Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов, Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям), *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 3, 77–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/im243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:42:13

УДК 517.518.8

Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов

Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям)

Знакочувствительные аппроксимации учитывают не только модуль ошибки приближения, но и ее знак. В предыдущей работе с тем же названием и подзаголовком “теоремы существования и единственности” изучались вопросы существования, единственности и множественности элемента наилучшего равномерного приближения со знакочувствительным весом $p = (p_-, p_+)$ ($p_{\pm}(x) \geq 0$, $x \in E$) некоторым (в частности, чебышевским) семейством L ограниченных функций на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Важную роль при этом играли понятия жесткости и свободы системы (p, L) . Здесь же мы рассмотрим вопрос об устойчивости такого процесса приближения, т.е. о непрерывной зависимости от p наименьших уклонений $E(p, L, f)$ и наилучших приближений $l(p, L, f)$ функций f элементами $l \in L$ при изменениях p , оцениваемых в так называемой d -метрике. Результаты прилагаются к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям специальных многозначных функций.

Библиография: 12 наименований.

Введение

Ниже $C(E)$ – пространство всех ограниченных и непрерывных функций на множестве E с нормой $\|g\| = \|g\|_{C(E)} := \sup\{|g(x)| : x \in E\}$, $M(E)$ – пространство всех ограниченных функций на E с той же нормой.

Пусть P – неотрицательный сублинейный функционал на линейном нормированном пространстве $\mathcal{L}$ с нормой $\|\cdot\|$; если $L \subset \mathcal{L}$, то положим

$$\begin{aligned} \|P\|_L &:= \sup\{|P(l)|/\|l\| : l \in L, l \neq 0\}, \quad \|P\| := \|P\|_{\mathcal{L}}, \\ W(P; L) &= \sup\{\|f\|/P(f) : f \in L, f \neq 0\}, \\ S(P; L) &= \inf\{P(f)/\|f\| : f \in L, f \neq 0\} \end{aligned}$$

– *свобода* и *жесткость* системы $(P; L)$ ($L \subset \mathcal{L}$). Очевидно, $0 \leq S(P; L) \leq \|P\|_L$. Через $E(P; L, f) := \inf\{P(l - f) : l \in L\}$, $l(P; L, f)$ и $A(P; L, f)$ обозначим наименьшее уклонение L от $f \in \mathcal{L}$, соответствующий элемент наилучшего приближения (если он существует) и множество всех $l(P; L, f)$ для f ; $E(L, f) := E(\|\cdot\|; L, f)$.

Напомним, что *чебышевским подпространством на промежутке* $\Delta = \langle a, b \rangle$ называется такое конечномерное (линейное) подпространство L из $C(\Delta)$, что любая функция $l \in L$ имеет на Δ не более $\dim L - 1$ различных нулей. Семейство всех n -мерных чебышевских подпространств на промежутке Δ будем обозначать $TCH_n(\Delta)$.

Знакочувствительным весом (ниже обозначаемым термином “вес”) на множестве E назовем пару $p = (p_-, p_+)$ неотрицательных функций $p_-(x), p_+(x)$ на E ; вес p называется *ограниченным, непрерывным, полунепрерывным*, если таковы и p_- , и p_+ . *Полунепрерывная сверху регуляризация* $\bar{g}(x)$ функции $g(x)$ ($x \in E$), т.е. ее верхняя функция Бэра, определяется на замыкании $\bar{E}$ множества E равенством

$$\bar{g}(t) := \overline{\lim_{x \rightarrow t}} g(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \sup \{g(x) : x \in E, |x - t| < s\},$$

полунепрерывная сверху регуляризация веса $p = (p_-, p_+)$ – вес $\bar{p} = (\bar{p}_-, \bar{p}_+)$. Положим

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := (-f(x))^+$$

(очевидно, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$);

$$(f, p)(x) := f^+(x)p_+(x) - f^-(x)p_-(x), \quad |f|_{p, E} := \|(f, p)\|_{C(E)};$$

$\|p\| := \max\{\|p_-\|, \|p_+\|\}$ (при $\|p\| = 1$ вес p назовем *нормированным*); $\text{supp}(g)$ – замкнутый носитель функции $g(x)$ ($x \in E \subset \mathbb{R}$), т.е. замыкание в E множества $\{x \in E : g(x) \neq 0\}$; $\text{supp}(p) := \text{supp}(p_-) \cup \text{supp}(p_+)$.

Свобода $W(p, L)$ и *жесткость* $S(p, L)$ системы (p, L) из веса p на E и множества $L \subset M(E)$, а также *наименьшее уклонение* $E(p, L, f)$, *наилучшее приближение* $l(p, L, f)$ и множество $A(p, L, f)$ всех $l(p, L, f)$ определяются как $W(P; L)$ и $S(P; L)$, $E(P; L, f)$, $l(P; L, f)$ и $A(P; L, f)$ при $P(\cdot) = |\cdot|_{p, E}$ ($f \in M(E)$). Отметим, что для любого (не обязательно конечного) веса p функционал $|\cdot|_{p, E}$ на пространстве $\mathcal{L} = M(E)$ полунепрерывен снизу [1, п. 0.1], если же вес p ограничен, то этот функционал также ограничен; очевидно, $S(p, L) \leq \|p\|$.

Ниже нам понадобится условие конечности свободы системы (p, L) в случае чебышевского подпространства L .

0.1. ТЕОРЕМА. Пусть L – n -мерное чебышевское подпространство на отрезке Δ , $p = (p_-, p_+)$ – произвольный вес на Δ (не обязательно конечный). Тогда для конечности свободы $W(p, L)$ необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

- а) на Δ есть возрастающая последовательность из $n + 1$ точек, в которых $p_-(x)$ и $p_+(x)$ попеременно положительны (начиная с любой из них);
- б) на Δ имеется ровно n точек, в которых и $p_-(x)$, и $p_+(x)$ положительны, в остальных же точках обе они равны нулю (см. [1, следствие теоремы 2.7]; а также [2]).

Если $L \subset \mathcal{L}$, P – некоторое семейство неотрицательных сублинейных функционалов на $\mathcal{L}$, то *свободой* и *жесткостью суперсистемы* $(P; L)$ назовем величины

$$W(P; L) := \sup\{\|l\|/P(l) : l \in \mathcal{L}, l \neq 0, P \in P\}$$

и

$$S(P; L) := \inf\{P(l)/\|l\| : l \in \mathcal{L}, l \neq 0, P \in P\}$$

соответственно. Если $\mathbf{p}$ – некоторое семейство знакочувствительных весов на множестве E , $L \subset M(E)$, то свободой и жесткостью суперсистемы $(\mathbf{p}, L)$ назовем соответственно $W(\mathbf{P}; L)$ и $S(\mathbf{P}; L)$ с $\mathbf{P} = \{|\cdot|_{p,E} : p \in \mathbf{p}\}$.

Напомним теорему о p -альтернансе (см. [1, теорема 3.6], а также [3]).

Назовем семейство точек $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ из $E \subset \mathbb{R}$ n -точечным p -альтернансом пары $f, g \in M(E)$ (на E), если с возрастанием целого k от 1 до n величина $(f - g, p)(x_k)$ с каждым шагом меняет знак, оставаясь по абсолютной величине равной $|f - g|_{p,E}$. Следующее утверждение (см. [1, п. 3.6], [3]) и по формулировке, и по доказательству – достаточно простое обобщение теоремы Чебышева об альтернансе.

0.2. ТЕОРЕМА (о p -альтернансе). Пусть L – n -мерное чебышевское подпространство на отрезке Δ ($n \geq 1$), $p = (p_-, p_+)$ – конечный и полунепрерывный сверху вес на Δ , $f \in C(\Delta)$, $E(p, L, f) > 0$. Тогда для того чтобы функция $l \in L$ была элементом наилучшего приближения в L для f на Δ с весом p , необходимо и достаточно наличие у пары l, f на Δ $(n+1)$ -точечного p -альтернанса.

Важную роль ниже играет так называемое d -расстояние (см. [1], [2], [4]). Перед его определением напомним некоторые известные понятия.

Расстояние Минковского ρ_M на плоскости xOy между точками (x, y) и (u, v) определяется равенством

$$\rho_M((x, y), (u, v)) = \max\{|x - u|, |y - v|\}.$$

Множество F на плоскости xOy называется *выпуклым относительно оси Oy* , если вместе с любыми двумя точками из F , имеющими одну и ту же абсциссу, в F входит соединяющий их вертикальный отрезок.

Дополненным графиком $F(f)$ функции $y = f(x)$ (вообще говоря, неоднозначной) называется наименьшее замкнутое множество, выпуклое относительно направления оси Oy и содержащее график этой функции; дополненный график ограниченной функции, заданной на промежутке (т.е. на замкнутом или полузамкнутом отрезке, или на открытом интервале), является замкнутым связным множеством – континуумом, если промежуток конечен. Хаусдорфовым расстоянием $h(A, B)$ между двумя ограниченными множествами A и B на плоскости xOy называется инфимум всех таких $r > 0$, что A и B содержатся друг у друга в r -окрестностях Минковского; хаусдорфовым расстоянием между двумя ограниченными функциями g и h , определенными на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, называется $H(g, h) := h(F(g), F(h))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. d -расстоянием между функциями $g, h \in M(E)$ назовем инфимум $d(g, h)$ всех чисел $r > 0$, при которых график функции $M(g, h; x) := \max\{g(x), h(x)\}$, $x \in E$, содержится в r -окрестности Минковского каждого из их дополненных графиков $F(g)$ и $F(h)$; d -расстоянием между ограниченными на $E \subset \mathbb{R}$ весами $p = (p_-, p_+)$ и $q = (q_-, q_+)$ назовем $d(p, q) := \max\{d(p_-, q_-), d(p_+, q_+)\}$.

При $f, g \in M(E)$ имеем для d -расстояния, хаусдорфова $H(f, g)$ и равномерного $\|f - g\|$ расстояний

$$d(f, g) \leq H(f, g) \leq \|f - g\|,$$

и если E – промежуток, то и равенство

$$H(f, g) = \max\{d(f, g), d(-f, -g)\};$$

если $f, g \in M(E)$, $f, g \geq 0$, веса p, q ограничены, то

$$|\|f\| - \|g\|| \leq d(f, g), \quad |\|p\| - \|q\|| \leq d(p, q).$$

Семейство всех ограниченных полунепрерывных сверху весов $p = (p_-, p_+)$ на множестве $E \subset \mathbb{R}$ с метрикой $d(p, q)$ обозначим $DS(E)$. Отметим (см. [1], [2], [4]), что если Δ – промежуток на $\mathbb{R}$, то $DS(\Delta)$ является полным метрическим пространством, сепарабельным при конечном Δ и несепарабельным в противном случае.

Для сокращения записи положим $tp = (tp_-, tp_+)$ при $t = \text{const} \in [0, \infty)$, $\tilde{f} := f/\|f\|$ ($f \in M(E)$), $\tilde{p} := p/\|p\|$, $D(p, q) = d(\tilde{p}, \tilde{q})$. Наряду с $d(p, q)$, $D(p, q)$ используется ниже как мера взаимного отклонения нетривиальных (т.е. отличных от веса $0 := (0, 0)$) знакочувствительных весов p, q . Сфера $S(\Delta) = \{p \in DS(E) : d(p, 0) = 1\}$ является полным метрическим пространством с метрикой $D(p, q) = d(p, q)$. Если в $DS(\Delta) \setminus \{0\}$ ввести соотношение эквивалентности $p \sim q \Leftrightarrow \tilde{p} = \tilde{q}$, то получим полное метрическое пространство $DS^+(\Delta)$ с метрикой $D(p, q)$. На множестве всех *ограниченных* весов p, q (на $E \subset \mathbb{R}$) $d(p, q)$ не является метрикой, однако мы будем ее использовать для оценки взаимного отклонения весов p, q и в этом случае.

В радиотехнике *обобщенной расстройкой* частот f, φ называется величина

$$k(\varphi, f) := \frac{1}{2} \left| \frac{\varphi}{f} - \frac{f}{\varphi} \right|.$$

Если P и Q – конечные неотрицательные функционалы на некотором подмножестве L линейного нормированного пространства $\mathcal{L}$, то *обобщенной расстройкой* P и Q на L назовем число

$$k(P; Q; L) := \sup\{k(P(l), Q(l)) : l \in L\},$$

$$k(0, 0) := 0, \quad k(0, a) = k(a, 0) := \infty \quad \forall a > 0.$$

Если f, g – определенные на E конечные неотрицательные функции, p, q – конечные веса на E , то

$$k(f, g) = k(f, g; E) := \|k(f(\cdot), g(\cdot))\|_{C(E)},$$

$$k(p, q) := k(p, q; E) := \max\{k(p_-, q_-; E), k(p_+, q_+; E)\}$$

назовем *обобщенными расстройками функций f, g и весов p, q* соответственно. Очевидно,

$$\begin{aligned} k(P; Q; L) &= k(Q; P; L) \geq 0, & k(p, q) &= k(q, p) \geq 0, \\ k(P; Q; L) &= 0 \Leftrightarrow P(l) = Q(l) \quad \forall l \in L. \end{aligned}$$

При $E \subset \mathbb{R}$, $L \subset M(E)$, $f \in M(E)$, $p, q \not\equiv (0, 0)$ и $t \geq 0$ положим

$$\begin{aligned} L(f) &:= \{l - f : l \in L\}, & \text{dif } L &:= \{f - g : f, g \in L\}, \\ W(p, q, L) &:= \max\{W(p, L), W(q, L)\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $W(P, L(f))$ оценивается более простой величиной $W(P, \text{dif } L)$ (см. [1, теорема 2.13]).

0.3. ТЕОРЕМА. *Если P – ограниченный сублинейный функционал на линейном нормированном пространстве $\mathcal{L}$, $L \subset \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}$, $E(P; L, f) > 0$, то*

$$W(P; L(f)) \leq 3\|P\| \frac{E(\|\cdot\|; L, f)}{E(P; L, f)} \cdot W(P; \text{dif } L). \quad (0.3.1)$$

Заметим, что если P – полунепрерывный снизу сублинейный функционал на линейном нормированном пространстве $\mathcal{L}$, L – (линейное) конечномерное подпространство в $\mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}$ и $W(P; L(f)) < \infty$, то f имеет хотя бы один элемент наилучшего приближения $l(P; L; f)$; если условие $W(P; L(f)) < \infty$ здесь заменить условием $W(P; L) < \infty$, то каждый элемент $f \in \mathcal{L}$ имеет $l(P; L; f)$. Действительно, если $f \in \mathcal{L}$, $l_j \in L$, $P(l_j - f) \rightarrow E(P; L; f)$, то при $W(P; L(f)) < \infty$ имеем

$$\|l_j\| \leq \|l_j - f\| + \|f\| \leq W(P; L(f))P(l_j - f) + \|f\| \leq C,$$

а при $W(P; L) < \infty$

$$\|l_j\| \leq W(P; L)P(l_j) \leq W(P; L)P(l_j - f) + W(P; L)P(f) \leq C$$

(C не зависит от j). Так как последовательность $\{l_j\}$ имеет на L хотя бы одну предельную точку $\bar{l}$, P полунепрерывен снизу, то $P(\bar{l} - f) = E(P; L; f)$.

Ниже также используются обозначения

$$\begin{aligned} \omega(f, t) &= \omega(f, E, t) := \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in E, |x' - x''| \leq t\}, \\ \omega(L, t) &= \omega(L, E, t) := \sup\{\omega(l/\|l\|, E, t) : l \in L, l(x) \neq 0\}, & L \subset M(E), & t \geq 0 \\ (\omega(f, t) \text{ и } \omega(L, t) &\text{ – модули непрерывности функции } f \text{ и семейства } L), \end{aligned}$$

$$\sigma(p, q, L; t) := \max\{\|p\|, \|q\|\} \cdot \omega(L, t + 0) + t$$

(p, q – знакочувствительные веса на $E \subset \mathbb{R}$, $L \subset M(E)$).

Ниже будет неоднократно использоваться следующая теорема об устойчивости жесткости и свободы системы (p, L) (см. [1, п. 2.14], [2]).

