Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Псху, Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 2, 141–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:52:55

УДК 517.95

А. В. Псху

Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка

Построено фундаментальное решение уравнения диффузионно-волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсисяна по временной переменной. Доказаны формулы приведения и решен вопрос о знакоопределенности фундаментального решения. Построено общее представление решений. Дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова. Показано, что когда порядок дробной производной в исследуемом уравнении равен единице или стремится к двум, построенное фундаментальное решение переходит в соответствующие решения для диффузионного и волнового уравнений. Соответствующие результаты для уравнений с производной Римана–Лиувилля и производной Капуто получаются как частные случаи доказанных утверждений.

Библиография: 39 наименований.

Ключевые слова: фундаментальное решение, уравнение диффузии дробного порядка, волновое уравнение дробного порядка, диффузионно-волновое уравнение, оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсисяна, производная Римана–Лиувилля, производная Капуто, условие А. Н. Тихонова, функция Райта, задача Коши.

§ 1. Введение

Рассмотрим диффузионно-волновое уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$; через $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$ обозначена дробная производная порядка α с началом в точке $y = 0$. Дробное дифференцирование понимается в одном из следующих смыслов: $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D_{0y}^\alpha$ – производная Римана–Лиувилля, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = \partial_{0y}^\alpha$ – производная Капуто, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = \mathbf{D}^\alpha$ – оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсисяна.

Производная Римана–Лиувилля порядка α с началом в точке $y = \eta$ определяется следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{\eta y}^\alpha g(y) = \text{sign}^p(y - \eta) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^p D_{\eta y}^{\alpha-p} g(y). \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-96625).

Производная Капуто определяется равенством [1, с. 11]

$$\partial_{\eta y}^{\alpha} g(y) = \text{sign}^p(y - \eta) D_{\eta y}^{\alpha-p} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^p g(y). \quad (3)$$

В определениях (2) и (3) число $p \in \mathbb{N}$ выбрано из условия $p - 1 < \alpha \leq p$; $D_{\eta y}^0 g(y) = g(y)$,

$$D_{\eta y}^{\mu} g(y) = \frac{\text{sign}(y - \eta)}{\Gamma(-\mu)} \int_{\eta}^y g(t)(y - t)^{-\mu-1} dt, \quad \mu < 0,$$

– дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $-\mu$ с началом в точке $y = \eta$.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядка $\alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1$, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, $\gamma_k \in (0, 1]$, $k = 0, m$, определяется соотношением [2]

$$D^{\alpha} g(y) \equiv D_{\eta y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} g(y) = D_{\eta y}^{\gamma_m-1} D_{\eta y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{\eta y}^{\gamma_1} D_{\eta y}^{\gamma_0} g(y). \quad (4)$$

Заметим, что если в (4) в качестве последовательности $\{\gamma_k\}_0^m$ взять последовательность

$$\{\gamma_k\}_0^m = \{\alpha - m + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_m\},$$

то мы получим производную Римана–Лиувилля:

$$D_{\eta y}^{\{\alpha-m+1, 1, \dots, 1\}} = D_{\eta y}^{\alpha}, \quad m - 1 < \alpha \leq m. \quad (5)$$

Последовательности $\{\gamma_k\}_0^m = \{\underbrace{1, \dots, 1}_m, \alpha - m + 1\}$ соответствует производная

Капуто:

$$D_{\eta y}^{\{1, \dots, 1, \alpha-m+1\}} = \partial_{\eta y}^{\alpha}, \quad m - 1 < \alpha \leq m. \quad (6)$$

Как следует из определений (2) и (3), если $p \in \mathbb{N}$, то для производной Римана–Лиувилля и производной Капуто имеют место равенства $D_{\eta y}^p g(y) = \partial_{\eta y}^p g(y) = \text{sign}^p(y - \eta) \frac{d^p}{dy^p} g(y)$. Поэтому при $\alpha = 1$ уравнение (1) совпадает с уравнением диффузии, а при $\alpha = 2$ – с волновым уравнением. Уравнения с производными дробного порядка возникают в математических моделях, описывающих различные процессы в средах с фрактальной геометрией (см., например, [1, гл. 5]).

Приведем краткий обзор работ, посвященных исследованию уравнения (1).

В работах [3]–[5] исследовалась задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка ($0 < \alpha < 1$) с регуляризованной дробной производной (производной Капуто) и эллиптическим оператором с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. В терминах H -функции построено фундаментальное решение, найдено решение задачи Коши и показана его единственность.

В работах [6]–[8] исследовались диффузионные и диффузионно-волновые уравнения, представленные в форме, получаемой после интегрирования порядка α уравнения (1). В этих работах построены фундаментальные решения, изучены некоторые их свойства.

Преобразование Лапласа и преобразование Фурье были использованы в работах [9]–[14] для построения фундаментальных решений диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка с производными Капуто и Римана–Лиувилля, решения задачи Коши и краевых задач в полубесконечной области для одномерного уравнения.

Диффузионно-волновое уравнение методами группового анализа исследовалось в работах [15]–[19]. Методом разделения переменных диффузионно-волновое уравнение исследовалось в работах [20]–[25].

В работе [26] исследована задача Самарского для уравнения диффузии дробного порядка.

Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка методом редукции к уравнениям меньшего порядка и методом функции Грина решены в работах [27]–[29].

В указанных выше работах для представления фундаментального решения в многомерном случае использована H -функция Фокса. В настоящей работе фундаментальное решение уравнения (1) построено в терминах функции Райта. Это позволило несколько упростить вычислительный аппарат и получить для фундаментального решения ряд новых свойств. В частности, доказаны формулы приведения, связывающие значения фундаментального решения при различных n и α . Решен вопрос о знакоопределенности фундаментального решения, в зависимости от $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0, 2)$. Ранее положительность фундаментального решения для случая $\alpha < 1$ была показана в работе [5]. Построено общее представление решений уравнения (1) (формула Грина). Для одномерного уравнения дробной диффузии ($n = 1$, $0 < \alpha < 1$) с производной Римана–Лиувилля общее представление было построено в работе [28]. Дано решение задачи Коши для уравнения порядка $0 < \alpha < 2$. Это обобщает результаты работ [3]–[5] (касающиеся рассматриваемого уравнения). Доказаны теоремы единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова. Показано, что как и в случае уравнения теплопроводности, показатель степени в условиях единственности улучшить (увеличить) нельзя, и в этом смысле эти условия являются необходимыми. Для уравнения с регуляризованной дробной производной порядка $0 < \alpha < 1$ в работе [3] (см. также [4], [5]) была доказана теорема единственности в классе ограниченных функций, а для случая $n = 1$ – точная теорема единственности в классе функций экспоненциального роста. Показано, что при $\alpha = 1$ и $\alpha \rightarrow 2$ построенное фундаментальное решение переходит в соответствующие решения для диффузионного и волнового уравнений.

Все результаты получены для уравнения с оператором Джрбашьяна–Нерсисяна. Соответствующие результаты для уравнений с производной Римана–Лиувилля и производной Капуто получаются как частные случаи доказанных утверждений.

Далее в § 2–4 приводятся определение и некоторые свойства функции Райта $\phi(-\beta, \delta; z)$ и специальной функции $f_\beta(z; \mu, \delta)$, которая выражается с помощью функции Райта и в терминах которой представляется фундаментальное решение. В § 5 изучаются свойства фундаментального решения, после чего в § 6 доказывается теорема об общем представлении решений уравнения (1).

В § 7–9 строится решение задачи Коши для уравнения (1) и доказывается его единственность. В § 10, 11 рассматривается поведение фундаментального решения при $\alpha = 1$ и $\alpha \rightarrow 2$.

§ 2. Функция Райта

Функция Райта (см. [30], [31]) определяется степенным рядом:

$$\phi(-\beta, \delta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\delta - \beta n)}. \quad (7)$$

Приведем некоторые соотношения для функции Райта, которые будут необходимы в дальнейшем. Далее будем считать, что $\beta \in (0, 1)$.

Для любых $\nu, \delta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство [29, с. 26]

$$D_{0y}^{\nu} y^{\delta-1} \phi(-\beta, \delta; -cy^{-\beta}) = y^{\delta-\nu-1} \phi(-\beta, \delta - \nu; -cy^{-\beta}). \quad (8)$$

Имеет место соотношение [31]

$$\frac{d}{dz} \phi(-\beta, \delta; -z) = -\phi(-\beta, \delta - \beta; -z). \quad (9)$$

Известно, что (см. [32], [33])

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1} \phi(-\beta, \delta; -t) dt = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\beta\nu + \delta)}. \quad (10)$$

Если $\delta \geq 0$, то $\phi(-\beta, \delta; -z) > 0$ для любого $z > 0$ [34]. Отсюда и из соотношения (9), в частности, следует, что если $\delta \geq \beta$, то функция $\phi(-\beta, \delta; -z)$ убывает на луче $0 \leq z < \infty$.

§ 3. Неравенства для функции Райта

Приведем неравенства для функции Райта, которыми воспользуемся в дальнейшем. Доказательства приведенных утверждений имеются в [29, с. 44].

ЛЕММА 1. Если $\delta \geq 1$, то для любого положительного z справедливо неравенство

$$\phi(-\beta, \delta; -z) \leq \frac{1}{\Gamma(\delta)} \exp\left\{-z^{\frac{1}{1-\beta}} \beta^{\frac{\beta}{1-\beta}} (1-\beta)\right\}. \quad (11)$$

ЛЕММА 2. Если $\delta \geq 0$, то для любого положительного x справедливы неравенства

$$\phi(-\beta, \delta; -z) \leq P_m(z) \phi(-\beta, 1; -z) \leq P_m(z) \exp\left\{-z^{\frac{1}{1-\beta}} \beta^{\frac{\beta}{1-\beta}} (1-\beta)\right\}, \quad (12)$$

где

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^m \frac{\beta^k z^k}{\Gamma(\delta + k(1-\beta))},$$

и $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выбрано из условия $\delta + m(1-\beta) \geq 1$.

ЛЕММА 3. Если $\delta < 1$, то для любых положительных z и y , $a \in (0, z)$, $\xi \in [\beta, 1]$, $\omega \in (\frac{1}{2}, \min\{1, \frac{1}{2}\beta\})$ справедливы неравенства

$$\left| y^{\delta-1} \phi\left(-\beta, \delta; -\frac{z}{y^\beta}\right) \right| \leq \frac{1}{\xi\pi} [C_\beta(\xi, \omega)]^{\frac{\delta-1}{\xi}} \Gamma\left(\frac{1-\delta}{\xi}\right) [z^{\frac{1-\xi}{1-\beta}} y^{\frac{\xi-\beta}{1-\beta}}]^{\frac{\delta-1}{\xi}}, \quad (13)$$

$$\left| y^{\delta-1} \phi\left(-\beta, \delta; -\frac{z}{y^\beta}\right) \right| \leq \frac{1}{\beta\pi} [C_\beta(\beta, \omega)]^{\frac{\delta-1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1-\delta}{\beta}\right) (z-a)^{\frac{\delta-1}{\beta}} \phi\left(-\beta, 1; -\frac{a}{y^\beta}\right), \quad (14)$$

где

$$C_\beta(\xi, \omega) = (1-\beta) \left(\frac{-\cos(\omega\pi)}{\xi-\beta} \right)^{\frac{\xi-\beta}{1-\beta}} \left(\frac{\cos(\beta\omega\pi)}{1-\xi} \right)^{\frac{1-\xi}{1-\beta}}. \quad (15)$$

В частности, из (13) при $\xi = \beta$ и $\xi = 1$ следуют неравенства ($\delta < 1$)

$$\left| y^{\delta-1} \phi\left(-\beta, \delta; -\frac{z}{y^\beta}\right) \right| \leq \frac{1}{\beta\pi} [C_\beta(\beta, \omega)]^{\frac{\delta-1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1-\delta}{\beta}\right) z^{\frac{\delta-1}{\beta}}, \quad (16)$$

$$\left| y^{\delta-1} \phi\left(-\beta, \delta; -\frac{z}{y^\beta}\right) \right| \leq \frac{1}{\pi} [C_\beta(1, \omega)]^{\delta-1} \Gamma(1-\delta) y^{\delta-1}, \quad (17)$$

причем, как следует из (15),

$$C_\beta(\beta, \omega) = \frac{\cos(\beta\omega\pi)}{\beta\pi}, \quad C_\beta(1, \omega) = -\frac{\cos(\omega\pi)}{\pi}.$$

Отметим, что неравенство (16) было доказано в работе [35].

§ 4. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим функцию

$$f_\beta(z; \mu, \delta) = \begin{cases} \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_1^\infty \phi(-\beta, \delta; -zt) (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt, & \mu > 0, \\ \phi(-\beta, \delta; -z), & \mu = 0, \end{cases} \quad \beta \in (0, 1). \quad (18)$$

Изучим некоторые свойства функции (18).

ЛЕММА 4. Интеграл, стоящий в правой части (18), абсолютно сходится для любых $z > 0$, δ и $\mu > 0$, сходимость равномерная на множестве $\{z \geq z_0\}$ при любом $z_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из неравенств (11) и (14).

Далее, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} f_\beta(z; \mu, \delta) &= \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \left[\int_1^\infty [\phi(-\beta, \delta; -zt) - \phi(-\beta, \delta; -z)] (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt \right. \\ &\quad \left. + \phi(-\beta, \delta; -z) \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt \right]. \end{aligned}$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} & \left| \int_1^\infty [\phi(-\beta, \delta; -zt) - \phi(-\beta, \delta; -z)] (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt \right| \\ & \leq \int_{1+\varepsilon}^\infty |\phi(-\beta, \delta; -zt) - \phi(-\beta, \delta; -z)| (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt \\ & \quad + Cz \int_1^{1+\varepsilon} (t-1)(t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt, \\ & \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 s^{-\frac{1+\mu}{2}} (1-s)^{\frac{\mu}{2}-1} ds = \frac{\Gamma(\frac{1-\mu}{2})\Gamma(\frac{\mu}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad 0 < \mu < 1, \end{aligned}$$

с учетом равенства (см. [36, с. 558])

$$B(z, \zeta) = \int_0^1 \eta^{z-1} (1-\eta)^{\zeta-1} d\eta = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} \quad (19)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_1^\infty [\phi(-\beta, \delta; -zt) - \phi(-\beta, \delta; -z)] (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt &= 0, \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt &= 1. \end{aligned}$$

Это означает, что $\lim_{\mu \rightarrow 0} f_\beta(z; \mu, \delta) = \phi(-\beta, \delta; -z)$ при $z > 0$, и согласуется с определением (18).

