоения H_1^U и H_2^U над этой окрестностью. Прежде чем перейти к непосредственному доказательству леммы 6.7, установим для операторов проектирования (6.6) и тензорных полей (6.19) справедливость двух следующих утверждений.

ЛЕММА 8.1. *Для всякой точки $t \in U$, вектора $\xi \in T_m^{\mathbb{C}}M$ и оператора π_0 выполнено*

$$\pi_0(\bar{\xi}) = \overline{\pi_0(\xi)}. \quad (8.1)$$

Для операторов π_j при $j = 1, 2$ имеем

$$\pi_j(\bar{\xi}) = \overline{\pi_{3-j}(\xi)} \quad (8.2)$$

в эллиптическом случае и

$$\pi_j(\bar{\xi}) = \overline{\pi_j(\xi)} \quad (8.3)$$

в гиперболическом случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.5), (6.6) имеем

$$\xi = \sum_{\alpha=0}^2 \pi_{\alpha}(\xi), \quad \bar{\xi} = \sum_{\alpha=0}^2 \pi_{\alpha}(\bar{\xi}),$$

поэтому

$$\sum_{\alpha=0}^2 \pi_{\alpha}(\bar{\xi}) = \sum_{\alpha=0}^2 \overline{\pi_{\alpha}(\xi)}.$$

Отсюда в силу разложения (6.5) и леммы 4.2, б) вытекает равенство (8.1). Следовательно, по лемме 4.1, с) в эллиптическом случае имеет место равенство (8.2), а в гиперболическом – равенство (8.3). Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. *Для всякой точки $t \in U$, векторов $X, Y \in T_m^{\mathbb{C}}M$ и тензорных полей T и T_0 имеют место равенства*

$$\overline{T(X, Y)} = T(\bar{X}, \bar{Y}), \quad \overline{T_0(X, Y)} = T_0(\bar{X}, \bar{Y}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.7) для $j = 1, 2$ имеем

$$T_j(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi_0([\pi_j(\bar{X}), \pi_j(\bar{Y})]),$$

откуда по лемме 8.1 получаем

$$T_j(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi_0([\overline{\pi_{3-j}(X)}, \overline{\pi_{3-j}(Y)}]) = \overline{\pi_0([\pi_{3-j}(X), \pi_{3-j}(Y)]]} = \overline{T_{3-j}(X, Y)}$$

в эллиптическом случае и

$$T_j(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi_0([\overline{\pi_j(X)}, \overline{\pi_j(Y)}]) = \overline{\pi_0([\pi_j(X), \pi_j(Y)]]} = \overline{T_j(X, Y)}$$

в гиперболическом случае. Отсюда согласно (6.19) выводим

$$T(\bar{X}, \bar{Y}) = T_1(\bar{X}, \bar{Y}) + T_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \overline{T_1(X, Y)} + \overline{T_2(X, Y)} = \overline{T(X, Y)}.$$

Аналогично, согласно (6.8) для $j = 1, 2$ имеем

$$T_{0j}(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi_{3-j}([\pi_0 \oplus \pi_j(\bar{X}), \pi_0 \oplus \pi_j(\bar{Y})]),$$

откуда по лемме 8.1 получаем

$$\begin{aligned} T_{0j}(\bar{X}, \bar{Y}) &= \pi_{3-j}([\overline{\pi_0 \oplus \pi_{3-j}(X)}, \overline{\pi_0 \oplus \pi_{3-j}(Y)}]) \\ &= \overline{\pi_j([\pi_0 \oplus \pi_{3-j}(X), \pi_0 \oplus \pi_{3-j}(Y)])} = \overline{T_{0,3-j}(X, Y)} \end{aligned}$$

в эллиптическом случае и

$$\begin{aligned} T_{0j}(\bar{X}, \bar{Y}) &= \pi_{3-j}([\overline{\pi_0 \oplus \pi_j(X)}, \overline{\pi_0 \oplus \pi_j(Y)}]) \\ &= \overline{\pi_{3-j}([\pi_0 \oplus \pi_j(X), \pi_0 \oplus \pi_j(Y)])} = \overline{T_{0,j}(X, Y)} \end{aligned}$$

в гиперболическом случае. Отсюда согласно (6.19) выводим

$$T_0(\bar{X}, \bar{Y}) = T_{01}(\bar{X}, \bar{Y}) + T_{02}(\bar{X}, \bar{Y}) = \overline{T_{01}(X, Y)} + \overline{T_{02}(X, Y)} = \overline{T_0(X, Y)}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.7. Очевидно, что свойство (а) вытекает из представлений (6.11) и (6.12). Свойство (b) вытекает из леммы 8.2, согласно которой для вещественных векторов X и Y выполнено

$$\overline{T(X, Y)} = T(X, Y), \quad \overline{T_0(X, Y)} = T_0(X, Y).$$

Лемма доказана.