0.4. ТЕОРЕМА. *Если $L \subset M(E)$ ($E \subset \mathbb{R}$), веса p, q ограничены, то*

$$|S(q, L) - S(p, L)| \leq \underline{\sigma} := \min\{\|p\|, \|q\|\} \cdot \omega(L, d + 0) + d, \quad d = d(p, q). \quad (0.4.1)$$

Если при этом $\underline{\sigma} < s := S(p, L)$, то

$$\frac{W(p, L)}{1 + \underline{\sigma}W(p, L)} \leq W(q, L) \leq \frac{W(p, L)}{1 - \underline{\sigma}W(p, L)} = \frac{1}{s - \underline{\sigma}}. \quad (0.4.2)$$

ГЛАВА 1. Устойчивость

§ 1. Устойчивость наименьших уклонений

1.0. В этом параграфе рассматривается вопрос об устойчивости величин $E(p, L, f)$ и $E(P; L, f)$ при вариациях знакочувствительного веса p и сублинейного функционала P соответственно.

Следующие леммы ниже используются неоднократно.

1.1. ЛЕММА. Если веса p, q ограничены на E , $d = d(p, q)$, $L \subset M(E)$, то для сублинейных функционалов $P = |\cdot|_{p,E}$, $Q = |\cdot|_{q,E}$ имеем при $l \in L$

$$\begin{aligned} Q(l) &\leq P(l) + \|q\| \omega(l, d+0) + \|l\|d \\ &\leq P(l) + \|l\| \cdot (\|q\| \omega(L, d+0) + d), \end{aligned} \quad (1.1.0)$$

$$|P(l) - Q(l)| \leq \max\{\|p\|, \|q\|\} \omega(l, d+0) + \|l\|d \leq \|l\| \cdot \sigma(p, q, L; d), \quad (1.1.1)$$

$$\begin{aligned} P(l) &\leq Q(l) + Q(l) \cdot y, \quad y = W(q, L)(\|p\| \cdot \omega(L, d+0) + d), \\ Q(l) &\leq P(l) + P(l) \cdot z, \quad z = W(p, L)(\|q\| \cdot \omega(L, d+0) + d), \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

$$\begin{aligned} k(P; Q; L) &\leq \max\{\|q\|W(p, L), \|p\|W(q, L)\} \cdot \omega(L, d+0) \\ &\quad + \max\{W(p, L), W(q, L)\}d \leq W(p, q, L) \cdot \sigma(p, q, L; d). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, $l \in L$. По определению $d(p, q)$ для каждого $x \in E$ найдется такое $t \in E$, что $|x - t| < d + \varepsilon$, $q_+(x) < p_+(t) + d + \varepsilon$. Поэтому

$$\begin{aligned} l(x)^+ q_+(x) &= (l(t) + l(x) - l(t))^+ q_+(x) \leq l(t)^+ p_+(t) + l(t)^+(d + \varepsilon) \\ &\quad + (l(x) - l(t))^+ q_+(x) \leq P(l) + \|l\|(d + \varepsilon) + \|q\| \omega(l, d + \varepsilon). \end{aligned}$$

Очевидно, эти неравенства останутся в силе, если в них индексы $+$ всюду заменить индексами $-$. Поскольку при каждом $a \in \mathbb{R}$ лишь одна из двух величин a^- , a^+ может быть ненулевой, то из этих неравенств при $x \in E$ имеем

$$\begin{aligned} |(l, q)(x)| &\leq P(l) + \|l\|(d + \varepsilon) + \|q\| \omega(l, d + 0), \\ Q(l) &\leq P(l) + \|q\| \omega(l, d + 0) + \|l\|d \\ &\leq P(l) + \|l\| \cdot (\|q\| \omega(L, d + 0) + d), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

т.е. (1.1.0). Так как здесь p и q можно менять местами, то доказано (1.1.1).

Далее, $\|l\| \leq Q(l)W(q, L)$, $\|l\| \leq P(l)W(p, L)$, так что

$$P(l) \leq Q(l) + Q(l)W(q, L)(\|p\| \omega(L, d + 0) + d), \quad (1.1.5)$$

$$Q(l) \leq P(l) + P(l)W(p, L)(\|q\| \omega(L, d + 0) + d), \quad (1.1.6)$$

и (1.1.2) доказано.

Поскольку $k(a, b) = k(b, a) = (|a - b|/b)\{(a + b)/(2a)\}$, при $a = P(l) \geq Q(l) = b$ из (1.1.5) имеем

$$k(P(l), Q(l)) \leq W(q, L)(\|p\| \omega(L, d + 0) + d),$$

а при $a = Q(l) \geq P(l) = b$

$$k(P(l), Q(l)) \leq W(p, L)(\|q\| \omega(L, d + 0) + d)$$

(уже из (1.1.6)). Это дает (1.1.3).

1.2. ЛЕММА. Для неотрицательного функционала $F(x)$, определенного и ограниченного на некотором множестве X , пусть $m(F)$ и $M(F)$ обозначают соответственно его инфимум и супремум на X . Тогда для любой пары A, B таких функционалов имеем неравенства

$$\max\{k(m(A), m(B)), k(M(A), M(B))\} \leq k(A; B; X), \quad (1.2.1)$$

$$\max\{|m(A) - m(B)|, |M(A) - M(B)|\} \leq \sup\{|A(x) - B(x)| : x \in X\}. \quad (1.2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если, например, $M(A) > M(B)$, то при $0 < \varepsilon < M(A) - M(B)$ и некотором $t \in X$ имеем

$$A(t) > M(A) - \varepsilon > M(B) \geq B(t),$$

$$k(M(A) - \varepsilon, M(B)) \leq k(A(t), M(B)) \leq k(A(t), B(t)), \quad k(M(A), M(B)) \leq C,$$

где C обозначает правую часть неравенства (1.2.1). Аналогично доказывается неравенство $k(m(A), m(B)) \leq C$ и неравенство (1.2.2).

1.3. ТЕОРЕМА. Если веса p и q ограничены на $E \subset \mathbb{R}$, $\bar{p}$ и $\bar{q}$ — их полунепрерывные сверху регуляризации, $d = d(p, q)$, L — множество из $M(E)$, то для сублинейных функционалов $P = |\cdot|_{p, E}$ и $Q = |\cdot|_{q, E}$, $\bar{P} = |\cdot|_{\bar{p}, \bar{E}}$ и $\bar{Q} = |\cdot|_{\bar{q}, \bar{E}}$ имеем неравенства

$$\|P - Q\|_L \leq \sigma(p, q, L; d), \quad (1.3.1)$$

$$k(P; Q; L) \leq W(p, q, L) \cdot \sigma(p, q, L; d), \quad (1.3.2)$$

$$k(P; Q; L) \leq k(P; Q; M(E)) = k(p, q) \quad \text{при} \quad L \subset M(E), \quad (1.3.3)$$

$$k(\bar{P}; \bar{Q}; L) \leq k(\bar{P}; \bar{Q}; C(\bar{E})) = k(\bar{p}, \bar{q}) \quad \text{при} \quad L \subset C(\bar{E}). \quad (1.3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (1.3.1) немедленно следует из (1.1.1), (1.3.2) – это (1.1.3). Полагая, как обычно, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_E$, из леммы 1.2 при $X = E$, $A(x) = l^-(x)p_-(x)$ и $B(x) = l^-(x)q_-(x)$ получаем

$$\begin{aligned} k(\|l^-p_-\|, \|l^-q_-\|) &\leq \|k(l^-(\cdot)p_-(\cdot), l^-(\cdot)q_-(\cdot))\| \\ &\leq \|k(p_-(\cdot), q_-(\cdot))\| \leq k(p, q), \quad l \in L, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

и аналогичное неравенство с заменой индексов – индексами + (знак $<$ в неравенстве $k(ta, tb) \leq k(a, b)$ появляется при $t = 0$, $a \neq b$). Поэтому для тех $l \in L$, для которых $P(l) = \|l^-p_-\|$ и $Q(l) = \|l^-q_-\|$ или $P(l) = \|l^+p_+\|$ и $Q(l) = \|l^+q_+\|$, имеем неравенство

$$k(P(l), Q(l)) \leq k(p, q). \quad (1.3.6)$$

Если же для $l \in L$ ни одна из этих пар равенств не выполнена, например, если $P(l) = \|l^-p_-\|$, $Q(l) = \|l^+q_+\|$ и $P(l) > Q(l)$ ($> \|l^-q_-\|$), то из определения обобщенной расстройки (см. введение) получим неравенство $k(P(l), Q(l)) \leq k(\|l^-p_-\|, \|l^-q_-\|)$, а из него и из (1.3.5) – опять неравенство (1.3.6). Таким образом,

$$k(P; Q; L) \leq k(P; Q; M(E)) \leq k(p, q). \quad (1.3.7)$$

Пусть, далее, $\varepsilon > 0$, и при $t \in E$ положено $l_t(t) = -1$, $l_t(x) = 0$ при $x \neq t$. Тогда если $k(p, q) = k(p_-, q_-)$ (случай $k(p, q) = k(p_+, q_+)$ исчерпывается аналогично – с заменой $-l_t$ на l_t) и, например, $\|p_-\| \geq \|q_-\|$, то возьмем точку $t \in E$ так, чтобы было $k(p, q) - \varepsilon < k(p_-(t), q_-(t))$. Тогда

$$k(p, q) - \varepsilon < k(|l_t|_{p,E}, |l_t|_{q,E}) \leq k(P; Q; M(E)),$$

что ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ вместе с (1.3.7) дает (1.3.3).

Так как (1.3.3) доказано, то в (1.3.4) осталось доказать лишь равенство $k(P; Q; C(E)) = k(p, q)$ для случая полунепрерывных сверху весов p и q на замкнутом множестве E . Для этого надо просто повторить рассуждения предыдущего абзаца, взяв в качестве l_t непрерывную неположительную функцию, равную -1 при $x = t$ и столь быстро возрастающую к 0 при удалении x от t , что

$$|l|_{p,E} = l_t^-(t)p_-(t) = p_-(t)$$

(она существует ввиду полунепрерывности p_- сверху). Теорема доказана.

То, что в теореме 1.3 p и q входят симметрично, является одновременно ее и достоинством, и недостатком (взгляните на правые части неравенств (1.3.1) и (1.3.2)). В следующем утверждении, вытекающем из (1.3.2) и (0.4.2), *опорным* является вес p .

1.4. СЛЕДСТВИЕ. Если p и q – ограниченные веса на $E \subset \mathbb{R}$, $P = |\cdot|_{p,E}$, $Q = |\cdot|_{q,E}$, $d = d(p, q)$, $\sigma = \sigma(p, q, L; d) < s := S(p, L)$, то

$$k(P; Q; L) \leq \frac{\sigma}{s - \sigma}. \quad (1.4.1)$$

1.5. ТЕОРЕМА. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $L \subset M(E)$, $f \in M(E)$, веса p и q на E ограничены, $d = d(p, q)$. Тогда если $W(p, L(f)) < \infty$ и $W(q, L(f)) < \infty$, то

$$|E(p, L, f) - E(q, L, f)| \leq \max\{E(p, L, f)W(p, L(f)), E(q, L, f)W(q, L(f))\} \cdot \sigma(p, q, L(f), d), \quad (1.5.1)$$

$$k(E(p, L, f), E(q, L, f)) \leq W(p, q, L(f)) \cdot \sigma(p, q, L(f); d). \quad (1.5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.1.2) получаем неравенства

$$E(p, L, f) \leq E(q, L, f)(1 + y), \quad E(q, L, f) \leq E(p, L, f)(1 + z),$$

что и дает (1.5.1). При $X = L(f)$, $A = P = |\cdot|_{p,E}$ и $B = Q = |\cdot|_{q,E}$ из (1.2.1) и (1.1.3) вытекает (1.5.2).

Отметим, что в случае замкнутости E при $f \in C(E)$, $L \subset C(E)$ можно справа в неравенствах (1.5.1) и (1.5.2) вместо p и q писать их регуляризации $\bar{p}$ и $\bar{q}$.

Для пользования неравенством (1.5.2) надо, кроме $d(p, q)$, знать хотя бы оценки сверху для $W(p, L(f))$ и $W(q, L(f))$, а для использования (1.5.1) еще и оценки для $E(p, L, f)$ и $E(q, L, f)$. Это – плата за симметрию этих неравенств относительно p и q . Однако, как и при доказательстве 1.4, мы с помощью теоремы 0.4 можем в (1.5.2) сделать опорным вес p . Замечая, что $\|q\| \leq \|p\| + d(p, q)$, получаем

1.6. СЛЕДСТВИЕ. Если $E \subset \mathbb{R}$, $L \subset M(E)$, $f \in M(E)$, веса p и q на E ограничены, $d = d(p, q)$, $\sigma_f := (\|p\| + d)\omega(L(f), d + 0) + d < s_f = S(p, L(f))$, то

$$k(E(p, L, f), E(q, L, f)) \leq \frac{\sigma_f}{s_f - \sigma_f}. \quad (1.6.1)$$

Приведем еще одно неравенство, в котором $W(p, L(f))$ и $W(q, L(f))$ заменены величинами, уже не зависящими от f и совпадающими соответственно с $W(p, L)$ и $W(q, L)$ в случае линейного подпространства L . Обратим внимание на то, что при этом можно оценить лишь разность между величинами $E(p, L, f)$ и $E(q, L, f)$, но, вообще говоря, нельзя оценить их относительную или обобщенную расстройку. Действительно, пусть, например, L – множество алгебраических полиномов степени $\leq n$ ($n \geq 1$), $E = \Delta = [-1, 1]$; $p(x) \equiv (1, 1)$, $0 < t = \text{const} < 1$, $q(x) = (1, 1)$ при $t \leq |x| \leq 1$ и $q(x) = (t, t)$ при $|x| < t$; $f(x) = 0$ при $t \leq |x| \leq 1$, $f(x) = t \sin(2\pi nx/t)$ при $|x| < t$. Легко видеть, что $\|p\| = \|q\| = 1$, $d(p, q) = t/2$ при $t < 2/3$, $W(p, L) = 1$, $W(q, L) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow 0$), $E(p, L, f) = t$, $E(q, L, f) = t^2$, $|E(p, L, f) - E(q, L, f)|/E(q, L, f) = 1 - t \rightarrow 1$, $k(E(p, L, f), E(q, L, f)) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$). Отметим, что здесь $f \in C(\Delta)$, p и q полунепрерывны сверху, L – конечномерное подпространство в $C(\Delta)$.

В соответствии с принятыми обозначениями ниже $E(L, f)$ обозначает наименьшее уклонение L от f в равномерной метрике: $E(L, f) = E(p_0, L, f)$ при $p_0 \equiv (1, 1)$.

1.7. СЛЕДСТВИЕ. Если $E \subset \mathbb{R}$, $L \subset M(E)$, веса p и q ограничены на E , $d = d(p, q)$, $W := \max\{W(p/\|p\|, \text{dif } L), W(q/\|q\|, \text{dif } L)\}$, $E(p, L, f) > 0$ и $E(q, L, f) > 0$, то

$$|E(p, L, f) - E(q, L, f)| \leq 3WE(L, f)(\max\{\|p\|, \|q\|\} \cdot \omega(L(f), d + 0) + d). \quad (1.7.1)$$

Если E — компакт, $L \subset C(E)$, $f \in C(E)$, то условия $E(p, L, f) > 0$, $E(q, L, f) > 0$ не нужны.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [1, лемма 2.10] приводится оценка для $\omega(L(f), \delta)$: если $L \subset M(E)$, $f \in M(E)$, $E(L, f) > 0$, $\varepsilon > 0$, $l \in L$, $\|l - f\| \leq E(L, f) + \varepsilon$, то

$$\frac{\omega(l - f, \delta)}{E(L, f) + \varepsilon} \leq \omega(L(f), \delta) \leq \frac{\omega(l - f, \delta)}{E(L, f)} + \left(2 + \frac{\varepsilon}{E(L, f)}\right) \omega(L, \delta) \quad \forall \delta > 0.$$

Справедливость (1.7.1) при $E(p, L, f) > 0$ и $E(q, L, f) > 0$ вытекает из (1.5.1) и (0.3.1) (неравенства $W(p, L(f)) < \infty$ и $W(q, L(f)) < \infty$ следуют из определения $W(p, L(f))$). Далее, случай $E(p, L, f) = E(q, L, f) = 0$ (имеющий место, в частности, при $f \in L$) и случай $W = \infty$ тривиальны (см. (1.7.1)). Если $W < \infty$ и, например, $E(p, L, f) = 0$, $E(q, L, f) > 0$, то (1.7.1) верно при замене p на $p_r := (p_- + r, p_+ + r)$ с $r = \text{const} > 0$, а W — на соответствующую величину W_r . Так как $\|p_r\| = \|p\| + r$, $d(p, p_r) \leq r$, то $W(p_r, L) \rightarrow W(p, L)$ при $r \rightarrow 0$ (см. (0.4.2)), и осталось сослаться на следующее утверждение.