ЛЕММА 5. При $z > 0$ справедливо неравенство

$$|f_\beta(z; \mu, \delta)| \leq C \exp\{-\sigma z^{\frac{1}{1-\beta}}\} \times \begin{cases} 1, & 0 \leq \mu < 1, \\ \ln z, & \mu = 1, \\ z^{1-\mu}, & \mu > 1, \end{cases} \quad (20)$$

где C и σ – положительные константы, зависящие только от параметров β , μ , δ . При этом константа σ может быть выбрана (за счет выбора C) сколь угодно близкой к $(1-\beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu = 0$, то лемма следует из (11) и (14). Если $0 < \mu \leq 1$, то неравенство (20) при $z \leq 1$ следует из соотношений

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_\beta(z; \mu, \delta) = \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})\Gamma(\delta)} \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt < \infty, \quad 0 < \mu < 1, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} f_\beta(z; 1, \delta) &= \int_z^\infty \frac{\phi(-\beta, \delta; -t)}{\sqrt{t^2 - z^2}} dt = -\phi(-\beta, \delta; -z) \ln z \\ &\quad + \int_z^\infty \phi(-\beta, \delta - \beta; -t) \ln(t + \sqrt{t^2 - z^2}) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Сделаем в (18) замену переменной интегрирования $s = zt$, получим

$$f_\beta(z; \mu, \delta) = \frac{2z^{1-\mu}}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_z^\infty \phi(-\beta, \delta; -s)(s^2 - z^2)^{\frac{\mu}{2}-1} ds.$$

Из соотношения

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \int_z^\infty \phi(-\beta, \delta; -s)(s^2 - z^2)^{\frac{\mu}{2}-1} ds \right| \leq \int_0^\infty |\phi(-\beta, \delta; -s)| s^{\mu-2} ds < \infty$$

следует, что при $z \leq 1$ имеет место неравенство

$$|f_\beta(z; \mu, \delta)| \leq C_0 z^{1-\mu}, \quad \mu > 1. \quad (23)$$

Далее, как следует из оценок (11) и (14), при $z \geq 1$, $t \geq 1$ справедливы неравенства

$$|\phi(-\beta, \delta; zt)| \leq C_1 \exp\{-\sigma_1(zt)^{\frac{1}{1-\beta}}\} \leq C_1 \exp\{-\sigma_1 p z^{\frac{1}{1-\beta}}\} \exp\{-\sigma_1 q t^{\frac{1}{1-\beta}}\},$$

где C_1 , σ_1 , p и q – положительные постоянные, причем $p + q = 1$. Из этих оценок получаем

$$|f_\beta(z; \mu, \delta)| \leq C_1 \exp\{-\sigma_1 p z^{\frac{1}{1-\beta}}\} \int_1^\infty \exp\{-\sigma_1 q t^{\frac{1}{1-\beta}}\} (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt. \quad (24)$$

Из (21)–(24) следует, что найдутся такие постоянные C и σ , зависящие только от p , q , β , μ и δ , что имеет место неравенство (20) для произвольного $z > 0$.

Как следует из доказательства леммы 5 и неравенства (14), константу σ в неравенстве (20) можно взять сколь угодно близкой к $(1 - \beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$.

ЛЕММА 6. Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Имеет место представление

$$\begin{aligned} f_\beta(z; 2k, \delta) = & 2 \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{k-j} (2j-2)! z^{1-2j}}{\Gamma(2\beta j - \beta + \delta)(k-j)!(j-1)!} \\ & + (-1)^k \sum_{i=0}^\infty \frac{(-z)^i \Gamma(\frac{i+1}{2})}{i! \Gamma(\delta - \beta i) \Gamma(k + \frac{i+1}{2})}. \end{aligned} \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ равенство (25) следует из (7). Пусть $k \geq 1$. Из представления (18) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)!}{2} f_\beta(z; 2k, \delta) = & \int_0^\infty \phi(-\beta, \delta; -zt)(t^2 - 1)^{k-1} dt \\ & - \int_0^1 \phi(-\beta, \delta; -zt)(t^2 - 1)^{k-1} dt = I_1 - I_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Для первого слагаемого в правой части (26) имеем

$$\begin{aligned} I_1 = & \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} C_{k-1}^{j-1} \int_0^\infty \phi(-\beta, \delta; -zt) t^{2j-2} dt \\ = & \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} C_{k-1}^{j-1} z^{1-2j} \int_0^\infty \phi(-\beta, \delta; -s) s^{2j-2} ds. \end{aligned}$$

Используя (10), получаем

$$I_1 = (k-1)! \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{k-j} (2j-2)! z^{1-2j}}{\Gamma(2\beta j - \beta + \delta)(k-j)!(j-1)!}. \quad (27)$$

Для вычисления I_2 воспользуемся (7):

$$I_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-z)^i}{i! \Gamma(\delta - \beta i)} \int_0^1 t^i (t^2 - 1)^{k-1} dt.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} 2(-1)^{k-1} \int_0^1 t^i (t^2 - 1)^{k-1} dt &= \int_0^1 s^{\frac{i-1}{2}} (1-s)^{k-1} ds = B\left(k, \frac{i+1}{2}\right) \\ &= \frac{(k-1)! \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{i+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

получаем

$$I_2 = -\frac{(-1)^k}{2} (k-1)! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-z)^i \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{i! \Gamma(\delta - \beta i) \Gamma\left(k + \frac{i+1}{2}\right)}.$$

Отсюда и из (27) следует представление (25).

ЛЕММА 7. Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для малых положительных z имеет место асимптотическое представление

$$f_{\beta}(z; 2k+1, \delta) = 2 \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{k-j} (2j-1)! z^{-2j}}{\Gamma(2\beta j + \delta) \Gamma(j + \frac{1}{2}) (k-j)!} - \frac{2(-1)^k \ln z}{\sqrt{\pi} k! \Gamma(\delta)} + O(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = 0$. Из (22) следует

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} f_{\beta}(z; 1, \delta) &= -\frac{\ln z}{\Gamma(\delta)} + \ln z \left[\frac{1}{\Gamma(\delta)} - \phi(-\beta, \delta; -z) \right] \\ &\quad + \int_z^{\infty} \phi(-\beta, \delta - \beta; -t) \ln(t + \sqrt{t^2 - z^2}) dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\delta)} - \phi(-\beta, \delta; -z) \right| < \text{const} \cdot z, \quad (29)$$

приходим к (28) для $k = 0$.

Пусть $k \geq 1$. Из соотношений

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} t(t^2 - z^2)^{k-1} \int_t^{\infty} \frac{g(s)}{\sqrt{s^2 - t^2}} ds dt &= \int_z^{\infty} g(s) \int_z^s \frac{t(t^2 - z^2)^{k-1}}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt ds \\ &= \frac{1}{2} B\left(k, \frac{1}{2}\right) \int_z^{\infty} g(s) (s^2 - z^2)^{k-\frac{1}{2}} ds \end{aligned}$$

ввиду определения (18) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{4} z^{2k} (k-1)! f_{\beta}(z; 2k+1, \delta) &= \frac{1}{2} B\left(k, \frac{1}{2}\right) \int_z^{\infty} \phi(-\beta, \delta; -t) (t^2 - z^2)^{k-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_z^{\infty} t(t^2 - z^2)^{k-1} \int_t^{\infty} \frac{\phi(-\beta, \delta; -s)}{\sqrt{s^2 - t^2}} ds dt \\ &= \left(\int_0^{\infty} - \int_0^z \right) t(t^2 - z^2)^{k-1} \int_t^{\infty} \frac{\phi(-\beta, \delta; -s)}{\sqrt{s^2 - t^2}} ds dt = I_1 - I_2. \quad (30) \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty t(t^2 - z^2)^{k-1} \int_t^\infty \frac{\phi(-\beta, \delta; -s)}{\sqrt{s^2 - t^2}} ds dt \\ &= \int_0^\infty \phi(-\beta, \delta; -s) \int_0^s \frac{t(t^2 - z^2)^{k-1}}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{t(t^2 - z^2)^{k-1}}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt &= \sum_{j=1}^k C_{k-1}^{j-1} (-z^2)^{k-j} \int_0^s \frac{t^{2j-1}}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k C_{k-1}^{j-1} (-z^2)^{k-j} s^{2j-1} B\left(j, \frac{1}{2}\right), \\ \int_0^\infty \phi(-\beta, \delta; -s) s^{2j-1} ds &= \frac{(2j)!}{\Gamma(2\beta j + \delta)}, \end{aligned}$$

получаем

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k C_{k-1}^{j-1} (-1)^{k-j} z^{2k-2j} B\left(j, \frac{1}{2}\right) \frac{(2j)!}{\Gamma(2\beta j + \delta)}. \quad (31)$$

Для I_2 , воспользовавшись (22), получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^z t(t^2 - z^2)^{k-1} \left(\phi(-\beta, \delta; -t) \ln t \right. \\ &\quad \left. - \int_t^\infty \phi(-\beta, \delta - \beta; -s) \ln\left(s + \sqrt{s^2 - t^2}\right) ds \right) dt \\ &= -z^{2k} \ln z \int_0^1 t(t^2 - 1)^{k-1} \phi(-\beta, \delta; -zt) dt \\ &\quad - z^{2k} \int_0^1 t(t^2 - 1)^k \phi(-\beta, \delta; -zt) \ln t dt \\ &\quad + z^{2k} \int_0^1 t(t^2 - 1)^{k-1} \int_{zt}^\infty \phi(-\beta, \delta - \beta; -s) \ln\left(s + \sqrt{s^2 - z^2 t^2}\right) ds dt \\ &= z^{2k} \left[\frac{(-1)^k \ln z}{2k\Gamma(\delta)} + G(z) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^1 t(t^2 - 1)^{k-1} \left[\frac{\ln z}{\Gamma(\delta)} - \phi(-\beta, \delta; -zt) (\ln z + \ln t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{zt}^\infty \phi(-\beta, \delta - \beta; -s) \ln\left(s + \sqrt{s^2 - z^2 t^2}\right) ds \right] dt. \end{aligned}$$

Из (29) следует, что при малых z справедливо неравенство $|G(z)| < \text{const}$. Это означает, что

$$I_2 = z^{2k} \left[\frac{(-1)^k \ln z}{2k\Gamma(\delta)} + O(1) \right]. \quad (32)$$

Подставляя (31) и (32) в (30) и учитывая, что $B(k, \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}(k-1)!/\Gamma(k + \frac{1}{2})$, приходим к представлению (28).

ЛЕММА 8. Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $z > 0$ справедливы неравенства

$$|f_\beta(z; 2k, \delta)| \leq C \left[\sum_{j=1}^k \frac{z^{1-2j}}{|\Gamma(2\beta j - \beta + \delta)|} + 1 \right] \exp\{-\sigma z^{\frac{1}{1-\beta}}\}, \quad (33)$$

$$|f_\beta(z; 2k+1, \delta)| \leq C \left[\sum_{j=1}^k \frac{z^{-2j}}{|\Gamma(2\beta j + \delta)|} + \left| \frac{\ln z}{\Gamma(\delta)} \right| + 1 \right] \exp\{-\sigma z^{\frac{1}{1-\beta}}\}, \quad (34)$$

где C и σ – положительные константы, зависящие только от параметров β , μ , δ . Константа σ может быть выбрана сколь угодно близкой к $(1-\beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (33) и (34) следуют из соотношений (20), (25) и (28).

ЛЕММА 9. Пусть $s + \gamma > \max\{0, \varepsilon(\mu - 1)\}$, $\varepsilon > 0$. Справедливо соотношение

$$\int_0^\infty z^{s-1} z^\gamma f_\beta(z^\varepsilon; \mu, \delta) dz = \frac{2^{\frac{\gamma+s}{\varepsilon}-1}}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\gamma+s}{2\varepsilon})\Gamma(\frac{\gamma+s}{2\varepsilon} + \frac{1-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+s}{\varepsilon}\beta + \delta)}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, учитывая ограничения, налагаемые на параметры s , γ и ε , и неравенство (20), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z^{s-1} z^\gamma f_\beta(z^\varepsilon; \mu, \delta) dz &= \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_0^\infty z^{s+\gamma-1} \int_1^\infty \phi(-\beta, \delta; -z^\varepsilon t) (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt dz \\ &= \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_0^\infty z^{s+\gamma-\mu\varepsilon+\varepsilon-1} \int_{z^\varepsilon}^\infty \phi(-\beta, \delta; -\xi) (\xi^2 - z^{2\varepsilon})^{\frac{\mu}{2}-1} d\xi dz \\ &= \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_0^\infty \phi(-\beta, \delta; -\xi) \int_0^{\xi^{\frac{1}{\varepsilon}}} z^{s+\gamma-\mu\varepsilon+\varepsilon-1} (\xi^2 - z^{2\varepsilon})^{\frac{\mu}{2}-1} dz d\xi \\ &= \frac{1}{\varepsilon\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_0^\infty \phi(-\beta, \delta; -\xi) \xi^{\frac{\gamma+s}{\varepsilon}-1} d\xi \int_0^1 y^{\frac{\gamma+s}{2\varepsilon} + \frac{1-\mu}{2}-1} (1-y)^{\frac{\mu}{2}-1} dy \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\gamma+s}{\varepsilon})\Gamma(\frac{\gamma+s}{2\varepsilon} + \frac{1-\mu}{2})}{\varepsilon\Gamma(\frac{\gamma+s}{\varepsilon}\beta + \delta)\Gamma(\frac{\gamma+s}{2\varepsilon} + \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (10) и (19). Отсюда, учитывая, что (см. [36, с. 562])

$$\Gamma\left(\frac{\gamma+s}{\varepsilon}\right) = \frac{2^{\frac{\gamma+s}{\varepsilon}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\gamma+s}{2\varepsilon}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+s}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\right),$$

приходим к равенству (35).

Соотношение (35) позволяет представить функцию $f_\beta(z; \mu, \delta)$ с помощью интегралов Меллина–Барнса [37] и выразить ее через H -функцию Фокса [38, п. 8.3]:

$$f_\beta(z; \mu, \delta) = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}} H_{12}^{20} \left[\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left| \begin{array}{c} \left(\delta + \frac{\gamma\beta}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right) \\ \left(\frac{\gamma}{2\varepsilon}, \frac{1}{2\varepsilon}\right), \left(\frac{1-\mu}{2} + \frac{\gamma}{2\varepsilon}, \frac{1}{2\varepsilon}\right) \end{array} \right. \right].$$

ЛЕММА 10. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu < n + 1$. Справедливо соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\beta}(|x|; \mu, \delta) dx = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-\mu+1}{2})}{\Gamma(n\beta + \delta)}. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вычисления (36) воспользуемся формулой

$$\int_{|x| < r} g(|x|) dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^r g(s) s^{n-1} ds. \quad (37)$$

Получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\beta}(|x|; \mu, \delta) dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} s^{n-1} f_{\beta}(s; \mu, \delta) ds.$$

Отсюда, учитывая соотношение (35), получаем равенство (36).