Прежде чем перейти к непосредственному доказательству теоремы 6.8, покажем, что операторы проектирования (6.6) обладают следующими свойствами.

ЛЕММА 8.3. *Рассмотрим уравнения (5.1), (5.2) и диффеоморфизм (5.4), удовлетворяющий включению*

$$f \in \text{Hom}_{\text{MA}}(\tilde{Q}, Q). \quad (8.4)$$

Выберем для уравнения (5.2) согласно лемме 3.3 некоторое множество $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ и расслоения $\tilde{H}_1$ и $\tilde{H}_2$ на нем. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) *множество $U = f(\tilde{U})$ и расслоения*

$$H_1 = f_*(\tilde{H}_1), \quad H_2 = f_*(\tilde{H}_2) \quad (8.5)$$

удовлетворяют лемме 3.3 для уравнения (5.1);

(b) *операторы проектирования (6.6), отвечающие разложению (6.5) для уравнения (5.1), и операторы проектирования $\tilde{\pi}_j$, отвечающие аналогичному разложению для уравнения (5.2), удовлетворяют коммутационному соотношению*

$$f_*^{-1} \circ \pi_j(X) = \tilde{\pi}_j \circ f_*^{-1}(X). \quad (8.6)$$

Здесь $j = 0, 1, 2$, а X – произвольное векторное поле на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (а) следует из леммы 3.7. Докажем утверждение (б). Согласно определению (6.6) и разложению (6.5) имеем

$$X = \sum_{l=0}^2 \pi_l(X). \quad (8.7)$$

Аналогично, для диффеоморфизма (8.4) имеем

$$f_*^{-1}(X) = \sum_{l=0}^2 \tilde{\pi}_l(f_*^{-1}(X)). \quad (8.8)$$

Из равенств (8.7), (8.8) заключаем, что

$$\sum_{l=0}^2 f_*^{-1} \circ \pi_l(X) = \sum_{l=0}^2 \tilde{\pi}_l \circ f_*^{-1}(X). \quad (8.9)$$

Из (8.9) в силу (8.5) и следствия 4.6 получаем соотношение (8.6). Лемма доказана.

ЛЕММА 8.4. Пусть выполнены все условия леммы 8.3. Обозначим через T_j , T_{0j} и $\tilde{T}_j$, $\tilde{T}_{0j}$ тензорные поля, построенные для уравнения (5.1) и (5.2) в соответствии с выражениями (6.7) и (6.8). Тогда для любых касательных векторов $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_m^{\mathbb{C}}\tilde{U}$ справедливы равенства

$$f_*\tilde{T}_j(\tilde{X}, \tilde{Y}) = T_j(f_*\tilde{X}, f_*\tilde{Y}), \quad (8.10)$$

$$f_*\tilde{T}_{0j}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = T_{0j}(f_*\tilde{X}, f_*\tilde{Y}). \quad (8.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем согласно лемме 8.3, (а) окрестности $\tilde{U}$, U и расщепления H_1 , H_2 и $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ над этими окрестностями. В силу (6.7) для касательных векторов $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ при $j = 1, 2$ имеем

$$f_*^{-1} \circ T_j(f_*\tilde{X}, f_*\tilde{Y}) = f_*^{-1} \circ \pi_0([\pi_j(f_*\tilde{X}), \pi_j(f_*\tilde{Y})]).$$

Отсюда по лемме 8.3 получаем

$$\begin{aligned} f_*^{-1} \circ T_j(f_*\tilde{X}, f_*\tilde{Y}) &= \tilde{\pi}_0 \circ f_*^{-1}[f_* \circ \tilde{\pi}_j \circ f_*^{-1} \circ f_*\tilde{X}, f_* \circ \tilde{\pi}_j \circ f_*^{-1} \circ f_*\tilde{Y}] \\ &= \tilde{\pi}_0([\tilde{\pi}_j(\tilde{X}), \tilde{\pi}_j(\tilde{Y})]) = \tilde{T}_j(\tilde{X}, \tilde{Y}). \end{aligned}$$

Полученное соотношение эквивалентно равенству (8.10).