1.7а. ЛЕММА. Если E — компакт, вес p ограничен, $L \subset C(E)$, $f \in C(E)$, $E(p, L, f) = 0$, $p_r = (p_- + r, p_+ + r)$ ($r = \text{const} > 0$), то $E(p_r, L, f) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Это утверждение вытекает из неравенства (1.1.1), в котором положено $l = l_\varepsilon - f$, где $l_\varepsilon \in L$ и $P(l_\varepsilon - f) < \varepsilon$, $q = p_r$ и $P_r = Q$ (в (1.1.1) считаем $L = \{l_\varepsilon - f\}$):

$$|P(l_\varepsilon - f) - P_r(l_\varepsilon - f)| \leq (\|p\| + r)\omega(l_\varepsilon - f, r) + \varepsilon r \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow 0$, откуда $E(p_r, L, f) < 2\varepsilon$ при $r < r(\varepsilon)$.

1.8. ТЕОРЕМА. Если веса p и q ограничены на $E \subset \mathbb{R}$, $L \subset M(E)$, $f \in M(E)$, $E(p, L, f) > 0$ и $E(q, L, f) > 0$, то

$$\begin{aligned} |E(p, L, f) - E(q, L, f)| &\leq 3WE(L, f)(N\omega(l, d + 0) + d) \\ &\quad + NE(L, f)\omega(L, d + 0) + N\omega(f, d + 0), \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

где $d = d(p, q)$, $W = \max\{W(p/\|p\|, \text{dif } L), W(q/\|q\|, \text{dif } L)\}$, $N = \max\{\|p\|, \|q\|\}$. Если E — компакт, $L \subset C(E)$, $f \in C(E)$, то условия $E(p, L, f) > 0$, $E(q, L, f) > 0$ не нужны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сперва $E(p, L, f) > 0$, $E(q, L, f) > 0$. Из (1.1.0) при $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C(E)}$, $P(\cdot) = |\cdot|_{p,E}$, $Q(\cdot) = |\cdot|_{q,E}$ и $l \in L$ получаем

$$\begin{aligned} E(q, L, f) &\leq Q(l - f) \leq P(l - f) + \|q\| \omega(l - f, d + 0) + \|l - f\|d \\ &\leq P(l - f) + \|l\| \|q\| \omega(L, d + 0) \\ &\quad + \|q\| \omega(f, d + 0) + \|l - f\|d. \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и такой элемент $l \in L$, что $P(l - f) < E(p, L, f) + \varepsilon$. При $u = E(L, f)$ и $h = E(p, L, f)$ из (0.3.1) и определения $W(p, L(f))$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|l - f\| &\leq W(p, L(f))P(l - f) \leq 3\|p\|W(p, \text{dif } L)(u/h)(h + \varepsilon), \\ \|l\| &\leq \|l - f\| + \|f\| \leq 3\|p\|W(p, \text{dif } L)(1 + \varepsilon/h)u + \|f\|. \end{aligned}$$

Из них и из (1.8.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} E(q, L, f) - E(p, L, f) &\leq \|q\|(3\|p\|W(p, \text{dif } L)u + \|f\|)\omega(L, d + 0) \\ &\quad + \|q\| \omega(f, d + 0) + 3\|p\|W(p, \text{dif } L)ud \\ &= 3W(p/\|p\|, \text{dif } L)u(\|q\| \omega(L, d + 0) + d) \\ &\quad + \|q\| \omega(f, d + 0) + \|f\| \cdot \|q\| \omega(L, d + 0) \end{aligned}$$

и аналогичное соотношение, в котором p и q меняются местами. Из этих двух неравенств и следует (1.8.1) с заменой второго множителя $E(L, f)$ на $\|f\|$. Отсюда, заменяя f на $f - l_r$, где $\|l_r - f\| < E(L, f) + r$ ($l_r \in L$, $r > 0$), при $r \rightarrow 0$ получаем (1.8.1).

Вторая часть теоремы доказывается так же, как вторая часть следствия 1.7 – ссылкой на лемму 1.7а.

Учитывая, что $E(L, f) \leq \|f\|$ при $0 \in L$ и что $W(p, L) \geq 1$ при $\|p\| = 1$, из теорем 1.8 и 0.4 получаем

1.9. СЛЕДСТВИЕ. Если L – линейное подпространство в $C(E)$, $f \in C(E)$, $\|p\| = \|q\| = 1$, $d = d(p, q)$, $\delta := \omega(L, d + 0) + d < S := S(p, L)$, то

$$|E(p, L, f) - E(q, L, f)| \leq 4\|f\| \cdot \frac{\delta}{S - \delta} + \omega(f, d + 0). \quad (1.9.1)$$

Из (1.2.1) и (1.3.3) при $X = L(f)$, $A = P = |\cdot|_{p,E}$ и $B = Q = |\cdot|_{q,E}$ вытекает

1.10. ТЕОРЕМА. Если веса p и q ограничены на E , $L \subset M(E)$, $f \in M(E)$, то

$$k(E(p, L, f), E(q, L, f)) \leq k(p, q). \quad (1.10.1)$$

1.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Если в пп. 1.5–1.10 считать веса p, q нормированными, то соответствующие неравенства и их доказательства несколько упростятся. Из этих упрощенных неравенств, пользуясь легко проверяемыми неравенствами

$$\begin{aligned} k(\lambda, \varkappa) &\leq k\left(\frac{\lambda}{\|p\|}, \frac{\varkappa}{\|q\|}\right)(1 + 4k(\|p\|, \|q\|)) + k(\|p\|, \|q\|), \\ |\lambda - \varkappa| &\leq \max\{\|p\|, \|q\|\} \left| \frac{\lambda}{\|p\|} - \frac{\varkappa}{\|q\|} \right| + \max\left\{ \frac{\lambda}{\|p\|}, \frac{\varkappa}{\|q\|} \right\} |\|p\| - \|q\|| \end{aligned} \quad (1.11.1)$$

(справедливыми для любых положительных чисел $\lambda, \varkappa, \|p\|, \|q\|$), можно снова получить соответствующие, уже видоизмененные неравенства для произвольных ограниченных нетривиальных весов p, q . Например, неравенство (1.6.1), заново доказанное для нормированных весов $\tilde{p} = p/\|p\|$ и $\tilde{q} = q/\|q\|$, имеет вид

$$k(E(\tilde{p}, L, f), E(\tilde{q}, L, f)) \leq \frac{\delta_f}{S_f - \delta_f},$$

где $\delta_f := \omega(L(f), D + 0) + D < S_f := S(\tilde{p}, L(f))$, $D = D(p, q) = d(\tilde{p}, \tilde{q})$. Отсюда и из (1.11.1) при $\lambda = E(p, L, f)$ и $\varkappa = E(q, L, f)$ получим неравенство

$$k(E(p, L, f), E(q, L, f)) \leq (1 + 4k) \frac{\delta_f}{S_f - \delta_f} + k, \quad k = k(\|p\|, \|q\|). \quad (1.11.2)$$

Заметим, что $d = d(p, q)$ и $D = D(p, q)$ при фиксированном $p \neq 0$ стремятся к нулю одновременно, $k \leq d/\|p\| + o(d)$ и величина $\omega(L(f), t)$, входящая в запись δ_f и σ_f , в (1.11.2) зависит от $t = D$, а в (1.6.1) – от $t = d$.

§ 2. Устойчивость элемента наилучшего приближения

Здесь речь пойдет об устойчивости (о непрерывной зависимости от веса p) элемента наилучшего приближения $l(p, L, f; x)$ произвольной функции $f \in C$ ($\Delta = \langle a, b \rangle$) элементами некоторого чебышевского подпространства $L \subset C(\Delta)$ с весом p .

Напомним, что условие $E(p, L, f) > 0$ является достаточным для наличия элемента $l(p, L, f)$ и его единственности для этой функции f , условие $W(p, L, f) < \infty$ – для наличия хотя бы одного элемента $l(p, L, f)$ у каждой функции $f \in M(\Delta)$ (но не его единственности) – см. [1], [3].

Для дальнейшего нам понадобится теорема об устойчивости свободы и жесткости суперсистем двух специальных типов.

1.12. При $E \subset \mathbb{R}$, $t > 0$ и $n = 1, 2, 3, \dots$ обозначим через $X_n(E, t)$ множество всех таких наборов $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} \subset E$ из $n + 1$ точек, что $a_{k+1} - a_k \geq t$, $k = 1, \dots, n$. Через $p_{1,n}(E, t)$ обозначим множество всех весов p на E , для каждого из которых в $X_n(E, t)$ имеется такой набор $A = \{a_k = a_k(p)\}$, что $p(x) = (0, 0)$ при $x \notin A$, а в точках a_k с ростом k вес $p(x)$ принимает попеременно значения $(0, 1)$ и $(1, 0)$, начиная с любого из них. Через $p_{2,n}(E, t)$ обозначим множество всех таких весов p на E , что

$$p(x) = (p_-(x) \equiv \max\{q_-(x), r_-(x)\}, p_+(x) \equiv \max\{q_+(x), r_+(x)\}),$$

где $q = (q_-, q_+)$ и $r = (r_-, r_+)$ принадлежат $\mathbf{p}_{1,n}(E, t)$, причем $q(a_1(q)) = (1, 0)$, а $r(a_1(r)) = (0, 1)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} p(x) = (0, 0) \quad \forall x \notin A(q) \cup A(r), \quad p_+(a_k(q)) = p_-(a_{k+1}(q)) = 1, \\ p_-(a_k(r)) = p_+(a_{k+1}(r)) = 1, \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (1.12.1)$$

Очевидно, классы $\mathbf{p}_{1,n}(E, t)$ и $\mathbf{p}_{2,n}(E, t)$ пусты одновременно с классом $X_n(E, t)$. Если $p \in \mathbf{p}_{2,n}(E, t)$, то число точек $x \in E$, в которых $p_+(x) > 0$ (т.е. $p_+(x) = 1$), не больше $n + 1$ и не меньше $(n + 1)/2$. Ясно также, что если класс $X_n(E, t)$ не пуст при $t = T$, то он не пуст и при $0 < t \leq T$, и что если E состоит не менее чем из $n + 1$ точек, то он не пуст при всех достаточно малых $t > 0$. Если L — n -мерное чебышевское подпространство из $C(\Delta = [a, b])$, то при $0 < t < |\Delta|/n$ класс $X_n(\Delta, t)$ не пуст и $W(p, L) < \infty$ при $p \in \mathbf{p}_{j,n}(\Delta, t)$, $j = 1, 2$ (см. п. 0.1).

Для непустого класса $X_n(E, t)$ и семейства $L \subset M(E)$ положим

$$W_{j,n}(L, t) := W(\mathbf{p}_{j,n}(E, t), L), \quad S_{j,n}(L, t) := S(\mathbf{p}_{j,n}(E, t), L) \quad (1.12.2)$$

($j = 1, 2$); если $\dim L$ — линейная размерность L (т.е. размерность линейной оболочки L) — есть n , то индекс n здесь можно опускать.

Очевидно, $W_{1,n}(L, t)$ и $W_{2,n}(L, t)$ не возрастают (как функции t), а $S_{1,n}(L, t)$ и $S_{2,n}(L, t)$ не убывают на их области определения. Если класс $X_n(E, t)$ не пуст при некотором $t > 0$ и пуст при $t = T$ (что имеет место при ограниченности E), положим

$$S_{j,n}(L, T) := \sup\{S_{j,n}(L, t)\}, \quad W_{j,n}(L, T) := \inf\{W_{j,n}(L, t)\},$$

где $\sup$ и $\inf$ берутся по всем $t > 0$, для которых класс $X_n(E, t)$ не пуст ($j = 1, 2$).

Если $L \subset M(\langle a, b \rangle)$, $\dim L < \infty$, через $\omega^{-1}(t)$ обозначаем функцию, обратную к $t = \omega(L, \delta)$: $\omega^{-1}(t) := \min\{\delta: \omega(L, \delta) = t\}$.

1.13. ЛЕММА. Пусть $\Delta = [a, b]$, $L \subset M(\Delta)$, n — натуральное число. Тогда при $0 < u \leq v < |\Delta|/n$ имеем неравенство

$$0 \leq S_{j,n}(L, v) - S_{j,n}(L, u) \leq \omega(L, n(v - u) + 0) + n(v - u), \quad j = 1, 2. \quad (1.13.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение

1.13а. При $0 < u < v < |\Delta|/n$ для любого $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} \in X_n(\Delta, u)$ найдется $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n+1}\} \in X_n(\Delta, v)$, для которого $|b_k - a_k| \leq n(v - u) \forall k$.

Для этого положим $h = v - u$, $b_1 = \max\{a, a_1 - nh\}$, $b_k = \max\{b_{k-1} + v, a_k - nh\}$ при $k = 2, 3, \dots, n + 1$. Очевидно, $b_k - b_{k-1} \geq v$ при $1 \leq k \leq n + 1$. Покажем, что

$b_{n+1} \leq b$, что вместе с предыдущим даст $\{b_1, b_2, \dots, b_{n+1}\} \in X_n(\Delta, v)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} b_1 + v &= \max\{a + v, a_1 + u - (n-1)h\} \leq \max\{a + v, a_2 - (n-1)h\}, \\ b_2 &= \max\{b_1 + v, a_2 - nh\} \leq \max\{a + v, a_2 - (n-1)h, a_2 - nh\} \\ &= \max\{a + v, a_2 - (n-1)h\}, \\ b_2 + v &\leq \max\{a + 2v, a_2 + u - (n-2)h\} \leq \max\{a + 2v, a_3 - (n-2)h\}, \\ b_3 &= \max\{b_2 + v, a_3 - nh\} \leq \max\{a + 2v, a_3 - (n-2)h\}, \\ &\dots\dots\dots \\ b_{n+1} &\leq \max\{a + nv, a_{n+1}\} \leq b. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $b_k - a_k \leq (k-1)h$, $k = 1, 2, \dots, n+1$. Действительно, это очевидно при $k = 1$. Если это верно при некотором $k \geq 1$, то

$$\begin{aligned} b_{k+1} - a_{k+1} &= \max\{(b_k - a_k) + v - (a_{k+1} - a_k), -nh\} \\ &\leq \max\{(k-1)h + h, -nh\} = kh, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Так как $a_k - b_k \leq nh$, то $|b_k - a_k| \leq nh$, и 1.13а доказано.

1.13b. Пусть $\varepsilon > 0$, а $p \in \mathbf{p}_{j,n}(\Delta, u)$ таков, что $S(p, L) < S_{j,n}(L, u) + \varepsilon$. По 1.13а найдется такой вес $q \in \mathbf{p}_{j,n}(\Delta, v)$, что $d(p, q) \leq nh$. По 0.4 имеем

$$S_{j,n}(L, v) - (S_{j,n}(L, u) + \varepsilon) < S(q, L) - S(p, L) \leq \omega(L, nh + 0) + nh,$$

откуда и следует (1.13.1).

Напомним определение четности нуля непрерывной функции.