ЛЕММА 11. Для $z > 0$ имеют место соотношения

$$\frac{d}{dz} f_{\beta}(z; \mu, \delta) = -\frac{z}{2} f_{\beta}(z; \mu + 2, \delta - 2\beta), \quad (38)$$

$$z \frac{d}{dz} f_{\beta}(z; \mu, \delta) = (1 - \mu) f_{\beta}(z; \mu, \delta) - 2 f_{\beta}(z; \mu - 2, \delta), \quad \mu \geq 2, \quad (39)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} f_{\beta}(z; \mu, \delta) = \frac{\mu}{2} f_{\beta}(z; \mu + 2, \delta - 2\beta) + f_{\beta}(z; \mu, \delta - 2\beta), \quad (40)$$

$$D_{\eta y}^{\zeta} |y - \eta|^{\delta-1} f_{\beta}(z|y - \eta|^{-\beta}; \mu, \delta) = |y - \eta|^{\delta-\zeta-1} f_{\beta}(z|y - \eta|^{-\beta}; \mu, \delta - \zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\mu = 0$ равенство (38) следует из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} f_{\beta}(z; 2, \delta - 2\beta) &= z \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta - 2\beta; -zt) dt = \phi(-\beta, \delta - \beta; -z) \\ &= -\frac{d}{dz} \phi(-\beta, \delta; -z) = -\frac{d}{dz} f_{\beta}(z; 0, \delta). \end{aligned}$$

Для $\mu > 0$ из (9) и (18) с помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \frac{d}{dz} f_{\beta}(z; \mu, \delta) &= - \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta - \beta; -zt) t(t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt \\ &= -\frac{z}{\mu} \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta - 2\beta; -zt) (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}} dt \\ &= -\frac{z}{2\mu} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right) f_{\beta}(z; \mu + 2, \delta - 2\beta). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\Gamma(\frac{\mu}{2} + 1) = \Gamma(\frac{\mu}{2}) \frac{\mu}{2}$, получаем равенство (38).

Аналогично, если $\mu = 2$, то формула (39) следует из равенств

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} f_{\beta}(z; 2, \delta) &= 2z \frac{d}{dz} \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta; -zt) dt = 2z \frac{d}{dz} \frac{1}{z} \int_z^{\infty} \phi(-\beta, \delta; -s) ds \\ &= -\frac{2}{z} \int_z^{\infty} \phi(-\beta, \delta; -s) ds - 2\phi(-\beta, \delta; -z) = -f_{\beta}(z; 2, \delta) - 2 f_{\beta}(z; 0, \delta). \end{aligned}$$

Если $\mu > 2$, то

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \frac{d}{dz} f_{\beta}(z; \mu, \delta) &= -z \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta - \beta; -zt) t(t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt \\
 &= \int_1^{\infty} t(t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} \frac{d}{dt} \phi(-\beta, \delta; -zt) dt - \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta; -zt) \frac{d}{dt} [t(t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1}] dt \\
 &= - \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta; -zt) [(t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} + (\mu - 2)t^2(t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-2}] dt \\
 &= -(\mu - 1) \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta; -zt) (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-1} dt \\
 &\quad - (\mu - 2) \int_1^{\infty} \phi(-\beta, \delta; -zt) (t^2 - 1)^{\frac{\mu}{2}-2} dt.
 \end{aligned}$$

Это доказывает выполнение соотношения (39).

Равенство (40) доказывается последовательным применением равенств (38) и (39). Соотношение (41) следует из (8) и (18).

ЛЕММА 12. Пусть $\nu \in (0, 1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Справедливо равенство

$$A_y^{\nu, \varepsilon} y^{\delta-1} f_{\beta}(zy^{-\beta}; \mu, \delta) = y^{\nu\delta+\varepsilon-1} f_{\nu\beta}(zy^{-\nu\beta}; \mu, \nu\delta + \varepsilon), \quad (42)$$

где (см. [33], [29, с. 72])

$$(A_y^{\nu, \varepsilon} g)(y) \equiv A_y^{\nu, \varepsilon} g(y) = y^{\varepsilon-1} \int_0^{\infty} g(t) \phi(-\nu, \varepsilon; -ty^{-\nu}) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (42) следует из формулы (см. [33], а также [29, с. 84])

$$A_y^{\nu, \varepsilon} y^{\delta-1} \phi(-\beta, \delta; -cy^{-\beta}) = y^{\nu\delta+\varepsilon-1} \phi(-\nu\beta, \nu\delta + \varepsilon; -cy^{-\nu\beta})$$

и определения (18).

§ 5. Фундаментальное решение

Далее будем считать, что $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha \in (0, 2)$. Рассмотрим функцию

$$\Gamma_{\alpha, n}(x, y) = C_n y^{\beta(2-n)-1} f_{\beta}(|x|y^{-\beta}; n-1, \beta(2-n)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (43)$$

где $C_n = 2^{-n} \pi^{\frac{1-n}{2}}$.

Докажем некоторые свойства функции $\Gamma_{\alpha, n}(x, y)$.

ЛЕММА 13. Пусть $0 \leq \eta < y \leq T$, $\xi, x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Функция $\Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta)$ является решением уравнения

$$(D_{\eta y}^{\alpha} - \Delta_x) D_{\eta y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) = 0 \quad (44)$$

на множестве $\{|x - \xi| > 0, \eta < y\}$ как функция переменных x и y и решением уравнения

$$(D_{y\eta}^{\alpha} - \Delta_{\xi}) D_{y\eta}^{\zeta} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) = 0 \quad (45)$$

как функция переменных ξ и η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать справедливость (44), причем без ограничения общности можно считать, что $\eta = 0$ и $\xi = 0$. Используя соотношение

$$\Delta_x g(|x|) = g''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} g'(|x|),$$

из (38), (40) и (41) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_x D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x, y) &= C_n y^{-\beta n - \zeta - 1} f_\beta(|x| y^{-\beta}; n-1, -n\beta - \zeta) \\ &= C_n D_{0y}^{2\beta} D_{0y}^\zeta y^{2\beta - n\beta - 1} f_\beta(|x| y^{-\beta}; n-1, 2\beta - n\beta) = D_{0y}^{2\beta} D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x, y). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к (44) и (45).

ЛЕММА 14. *Имеет место равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_{0y}^{\alpha-\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y) dx = \frac{y^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (41) получаем

$$D_{0y}^{\alpha-\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y) = C_n y^{\zeta - \beta n - 1} f_\beta(|x| y^{-\beta}; n-1, \zeta - \beta n).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{y^{1-\zeta}}{C_n} \int_{\mathbb{R}^n} D_{0y}^{\alpha-\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y) dx &= y^{-\beta n} \int_{\mathbb{R}^n} f_\beta(|x| y^{-\beta}; n-1, \zeta - \beta n) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\beta(|\xi|; n-1, \zeta - \beta n) d\xi. \end{aligned}$$

С учетом (36) приходим к равенству (46).

Из (46), в частности, следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha,n}(x, y) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} D_{0y}^\alpha \Gamma_{\alpha,n}(x, y) dx = 0. \quad (47)$$

Введем следующие обозначения:

$$E(z, \sigma) = \exp\{-\sigma z^{\frac{1}{1-\beta}}\}, \quad \gamma_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \leq 3, \\ |\ln z| + 1 & \text{при } n = 4, \\ z^{4-n} & \text{при } n \geq 5. \end{cases}$$

ЛЕММА 15. *Пусть $\zeta \in \mathbb{R}$. Справедливы неравенства*

$$|D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x, y)| \leq C y^{\beta(2-n) - \zeta - 1} \gamma_p(|x| y^{-\beta}) E(|x| y^{-\beta}, \sigma), \quad (48)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x, y) \right| \leq C |x_i| y^{-\beta n - \zeta - 1} \gamma_{p+2}(|x| y^{-\beta}) E(|x| y^{-\beta}, \sigma), \quad (49)$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x, y) \right| \leq C y^{-\beta n - \zeta - 1} \gamma_q(|x| y^{-\beta}) E(|x| y^{-\beta}, \sigma), \quad (50)$$

где

$$p = \begin{cases} n & \text{при } \zeta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ n+2 & \text{при } \zeta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases} \quad q = \begin{cases} n+2 & \text{при } \zeta \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ или } n=1, \\ n+4 & \text{при } \zeta \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ и } n \geq 2 \end{cases}$$

и C и $\sigma < (1 - \beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$ – положительные константы, зависящие только от n и β . При этом константа σ может быть выбрана (за счет изменения C) отличной от $(1 - \beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$ на сколь угодно малую величину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (48)–(50). Обозначим $z = |x|y^{-\beta}$. Если $n = 2k + 1$, то из (33) следует, что

$$|D_{0y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y)| \leq C y^{\beta(2-n)-\zeta-1} \left[\sum_{j=1}^k \frac{z^{1-2j}}{|\Gamma(\beta(2j-n+1)-\zeta)|} + 1 \right] E(z, \sigma).$$

Аналогично, при $n = 2k + 2$ получаем

$$\begin{aligned} |D_{0y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y)| &\leq C y^{\beta(2-n)-\zeta-1} \left[\sum_{j=1}^k \frac{z^{-2j}}{|\Gamma(\beta(2j-n+2)-\zeta)|} \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\ln z}{\Gamma(\beta(2-n)-\zeta)} \right| + 1 \right] E(z, \sigma). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\frac{1}{\Gamma(-z)} = 0$, если $z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, из этих двух неравенств следует (48).

Далее, из (38) и (43) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{0y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y) &= -\frac{C_n}{2} x_i y^{-n\beta-\zeta-1} f_{\beta}(|x|y^{-\beta}; n+1, -\beta n - \zeta) \\ &= -\frac{x_i C_n}{2 C_{n+2}} D_{0y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha,n+2}(x, y). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом соотношения (48) получаем неравенство (49).

Аналогично, из (38), (40), (41) и (43) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} D_{0y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y) &= C_n y^{-n\beta-\zeta-1} \left(\frac{n}{2} \frac{x_i^2}{|x|^2} - \frac{1}{2} \right) f_{\beta}(|x|y^{-\beta}; n+1, -\beta n - \zeta) \\ &\quad + C_n y^{-n\beta-\zeta-1} \frac{x_i^2}{|x|^2} f_{\beta}(|x|y^{-\beta}; n-1, -\beta n - \zeta) \\ &= \frac{C_n}{C_{n+2}} \left(\frac{n}{2} \frac{x_i^2}{|x|^2} - \frac{1}{2} \right) D_{0y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha,n+2}(x, y) + \frac{x_i^2}{|x|^2} D_{0y}^{\alpha+\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя соотношение (48), получаем неравенство (50).

ЛЕММА 16. Пусть $D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $h(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, $2\beta = \alpha \in (0, 2)$ и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) \exp\{-\sigma|x|^{\frac{1}{1-\beta}}\} = 0, \quad \sigma < (1 - \beta) \left(\frac{\beta}{T} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \quad (51)$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_{0y}^{\mu} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\mu} D_{0y}^{\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\mu+\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi \in C(D) \quad \text{при } \zeta < \alpha, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi \in C(D), \quad i = \overline{1, n}, \quad (53)$$

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) \Delta_x D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi - \frac{h(x) y^{-\zeta-1}}{\Gamma(-\zeta)}. \quad (54)$$

В случае если $\zeta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \geq 2$, то для выполнения (53) и (54) дополнительно требуем, чтобы функция $h(x)$ удовлетворяла условию Гёльдера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (52). Из неравенства (48) с учетом условия (51) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y)| d\xi \leq \text{const} \cdot y^{\alpha-\zeta-1}.$$

Теперь, учитывая, что $D_{0y}^\mu D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) = D_{0y}^{\mu+\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y)$, при $|x - \xi| > 0$ получаем

$$|D_{0y}^\mu D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y)| \leq \text{const} \cdot y^{\beta(2-n)-\mu-\zeta-1} \gamma_{n+2}(|x - \xi| y^{-\beta}) E(|x - \xi| y^{-\beta}, \sigma).$$

Отсюда следуют возможность внесения оператора D_{0y}^μ под знак интеграла и справедливость соотношения (52).

Докажем (53) и (54). Введем следующие обозначения:

$$H_i(x, y) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi, \quad \Gamma_i(x - \xi, y) = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y).$$

Из неравенства (49) следует, что

$$H_i(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) \Gamma_i(x - \xi, y) d\xi.$$

Пусть

$$r_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \varepsilon, \\ 6 \int_1^{\frac{t}{\varepsilon}} (2-s)(s-1) ds & \text{при } \varepsilon < t < 2\varepsilon, \\ 1 & \text{при } t > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что $r_\varepsilon(t) \in C^1(\mathbb{R})$ и $r'_\varepsilon(t) = 0$ при $t \notin (\varepsilon, 2\varepsilon)$; $|r_\varepsilon(t)| \leq 1$, $|r'_\varepsilon(t)| \leq \frac{3}{2\varepsilon}$. Обозначим

$$H_i^\varepsilon(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) r_\varepsilon(|x - \xi|) \Gamma_i(x - \xi, y) d\xi.$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} H_i^\varepsilon(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] \frac{x_i - \xi_i}{|x - \xi|} r'_\varepsilon(|x - \xi|) \Gamma_i(x - \xi, y) d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] r_\varepsilon(|x - \xi|) \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_i(x - \xi, y) d\xi \\ &\quad + h(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} [r_\varepsilon(|x - \xi|) \Gamma_i(x - \xi, y)] d\xi \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (37), (49) и свойства функции $r_\varepsilon(t)$ при фиксированном $y > 0$, получаем

$$|I_1| \leq \frac{\text{const}}{\varepsilon} \int_{\varepsilon < |\xi| < 2\varepsilon} |\xi|^{1-n} \omega_x(|\xi|) d\xi = \frac{\text{const}}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \omega_x(s) ds,$$

где $\omega_x(s) = \sup\{|h(\xi) - h(x)| : |x - \xi| < s\}$. Отсюда в силу непрерывности функции $h(x)$ следует, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = 0$.

Для интеграла в I_3 имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} [r_\varepsilon(|x - \xi|) \Gamma_i(x - \xi, y)] d\xi = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} r_\varepsilon(|\xi|) \Gamma_i(\xi, y) d\xi = 0.$$

Это означает, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3 = 0$.