Аналогично, по определению (6.8) имеем

$$f_*^{-1} \circ T_{0j}(f_*\tilde{X}, f_*\tilde{Y}) = f_*^{-1} \circ \pi_{3-j}([\pi_0 \oplus \pi_j(f_*\tilde{X}), \pi_0 \oplus \pi_j(f_*\tilde{Y})]).$$

Отсюда по лемме 8.3 получаем

$$\begin{aligned} f_*^{-1} \circ T_{0j}(f_*\tilde{X}, f_*\tilde{Y}) &= \tilde{\pi}_{3-j} \circ f_*^{-1}([f_* \circ \tilde{\pi}_0 \oplus \tilde{\pi}_j \circ f_*^{-1} \circ f_*\tilde{X}, f_* \circ \tilde{\pi}_0 \oplus \tilde{\pi}_j \circ f_*^{-1} \circ f_*\tilde{Y}]) \\ &= \tilde{\pi}_{3-j}([\tilde{\pi}_0 \oplus \tilde{\pi}_j(\tilde{X}), \tilde{\pi}_0 \oplus \tilde{\pi}_j(\tilde{Y})]) = \tilde{T}_{0j}(\tilde{X}, \tilde{Y}). \end{aligned}$$

Полученное соотношение эквивалентно равенству (8.11). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.8. Выберем для произвольной точки $m \in \widetilde{M}$ окрестность $\widetilde{U}$ согласно лемме 3.3 и воспользуемся обозначениями леммы 8.3. Согласно лемме 8.4 и равенствам (6.19), (6.20) для любых касательных векторов $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in T_m^{\mathbb{C}} \widetilde{U}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} f_* \widetilde{T}|_{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= f_* \widetilde{T}_1^{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + f_* \widetilde{T}_2^{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \\ &= T_1^U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y}) + T_2^U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y}) = T|_U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y}), \\ f_* \widetilde{T}_0|_{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= f_* \widetilde{T}_{01}^{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + f_* \widetilde{T}_{02}^{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \\ &= T_{01}^U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y}) + T_{02}^U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y}) = T_0|_U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y}), \\ f_* \widetilde{T}_{12}|_{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= \{f_* \widetilde{T}_1^{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\} \cup \{f_* \widetilde{T}_2^{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\} \\ &= \{T_1^U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y})\} \cup \{T_2^U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y})\} = T_{12}|_U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y}), \\ f_* \widetilde{T}_{012}|_{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= \{f_* \widetilde{T}_{01}^{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\} \cup \{f_* \widetilde{T}_{02}^{\widetilde{U}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\} \\ &= \{T_{01}^U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y})\} \cup \{T_{02}^U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y})\} = T_{012}|_U(f_* \widetilde{X}, f_* \widetilde{Y}). \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора точки m полученные равенства эквивалентны утверждению теоремы 6.8. Теорема доказана.

§ 9. Локальная контактная эквивалентность

Данный параграф посвящен доказательству результатов, сформулированных в § 7.

Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 7.1, установим, что справедлива

ЛЕММА 9.1. Пусть в некоторой окрестности точки $m \in \mathbb{R}^5$ уравнение (1.11) имеет постоянный тип и принадлежит классу $H_{k,l}$, где $0 \leq l \leq k \leq 2$. Тогда в некоторой окрестности этой точки уравнение (1.11) контактно эквивалентно полулинейному уравнению вида (7.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством основной леммы из [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. По лемме 1.6 для всякой точки m многообразия M найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20) такие, что выполняются представления (1.21) и (1.22). Другими словами, ограничение уравнения Монжа–Ампера (7.2) на окрестность U контактно эквивалентно уравнению (1.11) в области $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^5$. Условия теоремы и лемма 9.1 позволяют сделать вывод о том, что, сужая в случае необходимости окрестность U , полученное уравнение (1.11) в области $\varphi(U)$ контактно эквивалентно полулинейному уравнению вида (7.1). Тем самым, уравнение (7.2) удовлетворяет п. а) определения 5.1. Теорема доказана.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 7.2, установим справедливость ряда вспомогательных утверждений. Имеет место