Если в некоторой окрестности U точки $t \in \mathbb{R}$ функция $f(x)$ задана и непрерывна, $f(t) = 0$, $f(t) \neq 0 \quad \forall x \in U \setminus \{t\}$, то $f(x)$ при переходе x через t либо меняет знак, тогда t называем *нечетным нулем функции* f и полагаем $n(f, t) = 1$, либо не меняет, тогда t называем *четным нулем* f и полагаем $n(f, t) = 2$. Число $n(f, t)$ называют *четностью нуля* функции f в точке t . Если t – концевая точка промежутка Δ , на котором $f(x)$ задана и непрерывна, $f(t) = 0$, а $f(x) \neq 0$ вблизи t при $x \neq t$, то считаем t нечетным нулем и полагаем $n(f, t) = 1$.

1.14. ТЕОРЕМА. Пусть L является либо n -мерным чебышевским подпространством из $C(\Delta = [a, b])$ (при $j = 1$), либо (при $j = 2$) таким замкнутым конечномерным конусом в $C(\Delta)$, что у каждой функции $l \in L$ сумма четностей ее нулей на Δ не превосходит n ($n \geq 1$). Тогда функции $W_{j,n}(L, t)$ и $S_{j,n}(L, t)$ ($j = 1, 2$) непрерывны при $t > 0$ и

$$0 \leq S_{j,n}(L, t+h) - S_{j,n}(L, t) \leq \omega(L, nh) + nh \quad \forall t > 0, \quad \forall h > 0. \quad (1.14.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $W_{j,k}(L, t) < \infty$, $j = 1, 2$, $t > 0$.

1. Пусть сначала $j = 1$. По теореме 0.1 $W(p, L) < \infty$ для любого $p \in \mathbf{p}_{1,n}(\Delta, t)$. Если бы было $W_{1,n}(L, t) = \infty$, то нашлась бы последовательность весов $p_k \in \mathbf{p}_{1,n}(\Delta, t)$, для которой $W(p_k, L) \rightarrow \infty$. В случае необходимости переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что p_k сходится к некоторому $p \in \mathbf{p}_{1,n}(\Delta, t)$ по d -метрике. Но тогда ввиду устойчивости $W(p, L)$ (теорема 0.4) было бы $W(p, L) = \infty$.

2. Пусть теперь $j = 2$. Покажем, что $W(p, L) < \infty$ для любого $p \in \mathbf{p}_{2,n}(\Delta, t)$. Если бы для такого p было $W(p, L) = \infty$, то (так как $L \cap \{f: f \in C(\Delta), \|f\| = 1\}$ – компакт) нашелся бы элемент $l \in L$, для которого $\|l\| = 1$, и $|\lambda l|_{p,\Delta} = 0$ при любом $\lambda = \text{const} > 0$. Последнее означает (см. (1.12.1)), что все $n + 1$ точек $a_1, b_2, a_3, b_4, \dots$, в которых $p_+(x) = 1$, лежат на $E^- := \{x \in \Delta: l(x) \leq 0\}$, а все $n + 1$ точек $b_1, a_2, b_3, a_4, \dots$, в которых $p_-(x) = 1$, – на $E^+ := \{x \in \Delta: l(x) \geq 0\}$. Очевидно, $E^- \cup E^+ = \Delta$, а $E^- \cap E^+$ – множество всех нулей функции $l(x)$.

Положим $a_k := a_k(q)$, $b_k := a_k(r)$ – см. определение $\mathbf{p}_{2,n}$ в п. 1.12.

а) Будем сначала считать все нули функции l нечетными. Тогда каждое из множеств E^- и E^+ распадается на конечное число непересекающихся замкнутых отрезков, соответственно будем их называть $(-)$ -отрезками и $(+)$ -отрезками, крайние из которых могут вырождаться в концевые точки отрезка Δ . Очевидно, что $(-)$ -отрезки и $(+)$ -отрезки перемежаются на Δ (одноточечные отрезки, если они имеются, являются крайними) и их общее число m не превосходит $n + 1$. Очевидно также, что на каждом $(-)$ -отрезке лежит не более одной точки множества $A^+ = \{a_1, a_3, a_5, \dots\}$ (на котором $p_+(x) = 1$), а на каждом $(+)$ -отрезке – не более одной точки множества $A^- = \{a_2, a_4, a_6, \dots\}$ (на котором $p_-(x) = 1$). Так как множество $A := A^- \cup A^+ = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ состоит из $n + 1$ точек, и $A^- \subset E^+$, $A^+ \subset E^-$, то $m = n + 1$. Занумеруем слева направо подряд все $(-)$ -отрезки и $(+)$ -отрезки вместе в конечную последовательность $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{n+1}$. Тогда между отрезками Δ_k и точками $a_k \in A$ устанавливается взаимно однозначное соответствие, при котором $a_k \in \Delta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n + 1$). Подобное соответствие “ $b_k \in \Delta_k$ ” устанавливается также между отрезками Δ_k и точками $b_k \in B := \{b_1, b_2, \dots, b_{n+1}\}$. При этом если Δ_k – $(-)$ -отрезок, то $p_+(a_k) = p_+(b_k) = 1$, а если Δ_k – $(+)$ -отрезок, то $p_-(a_k) = p_-(b_k) = 1$. С другой стороны (см. (1.12.1)), имеем равенства: $p_+(a_k) = p_-(b_k) = 1$ при $k = 1, 3, 5, \dots$; $p_-(a_k) = p_+(b_k) = 1$ при $k = 2, 4, 6, \dots$. Поэтому либо $p_-(a_k) = p_+(a_k) = 1$, либо $p_-(b_k) = p_+(b_k) = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n + 1$). Отсюда и из определения веса p следует, что $a_k = b_k$, $l(a_k) = 0$ при всех k , так что $l(x)$ имеет не менее $n + 1$ нулей. Это противоречит условию теоремы.

б) Пусть теперь функция l имеет хотя бы один четный нуль. Тогда такие нули разбивают содержащие их отрезки, составляющие E^- и E^+ , на меньшие невырожденные отрезки, внутри которых $l(x)$ уже сохраняет знак. Составим семейство D^- $(-)$ -отрезков, включив в него:

- 1) все отрезки, составляющие E^- и не содержащие внутри себя нулей функции l ;
- 2) все отрезки, на которые были разбиты указанным выше способом отрезки, составляющие E^- (и до разбиения содержавшие четные нули функции l);

3) вырожденные в точки отрезки, являющиеся одновременно четными нулями функции l и внутренними точками E^+ .

Отрезки, составляющие D^- , назовем $(-)$ -отрезками; определение семейства D^+ и $(+)$ -отрезков мы получим, меняя здесь местами знаки $-$ и $+$. Положив $D = D^- \cup D^+$, занумеруем отрезки семейства D в последовательность $\{\Delta_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) в порядке их естественного следования слева направо. При этом одноточечный отрезок Δ_k совпадает с правым концом Δ_{k-1} и левым концом Δ_{k+1} . Как и выше, между отрезками Δ_k и точками множеств A и B устанавливается взаимно однозначное соответствие по включению $a_k \in \Delta_k$, $b_k \in \Delta_k$, что и в этом случае приводит к противоречию с условием теоремы. Этим доказано, что $W(p, L) < \infty$ для любого $p \in p_{2,n}(\Delta, t)$.

с) Из неравенства $W(p, L) < \infty \quad \forall p \in p_{2,n}(\Delta, t)$, как и в п. 1 из неравенства $W(p, L) < \infty \quad \forall p \in p_{1,n}(\Delta, t)$ мы получили неравенство $W_{1,n}(L, t) < \infty$, получаем неравенство $W_{2,n}(L, t) < \infty$ ($t > 0$).

3. По лемме 1.13 выполняется неравенство (1.14.1), функции $S_{j,n}(L, t)$ непрерывны при $t > 0$, а так как $1/S_{j,n}(L, t) = W_{j,n}(L, t) < \infty$, то при $t > 0$ непрерывна и функция $W_{j,n}(L, t)$. Теорема доказана.

1.15. ТЕОРЕМА. Если веса p, q ограничены на $\Delta = [a, b]$, L — n -мерное чебышевское подпространство в $C(\Delta)$, $f \in C(\Delta)$, $E(p, L, f) > 0$, $E(q, L, f) > 0$, то

$$\|l(p, L, f) - l(q, L, f)\| \leq A\sigma(p, q, L(f); d), \quad d = d(p, q), \quad (1.15.1)$$

$$\begin{aligned} A &= \bar{S}^{-1}W_{1,n}(L, \omega^{-1}(2\bar{S}))(E(p, L, f)W(p, L(f)) + E(q, L, f)W(q, L(f))) \\ &\leq 3\bar{S}^{-1}W_{1,n}(L, \omega^{-1}(2\bar{S}))(W(p, L) + W(q, L))E(L, f), \end{aligned} \quad (1.15.2)$$

где $\bar{S} := \max\{S(p/\|p\|, L(f)), S(q/\|q\|, L(f))\}$, а $t = \omega_f^{-1}(u)$ — функция, обратная к $u = \omega(L(f), t)$ ($\omega_f^{-1}(u) := \min\{t: \omega(L(f), t) = u\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть дополнительно $p, q \in DS(\Delta)$. Положим $l := l(p, L, f)$, пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ — точки p -альтернанса пары (l, f) (см. 0.2), $h = E(p, L, f)$ и для определенности пусть

$$(l(x_{2i-1}) - f(x_{2i-1}))p_+(x_{2i-1}) = h, \quad (1.15.3)$$

$$(l(x_{2i}) - f(x_{2i}))p_-(x_{2i}) = -h, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.15.4)$$

Положим еще $m := l(q, L, f)$, $h' = E(q, L, f)$, $P(\cdot) = |\cdot|_{p, \Delta}$, $Q(\cdot) = |\cdot|_{q, \Delta}$.

2. Из (1.1.2) получаем неравенства

$$P(m - f) \leq Q(m - f) + Q(m - f)y = h' + h'y,$$

$$h' \leq Q(l - f) \leq P(l - f) + P(l - f)z = h + h'z,$$

$$(y = W(q, L(f)) \cdot (\|p\| \omega(L(f), d) + d), \quad z = W(p, L(f)) \cdot (\|q\| \omega(L(f), d) + d)),$$

$$P(m - f) \leq h + \alpha, \quad (1.15.5)$$

$$\alpha := h'z + h'y \leq \{hW(p, L(f)) + h'W(q, L(f))\}\sigma(p, q, L(f); d). \quad (1.15.6)$$

3. Поэтому

$$(m(x_{2i-1}) - f(x_{2i-1}))p_+(x_{2i-1}) \leq h + \alpha, \quad (1.15.7)$$

$$-(m(x_{2i}) - f(x_{2i}))p_-(x_{2i}) \leq h + \alpha. \quad (1.15.8)$$

Почленно вычитая из неравенства (1.15.7) равенство (1.15.3) и прибавляя к неравенству (1.15.8) равенство (1.15.4), получаем

$$(m(x_{2i-1}) - l(x_{2i-1}))p_+(x_{2i-1}) \leq \alpha, \quad (1.15.9)$$

$$(m(x_{2i}) - l(x_{2i}))p_-(x_{2i}) \geq -\alpha.$$

Рассмотрим такой вес $u(x) = (u_-(x), u_+(x))$, что $u_-(x_{2i}) = p_-(x_{2i})$, $u_-(x) = 0$ при $x \neq x_{2i}$, $u_+(x_{2i-1}) = p_+(x_{2i-1})$, $u_+(x) = 0$ при $x \neq x_{2i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$). По теореме 0.1 $W(u, L) < \infty$. Очевидно, $|m - l|_{u, \Delta} \leq \alpha$, так что (по определению $W(u, L)$)

$$\|l - m\| \leq W(u, L) \cdot \alpha. \quad (1.15.10)$$

Оценим $W(u, L)$. Из (1.15.3) и (1.15.4) имеем

$$p_+(x_{2i-1}) \geq \frac{h}{\|l - f\|}, \quad p_-(x_{2i}) \geq \frac{h}{\|l - f\|}.$$

Отсюда и из неравенства $\|l - f\| \leq W(p, L(f))h$ получаем

$$r := \min\{p_+(x_{2i-1}), p_-(x_{2i}) : i = 1, 2, \dots\} \geq \frac{1}{W(p, L(f))}. \quad (1.15.11)$$

Положим $v(x) = (v_-(x), v_+(x)) := (\text{sign } u_-(x), \text{sign } u_+(x))$ (считаем $\text{sign } 0 = 0$). Так как $v_-(x) \leq u_-(x)/r$, $v_+(x) \leq u_+(x)/r$, то (см. (1.15.11))

$$\begin{aligned} W(u, L) &= \frac{1}{r} W\left(\frac{u}{r}, L\right) \leq W(p, L(f)) \cdot W(v, L) \\ &\leq W(p, L(f)) \cdot W_{1,n}(L, \rho), \\ \rho &:= \min\{x_{k+1} - x_k : k = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (1.15.12)$$

4. Заметим теперь, что если $g := l - f$, то по (1.15.3) и (1.15.4) имеем неравенство

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq \frac{2h}{\|p\|}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому $\|g\| \cdot \omega(g/\|g\|, \rho) = \omega(g, \rho) \geq 2h/\|p\|$. Отсюда и из соотношения $\|g\| \leq W(p, L(f))h = h/S(p, L(f))$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} \omega(L(f), \rho) &\geq \frac{2h}{\|p\| \cdot \|g\|} \geq 2S\left(\frac{p}{\|p\|}, L(f)\right), \\ \rho &\geq \omega_f^{-1}\left(2S\left(\frac{p}{\|p\|}, L(f)\right)\right). \end{aligned} \quad (1.15.13)$$

5. Учитывая невозрастание функции $W_{1,n}(L, t) = 1/S_{1,n}(L, t)$, из (1.15.10), (1.15.12) и (1.15.13) получаем

$$\|l - m\| \leq \left(\frac{1}{S} \left(\frac{p}{\|p\|}, L(f) \right) \right)^{-1} \cdot W_{1,n} \left(L, \omega_f^{-1} \left(2S \left(\frac{p}{\|p\|}, L(f) \right) \right) \right) \alpha. \quad (1.15.14)$$

Если здесь p и q (а также l и m) поменять местами, то $\|l - m\|$ и α не изменятся, а в остальной части неравенства p заменяется на q . Из этих двух неравенств и следует (1.15.1).

6. Выше доказательство начиналось с предположения $p, q \in \text{DS}(\Delta)$, так что если p, q лишь ограничены, то неравенство (1.15.1) верно при замене p, q их регуляризациями $\bar{p}, \bar{q}$ (см. введение). Но так как $d(p, q) = d(\bar{p}, \bar{q})$ (см. [4, теорема 3]), а также, очевидно,

$$\begin{aligned} \|\bar{r}\| &= \|r\|, \quad l(r, L, f) = l(\bar{r}, L, f), \quad E(r, L, f) = E(\bar{r}, L, f), \\ S\left(\frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}, L(f)\right) &= S\left(\frac{r}{\|r\|}, L(f)\right), \quad W\left(\frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}, L(f)\right) = W\left(\frac{r}{\|r\|}, L(f)\right) \end{aligned}$$

при $r = p, q$, то теорема 1.15 доказана полностью.

Напомним, что $\tilde{f} := f/\|f\|$, $\tilde{p} := p/\|p\|$, $D(p, q) := d(\tilde{p}, \tilde{q})$.

1.16. ТЕОРЕМА. Если веса p, q ограничены на $\Delta = [a, b]$, L — n -мерное чебышевское подпространство в $C(\Delta)$, $f \in C(\Delta)$, $E(p, L, f) > 0$, $E(q, L, f) > 0$, $d = d(p, q)$, $D = D(\tilde{p}, \tilde{q})$, то

$$\begin{aligned} \|l(p, L, f) - l(q, L, f)\| &\leq MB(W(\tilde{p}, L) + W(\tilde{q}, L))E(L, f)\Omega(d) \\ &\quad + \frac{3}{2}MB(W(p, L) + W(q, L))E(L, f)d, \end{aligned} \quad (1.16.1a)$$

$$\begin{aligned} \|l(p, L, f) - l(q, L, f)\| &\leq B(W(\tilde{p}, L) + W(\tilde{q}, L))E(L, f) \left(\Omega(D) + \frac{3}{2}D \right), \end{aligned} \quad (1.16.1b)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \max \left\{ \frac{\|p\|}{\|q\|}, \frac{\|q\|}{\|p\|} \right\}, \quad \Omega(t) = \omega(L, t) + \omega(\tilde{f}, t), \\ B &= \frac{6}{s} W_{1,n}(L, \Omega^{-1}(s)), \quad s = \max \{ E(\tilde{p}, L, \tilde{f})S(\tilde{p}, L), E(\tilde{q}, L, \tilde{f})S(\tilde{q}, L) \}, \end{aligned}$$

функция Ω^{-1} обратна к Ω .