В силу условий, наложенных на $h(x)$, и соотношения (50) найдется положительное число q такое, что для подынтегрального выражения в I_2 при фиксированном $y > 0$ имеет место неравенство

$$\left| [h(\xi) - h(x)] r_\varepsilon(|x - \xi|) \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_i(x - \xi, y) \right| \leq \text{const} \cdot |x - \xi|^{q-n}, \quad q > 0.$$

(Если $\zeta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \geq 2$, то мы пользуемся условием гёльдеровости функции $h(x)$, в противном случае достаточно условия ее непрерывности.) Отсюда следует, что интеграл I_2 является равномерно сходящимся относительно $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_i} H_i^\varepsilon(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_i(x - \xi, y) d\xi, \quad (55)$$

причем при фиксированном $y > 0$ предел является равномерным на любом ограниченном подмножестве из $\mathbb{R}^n$. Учитывая равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_i^\varepsilon(x, y) = H_i(x, y),$$

из соотношения (55) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi &= \frac{\partial}{\partial x_i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_i^\varepsilon(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_i} H_i^\varepsilon(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_i(x - \xi, y) d\xi \in C(D). \end{aligned}$$

Далее, в силу (44) имеем

$$\begin{aligned} \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] \Delta_x D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^\alpha D_{0y}^\zeta \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi - h(x) \int_{\mathbb{R}^n} D_{0y}^{\alpha+\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство (46), приходим к соотношению (54).

ЛЕММА 17. Пусть $\zeta < \alpha$, функция $h(x)$ непрерывна, если $\zeta \leq 0$, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $q > \frac{\zeta}{\beta}$, если $\zeta \in (0, \beta)$, и имеет частные

производные $\frac{\partial}{\partial x_i} h(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $q > \frac{\zeta - \beta}{\beta}$, если $\zeta \in [\beta, \alpha)$. Пусть также для некоторого положительного ρ выполнено соотношение

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) \exp\{-\rho|x|^{\frac{1}{1-\beta}}\} = 0. \quad (56)$$

Тогда существует равномерный на любом ограниченном подмножестве из $\mathbb{R}^n$ предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^\zeta \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi = 0. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если функция $h(x)$ тождественно равна нулю в некоторой области, то, как следует из оценки (48), для функции $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ соотношение (57) будет выполняться при всех x из любого замкнутого подмножества этой области. Функцию $h(x)$ можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых тождественно равна нулю внутри заданной ограниченной области, а другая принимает нулевые значения вне некоторого ограниченного множества (с сохранением требуемого условия гладкости). Поэтому без ограничения общности можем считать, что функция $h(x)$ тождественно равна нулю вне некоторого ограниченного множества.

Рассмотрим случай $\zeta < \beta$. Обозначим

$$w(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi.$$

Сделав замену переменной $\xi = x + sy^\beta$, $s = (s_i)$, и учитывая формулу (52) и представление (43), получаем

$$\begin{aligned} D_{0y}^\zeta w(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] D_{0y}^{\alpha+\zeta-1} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi \\ &= C_n y^{-\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} [h(x + sy^\beta) - h(x)] f_\beta(|s|; n-1, 1-\zeta-\beta n) ds. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $|h(x + \varepsilon) - h(x)| \leq \text{const} \cdot \omega(\varepsilon)$, где $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $\zeta \leq 0$ (в этом случае достаточно условия непрерывности $h(x)$), и $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^q$, если $\zeta \in (0, \beta)$ (т. е. $h(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера), приходим к неравенству

$$|w(x, y)| \leq \text{const} \cdot y^{-\zeta} \omega(y^{\beta q}).$$

Следовательно, справедливо равенство (57) для случая $\zeta < \beta$.

Пусть теперь $\beta \leq \zeta \leq \min\{\alpha, 1\}$. Из доказанного выше следует, что $w(x, 0) = 0$. Поэтому с учетом обобщенной формулы Ньютона–Лейбница (см. [1, с. 86])

$$D_{st}^\sigma D_{st}^\rho g(t) = D_{st}^{\sigma+\rho} g(t) - \sum_{k=1}^p \frac{|t-s|^{-\sigma-k}}{\Gamma(1-\sigma-k)} \lim_{t \rightarrow s} D_{st}^{\rho-k} g(t), \quad p-1 < \rho \leq p, \quad (58)$$

имеем соотношение

$$D_{0y}^\zeta w(x, y) = D_{0y}^{\zeta-1} \frac{\partial}{\partial y} w(x, y).$$

После замены переменной интегрирования получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} w(x, y) &= C_n \frac{\partial}{\partial y} \int_{\mathbb{R}^n} [h(x + sy^\beta) - h(x)] f_\beta(|s|; n-1, 1-\beta n) ds \\ &= C_n \beta y^{\beta-1} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} s_i h_i(x + sy^\beta) f_\beta(|s|; n-1, 1-\beta n) ds,\end{aligned}$$

где $h_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} h(x)$.

Учитывая, что $\int_{\mathbb{R}^n} s_i f_\beta(|s|; n-1, 1-\beta n) ds = 0$, приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial y} w(x, y) = C_n \beta y^{\beta-1} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} s_i [h_i(x + sy^\beta) - h_i(x)] f_\beta(|s|; n-1, 1-\beta n) ds. \quad (59)$$

Отсюда в силу условия гёльдеровости $h_i(x)$ и соотношения $\zeta \leq 1$ следует, что

$$|D_{0y}^\zeta w(x, y)| \leq \text{const} \cdot D_{0y}^{\zeta-1} \left| \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \right| \leq \text{const} \cdot D_{0y}^{\zeta-1} y^{\beta q + \beta - 1} = \text{const} \cdot y^{\beta q + \beta - \zeta}.$$

Это доказывает равенство (57) в случае $\beta \leq \zeta \leq \min\{\alpha, 1\}$.

Будем считать теперь, что $\zeta \in (1, \alpha)$, $\alpha \in (1, 2)$. Учитывая, что $w(x, 0) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial y} w(x, 0) = 0$, из формулы (58) имеем

$$D_{0y}^\zeta w(x, y) = D_{0y}^{\zeta-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y).$$

Поэтому, принимая во внимание соотношение (59), получаем

$$\begin{aligned}D_{0y}^\zeta w(x, y) &= C_n \beta D_{0y}^{\zeta-2} \frac{\partial}{\partial y} y^{\beta-1} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} s_i [h_i(x + sy^\beta) - h_i(x)] \\ &\quad \times f_\beta(|s|; n-1, 1-\beta n) ds \\ &= C_n \beta D_{0y}^{\zeta-2} \frac{\partial}{\partial y} y^{-\beta n-1} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \xi_i [h_i(x + \xi) - h_i(x)] \\ &\quad \times f_\beta(|\xi| y^{-\beta}; n-1, 1-\beta n) ds.\end{aligned}$$

Из соотношения (41) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} y^{-\beta n-1} f_\beta(|\xi| y^{-\beta}; n-1, 1-\beta n) \\ = y^{-\beta n-2} [f_\beta(|\xi| y^{-\beta}; n-1, -\beta n) - f_\beta(|\xi| y^{-\beta}; n-1, 1-\beta n)].\end{aligned}$$

Поэтому в силу соотношений $|h_i(x + \varepsilon) - h_i(x)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^q$, $q > \frac{\zeta - \beta}{\beta}$, $\zeta < \alpha$ получаем, что

$$|D_{0y}^\zeta w(x, y)| \leq \text{const} \cdot D_{0y}^{\zeta-2} y^{\beta q + \beta - 2} = \text{const} \cdot y^{\beta q + \beta - \zeta}.$$

Отсюда следует справедливость равенства (57).

Обозначим через $\zeta = \zeta(k, r) = \sum_{i=k+1}^r \gamma_i < \alpha$, $\mu_k = \sum_{i=0}^k \gamma_i$.

ЛЕММА 18. Пусть функция $h(x)$ непрерывна, если $r \leq k$, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $q > \frac{\zeta}{\beta}$, если $\zeta \in (0, \beta)$, и имеет частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} h(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $q > \frac{\zeta - \beta}{\beta}$, если $\zeta \in [\beta, \alpha)$. Пусть выполнено условие (56). Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r\}} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha - \mu_k} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi = \begin{cases} h(x) & \text{при } k = r, \\ 0 & \text{при } k \neq r. \end{cases} \quad (60)$$

При этом сходимость является равномерной на любом ограниченном подмножестве из $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$w(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha - \mu_k} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi.$$

Рассмотрим сначала случай $r = k$. Из соотношения (52) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_r\}} w(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\gamma_k - 1} D_{0y}^{\gamma_{k-1}} \dots D_{0y}^{\gamma_0} w(x, y) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha - 1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi. \end{aligned} \quad (61)$$

Из равенства

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha - 1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] D_{0y}^{\alpha - 1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi + h(x) \int_{\mathbb{R}^n} D_{0y}^{\alpha - 1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi \end{aligned}$$

в силу соотношений (47) и (57) получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha - 1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi = h(x). \quad (62)$$

Вместе с (61) это доказывает (60) в случае, когда $r = k$.

Если $r < k$, то

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_r\}} w(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha - \mu_k + \mu_r - 1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi.$$

Учитывая, что в этом случае $\mu_k - \mu_r > 0$, из равенства (62) получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_r\}} w(x, y) = 0. \quad (63)$$

Для завершения доказательства соотношения (60) необходимо показать справедливость равенства (63) в случае, когда $r > k$. Докажем это индукцией по $j = r - k$, $1 \leq j \leq m - k$. Пусть $j = 1$ (т.е. $r = k + 1$). Тогда из соотношения

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_r\}} w = D_{0y}^{\mu_r - \mu_k} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} w - \sum_{i=k}^{r-1} \frac{y^{\mu_i - \mu_r}}{\Gamma(\mu_i - \mu_r + 1)} [D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_i\}} w]_{y=0} \quad (64)$$

следует, что

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k+1}\}} w(x, y) = D_{0y}^{\gamma_{k+1}} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi - \frac{h(x) y^{-\gamma_{k+1}}}{\Gamma(1 - \gamma_{k+1})}.$$

Равенство (64) является следствием формулы (58).

Учитывая, что (см. (46))

$$\frac{y^{-\varepsilon}}{\Gamma(1 - \varepsilon)} = \int_{\mathbb{R}^n} D_{0y}^{\alpha+\varepsilon-1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi = D_{0y}^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi, \quad (65)$$

приходим к равенству

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k+1}\}} w(x, y) = D_{0y}^{\gamma_{k+1}} \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi,$$

из которого ввиду равенства (57) следует (63) в случае $j = 1$.

Пусть теперь соотношение (63) имеет место для некоторого $j > 1$. Докажем, что оно справедливо и для $j + 1$. В этом случае

$$[D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_i\}} w]_{y=0} = 0, \quad k + 1 \leq i \leq j.$$

Поэтому из соотношений (64) и (65) следует, что

$$\begin{aligned} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k+j+1}\}} w(x, y) &= D_{0y}^{\mu_{k+j+1} - \mu_k} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi \\ &\quad - \frac{h(x) y^{\mu_k - \mu_{k+j+1}}}{\Gamma(1 + \mu_k - \mu_{k+j+1})} \\ &= D_{0y}^{\mu_{k+j+1} - \mu_k} \int_{\mathbb{R}^n} [h(\xi) - h(x)] D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi. \end{aligned}$$

Вместе с равенством (57) это доказывает справедливость соотношения (63) для $r > k$, а значит, и справедливость соотношения (60).

ЛЕММА 19. Пусть $D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$, и пусть функция $f(x, y)$ такова, что $y^{1-\mu} f(x, y) \in C(\overline{D})$, $\mu > 1 - \gamma_m$, и удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x :

$$|f(x, y) - f(\xi, y)| \leq \text{const} \cdot y^{\mu-1} |x - \xi|^q, \quad q \in (0, 1], \quad (66)$$

для $\{y \in (0, T)\}$ имеет место неравенство

$$f(x, y) \leq \text{const} \cdot y^{\mu-1} \exp\{\sigma |x|^{\frac{1}{1-\beta}}\}, \quad \sigma < (1 - \beta) \left(\frac{\beta}{T}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

Тогда для функции

$$F(x, y) = \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

имеют место соотношения:

$$|D_{0y}^\delta F(x, y)| \leq \text{const} \cdot y^{\alpha-\delta+\mu-1}, \quad \delta < \alpha, \quad (67)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} F(x, y) = 0, \quad D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} F(x, y) \in C(\overline{D}), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (68)$$

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} F(x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F(x, y) \in C(D), \quad (69)$$

$$(D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} - \Delta_x) F(x, y) = f(x, y). \quad (70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства соотношения (67) заметим, что если $\delta < p \in \{1, 2\}$, то

$$\begin{aligned} D_{0y}^\delta F(x, y) &= \frac{\partial^p}{\partial y^p} D_{0y}^{\delta-p} F(x, y) \\ &= \frac{\partial^p}{\partial y^p} \frac{1}{\Gamma(p-\delta)} \int_0^y (y-t)^{p-\delta-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, t-\eta) d\xi d\eta dt \\ &= \frac{\partial^p}{\partial y^p} \frac{1}{\Gamma(p-\delta)} \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} (y-t)^{p-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, t-\eta) d\xi dt d\eta \\ &= \frac{\partial^p}{\partial y^p} \int_0^y D_{\eta y}^{\delta-p} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Из неравенства (48) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta)| d\xi &\leq \text{const} \cdot \eta^{\mu-1} (y-\eta)^{\alpha-1}, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi, \eta) D_{\eta y}^{\delta-p} \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta)| d\xi &\leq \text{const} \cdot \eta^{\mu-1} (y-\eta)^{\alpha-\delta+p-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} D_{0y}^\delta F(x, y) &= \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) D_{\eta y}^\delta \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \\ |D_{0y}^\delta F(x, y)| &\leq \text{const} \cdot \int_0^y \eta^{\mu-1} (y-\eta)^{\alpha-\delta-1} d\eta \leq \text{const} \cdot y^{\alpha-\delta+\mu-1}. \end{aligned}$$

Неравенство (67) доказано. Соотношение (68) следует из (67) и (64) ввиду того, что $\mu > 1 - \gamma_m$.

Далее, из соотношений (64) и (68) следует, что

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} F(x, y) = D_{0y}^\alpha F(x, y). \quad (71)$$

Учитывая это равенство, так же, как и выше, получаем

$$\begin{aligned} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} F(x, y) &= D_{0y}^\alpha F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) D_{\eta y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] D_{\eta y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y f(x, \eta) \int_{\mathbb{R}^n} D_{\eta y}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Из неравенств (48) и (66) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |[f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] D_{\eta y}^{\alpha} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta)| d\xi \leq \text{const} \cdot \eta^{\mu-1} (y - \eta)^{q\beta-1}.$$

В силу соотношений (47) и (62) имеем

$$D_{0y}^{\alpha} F(x, y) = \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] D_{\eta y}^{\alpha} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta + f(x, y), \quad (72)$$

причем правая часть (72) определяет непрерывную в области D функцию.