ЛЕММА 9.2. Пусть в некоторой окрестности точки $t \in \mathbb{R}^5$ полулинейное уравнение (7.1) имеет либо гиперболический, либо эллиптический тип. Рассмотрим отвечающие этому уравнению базисные векторные поля (4.6), (4.8) и двойственные им базисные линейные дифференциальные формы (6.13). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(а) в некоторой окрестности точки $t \in \mathbb{R}^5$ для свободного члена A уравнения (7.1) справедливо представление

$$A(x, y, p, q, z) = A_0(x, y, z) + pA_1(x, y, z) + qA_2(x, y, z) + (p^2 + \varepsilon q^2)A_3(x, y, z), \quad (9.1)$$

где $\varepsilon = 1$ для эллиптического уравнения и $\varepsilon = -1$ для гиперболического уравнения;

(б) в некоторой окрестности точки $t \in \mathbb{R}^5$ для уравнения (7.2) справедливы равенства (7.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно первому выражению из (6.17) в рассматриваемом случае равенства (7.7) сводятся к выполнению соотношений

$$\varepsilon A_{pp} + 2\lambda_j A_{pq} - A_{qq} = 0$$

при $j = 1, 2$. Ясно, что эти соотношения равносильны равенствам

$$A_{pq} = 0, \quad \varepsilon A_{pp} - A_{qq} = 0.$$

Непосредственная проверка показывает, что эти равенства эквивалентны представимости функции A в виде (9.1). Лемма доказана.

Для полулинейных уравнений вида (7.1), (9.1) справедлива

ЛЕММА 9.3. В некоторой окрестности любой точки $t \in \mathbb{R}^5$ уравнение вида (7.1), (9.1) контактно эквивалентно уравнению вида (7.1), (7.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством леммы 16 из [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.2. По теореме 7.1 рассматриваемое уравнение (7.2) локально полулинейно. Следовательно, по определению 5.1, а) (см. также замечание 1.8) для всякой точки t многообразия M найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20) такие, что выполняются представления (1.21) и (1.22) при

$$w = A dx \wedge dy + dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq. \quad (9.2)$$

Другими словами, ограничение уравнения Монжа–Ампера (7.2) на окрестность U контактно эквивалентно уравнению (7.1) в области $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^5$. Согласно примеру 7.3 для этого уравнения условия (б) и (с) доказываемой теоремы эквивалентны и сводятся к выполнению равенств (7.7).

Достаточность. Пусть выполнены равенства (7.7). Тогда по лемме 9.2, сужая в случае необходимости окрестность U , полученное уравнение (7.1) в области $\varphi(U)$ контактно эквивалентно уравнению вида (7.1), (9.1). Следовательно, по лемме 9.3, также сужая в случае необходимости окрестность U , заключаем, что в области $\varphi(U)$ полученное уравнение (7.1) контактно эквивалентно линейному относительно производных уравнению вида (7.1), (7.3). Тем самым

установлено, что для уравнения (7.2) эквивалентные условия (b) и (c) доказываемой теоремы достаточны для того, чтобы это уравнение удовлетворяло определению 5.1, b).

Необходимость. Пусть уравнение (7.2) локально линейно относительно производных. Тогда по определению 5.1, b) полученное в области $\varphi(U)$ уравнение (7.1) можно считать линейным относительно производных уравнением вида (7.1), (7.3). Очевидно, что для этого уравнения выполнены равенства (7.7), которые согласно примеру 7.3 равносильны эквивалентным условиям (a) и (b). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.4. По условию теоремы рассматриваемое уравнение (7.2) локально линейно относительно производных. Следовательно, по определению 5.1, b) (см. также замечание 1.8) для всякой точки m многообразия M найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20) такие, что выполняются представления (1.21) и (1.22) при

$$w = (A_0(x, y, z) + pA_1(x, y, z) + qA_2(x, y, z)) dx \wedge dy + dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq. \quad (9.3)$$

Другими словами, ограничение уравнения Монжа–Ампера (7.2) на окрестность U контактно эквивалентно уравнению вида (7.1), (7.3) в области $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^5$. Согласно примеру 7.5 для этого уравнения условие (7.9) доказываемой теоремы эквивалентно выполнению равенств (7.11).