1.16a. ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из приводимого ниже доказательства, в этой теореме условие $E(q, L, f) > 0$ можно заменить условием $W(q, L) < \infty$ (которое по лемме 3.3 из [1] слабее условия $E(q, L, f) > 0$). При этом в выражении для B под s нужно будет понимать величину $E(\tilde{p}, L, \tilde{f})S(\tilde{p}, L)$, а под $l(q, L, f)$ — какой-либо элемент наилучшего приближения из L для f с весом q .

Отметим также, что функции Ω и Ω^{-1} не зависят от p и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.16 аналогично доказательству теоремы 1.15. Укажем по пунктам те изменения, которые при этом нужно произвести.

1. Оставить без изменений.
2. По (1.1.0) имеем

$$\begin{aligned} P(m-f) &\leq Q(m-f) + \|p\| \omega(m-f, d) + \|m-f\|d, \\ Q(m-f) &\leq Q(l-f) \leq P(l-f) + \|q\| \omega(l-f, d) + \|l-f\|d, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} P(m-f) &\leq h + \|q\| \omega(l-f, d) + \|l-f\|d + \|p\| \omega(m-f, d) + \|m-f\|d \\ &\leq h + \|q\| \omega(l, d) + \|p\| \omega(m, d) + (\|q\| + \|p\|)\omega(f, d) \\ &\quad + (\|l-f\| + \|m-f\|)d \\ &\leq h + (\|q\| \cdot \|l\| + \|p\| \cdot \|m\|)\omega(L, d) \\ &\quad + (\|q\| + \|p\|)\omega(f, d) + (\|l-f\| + \|m-f\|)d. \end{aligned} \quad (1.16.2)$$

Так как

$$\|l\| \leq W(p, L)P(l) \leq W(p, L)(P(l-f) + P(f)) \leq 2\|p\|W(p, L)\|f\|$$

($P(l-f) = h \leq P(0-f) \leq \|f\| \cdot \|p\|$), то

$$\|l\| \leq 2\|p\|W(p, L)\|f\| = 2W(\tilde{p}, L)\|f\|, \quad (1.16.3)$$

и, аналогично,

$$\|m\| \leq 2\|q\|W(q, L)\|f\| = 2W(\tilde{q}, L)\|f\|. \quad (1.16.4)$$

Так как $W(\varkappa, L) \geq 1$ при $\|\varkappa\| = 1$, то отсюда

$$\|l-f\| \leq 3W(\tilde{p}, L)\|f\|, \quad \|m-f\| \leq 3W(\tilde{q}, L)\|f\|. \quad (1.16.5)$$

Из (1.16.2)–(1.16.5) получаем неравенство

$$\begin{aligned} P(m-f) &\leq h + 2\|f\|(\|q\|W(\tilde{p}, L) + \|p\|W(\tilde{q}, L))\omega(L, d) \\ &\quad + (\|q\| + \|p\|)\omega(f, d) + 3\|f\|(W(\tilde{p}, L) + W(\tilde{q}, L))d \\ &\leq h + \alpha, \\ \alpha &= 2\|f\|(\|q\|W(\tilde{p}, L) + \|p\|W(\tilde{q}, L))(\omega(L, d) + \omega(\tilde{f}, d)) \\ &\quad + 3\|f\|(\|p\|W(p, L) + \|q\|W(q, L))d \end{aligned} \quad (1.16.6)$$

(мы воспользовались тем, что $W(\varkappa, L) \geq 1$ при $\|\varkappa\| = 1$, откуда $\|p\| + \|q\| \leq \|p\|W(\tilde{q}, L) + \|q\|W(\tilde{p}, L)$). Положив $M = \max\{\|p\|/\|q\|, \|q\|/\|p\|\}$, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{\alpha}{\|f\| \cdot \|p\|}, \frac{\alpha}{\|f\| \cdot \|q\|}\right\} &\leq 2M(W(\tilde{p}, L) + W(\tilde{q}, L))(\omega(L, d) + \omega(\tilde{f}, d)) \\ &\quad + 3M(W(p, L) + W(q, L))d. \end{aligned} \quad (1.16.7)$$

3. Не изменяется.

4. Заметим, что для $g := l - f$ из (1.15.3) и (1.15.4) получаем неравенства

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \geq \frac{2h}{\|p\|}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \omega(g, \rho) \geq \frac{2h}{\|p\|}.$$

Отсюда, учитывая (1.16.3) и неравенство $W(\tilde{p}, L) \geq 1$, имеем оценки

$$\begin{aligned} 2E(\tilde{p}, L, f) &= \frac{2h}{\|p\|} \leq \omega(l - f, \rho) \leq \omega(l, \rho) + \omega(f, \rho) \\ &\leq \|l\| \omega(L, \rho) + \|f\| \omega\left(\frac{f}{\|f\|}, \rho\right) \leq 2\|f\| W(\tilde{p}, L) \Omega(\rho), \\ \Omega(\rho) &:= \omega(L, \rho) + \omega(\tilde{f}, \rho) \geq E(\tilde{p}, L, \tilde{f}) S(\tilde{p}, L), \\ \rho &\geq \Omega^{-1}(E(\tilde{p}, L, \tilde{f}) S(\tilde{p}, L)). \end{aligned} \quad (1.16.8)$$

5. Из (1.15.10), (1.15.12), (1.16.7) и (0.3.1) получаем

$$\begin{aligned} \|l - m\| &\leq W(p, L(f)) W_{1,n}(L, \Omega^{-1}(E(\tilde{p}, L, \tilde{f}) S(\tilde{p}, L))) \alpha \\ &\leq 3s_p^{-1} \cdot W_{1,n}(L, \Omega^{-1}(s_p)) E(L, f) \frac{\alpha}{\|f\| \cdot \|p\|}, \\ s_p &:= E(\tilde{p}, L, \tilde{f}) S(\tilde{p}, L). \end{aligned} \quad (1.16.9)$$

Меняя здесь местами p и q , l и m , получим еще одно неравенство. Учитывая убывание функции $(1/s)W_{1,n}(L, \Omega^{-1}(s))$, из этих неравенств и из (1.16.7) получаем (1.16.1a) и (1.16.1b).

6. Без изменений.

Из замечания 1.16а и теоремы 0.4 получается

1.17. ТЕОРЕМА. Пусть p и q — нормированные веса на $\Delta = [a, b]$, L — чебышевское подпространство на Δ , $\omega(L, d) + d \leq (1 - k)S(p, L)$ при некотором $k \in (0, 1)$. Тогда если $f \in C(\Delta)$ и $E(p, L, f) > 0$, то

$$\|l(p, L, f) - l(q, L, f)\| \leq \frac{C}{k} \left\{ \omega(L, d) + \omega\left(\frac{f}{\|f\|}, d\right) + d \right\}, \quad d = d(p, q), \quad (1.17.1)$$

где $C = C(p, L, f)$ не зависит от q , d и k .

Отметим, что из чебышевности L и условия $E(p, L, f) > 0$ следует существование и единственность $l(p, L, f)$ (см. [1, п. 3.8], [2, п. 2]). При этом элемент $l(q, L, f)$ (при условии $\omega(L, d) + d \leq (1 - k)S(p, L)$) его существование следует из конечности $W(q, L)$ — см. (0.4.2)) может быть не единственным, и тогда, конечно, неравенство (1.17.1) выполняется для каждого элемента $l(q, L, f)$. Единственность же $l(q, L, f)$ при $E(p, L, f) > 0$ имеется, например, если $d = d(p, q)$ столь мало, что правая часть неравенства (1.8.1) меньше $E(p, L, f)$, так как тогда $E(q, L, f) > 0$.

§ 3. Случай подпространства, чебышевского на полуинтервале. Главный элемент наилучшего приближения

Здесь мы приведем обобщения некоторых результатов, полученных выше для случая чебышевских подпространств L на отрезке $\Delta = [a, b]$, на случай подпространств $L \subset C(\Delta)$, чебышевских лишь на полуинтервале $[a, b]$ или $(a, b]$. Эти обобщения используются в приводимых в гл. 2 приложениях знакочувствительных аппроксимаций к теории ужей.

1.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L – n -мерное подпространство в $C(\Delta = [a, b])$, чебышевское на интервале (a, b) , p – ограниченный вес на Δ , $p \not\equiv (0, 0)$, $f \in C(\Delta) \setminus L$. Элемент наилучшего приближения $l(p, L, f)$ называется *индуцированным элементом наилучшего приближения* функции f подпространством L с весом p , если существует последовательность весов $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых $\text{supp}(q_k) \subset (a, b) \forall k$, $d(q_k, p) \rightarrow 0$ и $\|l(q_k, L, f) - l(p, L, f)\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C(\Delta)}$).

1.19. ЛЕММА. Пусть L – n -мерное подпространство в $C(\Delta = [a, b])$, чебышевское на интервале (a, b) , $p \in \text{DS}(\Delta)$, $f \in C(\Delta) \setminus L$, $W(p, L(f)) < \infty$. Тогда f имеет в L по крайней мере один индуцированный элемент наилучшего приближения с весом p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем $\|p\| = 1$. При $0 < \delta < (b - a)/2$ через $\psi(\delta; x)$ обозначим линейное отображение отрезка $[a + \delta, b - \delta]$ на $[a, b]$ такое, что $\psi(\delta; a + \delta) = a$, $\psi(\delta; b - \delta) = b$. Пусть $0 < \delta_k < (b - a)/2$, $\delta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), $q_k(x) = p(\psi(\delta_k; x))$ при $x \in \Delta_k := [a + \delta_k, b - \delta_k]$, $q_k(x) = 0$ при $x \in \Delta \setminus \Delta_k$. Тогда $\text{supp}(q_k) \subset (a, b)$, при $k \rightarrow \infty$ имеем $d(q_k, p) \rightarrow 0$, $W(q_k, L(f)) < \infty$ (см. п. 0.4). При этих k существуют $l(q_k, L, f) =: l_k$ – см. введение. Из определения $W(q_k, L(f))$, из п. 0.4 и п. 1.8 получаем

$$\|l_k - f\| \leq W(q_k, L(f))E(q_k, L, f) \rightarrow W(p, L(f))E(p, L, f) =: M < \infty,$$

так что последовательность $\{l_k\} \subset L$ ограничена. Пусть l^* – какой-либо ее предельный элемент. Можно считать, что $\|l^* - l_k\| \rightarrow 0$. Положим $g = l^* - f$, $g_k = l_k - f$ ($\|g_k - g\| \rightarrow 0$), $P(\cdot) = |\cdot|_{p, \Delta}$, $q = q_k$, $Q_k(\cdot) = |\cdot|_{q, \Delta}$ ($\|q_k\| = \|Q_k\| = 1$), $d_k = d(q_k, p)$. Пользуясь выпуклостью функционала Q_k и неравенством (1.1.1) с $Q = Q_k$, $l = g$ и $d = d_k$, получаем

$$\begin{aligned} |Q_k(g_k) - P(g)| &\leq |Q_k(g_k) - Q_k(g)| + |Q_k(g) - P(g)| \\ &\leq \|g_k - g\| + \omega(g, d_k) + \|g\|d_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

($k \rightarrow \infty$). Отсюда $P(l^* - f) = \lim Q_k(g_k) = \lim E(q_k, L, f) = E(p, L, f)$ (см. п. 1.8), так что $l^* = l(p, L, f)$. Лемма доказана.

1.20. ЛЕММА. При условиях леммы 1.19 каждый индуцированный элемент наилучшего приближения $l^* = l(p, L, f)$ имеет с f $(n + 1)$ -точечный p -альтернанс на Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства нам понадобится следующее свойство сходимости по d -расстоянию, вытекающее из рассуждений доказательства теоремы 5 работы [4].

Если последовательность функций f_k , определенных и полунепрерывных сверху на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, сходится по d -метрике к функции f , определенной и полунепрерывной сверху на E , а последовательность точек $x_k \in E$ сходится к некоторой точке $t \in E$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_k) \leq f(t)$.

Ниже будем придерживаться обозначений, принятых в доказательстве леммы 1.19, и предположения $\|p\| = 1$.

Пусть $q_k = (q_{k-}, q_{k+})$, $h = E(p, L, f)$. Заметим, что у каждой пары l_k, f имеется $(n+1)$ -точечный q_k -альтернанс $x_1(k) < x_2(k) < \dots < x_{n+1}(k)$ на $\Delta_k \subset (a, b)$ (см. п. 0.2) и (ввиду неравенств $0 < q_{k\pm}(x_j(k)) \leq 1$) при всех достаточно больших k ($k \geq K'$) выполняется соотношение

$$|g_k(x_j(k))| \geq E(q_k, L, f) > \frac{2}{3}h, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (1.20.1)$$

Так как $\|g_k - g\| = \|l_k - l^*\| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), то $\|g_k - g\| < h/12$ при всех достаточно больших k ($k \geq K''$).

Фиксируем $k \geq K = \max\{K', K''\}$. Открытое множество U определим так:

$$U = \left\{ x: x \in (a, b), |g(x)| > \frac{h}{3} \right\}.$$

Для длины $|\gamma|$ каждого из интервалов $\gamma = (\alpha, \beta)$, составляющих U и содержащих хотя бы одну точку $x_j(k)$, по (1.20.1) имеем, например, при $\beta \in (a, b)$, $g(\beta) = h/3$

$$\omega(|\gamma|) := \omega(g, |\gamma|) \geq |g(x_j(k))| - |g(\beta)| \geq \left(|g_k(x_j(k))| - \frac{h}{12} \right) - \frac{h}{3} > \frac{h}{4},$$

$|\gamma| > \omega^{-1}(h/4)$. Поэтому число таких γ не превосходит $|\Delta|/\omega^{-1}(h/4)$. Еще отметим, что знаки величин $g_k(x_{j+1}(k))$ и $g_k(x_j(k))$, $j = 1, 2, \dots$, противоположны, а их модули превосходят $2h/3$, и если $x \in \gamma \ni x_i(k)$, $i = 1, 2, \dots$, то

$$|g_k(x)| > |g(x)| - \frac{h}{12} > \frac{h}{4}.$$

Поэтому интервалы γ , содержащие соседние точки $x_i(k)$, находятся на положительном расстоянии друг от друга. Из сказанного следует, что найдутся такой набор $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}\}$ из $n+1$ этих интервалов γ , попарно находящихся на положительном расстоянии друг от друга, и такая подпоследовательность последовательности $\{g_k\}$, которую мы также обозначим через $\{g_k\}_{k=K}^\infty$, что $x_j(k) \in \gamma_j$ для любых $k \geq K$ и $j = 1, \dots, n+1$.

Фиксируем j и обозначим через t_j какую-либо предельную точку последовательности $\{x_j(k)\}_{k=K}^\infty$. Будем считать последовательность $\{g_k\}$ выбранной так, что $x_k := x_j(k) \rightarrow t_j$ при $k \rightarrow \infty$ ($t_j \in \bar{\gamma}_j$). Пусть для определенности

$$(g_k, q_k)(x_k) = g(x_k)q_{k+}(x_k) = E(q_k, L, f).$$

Так как $\|g_k - g\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то из замечания в начале доказательства получаем

$$h = \lim E(q_k, L, f) = \lim g_k(x_k)q_{k+}(x_k) \leq g(t_j) \overline{\lim} q_{k+}(x_k) \leq g(t_j)p_+(t_j) \leq h.$$

Отсюда $g(t_j)p_+(t_j) = h = E(p, L, f)$. Этим доказано наличие у пары l^*, f $(n+1)$ -точечного p -альтернанса на Δ . Лемма доказана.