Рассмотрим функцию

$$F_{\varepsilon}(x, y) = \int_0^{y-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta.$$

С учетом (50) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F_{\varepsilon}(x, y) &= \int_0^{y-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_0^{y-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ &\quad + \int_0^{y-\varepsilon} f(x, \eta) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

В силу неравенств (48) и (66) получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) \right| d\xi \leq \text{const} \cdot \eta^{\mu-1} (y - \eta)^{q\beta-1}.$$

Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F(x, y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F_{\varepsilon}(x, y) \\ &= \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ &\quad + \int_0^y f(x, \eta) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

и второе включение из (69). Учитывая соотношения (47) и равенство (44), получаем

$$\Delta_x F(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_x F_{\varepsilon}(x, y) = \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] D_{\eta y}^{\alpha} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta.$$

Сравнивая последнее соотношение с (72) и учитывая (71), приходим к равенству (70).

ЛЕММА 20. Для $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial |x|} \Gamma_{\alpha, n}(x, y) = -2\pi |x| \Gamma_{\alpha, n+2}(x, y). \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из равенства (38) следует

$$\frac{\partial}{\partial|x|} \Gamma_{\alpha,n}(x,y) = -|x|y^{-\beta n-1} \frac{C_n}{2} f_{\beta}(|x|y^{-\beta}; n+1, -\beta n) = -\frac{C_n|x|}{2C_{n+2}} \Gamma_{\alpha,n+2}(x,y).$$

Учитывая, что $\frac{C_n}{C_{n+2}} = 4\pi$, получаем соотношение (73).

Отметим, что соотношение (73) имеет место и для волнового уравнения (при $\alpha = 2$) [39, с. 732].

ЛЕММА 21. Для $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\Gamma_{\alpha,n+1}(x,y) = \mathcal{J}_{|x|} \Gamma_{\alpha,n}(x,y), \quad (74)$$

где

$$\mathcal{J}_z f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_z^{\infty} \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - z^2}}. \quad (75)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно заметим, что

$$\mathcal{J}_z f(z) = \frac{1}{\pi z} \frac{d}{dz} \int_z^{\infty} f'(t) \sqrt{t^2 - z^2} dt = -\frac{1}{\pi z} \frac{d}{dz} \int_z^{\infty} \frac{t f(t) dt}{\sqrt{t^2 - z^2}}, \quad (76)$$

и, принимая во внимание соотношения (75) и (76), получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_z)^2 f(z) &= \frac{1}{\pi^2 z} \frac{d}{dz} \int_z^{\infty} \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - z^2}} \int_t^{\infty} \frac{f'(s) ds}{\sqrt{s^2 - t^2}} \\ &= \frac{1}{\pi^2 z} \frac{d}{dz} \int_z^{\infty} f'(s) ds \int_z^s \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - z^2} \sqrt{s^2 - t^2}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_z^s \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - z^2} \sqrt{s^2 - t^2}} = \frac{1}{2} \int_{z^2}^{s^2} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta - z^2} \sqrt{s^2 - \eta}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta^{-\frac{1}{2}} (1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta = \frac{\pi}{2}, \quad (77)$$

получаем

$$(\mathcal{J}_z)^2 f(z) = -\frac{1}{2\pi z} f'(z). \quad (78)$$

Равенство (74) докажем индукцией по n . Из определений (43) и (75) с учетом соотношения (9) имеем

$$\Gamma_{\alpha,2}(x,y) = \mathcal{J}_{|x|} \Gamma_{\alpha,1}(x,y).$$

Предположим, что (74) выполнено для некоторого $n > 2$, т. е.

$$\Gamma_{\alpha,n}(x,y) = \mathcal{J}_{|x|} \Gamma_{\alpha,n-1}(x,y). \quad (79)$$

Тогда из соотношений (73), (78) и (79) получаем

$$\Gamma_{\alpha,n+1}(x,y) = -\frac{1}{2\pi|x|} \frac{\partial}{\partial|x|} \Gamma_{\alpha,n-1}(x,y) = (\mathcal{J}_{|x|})^2 \Gamma_{\alpha,n-1}(x,y) = \mathcal{J}_{|x|} \Gamma_{\alpha,n}(x,y).$$

Отсюда следует справедливость формулы (74) для $n+1$ и, значит, для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 22. Для $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\Gamma_{\alpha,n}(x, y) = \mathcal{K}_{|x|} \Gamma_{\alpha,n+1}(x, y), \quad (80)$$

где

$$\mathcal{K}_z f(z) = 2 \int_z^\infty \frac{t f(t) dt}{\sqrt{t^2 - z^2}}. \quad (81)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства равенства (80) заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_z \mathcal{J}_z f(z) &= \frac{2}{\pi} \int_z^\infty \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - z^2}} \int_t^\infty \frac{f'(s) ds}{\sqrt{s^2 - t^2}} \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_z^\infty f'(s) ds \int_z^s \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - z^2} \sqrt{s^2 - t^2}}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (77), получаем

$$\mathcal{K}_z \mathcal{J}_z f(z) = f(z). \quad (82)$$

Применяя к обеим частям равенства (74) соотношение (82), приходим к (80).

ЛЕММА 23. Пусть $\nu \in (0, 1)$. Справедливо равенство

$$A_y^{\nu,0} \Gamma_{\alpha,n}(x, y) = \Gamma_{\alpha\nu,n}(x, y). \quad (83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (83) следует из равенств (42) и (43).

ЛЕММА 24. Если $\alpha \in (0, 1]$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $y > 0$ имеет место неравенство

$$\Gamma_{\alpha,n}(x, y) > 0. \quad (84)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если функция $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ положительна для некоторого $\alpha \in (0, 2)$, то из равенства (83) и того, что функция $\phi(-\beta, 0; -z)$ является положительной, следует, что функция $\Gamma_{\nu\alpha,n}(x, y)$ будет также положительной для любого $\nu \in (0, 1)$. Далее будет показано, что при $\alpha = 1$ функция $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ совпадает с фундаментальным решением теплопроводности (см. равенство (124)). Отсюда следует справедливость неравенства (84) для любого $\alpha \in (0, 1]$.

ЛЕММА 25. Если $\alpha \in (1, 2)$, то $\Gamma_{\alpha,n}(x, y) > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$, при $n \leq 3$, а при $n \geq 4$ функция $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (43) и формулы (73) следует, что ($\beta = \frac{\alpha}{2}$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha,3}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi|x|} \frac{\partial}{\partial|x|} \Gamma_{\alpha,1}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x|y} \phi(-\beta, 0; -|x|y^{-\beta}) > 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad y > 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Из соотношения (80) в силу неотрицательности ядра оператора (81) следует, что если функция $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ положительна для некоторого $n = n_0$, то она будет положительна и для всех $n \leq n_0$. Поэтому из (85) следует положительность $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ для всех $n \leq 3$.

Если же функция $\Gamma_{\alpha, n_0}(x, y)$ принимает как отрицательные, так и положительные значения, то это свойство сохранится и для всех $n \geq n_0$. В силу определения (43) и соотношения (28) получаем

$$16\pi^{\frac{3}{2}}y^{2\beta+1}\Gamma_{\alpha,4}(x, y) = f_{\beta}(|x|y^{-\beta}; 3, -2\beta) = \frac{2\ln(|x|y^{-\beta})}{\sqrt{\pi}\Gamma(-2\beta)} + O(1), \quad |x|y^{-\beta} \rightarrow 0.$$

Отсюда следует равенство

$$\lim_{|x|y^{-\beta} \rightarrow 0} \frac{y^{2\beta+1}\Gamma_{\alpha,4}(x, y)}{\ln(|x|y^{-\beta})} = \frac{1}{8\pi^2\Gamma(-2\beta)}.$$

Поскольку $\Gamma(-2\beta) > 0$ при $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ ($\alpha \in (1, 2)$), последнее предельное соотношение означает, что $\Gamma_{\alpha,4}(x, y)$ может принимать отрицательные значения. Если бы эта функция принимала лишь отрицательные значения, то функция $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ была бы отрицательной для всех $n < 4$, что противоречит (85). Отсюда следует, что $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ при $n \geq 4$ и $\alpha \in (1, 2)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Из доказанных выше свойств (в частности, соотношения (70)) следует, что функция $\Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta)$ является *фундаментальным решением* уравнения (1) при $0 < \alpha < 2$.

§ 6. Представление решения

Обозначим $D = \{(x, y) : x \in S, 0 < y < T\}$ и $D_y = \{(\xi, \eta) : \xi \in S, 0 < \eta < y\}$, где S – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей ∂S . *Регулярным решением уравнения*

$$\mathbf{L}u(x, y) \equiv D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}}u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y) \quad (86)$$

в области D назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $y^{1-\gamma_0}u(x, y) \in C(\overline{D})$, $D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_r\}}u(x, y) \in C(D \cup \{x \in S, y = 0\})$, $0 \leq r \leq m - 1$, $u_{x_i x_i}(x, y)$ и $D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}}u(x, y)$ принадлежат $C(D)$. Эта функция удовлетворяет уравнению (86) во всех точках $(x, y) \in D$.

Пусть $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\mu_k = \sum_{i=0}^k \gamma_i$. Напомним, что $\gamma_k \in (0, 1]$, $\alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1$, $\alpha \in (0, 2)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $v = v(x, y, \xi, \eta)$ непрерывна в $Q \times \overline{D}_y$, $Q \subset D$, вместе с производными v_{ξ_i} , $v_{\xi_i \xi_i}$, $i = \overline{1, n}$, $D_{y\eta}^{\{\gamma_m, \gamma_{m-1}, \dots, \gamma_k\}}v$, $\frac{\partial}{\partial \eta} D_{y\eta}^{\{\gamma_m, \gamma_{m-1}, \dots, \gamma_k\}}v$, $k = \overline{0, m}$,

$$\lim_{\eta \rightarrow y} D_{y\eta}^{\{\gamma_m, \gamma_{m-1}, \dots, \gamma_k\}}v(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad \xi \in S, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (87)$$

и в области D_y при любых фиксированных $(x, y) \in Q$ является решением уравнения

$$\mathbf{L}^*v \equiv D_{y\eta}^{\alpha}v(x, y, \xi, \eta) - \Delta_{\xi}v(x, y, \xi, \eta) = g(x, y, \xi, \eta), \quad g \in C(Q \times \overline{D}_y).$$

Тогда если функция $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (86), причем $u \in C^1(\bar{S} \times (0, T))$, $u_{x_i} \in L(\partial S \times (0, T))$, $i = \overline{1, n}$, u удовлетворяет условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad x \in S, \quad (88)$$

то для любой точки $(x, y) \in Q$ имеет место соотношение

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_S \tau_k(\xi) [D_{y\eta}^{\alpha-\mu_k} w(x, y, \xi, \eta)]_{\eta=0} d\xi + G(u; x, y) + F(u, f, g; x, y), \quad (89)$$

где $w(x, y, \xi, \eta) = v(x, y, \xi, \eta) + \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta)$,

$$G(u; x, y) = \int_0^y \int_{\partial S} \left[w(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} u(\xi, \eta) - u(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} w(x, y, \xi, \eta) \right] ds d\eta, \quad (90)$$

$$F(u, f, g; x, y) = \int_0^y \int_S [w(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) - u(\xi, \eta) g(x, y, \xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (91)$$

$\nu = \nu(\xi)$ – направление внешней нормали к ∂S в точке $\xi \in \partial S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выражение

$$\int_\delta^y \int_{S_r^\varepsilon} [w(x, y, \xi, \eta) \mathbf{L}u(\xi, \eta) - u(\xi, \eta) \mathbf{L}^* w(x, y, \xi, \eta)] d\xi d\eta,$$

где $y > \delta > 0$, $S_r^\varepsilon = S^\varepsilon \setminus B_r$, $B_r = \{\xi: |x - \xi| < r\}$, S^ε – односвязная область с гладкой границей $\partial S^\varepsilon \subset S$, причем расстояние между ∂S^ε и ∂S не превосходит ε и $\bar{B}_r \subset S^\varepsilon$.

Учитывая равенство

$$D_{st}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_p\}} g(t) = \text{sign}(t - s) D_{st}^{\gamma_p-1} \frac{\partial}{\partial t} D_{st}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1}\}} g(t), \quad p \in \mathbb{N},$$

и соотношения [1, с. 34]

$$\begin{aligned} \int_s^t g(\eta) D_{s\eta}^\zeta h(\eta) d\eta &= \int_s^t h(\eta) D_{t\eta}^\zeta g(\eta) d\eta, \quad \zeta < 0, \\ D_{s\eta}^\zeta g(\eta) &= I_{s\delta}^\zeta g(\eta) + D_{\delta\eta}^\zeta g(\eta), \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$I_{s\delta}^\zeta g(\eta) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(\delta - s)}{\Gamma(-\zeta)} \int_s^\delta g(t) |\eta - t|^{-\zeta-1} dt & \text{при } \zeta < 0, \\ 0 & \text{при } \zeta = 0, \end{cases} \quad (93)$$

для всех $\xi \in S_r^\varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} \int_\delta^y w(x, y, \xi, \eta) D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(\xi, \eta) d\eta \\ = \int_\delta^y w(x, y, \xi, \eta) [I_{0\delta}^{\gamma_m-1} + D_{\delta\eta}^{\gamma_m-1}] \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}\}} u(\xi, \eta) d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\delta}^y D_{y\eta}^{\gamma_m-1} w(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}\}} u(\xi, \eta) d\eta \\
 &\quad + \int_{\delta}^y w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_m-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}\}} u(\xi, \eta) d\eta.
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям в первом слагаемом и учитывая условия (87) и неравенство (48), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
 &\int_{\delta}^y w(x, y, \xi, \eta) D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(\xi, \eta) d\eta \\
 &= \int_{\delta}^y D_{y\eta}^{\gamma_m} w(x, y, \xi, \eta) D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}\}} u(\xi, \eta) d\eta + R_m,
 \end{aligned} \tag{94}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_m &= \int_{\delta}^y w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_m-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}\}} u(\xi, \eta) d\eta \\
 &\quad - [D_{y\eta}^{\gamma_m-1} w(x, y, \xi, \eta) D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}\}} u(\xi, \eta)]_{\eta=\delta},
 \end{aligned}$$

причем в силу (93) если $\gamma_m = 1$, то первое слагаемое в последнем соотношении равно нулю.