Достаточность. Пусть выполнены равенства (7.11). Очевидно, что эти равенства эквивалентны представлению (7.8). Тем самым установлено, что условие (7.9) для локально линейного относительно производных уравнения (7.2) является достаточным для того, чтобы это уравнение удовлетворяло определению 5.1, c).

Необходимость. Пусть уравнение (7.2) локально почти линейно. Тогда по определению 5.1, c) полученное в области $\varphi(U)$ уравнение (7.1) можно считать почти линейным уравнением вида (7.1), (7.8). Очевидно, что для этого уравнения выполнены равенства (7.11), которые согласно примеру 7.5 эквивалентны условию (7.9). Теорема доказана.

Прежде чем перейти к непосредственному доказательству теоремы 7.7, исследуем частный случай полулинейного уравнения (7.1), когда

$$A(x, y, z_x, z_y, z) = A_0(x, y, z) + a_x(x, y)z_x + \varepsilon a_y(x, y)z_y. \quad (9.4)$$

Справедлива

ЛЕММА 9.4. Уравнение вида (7.1), (9.4) в некоторой окрестности любой точки $m \in \mathbb{R}^5$ контактно эквивалентно уравнению вида (7.1), (7.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную функцию

$$b = b(x, y) \quad (9.5)$$

и заменим в уравнении вида (7.1), (9.4) неизвестную функцию $z(x, y)$ на произведение $b(x, y)z(x, y)$. Другими словами, применим к этому уравнению контактный диффеоморфизм

$$f^*x = x, \quad f^*y = y, \quad f^*p = b_x z + bp, \quad f^*q = b_y z + bq, \quad f^*z = bz.$$

В результате для прообраза дифференциальной формы

$$w = (A_0(x, y, z) + pa_x(x, y) + \varepsilon qa_y(x, y)) dx \wedge dy + dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq$$

получим выражение

$$f^*(w) = b(dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq) + (b_{xx}z + \varepsilon b_{yy}z + 2pb_x + 2\varepsilon qb_y + f^*A_0 + a_x(b_xz + bp) + \varepsilon a_y(b_yz + bq)) dx \wedge dy - (b_x dy - \varepsilon b_y dx) \wedge v,$$

где v – контактная форма (1.13). Выберем функцию (9.5), удовлетворяющую уравнению

$$p(2b_x + a_x(x, y)b) + q\varepsilon(2b_y + a_y(x, y)b) = 0,$$

например положим

$$b(x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}a(x, y)\right\}.$$

В результате получим следующее сравнение по модулю формы v :

$$f^*(w) \equiv b(dp \wedge dy + \varepsilon dx \wedge dq) + ((b_{xx} + \varepsilon b_{yy} + a_x b_x + \varepsilon a_y b_y)z + f^*A_0) dx \wedge dy.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.7. По условию теоремы рассматриваемое уравнение (7.2) локально полулинейно. Следовательно, по определению 5.1, а) (см. также замечание 1.8) для всякой точки m многообразия M найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20) такие, что выполняются представления (1.21), (1.22) и (9.2). Другими словами, ограничение уравнения Монжа–Ампера (7.2) на окрестность U контактно эквивалентно уравнению (7.1) в области $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^5$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (7.13). Согласно примеру 7.8 для полученного уравнения (7.1) в области $\varphi(U)$ это условие сводится к выполнению равенств (7.7) и (7.14). По лемме 9.2, сужая в случае необходимости окрестность U , заключаем, что рассматриваемое уравнение (7.1) в области $\varphi(U)$ контактно эквивалентно уравнению вида (7.1), (9.1). Отсюда по лемме 9.3, также сужая в случае необходимости окрестность U , заключаем, что это уравнение контактно эквивалентно линейному относительно производных уравнению вида (7.1), (7.3). Поэтому согласно представлению (6.17) в рассматриваемом случае равенство (7.14) сводится к соотношению

$$A_{1y} - \varepsilon A_{2x} - p\varepsilon A_{2z} + qA_{1z} = 0.$$

Поскольку A_1 и A_2 не зависят от p и q , отсюда вытекают равенства (7.11) и

$$A_{1y} = \varepsilon A_{2x}.$$

Следовательно, существует функция $a = a(x, y)$ такая, что

$$A_1 = a_x(x, y), \quad \varepsilon A_2 = a_y(x, y),$$

тем самым, справедливы представления (9.4). По лемме 9.4, также сужая в случае необходимости окрестность U , заключаем, что полученное уравнение (7.1)

в области $\varphi(U)$ контактно эквивалентно линейному относительно вторых и независимому относительно первых производных уравнению вида (7.1), (7.12). Тем самым установлено, что для локально полулинейного уравнения (7.2) условие (7.13) доказываемой теоремы достаточно для того, чтобы это уравнение удовлетворяло определению 5.1, d).