1.21. ЛЕММА. *Если при условиях леммы 1.19 каждая функция $l \in L$ ($l \neq 0$) имеет на Δ не более n геометрически различных нулей, то у f имеется ровно один элемент наилучшего приближения $l(p, L, f)$, имеющий с f $(n+1)$ -точечный p -альтернанс на Δ .*

Доказательство этой леммы мы не приводим, поскольку оно основано на стандартном чебышевском методе подсчета нулей функции $l_1(x) - l_2(x)$ (т.е. числа точек пересечения графиков функций $l_1(x)$ и $l_2(x)$), где элементы наилучшего приближения $l_j = l_j(p, l, f)$ ($j = 1, 2$) имеют с f $(n+1)$ -точечные p -альтернансы. Этот подсчет показывает, что функция $l_1 - l_2 \in L$ имеет на Δ не менее $n+1$ нулей, так что $l_1 - l_2 \equiv 0$.

1.22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L — n -мерное линейное подпространство из $C(\Delta = [a, b])$, $p \in \text{DS}(\Delta)$, $f \in C(\Delta) \setminus L$. Элемент наилучшего приближения $l(p, L, f)$ называется *главным элементом наилучшего приближения* функции f элементами подпространства L с весом p , если в $A(p, L, f)$ он является единственным, имеющим с f $(n+1)$ -точечный p -альтернанс на Δ .

Таким образом, для заданной тройки p, L, f может существовать не более одного главного элемента наилучшего приближения.

Из лемм 1.19–1.21 получается

1.23. ТЕОРЕМА. *Если L — конечномерное линейное подпространство в $C(\Delta = [a, b])$, чебышевское на $(a, b]$ или на $[a, b)$, $p \in \text{DS}(\Delta)$, $f \in C(\Delta) \setminus L$, $W(p, L(f)) < \infty$, то в $A(p, L, f)$ имеется главный элемент наилучшего приближения $l^*(p, L, f)$.*

1.24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $f, l, m \in M(E)$, p и q — знакочувствительные веса на E , $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ и $y_1 < y_2 < \dots < y_s$ — альтернансы пар (l, f) и (m, f) соответственно (см. введение). Назовем эти альтернансы *синхронными n -точечными*, если $r = s = n$ и разности $l(x_1) - f(x_1)$ и $m(y_1) - f(y_1)$ имеют одинаковые знаки.

1.25. ТЕОРЕМА. *Если L — n -мерное линейное подпространство в $C(\Delta = [a, b])$, чебышевское на $(a, b]$ или $[a, b)$, $f \in C(\Delta) \setminus L$, $p, q \in \text{DS}(\Delta)$, $W(p, L(f)) < \infty$, $W(q, L(f)) < \infty$, главные элементы наилучшего приближения $l = l(p, L, f)$ и $m = l(q, L, f)$ имеют с f синхронные $(n+1)$ -точечные p - и q -альтернансы соответственно, то*

$$\|l - m\| \leq A\sigma(p, q, L(f); d) = A(N\omega(L(f), d) + d), \quad d = d(p, q), \quad (1.254^*)$$

где

$$A = \frac{1}{\underline{s}} W_{2,n}(L, \omega^{-1}(2\underline{s}))(E(p, L, f)W(p, L(f)) + E(q, L, f)W(q, L(f))),$$

$$\underline{s} = \min \left\{ S\left(\frac{p}{\|p\|}, L(f)\right), S\left(\frac{q}{\|q\|}, L(f)\right) \right\},$$

функция $t = \omega^{-1}(s)$ обратна к функции $s = \omega(L(f), t)$, $N = \max\{\|p\|, \|q\|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = E(p, l, f)$, $h' = E(q, l, f)$, $P(\cdot) = |\cdot|_{p,\Delta}$, $Q(\cdot) = |\cdot|_{q,\Delta}$. Так как $f \notin L$ и $W(p, L(f)) < \infty$, то $h > 0$. Действительно,

$$0 < \|l - f\| \leq W(p, L(f))\|l - f\|_{p,\Delta} = W(p, L(f))h, \quad l = l(p, L, f).$$

Аналогично, $h' > 0$. По (1.1.2) имеем

$$\begin{aligned} h &\leq P(m - f) \leq Q(m - f) + Q(m - f)y = h' + h'y, \\ y &= W(q, L(f))(\|p\| \cdot \omega(L(f), d) + d), \\ h' &\leq Q(l - f) \leq P(l - f) + P(l - f)z = h + h'z, \\ z &:= W(q, L(f))(\|q\| \cdot \omega(L(f), d) + d), \\ P(m - f) &\leq h + (hz + h'y) = h + \alpha, \end{aligned} \tag{1.25.2}$$

$$Q(m - f) \leq h' + (hz + h'y) = h' + \alpha, \tag{1.25.3}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \{\|q\|hW(p, L(f)) + \|p\|h'W(q, L(f))\}\omega(L(f), d) \\ &\quad + \{hW(p, L(f)) + h'W(q, L(f))\}d \\ &\leq \{hW(p, L(f)) + h'W(q, L(f))\}\sigma(p, q, L(f); d). \end{aligned} \tag{1.25.4}$$

Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ — точки некоторого p -альтернанса пары (l, f) , $y_1 < y_2 < \dots < y_{n+1}$ — точки q -альтернанса пары (m, f) , и, для определенности, пусть

$$(l(x_{2i-1}) - f(x_{2i-1}))p_+(x_{2i-1}) = h, \tag{1.25.5}$$

$$(l(x_{2i}) - f(x_{2i}))p_-(x_{2i}) = -h, \tag{1.25.6}$$

$$(m(y_{2i-1}) - f(y_{2i-1}))q_+(y_{2i-1}) = h', \tag{1.25.7}$$

$$(m(y_{2i}) - f(y_{2i}))q_-(y_{2i}) = -h', \tag{1.25.8}$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Из (1.25.2) и (1.25.3) имеем также

$$(m(x_{2i-1}) - f(x_{2i-1}))p_+(x_{2i-1}) \leq h + \alpha, \tag{1.25.9}$$

$$-(m(x_{2i}) - f(x_{2i}))p_-(x_{2i}) \leq h + \alpha, \tag{1.25.10}$$

$$(l(y_{2i-1}) - f(y_{2i-1}))q_+(y_{2i-1}) \leq h' + \alpha, \tag{1.25.11}$$

$$-(l(y_{2i}) - f(y_{2i}))q_-(y_{2i}) \leq h' + \alpha. \tag{1.25.12}$$

Почленно вычитая из неравенства (1.25.9) равенство (1.25.5) и прибавляя к неравенству (1.25.10) равенство (1.25.6), получим

$$(m(x_{2i-1}) - l(x_{2i-1}))p_+(x_{2i-1}) \leq \alpha, \quad (l(x_{2i}) - m(x_{2i}))p_-(x_{2i}) \leq \alpha. \quad (1.25.13)$$

Аналогично, из (1.25.11), (1.25.7) и (1.25.12), (1.25.8) получим

$$(l(y_{2i-1}) - m(y_{2i-1}))q_+(y_{2i-1}) \leq \alpha, \quad (m(y_{2i}) - l(y_{2i}))q_-(y_{2i}) \leq \alpha. \quad (1.25.14)$$

Обозначим через $v = (v_-, v_+)$ такой вес, что $v_+(x_k) = v_-(x_{k+1}) = 1$, $v_-(y_k) = v_+(y_{k+1}) = 1$, $k = 1, \dots, n$, а в остальных случаях $v_+(x) = 0$, $v_-(x) = 0$, $x \in \Delta$. Положим

$$r := \min\{p_+(x_{2i-1}), p_-(x_{2i}), q_+(y_{2i-1}), q_-(y_{2i}) : i = 1, \dots, n\}.$$

Тогда из (1.25.13) и (1.25.14) следует, что $|m - l|_{v, \Delta} \leq \alpha/r$. Отсюда и из определения $W(v, L)$ получаем неравенство

$$\|m - l\| \leq \frac{\alpha}{r} W(v, L). \quad (1.25.15)$$

Из (1.25.5)–(1.25.8) имеем $\|l - f\|_{p_+(x_{2i-1})} \geq h, \dots$, так что

$$r \geq \min\left\{\frac{h}{\|l - f\|}, \frac{h'}{\|m - f\|}\right\}. \quad (1.25.16)$$

Так как $\|l - f\| \leq W(p, L(f))h$, $\|m - f\| \leq W(q, L(f))h'$, то отсюда

$$r \geq \min\{S(p, L(f)), S(q, L(f))\} =: \underline{s}. \quad (1.25.17)$$

Положим

$$\begin{aligned} \lambda &:= l - f, & \mu &:= m - f, \\ X &= \min\{x_{k+1} - x_k : k = 1, \dots, n\}, & Y &= \min\{y_{k+1} - y_k : k = 1, \dots, n\}, \\ \rho &= \min\{X, Y\}. \end{aligned}$$

Из (1.25.5)–(1.25.8) имеем соответственно

$$|\lambda(x_{k+1}) - \lambda(x_k)| \geq \frac{2h}{\|p\|}, \quad |\mu(y_{k+1}) - \mu(y_k)| \geq \frac{2h'}{\|q\|}.$$

Поэтому $\|\lambda\| \omega(\lambda/\|\lambda\|, X) \geq 2h/\|p\|$, $\|\mu\| \omega(\mu/\|\mu\|, Y) \geq 2h'/\|q\|$. Отсюда и из неравенств $\|\lambda\| \leq W(p, L(f))h$ и $\|\mu\| \leq W(q, L(f))h'$ получаем

$$\begin{aligned} \omega(L(f), X) &\geq 2S\left(\frac{p}{\|p\|}, L(f)\right), & \omega(L(f), Y) &\geq 2S\left(\frac{q}{\|q\|}, L(f)\right), \\ \rho &\geq \omega^{-1}(2\underline{s}). \end{aligned} \quad (1.25.18)$$

Так как $W(v, L) \leq W_{2,n}(L, \rho)$ (см. п. 1.12), функция $W_{2,n}(L, t)$ не возрастает, то из (1.25.15)–(1.25.18) имеем

$$\|l - m\| \leq \frac{\alpha}{\underline{s}} W_{2,n}(L, \omega^{-1}(2\underline{s}))$$

(см. (1.25.4)). Теорема доказана.

ГЛАВА 2. Приложения: некоторые экстремальные задачи в пространствах полиномов

§ 1. Приложения к теории ужей

2.0. Полиномиальные ужи были введены С. Карлином [5] как обобщение полиномов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ (см. также [6]). Подобно полиномам Чебышева, ужи решают ряд экстремальных задач в классах полиномов. Напомним определение ужа, заодно обобщив его на каналы (“коридоры”) с границами разрывными, а также бесконечными. С нашей точки зрения только рассмотрение каналов с полунепрерывными и не обязательно конечными границами придает теории ужей законченный вид.

Ниже $\text{TCH}_n(\Delta)$ обозначает семейство всех n -мерных чебышевских подпространств на промежутке $\Delta = \langle a, b \rangle$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$).

2.0a. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть при $n \geq 1$ на отрезке Δ задано n -мерное чебышевское подпространство L ($L \in \text{TCH}_n(\Delta)$) и пара таких функций g и G , что $-\infty \leq g(x) < G(x) \leq +\infty$ при всех $x \in \Delta$ и любых значениях функций g, G . Тогда элемент $l^* \in L$ назовем *ужом из L , порожденным парой (g, G)* , если при всех $x \in \Delta$ выполнено неравенство $g(x) \leq l^*(x) \leq G(x)$ и на Δ имеется такой набор из $m = n$ точек $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m$, что с ростом k от 1 до m точки $M_k = (x_k, l^*(x_k))$ попеременно попадают то на дополненный график $F(G)$ функции G , то на дополненный график $F(g)$ функции g (начиная с любого из этих множеств). Такой набор $\{x_k\}$ будем называть *альтернансом ужа l^** . Если же имеется альтернанс из $m > n$ точек, то будем называть его *избыточным альтернансом ужа l^** , а сам l^* – *уникальным (или избыточным) ужом*.

Очевидно, в этом определении функцию $G(x)$ можно заменить ее нижней функцией Бэра $\underline{G}(x)$, а $g(x)$ – ее верхней функцией Бэра $\bar{g}(x)$ (см. введение). Как известно, нижняя функция Бэра полунепрерывна снизу, верхняя – сверху. Отсюда легко увидеть, что при определении ужа из $L \in \text{TCH}_n(\Delta)$, порожденного парой (g, G) , можно было с самого начала считать G однозначной функцией, полунепрерывной снизу, а g – однозначной функцией, полунепрерывной сверху (опустив требование дополненности их графиков). Именно так мы и будем считать.

2.0b. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Компактифицируем плоскость Oxy , присоединив к ней несобственные точки вида $(x, -\infty)$, $(x, +\infty)$, $(-\infty, y)$ и $(+\infty, y)$, где $-\infty \leq x, y \leq +\infty$, и определив сходимость на таком расширении $[\mathbb{R}^2] = [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]$ плоскости $\mathbb{R}^2$ по координатам:

$$(x_k, y_k) \rightarrow (x, y) \Leftrightarrow x_k \rightarrow x, \quad y_k \rightarrow y, \quad k \rightarrow \infty, \quad -\infty \leq x, x_k, y, y_k \leq +\infty.$$

При указанных выше условиях на $\Delta = \langle a, b \rangle$, g, G и L обозначим через $B^0(g, G)$ односвязную область на $[\mathbb{R}^2]$, ограниченную снизу и сверху дополненными графиками $F(g)$ и $F(G)$ функций g и G , а слева и справа – открытыми отрезками на вертикалях $x = a$ и $x = b$ соответственно. Присоединив к $B^0(g, G)$ эти открытые отрезки, получим *канал $B(g, G)$* с граничными функциями g и G . Если $\partial B^0(g, G)$ –

граница $B^0(g, G)$ на $[\mathbb{R}^2]$, то $\partial^- B(g, G) := F(g) \cap \partial B^0(g, G) = F(g)$ назовем *нижним берегом канала* $B(g, G)$, $\partial^+ B(g, G) := F(G) \cap \partial B^0(g, G) = F(G)$ – его *верхним берегом*. Отметим, что каждый из берегов – связный компакт (континуум) на $[\mathbb{R}^2]$. Положим еще

$$L(g, G) := \{l \in L : g(x) \leq l(x) \leq G(x) \quad \forall x \in \Delta\}. \quad (2.0.1)$$

Очевидно, равенство $g(t) = -\infty$ ($t \in \Delta$) означает, что неравенство $g(t) \leq l(t) \leq G(t)$ не накладывает на значение $l(t)$ ограничений снизу, а равенство $G(t) = +\infty$ – что на $l(t)$ нет ограничений сверху.

Обычными рассуждениями (см. [6]–[8]) доказывается

2.0с. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Два ужа l и m из $L \in \text{TCH}_n([a, b])$, порожденных некоторой парой (g, G) , не могут иметь первые слева точки своих альтернансов оба на верхней или оба на нижней границе канала $B(g, G)$.*

Действительно, в противном случае графики этих ужей имели бы не менее n точек пересечения (с учетом четности нулей разности $l - m$ в этих точках), и мы бы получили $l \equiv m$.

Из утверждения 2.0с следует

2.0d. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каждая пара (g, G) порождает в $L \in \text{TCH}_n([a, b])$ не более двух ужей. Если при этом L содержит уникальный уж, то он является единственным ужом в L , порожденным парой (g, G) (на самом деле тогда этот уж является единственным элементом множества $L(g, G)$ – см. ниже теорему 2.1).*

Теперь чебышевский критерий элемента наилучшего равномерного приближения для $f \in C(\Delta = [a, b])$ и $L \in \text{TCH}_n(\Delta)$ можно сформулировать так.

2.0е. *Для того чтобы элемент l из $L \in \text{TCH}_n(\Delta = [a, b])$ был элементом наилучшего равномерного приближения функции $f \in C(\Delta)$ элементами подпространства L , необходимо и достаточно, чтобы l был уникальным ужом из L , порожденным парой $(f - \|l - f\|, f + \|l - f\|)$.*

Теорема Карлина [5] утверждает, что если функции $g(x) < G(x)$ определены и непрерывны на отрезке Δ и существует такой элемент l из $L \in \text{TCH}_n(\Delta)$, что $g(x) < l(x) < G(x)$ на Δ , то в L имеются ровно два ужа, порожденных парой (g, G) .