Далее, повторяя эти преобразования m раз (сначала для первого слагаемого правой части (94) и т. д.), пользуясь формулами (92) и (93) и применяя интегрирование по частям, приходим к равенству

$$\begin{aligned}
 &\int_{\delta}^y w(x, y, \xi, \eta) D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(\xi, \eta) d\eta \\
 &= \int_{\delta}^y D_{y\eta}^{\gamma_1} \dots D_{y\eta}^{\gamma_m} w(x, y, \xi, \eta) D_{0\eta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta) d\eta + \sum_{k=1}^m R_k \\
 &= \int_{\delta}^y D_{y\eta}^{\gamma_0-1} D_{y\eta}^{\gamma_1} \dots D_{y\eta}^{\gamma_m} w(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta \\
 &\quad + \int_{\delta}^y D_{y\eta}^{\gamma_1} \dots D_{y\eta}^{\gamma_m} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta) d\eta + \sum_{k=1}^m R_k.
 \end{aligned}$$

В силу соотношений (87) имеют место равенства

$$\begin{aligned}
 D_{y\eta}^{\{\gamma_m, \dots, \gamma_k\}} w(x, y, \xi, \eta) &= D_{y\eta}^{\gamma_k-1} D_{y\eta}^{\gamma_{k+1}} \dots D_{y\eta}^{\gamma_m} w(x, y, \xi, \eta) \\
 &= D_{y\eta}^{\gamma_k + \dots + \gamma_m - 1} w(x, y, \xi, \eta) = D_{y\eta}^{\alpha - \mu_{k-1}} w(x, y, \xi, \eta),
 \end{aligned}$$

$$D_{y\eta}^{\gamma_k} \dots D_{y\eta}^{\gamma_m} w(x, y, \xi, \eta) = -\frac{\partial}{\partial \eta} D_{y\eta}^{\{\gamma_m, \dots, \gamma_k\}} w(x, y, \xi, \eta) = D_{y\eta}^{\alpha - \mu_{k-1} + 1} w(x, y, \xi, \eta).$$

Поэтому

$$\int_{\delta}^y w(x, y, \xi, \eta) D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(\xi, \eta) d\eta = \int_{\delta}^y D_{y\eta}^{\alpha} w(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta + \sum_{k=0}^m R_k, \tag{95}$$

где

$$\begin{aligned} R_0 &= \int_{\delta}^y D_{y\eta}^{\alpha-\mu_0+1} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta) d\eta, \\ R_k &= \int_{\delta}^y D_{y\eta}^{\alpha-\mu_k+1} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_k-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, \eta) d\eta \\ &\quad - D_{y\eta}^{\alpha-\mu_{k-1}} w(x, y, \xi, \eta) D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, \eta) \Big|_{\eta=\delta}, \quad 1 \leq k \leq m, \end{aligned}$$

причем если $\gamma_k = 0$, то первые слагаемые в определениях R_k , $0 \leq k \leq m$, равны нулю.

Далее, из соотношения

$$w \Delta_{\xi} u - u \Delta_{\xi} w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[w \frac{\partial}{\partial \xi_i} u - u \frac{\partial}{\partial \xi_i} w \right]$$

и формулы Грина получаем

$$\int_{S_r^{\varepsilon}} [w \Delta_{\xi} u - u \Delta_{\xi} w] d\xi = \sum_{i=1}^n \int_{\partial S^{\varepsilon}} [w u_{\xi_i} - w_{\xi_i} u] \nu_i ds - \int_{\partial B_r} [w u_{\xi_i} - u w_{\xi_i}] \nu'_i ds, \quad (96)$$

где ν_i и ν'_i — направляющие косинусы вектора внешней нормали ν к ∂S^{ε} и ∂B_r соответственно.

Таким образом, из (95) и (96) приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^y \int_{S_r^{\varepsilon}} [w \mathbf{L} u - u \mathbf{L}^* w] d\xi d\eta &= \int_{\delta}^y \int_{S_r^{\varepsilon}} [w f - u g] d\xi d\eta = \int_{S_r^{\varepsilon}} \sum_{k=0}^m R_k d\xi \\ &\quad - \int_{\delta}^y \int_{\partial S^{\varepsilon}} \left[w \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] ds d\eta + \int_{\delta}^y \int_{\partial B_r} \left[w \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] ds d\eta. \quad (97) \end{aligned}$$

Оценим R_k . В силу (48), учитывая условия, налагаемые на функцию $v(x, y, \xi, \eta)$, имеем

$$|D_{y\eta}^{\alpha-\zeta} w(x, y, \xi, \eta)| \leq \text{const} \cdot [1 + (y - \eta)^{\zeta-\beta n-1} H_{n+2}(|x - \xi|(y - \eta)^{-\beta})], \quad (98)$$

где

$$H_n(z) = \exp\{-\sigma z^{\frac{1}{1-\beta}}\} \times \begin{cases} 1 & \text{при } n \leq 3, \\ |\ln z| + 1 & \text{при } n = 4, \\ z^{2-n} & \text{при } n \geq 5, \end{cases}$$

и (при $\gamma_k < 1$, $p = 0, 1, \dots$)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right)^p I_{0\delta}^{\gamma_k-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, \eta) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma_k - p)} \int_0^{\delta} (\eta - t)^{-\gamma_k - p} \frac{\partial}{\partial t} D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, t) dt \\ &= \frac{(\eta - t)^{-\gamma_k - p}}{\Gamma(1 - \gamma_k - p)} D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, t) \Big|_{t=0}^{\delta} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-\gamma_k - p)} \int_0^{\delta} (\eta - t)^{-\gamma_k - p - 1} D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, t) dt. \end{aligned}$$

Учитывая непрерывность функции $u^*(\xi, t) = D_{0t}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, t)$, $(\xi, t) \in S \times [0, y]$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right)^p I_{0\delta}^{\gamma_k-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, \eta) \right| \leq \frac{|u^*(\xi, \delta)|}{\Gamma(1 - \gamma_k - p)} [(\eta - \delta)^{-\gamma_k - p} - \eta^{-\gamma_k - p}] \\ & \quad + \frac{|u^*(\xi, \delta) - u^*(\xi, 0)|}{\Gamma(1 - \gamma_k - p)} \eta^{-\gamma_k - p} \\ & \quad + \sup_{t \in [0, \delta]} |u^*(\xi, t)| \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma_k - p)} [(\eta - \delta)^{-\gamma_k - p} - \eta^{-\gamma_k - p}] \\ & \leq \text{const} \cdot [(\eta - \delta)^{-\gamma_k - p} - \eta^{-\gamma_k - p} + \omega(\delta) \eta^{-\gamma_k - p}], \end{aligned} \quad (99)$$

где $\omega(\delta) = \sup_{\xi \in S} |u^*(\xi, \delta) - u^*(\xi, 0)|$. Из неравенства (98) и последнего неравенства для первого слагаемого R_k получаем

$$\begin{aligned} R_k^* &= \left| \left(\int_{\delta}^a + \int_a^y \right) D_{y\eta}^{\alpha - \mu_k + 1} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_k-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, \eta) d\eta \right| \\ &\leq \int_{\delta}^a \left| D_{y\eta}^{\alpha - \mu_k + 1} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_k-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, \eta) \right| d\eta \\ &\quad + \left| D_{y\eta}^{\alpha - \mu_k} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_k-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, \eta) \right|_{\eta=a} \\ &\quad + \int_a^y \left| D_{y\eta}^{\alpha - \mu_k} w(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} I_{0\delta}^{\gamma_k-1} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{0\eta}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}\}} u(\xi, \eta) \right| d\eta \\ &\leq \text{const} \cdot \left(\int_{\delta}^a W(\eta; 1, 0) d\eta + W(a; 0, 0) + \int_a^y W(\eta; 0, 1) d\eta \right), \end{aligned}$$

где $a \in (\delta, y)$,

$$\begin{aligned} W(\eta; p, q) &= [1 + (y - \eta)^{\mu_k - \beta n - 1 - p} H_{n+2}(|x - \xi|(y - \eta)^{-\beta})] \\ &\quad \times [(\eta - \delta)^{-\gamma_k - q} - \eta^{-\gamma_k - q} + \omega(\delta) \eta^{-\gamma_k - q}]. \end{aligned}$$

Отсюда следует (при $\gamma_k < 1$; если $\gamma_k = 1$, то $R_k^* = 0$), что

$$\begin{aligned} \int_{S_r^{\varepsilon}} R_k^* d\xi &\leq \text{const} \cdot \left[(a - \delta)^{-\gamma_k} - a^{-\gamma_k} + \delta^{1 - \gamma_0} + \omega(\delta) \right. \\ &\quad \left. + \int_a^y (y - \eta)^{\mu_k - 1} ((\eta - \delta)^{-\gamma_k - 1} - \eta^{-\gamma_k - 1}) d\eta \right]. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r^{\varepsilon}} R_k^* d\xi = 0, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (100)$$

Заметим, что если $\mu_k \leq 1$, то для получения оценки для R_k^* можно непосредственно воспользоваться неравенствами (98) и (99), не разбивая промежуток интегрирования.

Аналогично, для оценки R_0 имеем ($\gamma_0 < 1$)

$$\begin{aligned} |I_{0\delta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta)| &\leq \frac{K(\xi)}{\Gamma(1-\gamma_0)} \int_0^\delta \frac{t^{\gamma_0-1}}{(\eta-t)^{\gamma_0}} dt \leq \text{const} \cdot \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{\gamma_0}, \\ \left| \frac{\partial}{\partial \eta} I_{0\delta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta) \right| &\leq \frac{K(\xi)}{|\Gamma(-\gamma_0)|} \int_0^\delta \frac{t^{\gamma_0-1}}{(\eta-t)^{\gamma_0+1}} dt \\ &= \frac{\delta^{\gamma_0} K(\xi)}{\eta^{\gamma_0+1} \Gamma(1-\gamma_0)} F\left(\gamma_0+1, \gamma_0, \gamma_0+1; \frac{\delta}{\eta}\right) \leq \text{const} \cdot \frac{\delta^{\gamma_0}}{\eta(\eta-\delta)^{\gamma_0}}, \end{aligned}$$

где $K(\xi) = \sup_{t \in [0, \delta]} |t^{1-\gamma_0} u(\xi, t)|$, $F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Из последних неравенств следует

$$\begin{aligned} |R_0| &= \left| \left(\int_\delta^a + \int_a^y \right) D_{y\eta}^{\alpha-\mu_0+1} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta) d\eta \right| \\ &\leq \int_\delta^a |D_{y\eta}^{\alpha-\mu_0+1} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta)| d\eta \\ &\quad + |D_{y\eta}^{\alpha-\mu_0} w(x, y, \xi, \eta) I_{0\delta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta)|_{\eta=a} \\ &\quad + \int_a^y \left| D_{y\eta}^{\alpha-\mu_0} w(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} I_{0\delta}^{\gamma_0-1} u(\xi, \eta) \right| d\eta \\ &\leq \text{const} \cdot \delta^{\gamma_0} \left[1 + \int_a^y (y-\eta)^{\mu_0-\beta n-1} H_{n+2} \left(\frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^{-\beta}} \right) d\eta \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int_{S_r^\varepsilon} R_0^* d\xi \leq \text{const} \cdot \delta^{\gamma_0}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r^\varepsilon} R_0^* d\xi = 0.$$

Из последнего соотношения и равенства (100) согласно условию (88) имеем равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r^\varepsilon} \sum_{k=0}^m R_k d\xi = - \sum_{k=0}^{m-1} \int_S \tau_k(\xi) [D_{y\eta}^{\alpha-\mu_k} w(x, y, \xi, \eta)]_{\eta=0} d\xi. \quad (101)$$

Далее, учитывая условия, наложенные на функцию v , для третьего слагаемого правой части (97) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\delta^y \int_{\partial B_r} \left[w \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] ds d\eta \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \int_\delta^y \int_{\partial B_r} \left[\Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha, n}(x-\xi, y-\eta) \right] ds d\eta. \end{aligned}$$

Если $n = 1$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_\delta^y \int_{\partial B_r} \Gamma_{\alpha, 1}(x-\xi, y-\eta) \frac{\partial u}{\partial \nu} ds d\eta \right| \\ \leq \int_\delta^y \Gamma_{\alpha, 1}(r, y-\eta) \left| \frac{\partial}{\partial \nu} u(x+r, \eta) - \frac{\partial}{\partial \nu} u(x-r, \eta) \right| d\eta. \quad (102) \end{aligned}$$

Для $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta}^y \int_{\partial B_r} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) \frac{\partial u}{\partial \nu} ds d\eta \right| &\leq \text{const} \cdot r^{n-1} \int_0^y t^{\beta(2-n)-1} H_n(rt^{-\beta}) dt \\ &= \text{const} \cdot r \int_0^{yr^{-\frac{1}{\beta}}} t^{\beta(2-n)-1} H_n(t^{-\beta}) dt \leq \text{const} \cdot r \times \begin{cases} 1 + |\ln r| & \text{при } n = 2, \\ 1 & \text{при } n > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (102) следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\delta}^y \int_{\partial B_r} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\eta = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (103)$$

Вычислим предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\delta}^y \int_{\partial B_r} u \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) ds d\eta.$$

В силу (49) для любого $y^* < y$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\delta}^{y^*} \int_{\partial B_r} u \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) ds d\eta = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\delta}^y \int_{\partial B_r} u \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) ds d\eta \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{y^*}^y \int_{\partial B_r} u \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) ds d\eta \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{y^*}^y \int_{\partial B_r} [u(\xi, \eta) - u(x, y)] \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) ds d\eta \\ &\quad + u(x, y) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{y^*}^y \int_{\partial B_r} \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) ds d\eta \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} I_1 + u(x, y) \lim_{r \rightarrow 0} I_2. \end{aligned} \quad (104)$$

Из неравенства (49) получаем, что

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \text{const} \cdot u^*(r) r^n \int_{y^*}^y H_n\left(\frac{r}{(y - \eta)^{\beta}}\right) \frac{d\eta}{(y - \eta)^{\beta n + 1}} \\ &= \text{const} \cdot u^*(r) \int_0^{(y - y^*)r^{-\frac{1}{\beta}}} H_n\left(\frac{1}{t^{\beta}}\right) \frac{dt}{t^{\beta n + 1}}, \end{aligned}$$

где $u^*(r) = \max_{\xi \in \partial B_r, \eta \in [y^*, y]} |u(\xi, \eta) - u(x, y)|$. Учитывая, что значение $y^* \in (\delta, y)$ выбрано произвольно и функция $u(\xi, \eta)$ непрерывна в окрестности точки (x, y) , из последнего соотношения имеем

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_1 = 0. \quad (105)$$

Далее, используя формулу Грина и равенство (45), для любого $R > r$ получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{y^*}^y \int_{B_R \setminus B_r} \Delta_\xi \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta + \int_{y^*}^y \int_{\partial B_R} \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) ds d\eta \\ &= - \int_{B_R \setminus B_r} [D_{y\eta}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta)]_{\eta=y^*} d\xi \\ &\quad + \int_{\partial B_R} \frac{\partial}{\partial \nu} [D_{y\eta}^{-1} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta)]_{\eta=y^*} ds. \end{aligned}$$

Приняв R равным $\frac{1}{r}$ и учитывая (46) и (49), приходим к соотношению

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_2 = - \int_{\mathbb{R}^n} [D_{y\eta}^{\alpha-1} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta)]_{\eta=y^*} d\xi = -1,$$

которое вместе с равенствами (104) и (105) доказывает, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_\delta^y \int_{\partial B_r} u \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) ds d\eta = -u(x, y).$$

Учитывая это равенство вместе с (101) и (103) и устремляя в равенстве (97) сначала r , а затем δ и ε к нулю, получаем (89). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из (89), два последних слагаемых решения, одно из которых отвечает значениям решения на боковой границе, а второе – правой части уравнения, не зависят от распределения чисел $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, а зависят только от α .