Необходимость. Пусть уравнение (7.2) локально линейно относительно вторых и независимо относительно первых производных. Тогда в силу определения 5.1, d) полученное в области $\varphi(U)$ уравнение (7.1) можно считать линейным относительно вторых и независимым относительно первых производных уравнением вида (7.1), (7.12). Оно является частным случаем линейного относительно производных уравнения вида (7.1), (7.3), где

$$A_0(x, y, z) = A(x, y, z), \quad A_1(x, y, z) = A_2(x, y, z) = 0.$$

Поэтому на основании представления (7.10) приходим к выполнению условия (7.13). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.10. По условию теоремы рассматриваемое уравнение (7.2) локально линейно относительно производных. Следовательно, по определению 5.1, b) (см. также замечание 1.8) для всякой точки m многообразия M найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20) такие, что выполняются представления (1.21) и (1.22), (9.3). Другими словами, ограничение уравнения Монжа–Ампера (7.2) на окрестность U контактно эквивалентно уравнению вида (7.1), (7.3) в области $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^5$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (7.17). Согласно примеру 7.11 для полученного уравнения вида (7.1), (7.3) в области $\varphi(U)$ это условие сводится к выполнению равенств (7.18). Тем самым, для рассматриваемого уравнения вида (7.1), (7.3) в области $\varphi(U)$ справедливо представление вида (7.8), (7.15). Иными словами, установлено, что для локально линейного относительно производных уравнения (7.2) условие (7.17) доказываемой теоремы достаточно для того, чтобы это уравнение удовлетворяло определению 5.1, e).

Необходимость. Пусть рассматриваемое уравнение (7.2) является локально линейным. Тогда в силу определения 5.1, e) полученное в области $\varphi(U)$ уравнение вида (7.1), (7.3) можно считать линейным уравнением вида (7.1), (7.8), (7.15). Следовательно, для него справедливы равенства (7.18), которые согласно примеру 7.11 являются локальным представлением условия (7.17). Теорема доказана.

Прежде чем перейти к непосредственному доказательству теоремы 7.15, установим, что справедлива

ЛЕММА 9.5. Пусть в некоторой окрестности точки $m \in \mathbb{R}^5$ уравнение (1.11) имеет либо гиперболический, либо эллиптический тип. Это уравнение в некоторой окрестности точки m контактно эквивалентно уравнению вида (7.1), (7.20) тогда и только тогда, когда оно в некоторой окрестности точки m принадлежит классу $H_{1,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемая лемма является частным случаем теоремы 2, сформулированной и доказанной в статье [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.15. По лемме 1.6 для всякой точки m многообразия M найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20) такие, что выполняются представления (1.21) и (1.22). Другими словами, ограничение уравнения Монжа–Ампера (7.2) на окрестность U контактно эквивалентно уравнению (1.11) в области $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^5$.

(a) $\Leftrightarrow$ (b). Лемма 9.5 позволяет заключить, что, сужая в случае необходимости окрестность U , получим, что уравнение (1.11) в области $\varphi(U)$ тогда и только тогда контактно эквивалентно уравнению с постоянными коэффициентами вида (7.1), (7.20), когда оно принадлежит классу $H_{1,1}$. Тем самым, уравнение (7.2) тогда и только тогда удовлетворяет п. г) определения 5.1, когда для него выполнено условие (b).

(b) $\Leftrightarrow$ (c). Выберем над областью $\varphi(U)$ комплексные векторные расслоения H_1 и H_2 в соответствии с леммой 3.3 так, чтобы для касательного расслоения $T^c U$ имело место разложение (6.5). Выберем также адаптированные к этому разложению базисные векторные поля (6.9) и двойственные им базисные линейные дифференциальные формы (6.10). Согласно представлению (6.32) условие (c) эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned}\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) &= 0, & \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) &= 0, & \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{11}]) &= 0, & \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{12}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{11}]) &= 0, & \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{12}]) &= 0.\end{aligned}\tag{9.6}$$