Следующая теорема исчерпывает общий случай (в [9] она доказана другим, неконструктивным способом).

2.1. ТЕОРЕМА. *Пусть функции g и G определены на некотором отрезке Δ , $L \in \text{TCH}_n(\Delta)$. Тогда при $L(g, G) \neq \emptyset$ имеет место один и только один из двух случаев:*

- а) $L(g, G)$ состоит из единственного элемента (этот случай имеет место тогда и только тогда, когда L содержит уникальный уж, порожденный парой (g, G));
- б) $L(g, G)$ состоит более чем из одного элемента; тогда имеются такие $w \in L$ и $\varepsilon = \text{const} > 0$, что $g(x) + \varepsilon < w(x) < G(x) - \varepsilon$ на Δ

(в этом случае необходимым и достаточным условием для наличия в L ровно двух ужей, порожденных парой (g, G) , является конечность $W(p, L)$ при $p = (1/(w - g), 1/(G - w))$, где w – какой-либо элемент из L , для которого при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено указанное неравенство).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если имеется элемент $l \in L(g, G)$, альтернирующий не более n раз, то возьмем элемент $t \in L$, положительный во всех тех $x \in \Delta$, в которых $l(x) = G(x)$, и отрицательный во всех тех $x \in \Delta$, в которых $l(x) = g(x)$. Тогда

$$g(x) < w(x) := l(x) - tm(x) < G(x)$$

при достаточно малых $t > 0$ и всех $x \in \Delta$, т.е. найдутся те w и ε , о которых говорится в п. б) теоремы. Это невозможно в случае а), так что в случае а) единственный в $L(g, G)$ элемент альтернирует не менее $n + 1$ раз, т.е. является избыточным ужом. С другой стороны, если имеется избыточный уж $l \in L$, то он является единственным элементом в $L(g, G)$, так как график любого $f \in L(g, G)$ должен пересечься с графиком l не менее $n = \dim L$ раз (с учетом четности – см. [6]), так что $f \equiv l$.

2. Рассматриваем случай б). По сказанному в этом случае в $L(g, G)$ нет избыточных ужей, но есть такие $w \in L$ и $\varepsilon > 0$, что при всех $x \in \Delta$ выполняется неравенство $g(x) + \varepsilon < w(x) < G(x) - \varepsilon$. Рассмотрим пару $(g - w, G - w)$, сведем дело к таким функциям g и G , что $g(x) + \varepsilon < 0 < G(x) - \varepsilon$. Считая g и G именно такими, приступаем к рассмотрению случая б).

Необходимость. Пусть существуют два ужа – $f \neq h$, порожденных парой (g, G) , и их альтернансы занумерованы в конечные возрастающие последовательности $\{x_k\}$ и $\{t_k\}$ соответственно ($k = 1, \dots, n$). Как уже отмечалось, $f(x_1)$ и $h(t_1)$ имеют разные знаки, для определенности пусть $f(x_1) > 0$, $h(t_1) < 0$. Возможны два случая.

1°. $\{x_k\} = \{t_k\}$. Тогда $G(x_k) = f(x_k) < \infty$ и $g(x_k) = h(x_k) > -\infty$ при нечетных k , $g(x_k) = f(x_k) > -\infty$ и $G(x_k) = h(x_k) < \infty$ при четных k . Положим

$$r(x_k) = \left(-\frac{1}{g(x_k)}, \frac{1}{G(x_k)} \right), \quad r(x) = (0, 0) \quad \forall x \neq x_k \quad (x \in \Delta).$$

По теореме 0.1 $W(r, L) < \infty$, что дает неравенство $W(p, L) < \infty$.

2°. $\{x_k\} \neq \{t_k\}$. Пусть N – наименьшее из чисел $k \leq n$, для которых $x_k \neq t_k$ ($1 \leq N \leq n$), и, для определенности, $x_N < t_N$. Тогда для набора из $n + 1$ точек $x_1 < \dots < x_N < t_N < t_{N+1} < \dots < t_n$ при нечетном N имеем цепочку из $n + 1$ неравенств $G(x_1) < \infty$, $g(x_2) > -\infty$, $\dots$, $G(x_N) < \infty$, $g(t_N) > -\infty$, $G(t_{N+1}) < \infty$, $g(t_{N+2}) > -\infty$, $G(t_{N+3}) < \infty$, $\dots$, а при четном N – цепочку, которая получается из нее, если поменять местами g и G , $> -\infty$ и $< \infty$. И снова из теоремы 0.1 получаем $W(p, L) < \infty$.

Достаточность. Пусть $\Delta = [a, b]$, $\underline{l}$ и $\bar{l}$ – такие элементы из L , что $\underline{l}(a) = -1$, $\bar{l}(a) = 1$, $L_0 = \{l : l \in L, l(a) = 0\}$, $\underline{l}(p, L_0, \underline{l})$ и $\underline{l}(p, L_0, \bar{l})$ – главные элементы наилучшего приближения соответственно функций $\underline{l}$ и $\bar{l}$ элементами чебышевского на $(a, b]$ подпространства L_0 с весом p . Функции

$$\lambda := \frac{\underline{l}(p, L_0, \underline{l}) - \underline{l}}{E(p, L_0, \underline{l})}, \quad \mu := \frac{\underline{l}(p, L_0, \bar{l}) - \bar{l}}{E(p, L_0, \bar{l})} \quad (2.1.1)$$

являются искомыми ужами. Действительно, во-первых, при $x \in \Delta$ имеем

$$\begin{aligned} (l(p, L_0, \underline{l}; x) - \underline{l}(x))^- \left(-\frac{1}{g(x)} \right) &\leq E(p, L_0, \underline{l}), \quad \lambda(x) \geq g(x), \\ (l(p, L_0, \underline{l}; x) - \underline{l}(x))^+ \left(\frac{1}{G(x)} \right) &\leq E(p, L_0, \underline{l}), \quad \lambda(x) \leq G(x), \end{aligned}$$

т.е. $g(x) \leq \lambda(x) \leq G(x)$, и, аналогично, имеем $g(x) \leq \mu(x) \leq G(x)$. Во-вторых (см. введение, п. 0.2), точки p -альтернанса пары $(l(p, L_0, \underline{l}), \underline{l})$ являются точками альтернанса ужа λ , пары $(l(p, L_0, \bar{l}), \bar{l})$ – точками альтернанса ужа μ .

2.1а. ЗАМЕЧАНИЕ. При $W(p, L) = \infty$ ужей может не быть вовсе (как, например, в случае $\Delta = [0, 1]$, $L = \{l(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ и пары (g, G) , определяемой равенствами $g(0) = -1$, $G(0) = 1$, $g(x) = -\infty$ и $G(x) = \infty$ при $x \neq 0$) или может быть лишь один уж (пример: все, как в предыдущем примере, лишь $G(1) = 1$).

Следующая теорема – о непрерывной зависимости ужей от канала, т.е. об их устойчивости. Разумеется, вопрос об устойчивости ужа имеет смысл ставить лишь в неособом случае, когда $L(g, G)$ содержит более одного элемента, т.е. в случае б) теоремы 2.1. Так как уж l , порожденному некоторой парой (g, G) , при любой функции $w \in L$ взаимно однозначно соответствует уж $l - w$, порожденный парой $(g - w, G - w)$, то, взяв в качестве w какую-либо функцию из п. б) теоремы 2.1, сводим общий случай к случаю $g(x) < 0 < G(x)$ ($\forall x \in \Delta$). При этом несколько упрощается формулировка теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Избыточные уж $l, m \in L \in \text{TCH}_n(\Delta)$, порожденные парами (f, F) и (g, G) соответственно, называются *синхронными*, если для соответствующих первых слева точек x_1 и y_1 альтернансов этих ужей разности $l(x_1) - f(x_1)$ и $m(y_1) - g(y_1)$ равны нулю или положительны одновременно.

2.2. ТЕОРЕМА (об устойчивости ужей). Пусть $L \in \text{TCH}_n(\Delta)$, синхронные уж l и m из L порождены парами (f, F) и (g, G) соответственно, $f < 0 < F$, $g < 0 < G$, веса p и q заданы равенствами $p = (-1/f, 1/F)$ и $q = (-1/g, 1/G)$, $W(p, L) < \infty$, $W(q, L) < \infty$. Тогда

$$\|l - m\| \leq C\sigma(p, q, L; d) = C(N\omega(L, d) + d), \quad d = d(p, q), \quad (2.2.1)$$

где $C = \{1/\underline{s} \cdot W_{2,n}(L, \omega^{-1}(2\underline{s})) + 1\}(W(p, L) + W(q, L))$, $t = \omega^{-1}(s)$ – обратная к $s = \omega(L, \delta)$ функция, $\underline{s} = \min\{S(p/\|p\|, L), S(q/\|q\|, L)\}$, $N = \max\{\|p\|, \|q\|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности уж l и m получены, как при доказательстве теоремы 2.1 – в результате приближения функции $\underline{l}$ функциями из L_0 с весами p и q , и $E(p, L_0, \underline{l}) =: h \geq h' := E(q, L_0, \underline{l})$. Так как $\|l - \underline{l}\| \geq |l(a) - \underline{l}(a)| = 1$ и $\|m - \underline{l}\| \geq 1$, то $h \geq \|l - \underline{l}\| \cdot S(p, L) \geq S(p, L) > 0$, $h' \geq S(q, L) > 0$ и

$$\begin{aligned} \|l - m\| &= \left\| \frac{1}{h} \cdot (l(p, L_0, \underline{l}) - \underline{l}) - \frac{1}{h'} \cdot (l(q, L_0, \underline{l}) - \underline{l}) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \cdot (l(p, L_0, \underline{l}) - l(q, L_0, \underline{l})) + \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h'} \right) (l(q, L_0, \underline{l}) - \underline{l}) \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \cdot \|l(p, L_0, \underline{l}) - l(q, L_0, \underline{l})\| + \left| \frac{1}{h} - \frac{1}{h'} \right| \cdot h'. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Из (1.25.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \cdot \|l(p, L_0, \underline{l}) - l(q, L_0, \underline{l})\| &\leq A \cdot \frac{1}{h} \cdot \sigma(p, q, L_0(\underline{l}); d), \\ \frac{A}{h} &= \frac{1}{\underline{s}} \cdot W_{2,n}(L_0, \omega^{-1}(2\underline{s})) \left(W(p, L_0(\underline{l})) + \frac{h'}{h} \cdot W(q, L_0(\underline{l})) \right), \\ \underline{s} &= \min \left\{ S\left(\frac{p}{\|p\|}, L_0(\underline{l})\right), S\left(\frac{q}{\|q\|}, L_0(\underline{l})\right) \right\}, \quad N = \max\{\|p\|, \|q\|\}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Так как $h' \leq h$, то $|h^{-1} - h'^{-1}|h' = |h' - h|/h \leq k(h', h)$ ($k(\cdot, \cdot)$ – обобщенная расстройка – см. введение), и из неравенства (1.5.2) и включения $L_0(\underline{l}) \subset L$ получаем

$$h'|h^{-1} - h'^{-1}| \leq (W(p, L) + W(q, L)) \cdot \sigma(p, q, L; d). \quad (2.2.4)$$

Из (2.2.2)–(2.2.4) следует (2.2.1) ($h' \leq h$, $L_0(\underline{l}) \subset L$).

Доказанное неравенство (2.2.1) симметрично зависит от пар (f, F) и (g, G) . Подобно тому, как это мы делали выше, из (2.2.1), учитывая монотонность функции $(1/t) \cdot W_{2,n}(L, t)$, с помощью теоремы 0.4 легко получить следующие оценки, в которых отправной является пара (f, F) .

2.3. СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы 2.2 заменить условие $W(q, L) < \infty$ более сильным неравенством $\|p\| \omega(L, d) + d \leq kS(p, L)$, где $0 < k = \text{const} < 1$, то получим неравенство

$$\|l - m\| \leq C_1 W(p, L)((1 + k)\|p\| \omega(L, d) + d), \quad d = d(p, q), \quad (2.3.1)$$

где C_1 не зависит от q и d ,

$$C_1 = \frac{2 - k}{1 - k} \cdot \left\{ \frac{1}{s} \cdot W_{2,n}(L, \omega^{-1}(2s)) + 1 \right\}, \quad s = \frac{1 - k}{1 + k} \cdot S\left(\frac{p}{\|p\|}, L\right).$$

Действительно, так как $\|p\| \omega(L, d) + d \leq kS(p, L) \leq k\|p\|$ (см. введение), то $d \leq k\|p\|$. Из неравенства $\|q\| \leq \|p\| + d \leq \|p\|(1 + k)$ и из теоремы 0.4 получаем

$$\begin{aligned} S\left(\frac{q}{\|q\|}, L\right) &\geq \frac{1}{\|q\|} (S(p, L) - (\|p\| \omega(L, d) + d)) \\ &\geq \frac{\|p\|}{\|q\|} (1 - k) S\left(\frac{p}{\|p\|}, L\right) \geq \frac{1 - k}{1 + k} S\left(\frac{p}{\|p\|}, L\right), \\ \underline{s} &:= \min \left\{ S\left(\frac{p}{\|p\|}, L\right), S\left(\frac{q}{\|q\|}, L\right) \right\} \geq \frac{1 - k}{1 + k} S\left(\frac{p}{\|p\|}, L\right) =: s, \end{aligned}$$

$$W(p, L) + W(q, L) \leq W(p, L) + (S(p, L) - \underline{s}(p, q, L; d))^{-1} \leq \frac{1 - k}{1 + k} W(p, L),$$

и (2.3.1) следует из (2.2.1).

§ 2. Примеры ужей, приближение точечного всплеска и точечного колебания в хаусдорфовой метрике

2.4. Сначала рассмотрим работу одного физического устройства. Пусть имеется некоторая дифференцирующая RC-цепочка с постоянной времени $\tau = RC$. Если на ее вход подать короткий положительный П-образный импульс величины M , длины Δt , электрического напряжения $U_{\text{in}}(t)$, то на ее выходе появится знакопеременный импульс $U_{\text{aut}}(t)$, при малых значениях $\tau = RC$ практически достигающий максимального значения M и минимального $-M$. Чем меньше Δt , тем график входного сигнала $U_{\text{in}}(t)$ визуально (т.е. в метрике Хаусдорфа – см. введение) все более похож на график многозначной функции $\delta_M(t)$, равной $[0, M]$ при $t = 0$ и 0 при $t \neq 0$. А чем меньше Δt и $\tau/\Delta t$, тем график выходного сигнала $U_{\text{aut}}(t)$ все более похож на график функции $\chi_M(t)$, равной $[-M, M]$ при $t = 0$ и 0 при $t \neq 0$. Будем называть многозначные функции $\delta_M(t)$ и $\chi_M(t)$ соответственно *точечным всплеском величины M* и *точечным колебанием с амплитудой M* . Если достаточно узкий импульс сигнала $U_{\text{in}}(t)$ и соответствующий импульс сигнала $U_{\text{aut}}(t)$ рассматривать на экране электронного осциллографа, то (вследствие ограниченности частотной полосы пропускания усилителя вертикального отклонения любого осциллографа) мы увидим вместо графиков импульсов $U_{\text{in}}(t)$ и $U_{\text{aut}}(t)$ графики некоторых бесконечно дифференцируемых функций, визуально близкие к рассматриваемым графикам. При этом если импульсы $U_{\text{in}}(t)$ следуют с постоянной частотой ν , то этими бесконечно дифференцируемыми функциями фактически будут тригонометрические полиномы вида

$$c_0 + c_1 \cos(2\pi\nu t + \alpha_1) + c_2 \cos(2 \cdot 2\pi\nu t + \alpha_2) + \dots + c_n \cos(n \cdot 2\pi\nu + \alpha_n),$$

где натуральное число n таково, что гармонические сигналы частот $> n\nu$ уже практически не пропускаются усилителем вертикального отклонения нашего осциллографа. В результате картина импульса, в частности, точечного всплеска или точечного колебания, исказится (свою роль здесь сыграет и явление Гиббса). Естественно возникает вопрос о том, как поступить, чтобы эти искажения были минимальными при пользовании имеющимся осциллографом. Ясно, что если усилитель вертикального отклонения не имеет амплитудно-частотных искажений в полосе частот $[0, n\nu]$, а сигналы с частотами $\geq (n+1)\nu$ практически уже не пропускает, то наименьшие искажения периодического импульса с частотой ν мы получим на экране осциллографа, если на его вход подать не этот импульс, а указанного вида его тригонометрический полином наилучшего приближения в метрике Хаусдорфа. Таким образом, естественно возникает задача о наилучшем хаусдорфовом приближении 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами, в частности, задача о таком приближении 2π -периодического точечного всплеска $\delta_M^T(x)$, равного $[0, M]$ при $x = 2\pi k$ и 0 при $x \neq 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$), а также

2π -периодического точечного колебания $\chi_M^T(x)$, равного $[-M, M]$ при $x = 2\pi k$ и 0 при $x \neq 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$), и задача о наилучших хаусдорфовых приближениях непериодических функций, в частности функций $\delta_M(x)$ и $\chi_M(x)$, алгебраическими полиномами на некотором отрезке $[a, b] \ni 0$, в частности на $[-1, 1]$.