Из равенств (5), (6) и представления (89) следуют аналогичные представления для уравнения с производной Римана–Лиувилля:

$$\begin{aligned} D_{0y}^\alpha u(x, y) - \Delta_x u(x, y) &= f(x, y), \\ u(x, y) &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \int_S \tau_k(\xi) \frac{\partial^{m-k-1}}{\partial \eta^{m-k-1}} w(x, y, \xi, 0) d\xi \\ &\quad + G(u; x, y) + F(u, f, g; x, y), \end{aligned} \tag{106}$$

где

$$\tau_k(x) = \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-m+k} u(x, y),$$

и с производной Капуто:

$$\begin{aligned} \partial_{0y}^\alpha u(x, y) - \Delta_x u(x, y) &= f(x, y), \\ u(x, y) &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_S \tau_k(\xi) [D_{y\eta}^{\alpha-k-1} w(x, y, \xi, \eta)]_{\eta=0} d\xi + G(u; x, y) + F(u, f, g; x, y), \end{aligned} \tag{107}$$

где

$$\tau_k(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x, y).$$

Выражения $G(u; x, y)$ и $F(u, f, g; x, y)$ заданы равенствами (90) и (91) соответственно. Эти представления, очевидно, отличаются лишь слагаемыми, соответствующими начальным условиям.

§ 7. Задача Коши

Пусть $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < T\}$. Как и выше, считаем, что $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\mu_k = \sum_{i=0}^k \gamma_i$, $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \in (0, 1]$, $\alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1$, $\alpha \in (0, 2)$. Сформулируем задачу Коши для уравнения (86): *найти регулярное решение $u = u(x, y)$ уравнения (86), $\alpha \in (0, 2)$, в области D , удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (108)$$

Далее через $C^{k, \varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство функций, принадлежащих $C^k(\mathbb{R}^n)$, частные производные порядка k которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем ε .

Для $k \leq m-2$ обозначим

$$\zeta_k = \sum_{i=k+1}^{m-1} \gamma_i.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\gamma_m + \gamma_0 > 1$ и $\tau_{m-1}(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, если $\gamma_m = 1$ или $n = 1$, и $\tau_{m-1}(x) \in C^{0, \varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, если $\gamma_m \neq 1$ и $n \geq 2$. Пусть $\tau_k(x) \in C^{0, \varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > \frac{\zeta_k}{\beta}$, если $\zeta_k < \beta$, и $\tau_k(x) \in C^{1, \varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > \frac{\zeta_k - \beta}{\beta}$, если $\beta \leq \zeta_k < \alpha$, $0 \leq k \leq m-2$, и пусть $y^{1-\mu} f(x, y) \in C(\overline{D})$, $\mu > 1 - \gamma_m$, функция $y^{1-\mu} f(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x и выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \tau_k(x) \exp\{-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\} &= 0, \quad 0 \leq k \leq m-1, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\mu} f(x, y) \exp\{-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\} &= 0, \end{aligned} \quad (109)$$

где $\rho < (1 - \beta)(\frac{\beta}{T})^{\frac{\beta}{1-\beta}}$. Тогда функция $u = u(x, y)$, определенная равенством

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi) D_{0y}^{\alpha - \mu_k} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi \\ &\quad + \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

является регулярным решением уравнения (86) в области D и удовлетворяет краевым условиям (108).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} u^* &= \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \\ u_k &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi) D_{0y}^{\alpha - \mu_k} \Gamma_{\alpha, n}(x - \xi, y) d\xi, \quad 0 \leq k \leq m-1. \end{aligned}$$

Из соотношений (68)–(70) следует, что u^* является регулярным решением уравнения (86), причем

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u^* = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (110)$$

Соотношения (53) и (54) доказывают, что $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_k \in C(D)$,

$$\Delta_x u_k = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi) \Delta_x D_{0y}^{\alpha-\mu_k} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi - \frac{y^{\mu_k-\alpha-1}}{\Gamma(\mu_k-\alpha)} [D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u_k]_{y=0}. \quad (111)$$

Из равенства (64) получаем

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u_k = D_{0y}^{\alpha} u_k - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{y^{\mu_i-\alpha-1}}{\Gamma(\mu_i-\alpha)} [D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_i\}} u_k]_{y=0}.$$

Отсюда, учитывая (52) и (60), приходим к соотношению

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u_k = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi) D_{0y}^{\alpha} D_{0y}^{\alpha-\mu_k} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi - \frac{y^{\mu_k-\alpha-1}}{\Gamma(\mu_k-\alpha)} [D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u_k]_{y=0}.$$

Вместе с равенствами (44) и (111) это доказывает, что $\sum u_k$ является регулярным решением уравнения (86).

Выполнение начальных условий следует из (60) и (110). Заметим, что условие $\zeta_k < \alpha$, требуемое для выполнения (60), обеспечивается условием $\gamma_0 + \gamma_m > 1$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следуют соответствующие утверждения для уравнения с производной Римана–Лиувилля и производными Капуто.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \{1, 2\}$, $\tau_k(x) \in C^{m-k-1}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq k \leq m-1$, и при $m=2$ частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} \tau_0(x)$, $1 \leq i \leq n$, удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $q > \frac{1-\beta}{\beta}$. Пусть $y^{1-\mu} f(x, y) \in C(\overline{D})$, $\mu > 0$, функция $y^{1-\mu} f(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x и выполняются соотношения (109). Тогда функция $u = u(x, y)$, определенная равенством

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi) \frac{\partial^{m-k-1}}{\partial y^{m-k-1}} \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y) d\xi \\ & + \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha,n}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

является регулярным решением уравнения (106) в области D и удовлетворяет краевым условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-m+k} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \{1, 2\}$, $\tau_k(x) \in C^{m-k-1}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq k \leq m-1$, функция $\tau_{m-1}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в случае $n > 1$ и в случае $m=2$ частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} \tau_0(x)$, $1 \leq i \leq n$, удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $q > \frac{1-\beta}{\beta}$. Пусть $y^{1-\mu} f(x, y) \in C(\overline{D})$, $\mu > m-\alpha$, функция $y^{1-\mu} f(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x и выполняются соотношения (109). Тогда функция $u = u(x, y)$, определенная

равенством

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi) D_{0y}^{\alpha-k-1} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y) d\xi + \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta,$$

является регулярным решением уравнения (107) в области D и удовлетворяет краевым условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как следует из теоремы 2, условия, налагаемые на гладкость начальных данных, зависят от распределения чисел γ_k , определяющих оператор $D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}}$. Этим объясняется различие условий, налагаемых на гладкость данных Коши в случае уравнения с производной Римана-Лиувилля и в случае уравнения с производной Капуто.

§ 8. Единственность решения задачи Коши. Аналог условия А. Н. Тихонова

ТЕОРЕМА 5. Существует не более одного регулярного решения задачи (86), (108) в классе функций, удовлетворяющих для некоторой положительной константы σ условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\gamma_0} u(x, y) \exp\{-\sigma|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\} = 0. \quad (112)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_r(\xi)$ – функция, принадлежащая $C^2(\mathbb{R}^n)$,

$$h_r(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\xi| \leq r, \\ 0 & \text{при } |\xi| \geq r+1, \end{cases} \quad (113)$$

и $0 \leq h_r(\xi) \leq 1$, $\frac{\partial^k}{\partial \xi_i^k} |h_r(\xi)| \leq C$, $k = \overline{1, 2}$, где C – константа, не зависящая от величин ξ и r .

Рассмотрим функцию

$$v(x, y, \xi, \eta) = h_r(\xi) \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) - \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta),$$

которая, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 1, причем

$$\begin{aligned} & (D_{y\eta}^{\{\gamma_m, \gamma_{m-1}, \dots, \gamma_0\}} - \Delta_\xi) v(x, y, \xi, \eta) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi_i} h_r(\xi) - \Gamma_{\alpha,n}(x - \xi, y - \eta) \Delta_\xi h_r(\xi) \\ &= g(x, y, \xi, \eta). \end{aligned}$$

Поэтому если $u(x, y)$ – решение однородной задачи Коши (86), (108) ($f(x, y) \equiv 0$, $\tau_k(x) \equiv 0$), то из (113) и теоремы 1 следует, что при $|x| < r$

$$u(x, y) = - \int_0^y \int_{r < |\xi| < r+1} u(\xi, \eta) g(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Из (12) получаем, что

$$|u(x, y)| \leq C \int_0^y \int_{r < |\xi| < r+1} |u(\xi, \eta)| \exp \left\{ -\sigma_0 \frac{|x - \xi|^{\frac{1}{1-\beta}}}{(y - \eta)^{\frac{\beta}{1-\beta}}} \right\} d\eta d\xi, \quad (114)$$

где $\sigma_0 < (1 - \beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$. Из (112) следует, что при $y < y_0 < \beta \left(\frac{1-\beta}{\sigma} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}$ интеграл в правой части (114) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Это означает, что $u(x, y) \equiv 0$ для $x \in \mathbb{R}$ и $y < y_0$.

Докажем, что $u(x, y) = 0$ для любого $y > 0$. Предположим, что $u(x, y)$ не обращается тождественно в нуль при $y > 0$. Обозначим $y_1 = \inf\{y: u(x, y) \neq 0\}$. Из доказанного следует, что $y_1 \geq y_0$. Рассмотрим функцию $v(x, y) = u(x, y_1 + y)$. В силу сделанного предположения и определения y_1 для любого положительного ε найдется значение x такое, что

$$v(x, \varepsilon) \neq 0. \quad (115)$$

Поскольку $u(x, y) \equiv 0$ при $0 < y < y_1$, то

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(x, y) = D_{y_1 y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(x, y) = D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} v(x, y).$$

Отсюда следует, что функция $v(x, y)$ является решением уравнения (1), удовлетворяет начальным условиям $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} v(x, y) = 0$, $0 \leq k \leq m-1$, $0 < y < y_0$, и условию (112). Поэтому из доказанного выше следует, что $v(x, y) \equiv 0$ по крайней мере при $0 < y < y_1$. Это противоречит (115). Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ для любого $y > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $\alpha = 1$ условие (112) совпадает с условием А. Н. Тихонова

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, y) \exp\{-\sigma|x|^2\} = 0$$

для уравнения диффузии. При $\alpha \rightarrow 2$ показатель $\gamma(\alpha) = \frac{2}{2-\alpha}$ стремится к бесконечности, и это согласуется с тем, что в случае волнового уравнения ($\alpha = 2$) для единственности не требуется ограничения, налагаемого на рост решения при $|x| \rightarrow \infty$.

§ 9. Неулучшаемость показателя степени в условии единственности решения задачи Коши

Покажем, что показатель $\frac{2}{2-\alpha}$ в условии (112) нельзя увеличить. Рассмотрим функцию

$$T_{\rho, \beta}^{\mu}(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \phi(-\rho, \mu - \beta n; -\zeta). \quad (116)$$

Как следует из (17), ряд (116) сходится абсолютно для любых $z \in \mathbb{C}$, $\zeta > 0$ при $\rho, \beta \in (0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Далее нам понадобится следующая лемма [29, с. 63].

ЛЕММА 26. Если $0 < \beta < \rho < 1$, $\mu \geq 0$, то при любых $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ справедливо неравенство

$$\left| y^{\mu-1} T_{\rho,\beta}^{\mu} \left(\frac{x}{y^{\beta}}, \frac{1}{y^{\rho}} \right) \right| \leq \frac{C y^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \exp\{k_1 |x|^{\frac{\beta}{\rho-\beta}} - k_2 y^{-\frac{\rho}{1-\beta}}\}, \quad (117)$$

где C , k_1 , k_2 – положительные константы, зависящие только от ρ и β .

Из (8) и (116) следует, что

$$D_{0y}^{\nu} y^{\mu-1} T_{\rho,\beta}^{\mu}(\lambda t y^{-\beta}, y^{-\rho}) = y^{\mu-\nu-1} T_{\rho,\beta}^{\mu-\nu}(\lambda t y^{-\beta}, y^{-\rho}), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (118)$$

а из этого равенства и (117) следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\nu} y^{\mu-1} T_{\rho,\beta}^{\mu}(\lambda t y^{-\beta}, y^{-\rho}) = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \beta < \rho < 1, \quad (119)$$

причем для любого $r > 0$ имеет место равномерная сходимость на множестве $|t| \leq r$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{\rho,\beta}^{\mu}(\lambda t y^{-\beta}, y^{-\rho}) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{n-2}}{(n-2)!} y^{-\beta n} \phi(-\rho, \mu - \beta n; -y^{-\rho}) \\ &= \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} y^{-\beta k - 2\beta} \phi(-\rho, \mu - \beta k - 2\beta; -y^{-\rho}) \\ &= \lambda^2 y^{-2\beta} T_{\rho,\beta}^{\mu-2}(\lambda t y^{-\beta}, y^{-\rho}). \end{aligned}$$

Из последней формулы и (118) согласно соотношениям (64) и (119) имеем

$$\left[\lambda^2 D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] y^{\mu-1} T_{\rho,\beta}^{\mu}(\lambda t y^{-\beta}, y^{-\rho}) = 0, \quad 2\beta = \alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1. \quad (120)$$

Таким образом, из соотношений (117), (119) и (120) следует, что функция

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i y^{\mu_i-1} T_{\rho,\beta}^{\mu_i}(\lambda_i x_i y^{-\beta}, y^{-\rho}),$$

где $\beta = \frac{\alpha}{2}$, для любого набора $c_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i \geq 0$, $\lambda_i = \pm 1$ является решением уравнения (86) с правой частью, тождественно равной нулю ($f(x, y) \equiv 0$), удовлетворяет нулевым начальным условиям (108) ($\tau_k(x) \equiv 0$, $k = 1, \dots, m$) и для любого положительного сколь угодно малого ε , некоторых положительных констант k и C и параметра ρ , выбранного из условия $\frac{\rho}{\rho-\beta} = \varepsilon + \frac{1}{1-\beta}$ (т. е. $\rho = \frac{\beta(\varepsilon - \varepsilon\beta + 1)}{\varepsilon - \varepsilon\beta + \beta}$), имеет место оценка

$$|u(x, y)| \leq \text{const} \cdot \exp\{k|x|^{\varepsilon + \frac{2}{2-\alpha}}\}.$$

Это означает, что в условии (112) показатель $\frac{2}{2-\alpha}$ увеличить нельзя, и в этом смысле эти условия являются необходимыми.