Поскольку рассматриваемое уравнение либо эллиптически, либо гиперболично, то в силу леммы 4.2 имеют место неравенства

$$\omega_0([e_{11}, e_{12}]) \neq 0, \quad \omega_0([e_{21}, e_{22}]) \neq 0.\tag{9.7}$$

Из соотношений (9.6) и (9.7) выводим равенства

$$\begin{aligned}\omega_{11}([e_0, e_{21}]) &= \omega_{11}([e_0, e_{22}]) = 0, & \omega_{12}([e_0, e_{21}]) &= \omega_{12}([e_0, e_{22}]) = 0, \\ \omega_{21}([e_0, e_{11}]) &= \omega_{21}([e_0, e_{12}]) = 0, & \omega_{22}([e_0, e_{11}]) &= \omega_{22}([e_0, e_{12}]) = 0,\end{aligned}$$

которые равносильны полной интегрируемости первых производных комплексных векторных расслоений H_1 и H_2 . Тем самым, по определению 3.5, б) условия (b) и (c) доказываемой теоремы эквивалентны.

(b) $\Leftrightarrow$ (d). В этом случае доказательство аналогично доказательству в случае (b) $\Leftrightarrow$ (c), только вместо представления (6.32) следует воспользоваться представлением (6.33).

(b) $\Leftrightarrow$ (e). В этом случае доказательство также аналогично доказательству в случае (b) $\Leftrightarrow$ (c). На этот раз вместо представления (6.32) следует воспользоваться представлением (6.31).

(b) $\Leftrightarrow$ (f). В этом случае доказательство также аналогично доказательству в случае (b) $\Leftrightarrow$ (c). На этот раз вместо представления (6.32) следует воспользоваться представлением (6.27).

(b) $\Leftrightarrow$ (g). В этом случае доказательство аналогично доказательству в случае (b) $\Leftrightarrow$ (c). Вместо представления (6.32) воспользуемся представлениями (6.28) и (6.29), согласно которым условие (f) равносильно равенствам

$$\begin{aligned}\omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{12}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{12}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{11}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{11}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{21}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{12}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{11}([e_0, e_{22}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{12}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{21}]) + \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{22}([e_0, e_{11}]) &= 0, \\ \omega_0([e_{11}, e_{12}])\omega_{12}([e_0, e_{22}]) - \omega_0([e_{21}, e_{22}])\omega_{21}([e_0, e_{11}]) &= 0.\end{aligned}$$

Очевидно, что эти равенства эквивалентны (9.6). Теорема доказана.

Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 7.16, установим, что справедлива

ЛЕММА 9.6. *Пусть уравнение (1.11) параболично в некоторой окрестности точки $m \in \mathbb{R}^5$. Это уравнение в некоторой окрестности точки m контактно эквивалентно уравнению вида (7.1), (7.20) для $\varepsilon = 0$ тогда и только тогда, когда оно в некоторой окрестности точки m принадлежит классу $H_{0,0}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемая лемма является частным случаем теоремы 2, сформулированной и доказанной в статье [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.16 аналогично доказательству эквивалентности (a) $\Leftrightarrow$ (b) теоремы 7.15, только вместо леммы 9.5 следует воспользоваться леммой 9.6. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.17. Достаточность. Предположим, что уравнение (7.2) параболично и является объектом категории $H_{2,2}$. Тогда по теореме 7.1 это уравнение локально полулинейно. Следовательно, по определению 5.1, а) (см. также замечание 1.8) для всякой точки m многообразия M найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20) такие, что выполняются представления (1.21), (1.22) и (9.2) для $\varepsilon = 0$. Другими словами, ограничение уравнения Монжа–Ампера (7.2) на окрестность U контактно эквивалентно уравнению (7.1) в области $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^5$. Согласно примеру 7.18 уравнение (7.1) в области $\varphi(U)$ тогда и только тогда удовлетворяет неравенству (7.21), когда оно принадлежит классу $H_{2,2}$. Тем самым установлено, что принадлежность параболического уравнения (7.2) к объектам категории $H_{2,2}$ достаточна для того, чтобы это уравнение удовлетворяло п. h) определения 5.1.