§ 10. Случай уравнения диффузии

Покажем, что при $\alpha = 1$ функция $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ переходит в фундаментальное решение уравнения диффузии.

При $n = 1$ это следует из тождества (см., например, [28])

$$\phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -z\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{4}\right\}. \quad (121)$$

При $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2}(x, y) &= \frac{1}{2\pi y} \int_1^\infty \phi\left(-\frac{1}{2}, 0; -|x|y^{-\beta}t\right) \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \\ &= -\frac{1}{2\pi y} \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial z} \phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -zt\right) \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} \Big|_{z=|x|y^{-\beta}}. \end{aligned} \quad (122)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -zt\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial z} \exp\left\{-\frac{z^2 t^2}{4}\right\} = -\frac{zt^2}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2 t^2}{4}\right\},$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial z} \phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -zt\right) \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} &= -\frac{z}{2\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{t \exp\left\{-\frac{z^2 t^2}{4}\right\}}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= -\frac{z \exp\left\{-\frac{z^2}{4}\right\}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp\left\{-\frac{z^2 s}{4}\right\}}{\sqrt{s}} ds. \end{aligned}$$

Поскольку $\int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta = \sqrt{\pi}$, то

$$\int_1^\infty \frac{\partial}{\partial z} \phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -zt\right) \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = -\frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{z^2}{4}\right\}.$$

Подставляя найденное выражение в (122), получаем

$$\Gamma_{1,2}(x, y) = \frac{1}{4\pi y} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4y}\right\}. \quad (123)$$

Докажем справедливость соотношения

$$\Gamma_{1,n}(x, y) = (4\pi y)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4y}\right\} \quad (124)$$

при произвольном $n \in \mathbb{N}$. Пусть $n > 2$ и $n = 2k + i$, $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$. Тогда из соотношения (73) с учетом (121) и (123) получаем

$$\Gamma_{1,n}(x, y) = \left(-\frac{1}{2\pi|x|} \frac{\partial}{\partial|x|}\right)^k \Gamma_{1,i}(x, y) = (4\pi y)^{-\frac{i}{2}} \left(-\frac{1}{2\pi|x|} \frac{\partial}{\partial|x|}\right)^k \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4y}\right\}.$$

Отсюда в силу равенства

$$\left(-\frac{1}{|x|} \frac{\partial}{\partial|x|}\right)^k \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4y}\right\} = \frac{1}{(2y)^k} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4y}\right\}$$

следует соотношение (124).

§ 11. Волновое уравнение

Покажем, что при $\alpha \rightarrow 2$ функция $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ стремится к фундаментальному решению волнового уравнения. Учитывая соотношение (73), которое имеет место и для фундаментального решения волнового уравнения, достаточно рассмотреть случаи $n = 1$ и $n = 2$.

ЛЕММА 27. Пусть функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на любом конечном интервале полуоси $t > 0$, непрерывна в точке $t = 1$ и растет при $t \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $\exp\{\sigma t^\delta\}$, $\sigma > 0$, $\delta < \frac{1}{1-\beta}$. Тогда

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^\infty g(t) \phi(-\beta, 0; -t) dt = g(1), \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^\infty g(t) \phi(-\beta, \beta; -t) dt = \int_0^1 g(t) dt. \quad (125)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (10) имеем

$$\int_0^\infty g(t) \phi(-\beta, 0; -t) dt = \int_0^\infty [g(t) - g(1)] \phi(-\beta, 0; -t) dt + \frac{g(1)}{\Gamma(\beta)}.$$

Из неравенства (12) следует, что

$$\phi(-\beta, 0; -t) \leq P_m(t) \exp\{-\rho(\beta)t^{\frac{1}{1-\beta}}\}, \quad \rho(\beta) = (1-\beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}, \quad (126)$$

где

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(\beta t)^k}{\Gamma(k-k\beta)}, \quad \frac{1}{1-\beta} \leq m < \frac{2-\beta}{1-\beta}.$$

При $t \neq 1$ получаем

$$\begin{aligned} P_m(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{(1-\beta)k(\beta t)^k}{\Gamma(1+k(1-\beta))} \leq C(1-\beta) \sum_{k=1}^m k t^k \\ &= C(1-\beta) t \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^m t^k = \frac{C(1-\beta)}{(t-1)^2} [t^{m+1}(mt-m-1)+t] \equiv P^*(t). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (126) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \phi(-\beta, 0; -t) = 0, \quad |1-t| > \varepsilon.$$

При этом сходимость является равномерной на любом множестве положительной полуоси, дополнение к которому содержит ε -окрестность точки $t = 1$. Поэтому для любого $t_0 > 1$ и произвольного сколь угодно малого ε справедливо соотношение

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^{t_0} |g(t) - g(1)| \phi(-\beta, 0; -t) dt \leq C\omega(\varepsilon), \quad (127)$$

где C – положительная константа, а $\omega(\varepsilon) = \sup |g(t) - g(1)|$, $|t-1| \leq \varepsilon$.

В силу условий, наложенных на функцию $g(t)$, для некоторого $t_0 > 1$ и всех $\beta > \frac{\delta-1}{\delta}$ имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} |g(t) - g(1)| \phi(-\beta, 0; -t) dt \leq C \exp \left\{ -p \rho(\beta) t_0^{\frac{1}{1-\beta}} \right\} \int_{t_0}^{\infty} P^*(t) \exp \left\{ \sigma t^{\delta} - q \rho(\beta) t^{\frac{1}{1-\beta}} \right\} dt,$$

где C , p и q – положительные константы, $p + q = 1$. Отсюда, учитывая соотношения

$$P^*(t) \leq \frac{C(2-\beta)t^{m+1}}{t-1}, \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} \rho(\beta) t^{\frac{1}{1-\beta}} = \infty,$$

справедливые при $t > 1$, получаем

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \int_{t_0}^{\infty} [g(t) - g(1)] \phi(-\beta, 0; -t) dt = 0.$$

Вместе с неравенством (127) согласно непрерывности функции $g(t)$ в точке $t = 1$ и произвольности выбора ε это означает, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^{\infty} [g(t) - g(1)] \phi(-\beta, 0; -t) dt = 0,$$

и мы приходим к первому соотношению из (125).

Второе предельное соотношение (125) следует из равенств

$$\int_0^{\infty} g(t) \phi(-\beta, \beta; -t) dt = \int_0^{\infty} \phi(-\beta, \beta; -t) \frac{d}{dt} G(t) dt = \int_0^{\infty} G(t) \phi(-\beta, 0; -t) dt,$$

где $G(t) = \int_0^t g(s) ds$, и первого соотношения. Лемма доказана.

Доопределяя функцию $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ нулем для отрицательных значений y , с помощью леммы 27 получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} \Gamma_{\alpha,1}(x, y) = \frac{1}{2} \theta(y - |x|), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 2} \Gamma_{\alpha,2}(x, y) = \frac{\theta(y - |x|)}{2\pi \sqrt{y^2 - |x|^2}},$$

т.е. при $\alpha \rightarrow 2$ функция $\Gamma_{\alpha,n}(x, y)$ стремится к фундаментальному решению волнового уравнения, когда $n = 1$ и $n = 2$.

Автор выражает глубокую благодарность Е. И. Моисееву за внимание к работе, а также А. Ю. Попову за весьма полезные замечания и рекомендации.

Список литературы

1. А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003.
2. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян, “Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка”, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **3:1** (1968), 3–28.
3. А. Н. Кочубей, “Диффузия дробного порядка”, *Дифференц. уравнения*, **26:4** (1990), 660–670; англ. пер.: А. N. Kochubei, “Diffusion of fractional order”, *Differential Equations*, **26:4** (1990), 485–492.

4. А. Н. Кочубей, С. Д. Эйдельман, “Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка”, *Докл. РАН*, **394**:2 (2004), 159–161; англ. пер.: A. N. Kochubei, S. D. Eidelman, “The Cauchy problem for evolution equations of fractional order”, *Dokl. Math.*, **69**:1 (2004), 38–40.
5. S. D. Eidelman, A. N. Kochubei, “Cauchy problem for fractional diffusion equations”, *J. Differential Equations*, **199**:2 (2004), 211–255.
6. W. Wyss, “The fractional diffusion equation”, *J. Math. Phys.*, **27**:11 (1986), 2782–2785.
7. W. R. Schneider, W. Wyss, “Fractional diffusion and wave equations”, *J. Math. Phys.*, **30**:1 (1989), 134–144.
8. Ya. Fujita, “Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation”, *Osaka J. Math.*, **27**:2 (1990), 309–321; Ya. Fujita, “Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation. II”, *Osaka J. Math.*, **27**:4 (1990), 797–804.
9. F. Mainardi, “Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena”, *Chaos Solitons Fractals*, **7**:9 (1996), 1461–1477.
10. F. Mainardi, “The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation”, *Appl. Math. Lett.*, **9**:6 (1996), 23–28.
11. С. Х. Геккиева, “Задача Коши для обобщенного уравнения переноса с дробной по времени производной”, *Докл. Адыгской (Черкесской) Международной АН*, **5**:1 (2000), 16–19.
12. С. Х. Геккиева, “Краевая задача для обобщенного уравнения переноса в полубесконечной области”, *Изв. Кабардино-Балкарского НЦ РАН*, **1**:8 (2002), 6–8.
13. А. А. Ворошилов, А. А. Килбас, “Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля”, *Докл. РАН*, **406**:1 (2006), 12–16; англ. пер.: A. A. Voroshilov, A. A. Kilbas, “A Cauchy-type problem for the diffusion-wave equation with Riemann–Liouville partial derivative”, *Dokl. Math.*, **73**:1 (2006), 6–10.
14. А. А. Ворошилов, А. А. Килбас, “Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто”, *Дифференц. уравнения*, **42**:5 (2006), 599–609; англ. пер.: A. A. Voroshilov, A. A. Kilbas, “The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative”, *Differ. Equ.*, **42**:5 (2006), 638–649.
15. H. Engler, “Similarity solutions for a class of hyperbolic integrodifferential equations”, *Differential Integral Equations*, **10**:5 (1997), 815–840.
16. E. Buckwar, Yu. Luchko, “Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **227**:1 (1998), 81–97.
17. Yu. Luchko, R. Gorenflo, “Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **1**:1 (1998), 63–78.
18. R. Gorenflo, Yu. Luchko, F. Mainardi, “Analytical properties and applications of the Wright function”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **2**:4 (1999), 383–414.
19. R. Gorenflo, Yu. Luchko, F. Mainardi, “Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation”, *J. Comput. Appl. Math.*, **118**:1–2 (2000), 175–191.
20. С. Х. Геккиева, “Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени”, *Докл. Адыгской (Черкесской) Международной АН*, **1**:1 (1994), 17–18.
21. В. Х. Шогенов, С. К. Кумыкова, М. Х. Шхануков-Лафишев, “Обобщенное уравнение переноса и дробные производные”, *Докл. НАН Украины*, 1997, № 12, 47–54.
22. М. А. Керевов, “Решение одной краевой задачи для волнового уравнения дробного порядка”, *Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики*, Сб. научных трудов института математики НАН Украины, Киев, 1997, 144–145.

23. В. А. Нахушева, *Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов*, Изд-во КБНЦ РАН, Нальчик, 2002.
24. O. P. Agrawal, "Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain", *Nonlinear Dynam.*, **29**:1–4 (2002), 145–155.
25. А. А. Андреев, А. С. Еремин, "Краевая задача для уравнения диффузии с дробной производной по времени", *Математическое моделирование и краевые задачи*, Тр. двенадцатой межвуз. конф. Ч. 3, СамГТУ, Самара, 2004, 3–9.
26. З. А. Нахушева, "Видоизмененная задача Самарского для нелокального диффузионного уравнения", *Докл. Адыгской (Черкесской) Международной АН*, **2**:2 (1997), 36–41.
27. А. В. Псху, "Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка", *Дифференц. уравнения*, **39**:9 (2003), 1286–1289; англ. пер.: A. V. Pskhu, "Solution of the first boundary value problem for a fractional-order diffusion equation", *Differ. Equ.*, **39**:9 (2003), 1359–1363.
28. А. В. Псху, "Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина", *Дифференц. уравнения*, **39**:10 (2003), 1430–1433; англ. пер.: A. V. Pskhu, "Solution of boundary value problems for the fractional diffusion equation by the Green function method", *Differ. Equ.*, **39**:10 (2003), 1509–1513.
29. А. В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005.
30. E. M. Wright, "On the coefficients of power series having exponential singularities", *J. London Math. Soc.*, **8**:29 (1933), 71–79.
31. E. M. Wright, "The generalized Bessel function of order greater than one", *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, **11**:1 (1940), 36–48.
32. М. М. Джрбашян, Р. А. Багян, "Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функцией Миттаг–Леффлера", *Докл. АН СССР*, **223**:6 (1975), 1297–1300; англ. пер.: M. M. Dzhrbashyan, R. A. Bagiyany, "On integral representations and measures associated with functions of Mittag-Leffler type", *Soviet Math. Dokl.*, **16**:4 (1975), 1072–1076.
33. А. В. Псху, "Интегральное преобразование с функцией Райта в ядре", *Докл. Адыгской (Черкесской) Международной АН*, **6**:1 (2002), 35–47.
34. B. Stanković, "On the function of E. M. Wright", *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **10**:24 (1970), 113–124.
35. L. Gajić, B. Stanković, "Some properties of Wright's function", *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **20**:34 (1976), 91–98.
36. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, 5-е изд., Наука, М., 1987; нем. пер. 3-го изд.: M. A. Lawrentjew, B. W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, VEB, Berlin, 1967.
37. B. L. J. Braaksma, "Asymptotic expansion and analytic continuations for a class of Barnes-integrals", *Compositio Math.*, **15** (1964), 239–341.
38. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*, Наука, М., 1986; англ. пер.: A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series. Vol. 3. More special functions*, Gordon and Breach, New York, 1990.
39. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: R. Courant, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Intersci. Publ., New York–London, 1962.

А. В. Псху (A. V. Pskhu)
 Научно-исследовательский институт
 прикладной математики и автоматизации
 Кабардино-Балкарского научного центра РАН
 E-mail: pskhu@mail333.com

Поступило в редакцию
 14.11.2006
 24.12.2007