Необходимость. Пусть уравнение (7.2) локально эволюционно. Тогда по определению 5.1, h) (см. также замечание 1.8) для всякой точки m многообразия M найдутся окрестность U этой точки и координатный диффеоморфизм (1.20) такие, что выполняются представления (1.21), (1.22), (9.2) для $\varepsilon = 0$

и коэффициента A , удовлетворяющего неравенству (7.21). Другими словами, ограничение уравнения Монжа–Ампера (7.2) на окрестность U контактно эквивалентно уравнению (7.1) в области $\varphi(U)$ пространства $\mathbb{R}^5$, причем $\varepsilon = 0$ и выполняется неравенство (7.21). Согласно примеру 7.18 полученное уравнение (7.1) в области $\varphi(U)$ тогда и только тогда удовлетворяет неравенству (7.21), когда оно принадлежит классу $H_{2,2}$. Тем самым установлено, что уравнение (7.2) является объектом категории $H_{2,2}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: R. O. Wells, jr., *Differential analysis on complex manifolds*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
2. В. В. Лычагин, “Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка”, *УМН*, **34**:1 (1979), 137–165; англ. пер.: V. V. Lychagin, “Contact geometry and non-linear second-order differential equations”, *Russian Math. Surveys*, **34**:1 (1979), 149–180.
3. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: R. Courant, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Intersci. Publ., New York–London, 1962.
4. Ш. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
5. Т. Моримото, “La géométrie des équations de Monge–Ampère”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **289**:1 (1979), 25–28.
6. Д. В. Туницкий, “О контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:2 (1996), 195–220; англ. пер.: D. V. Tunitskii, “On the contact linearization of Monge–Ampère equations”, *Izv. Math.*, **60**:2 (1996), 425–451.
7. Д. В. Туницкий, “Эквивалентность и характеристические связности уравнений Монжа–Ампера”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 131–157; англ. пер.: D. V. Tunitskii, “Equivalence and characteristic connections of the Monge–Ampère equations”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 771–797.
8. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. I, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I, Intersci. Publ., New York–London–Sydney, 1963.
9. Д. В. Туницкий, “Уравнения Монжа–Ампера и функторы характеристической связности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:6 (2001), 173–222; англ. пер.: D. V. Tunitskii, “Monge–Ampère equations and characteristic connection functors”, *Izv. Math.*, **65**:6 (2001), 1243–1290.
10. S. Lie, “Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien”, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Teubner, Leipzig; Aschehoug, Oslo, 1922, 1–4.
11. S. Lie, “Neue Integrationsmethode der Monge–Ampèreschen Gleichung”, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Teubner, Leipzig; Aschehoug, Oslo, 1922, 287–294.
12. S. Lie, “Untersuchungen üß Differentialgleichungen”, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Teubner, Leipzig; Aschehoug, Oslo, 1922, 537–547.
13. S. Lie, “Geschichtliche Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung”, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 7, Teubner, Leipzig; Aschehoug, Oslo, 1922, 175–217.
14. E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Tome I: Problème de Cauchy. Caractéristiques. Intégrales intermédiaires*, Hermann, Paris, 1896.

15. В. В. Лычагин, В. Н. Рубцов, “О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа–Ампера”, *Докл. АН БССР*, **27**:5 (1983), 396–398.
16. V. V. Lychagin, V. N. Rubtsov, I. V. Chekalov, “A classification of Monge–Ampère equations”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **26**:3 (1993), 281–308.
17. О. П. Чиж, “Гиперболические уравнения Монжа–Ампера с транзитивными группами симметрий”, *Докл. НАН Беларуси*, **42**:2 (1998), 45–48.
18. О. П. Чиж, “Контактная геометрия уравнений Монжа–Ампера”, *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*, **42**:4 (1998), 52–56.
19. А. Г. Кушнер, “Контактная линеаризация невырожденных уравнений Монжа–Ампера”, *Движения в обобщенных пространствах*, Межвузовский сб. науч. трудов Пензенского гос. педагогического ун-та им. В. Г. Белинского, Пенза, 2005, 56–65.
20. А. Г. Кушнер, “Гиперболические уравнения Монжа–Ампера: проблема Софуса Ли контактной линеаризации”, *Сб. науч. тр. I Международного семинара “Симметрии: теоретический и методический аспекты”*, Астрахань, 2005, 20–23.
21. A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov, *Contact geometry and nonlinear differential equations*, Encyclopedia Math. Appl., **101**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

Д. В. Туницкий (D. V. TUNITSKIY)
Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН
E-mail: dtunitsky@yahoo.com

Поступило в редакцию
13.11.2006