Эти задачи тесно связаны с рассмотренными выше аспектами теории ужей и, более общо, с теорией знакочувствительных аппроксимаций. Задачи о полиномиальных хаусдорфовых приближениях точечного всплеска и точечного колебания интересны еще и тем, что они решаются до конца, и их решения выписываются в явном виде, и что на примере этих простейших многозначных функций в значительной степени проявляется специфика хаусдорфовых аппроксимаций вообще.

Покажем, что задачу о наилучшем хаусдорфовом приближении функций $\delta_M(x)$ и $\chi_M(x)$ алгебраическими полиномами степени $\leq n$ решает (при определенном выборе числа $\delta \in (0, 1)$) алгебраический уж $A_n(\delta; x)$, порожденный парой (g, G) , где $g(x) = -1$ и $G(x) = 1$ при $x \in \sigma(\delta) = [-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$, $g(x) = -\infty$ и $G(x) = +\infty$ при $x \notin \sigma(\delta)$, с положительным коэффициентом при x^n . Очевидно, $A_n(0; x) = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Вторым ужом n -го порядка, порожденным рассматриваемой парой (g, G) , является $-A_n(\delta; x)$. Интересно, что при четном n полином $A_n(\delta; x)$ решает задачу о наилучшем хаусдорфовом приближении функции δ_M , а при нечетном — функции χ_M .

Перечисленные ниже, в лемме 2.5, свойства полиномов $A_n(\delta; x)$ непосредственно вытекают из их определения как алгебраических ужей степени n , из их единственности, из четности функций $g(x)$ и $G(x)$, из равенства $g(x) = -G(x)$.

2.5. ЛЕММА. а) $A_1(\delta; x) \equiv T_1(x) \equiv x$ при любом $\delta \in (0, 1)$.

б) При $k \geq 1$ и $\delta \in (0, 1)$ полином $A_{2k}(\delta; x)$ четен, на каждом из отрезков $[-1, -\delta]$ и $[\delta, 1]$ он попеременно $k+1$ раз достигает значений -1 и 1 , $|A_{2k}(\delta; x)| \leq 1$ при $\delta \leq |x| \leq 1$, $A_{2k}(\delta; \pm 1) = 1$, $A_{2k}(\delta; \pm \delta) = (-1)^k$. На отрезке $[-\delta, 0]$ полином $(-1)^k A_{2k}(\delta; x)$ возрастает от 1 до своего максимального значения $M_{2k}(\delta) = (-1)^k A_{2k}(\delta; 0)$ (> 1), а на отрезке $[0, \delta]$ убывает от $M_{2k}(\delta)$ до 1.

в) При $k \geq 2$ и $\delta \in [0, \sin(\pi/(4k-2))]$ полином $A_{2k-1}(\delta; x)$ тождественно совпадает с полиномом Чебышева $T_{2k-1}(x)$ (точки $\pm \sin(\pi/(4k-2))$ — ближайшие к точке $x = 0$ экстремумы полинома Чебышева $T_{2k-1}(x)$).

г) Если же $\delta \in (\sin(\pi/(4k-2)), 1)$, то полином $A_{2k-1}(\delta; x)$ нечетен, на каждом из отрезков $[-1, -\delta]$ и $[\delta, 1]$ он попеременно k раз достигает значений -1 и $+1$, $|A_{2k-1}(\delta; x)| \leq 1$ при $\delta \leq |x| \leq 1$, $A_{2k-1}(\delta; \pm 1) = \pm 1$, $A_{2k-1}(\delta; \pm \delta) = \pm(-1)^{k-1}$. На отрезке $[-\delta, \delta]$ в этом случае полином $(-1)^k A_{2k-1}(\delta; x)$ имеет три участка монотонности: вначале он возрастает от 1 до своего максимального значения $M_{2k-1}(\delta) := \max\{(-1)^k A_{2k-1}(\delta; x) : x \in [-1, 1]\}$ (> 1), затем убывает от $M_{2k-1}(\delta)$ до $-M_{2k-1}(\delta)$ и, наконец, возрастает от $-M_{2k-1}(\delta)$ до -1 .

2.6. Нетрудно видеть (сравните с (2.1.1)), что

$$A_n(\delta; x) = \frac{x^n + l(p, L_{n-1}, f; x)}{E(p, L, f)}, \quad (2.6.0)$$

где $f(x) \equiv -x^n$, L_{n-1} — пространство алгебраических полиномов степени $\leq n-1$, $p = (p_-, p_+)$, $p_-(x) = p_+(x) = 1/G(x)$. Таким образом, задача о нахождении явного выражения для $A_n(\delta; x)$ эквивалентна известной задаче о полиномах степени n с равным 1 старшим коэффициентом, наименее отклоняющихся от 0 на множестве $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$. Последняя задача для полиномов $A_{2k}(\delta; x)$ ($k = 1, 2, \dots$) решается элементарно (см. [10, гл. X, § 52]):

$$A_{2k}(\delta; x) \equiv T_k\left(\frac{2x^2 - 1 - \delta^2}{1 - \delta^2}\right). \quad (2.6.1)$$

Гораздо более сложный вид имеет аналитическое выражение для $A_n(\delta; x)$ при нечетном $n = 2k - 1$ ($k \geq 2$) (по этому поводу см. [10]). Впрочем, случай $\delta \in [0, \sin(\pi/(4k - 2))]$ никаких трудностей не представляет: в этом случае $A_{2k-1}(\delta; x) \equiv T_{2k-1}(x)$, так как T_{2k-1} имеет нужный альтернанс (см. п. с) леммы 2.5).

Из теоремы 2.2 об устойчивости ужей и из некоторых известных общих свойств алгебраических полиномов получается

2.7. ЛЕММА. *При $k = 1, 2, \dots$ функция*

$$M_n(\delta) := \max\{(-1)^k A_n(\delta; x) : x \in [-\delta, \delta]\}, \quad \delta \in [0, 1], \quad (2.7.1)$$

непрерывно и монотонно возрастает, отображая промежуток $[0, 1]$ на луч $[1, +\infty)$ при $n = 2k$ или на луч $[0, +\infty)$ при $n = 2k - 1$.

При фиксированных $M > 0$ и $n = 2, 3, \dots$ через $\delta(n) = \delta(n, M)$ обозначим корень уравнения $\delta M_n(\delta) + \delta = M$:

$$\delta(n) \cdot M_n(\delta(n)) + \delta(n) = M, \quad \delta(n) = \delta(n, M) \in (0, 1). \quad (2.7.2)$$

Существование и единственность $\delta(n)$ на $(0, 1)$ непосредственно следует из леммы 2.7.

2.8. ТЕОРЕМА. *Пусть $\Delta = [-1, 1]$, число $\delta(n)$ определено, как в (2.7.2), $n \geq 2$, $Q_n(M; x) = (-1)^{[(n+1)/2]} \cdot \delta(n) A_n(\delta(n); x)$. Тогда для точечного всплеска δ_M его полином наилучшего приближения $HP_n(\delta_M, \Delta; x)$ является единственным, причем*

$$\begin{aligned} HP_{2k+1}(\delta_M, \Delta; x) &\equiv HP_{2k}(\delta_M, \Delta; x) \equiv Q_{2k}(M; x), \\ HE_{2k+1}(\delta_M, \Delta) &= HE_{2k}(\delta_M, \Delta) = \delta(2k, M) \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

($k = 1, 2, \dots$), а для точечного колебания χ_M полином $HP_n(\chi_M, \Delta; x)$ при каждом $n \geq 3$ определен с точностью до знака, причем

$$\begin{aligned} HP_{2k}(\chi_M, \Delta; x) &\equiv HP_{2k-1}(\chi_M, \Delta; x) \equiv \pm Q_{2k-1}(M; x), \\ HE_{2k}(\chi_M, \Delta) &= HE_{2k-1}(\chi_M, \Delta) = \delta(2k - 1, M) \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

($k = 2, 3, \dots$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств полинома $A_n(\delta; x)$, отмеченных в лемме 2.5, и из равенства $\delta(n)M_n(\delta(n)) = M - \delta(n)$ (см. (2.7.2)) непосредственно следует, что при четном n график полинома $Q_n(M; x)$ и график функции $\delta_M(x)$ над отрезком $[-1, 1]$ лежат в $\delta(n)$ -окрестностях Минковского (см. введение) друг друга, а при нечетном n в $\delta(n)$ -окрестностях Минковского друг друга лежат графики функций $y = \chi_M(x)$ и $y = Q_n(M; x)$ ($x \in [-1, 1]$). Поэтому $H(\delta_M, Q_{2k}) \leq \delta(2k)$, $H(\chi_M, Q_{2k-1}) \leq \delta(2k-1)$. Если теперь полином $Q(x)$ степени $\leq 2k+1$ таков, что $H(\chi_M, Q) \leq \delta(2k-1)$, то из очевидных геометрических соображений получаем неравенства

$$\begin{aligned} \max\{Q(x): |x| \leq \delta(2k-1)\} &\geq M - \delta(2k-1), \\ \max\{|Q(x)|: \delta(2k-1) \leq |x| \leq 1\} &\leq \delta(2k-1). \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что $Q_{2k}(M; x)$ на каждом из отрезков $[-1, -\delta]$ и $[\delta, 1]$ попеременно $k+1$ раз достигает значений $-\delta(2k-1)$ и $\delta(2k-1)$, а при $x = 0$ равен

$$\begin{aligned} \max\{Q_{2k}(M; x): |x| \leq \delta(2k-1)\} &= \delta(2k-1)M_n(\delta(2k-1)) \\ &= M - \delta(2k-1) \leq \max\{Q(x): |x| \leq \delta(2k-1)\}, \end{aligned}$$

следует, что алгебраическое уравнение $Q(x) = Q_{2k}(M; x)$ степени $\leq 2k+1$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ не менее $2k+2$ корней. Итак, $Q(x) \equiv Q_{2k}(M; x)$. Этим доказано, что единственным полиномом наилучшего хаусдорфова приближения степени $\leq 2k+1$, как и степени $\leq 2k$, для функции δ_M является $Q_{2k}(M; x)$, и что $\text{HE}_{2k+1}(\delta_M, \Delta) = \text{HE}_{2k}(\delta_M, \Delta) = \delta(2k)$.

Аналогично, если $Q(x)$ — полином степени, не превосходящей $2k$, для которого $H(\chi_M, Q) \leq \delta(2k-1)$, то либо уравнение $Q(x) = Q_{2k-1}(M; x)$, либо уравнение $Q(x) = -Q_{2k-1}(M; x)$ имеет на $[-1, 1]$ не менее $2k+1$ корней, так что либо $Q(x) \equiv Q_{2k-1}(M; x)$, либо $Q(x) \equiv -Q_{2k-1}(M; x)$, откуда следует (2.8.2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Случаи $n = 1$ и $n = 2$ для $\text{HP}_n(\chi_M, \Delta; x)$ особые. Так, если $M \geq 2$, то полиномы $P_1(x) = Ax + B$ и $P_2(x) = Ax + B + Cx^2$ являются полиномами (степени ≤ 1 и ≤ 2 соответственно) наилучшего хаусдорфова приближения для χ_M при A , близких к M или $-M$, и малых B и C .

Найдем теперь асимптотику величины $\delta(2k, M)$ при $k \rightarrow \infty$. Так как $A_{2k}(\delta; x) \equiv T_k((2x^2 - 1 - \delta^2)/(1 - \delta^2))$ (см. (2.6.1)), то уравнение $\delta M_{2k}(\delta) + \delta = M$ можно записать так:

$$\delta T_k\left(1 + \frac{2\delta^2}{1 - \delta^2}\right) + \delta = M. \quad (2.8.3)$$

2.9. ЛЕММА. При каждом $M > 0$ решение $\delta(2k) = \delta(2k, M)$ уравнения $\delta M_{2k}(\delta) + \delta = M$ и эквивалентного ему уравнения (2.8.3) имеет при $n = 2k \rightarrow \infty$ следующую асимптотику:

$$\delta^* := \delta(2k) = \delta(2k, M) = \frac{1}{n} \left\{ \log(2Mn) - \log \log n + \frac{\log \log n}{\log n} (1 + o(1)) \right\}. \quad (2.9.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ имеем

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \{ (x + (x^2 - 1)^{1/2})^k + (x - (x^2 - 1)^{1/2})^k \},$$

то

$$T_k \left(1 + \frac{2\delta^2}{1 - \delta^2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right)^k + \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right)^k \right\}.$$

Поэтому уравнение $\delta T_k(1 + 2\delta^2/(1 - \delta^2)) + \delta = M$ можно переписать в виде

$$\delta \cdot \exp \left\{ k \cdot \log \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right\} = 2M + \delta \cdot \gamma(\delta),$$

где $\gamma(\delta) := -2 - (1 - \delta)^k (1 + \delta)^{-k}$, $|\gamma(\delta)| \leq 3$, т.е. в виде

$$\delta \cdot \exp(n\delta) \cdot \exp \left\{ n \left(\frac{1}{3} \delta^3 + \frac{1}{5} \delta^5 + \dots \right) \right\} = 2M + \delta \cdot \gamma(\delta). \quad (2.9.2)$$

Так как при $\delta = (1/n) \log(2Mn)$ и $n \geq 1/M$ левая часть здесь больше правой, то для корня $\delta(n)$ уравнения (2.9.2) имеем

$$\delta(n) \leq \frac{1}{n} \log(2Mn) \quad \forall n \geq \frac{1}{M}. \quad (2.9.3)$$

Поэтому $\exp\{n((1/3)\delta(n)^3 + (1/5)\delta(n)^5 + \dots)\} = 1 + O(n^{-2} \log^3 n)$ ($n \rightarrow \infty$). Отсюда и из (2.9.2) следует, что

$$\delta(n) \exp\{n\delta(n)\} = 2M + O\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.9.4)$$

Положим

$$\delta(n) =: \frac{1}{n} \log \frac{2Mn}{\log n} + \frac{1}{n} r(n) \quad (2.9.5)$$

и оценим $r(n) = r(n, M)$ при $n \rightarrow \infty$. Подставляя выражение (2.9.5) в (2.9.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \log n} (\log n + \log(2M) - \log \log n + r(n)) 2Mn \cdot \exp\{r(n)\} &= 2M + O\left(\frac{\log n}{n}\right), \\ \left(1 + \frac{\log(2M)}{\log n} - \frac{\log \log n}{\log n} + \frac{r(n)}{\log n}\right) \cdot \exp\{r(n)\} &= 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right). \end{aligned} \quad (2.9.6)$$

Отсюда нетрудно усмотреть, что $r(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В самом деле, если бы для некоторой подпоследовательности $n = n_s \rightarrow \infty$ было $r(n) > \varepsilon = \text{const} > 0$, то для этих n было бы

$$\left(1 + o(1) + \frac{\varepsilon}{\log n}\right) \cdot \exp\{\varepsilon\} \leq 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

что невозможно при $n \rightarrow \infty$. Аналогично, если бы было $r(n) < -\varepsilon$ при $n = n_s \rightarrow \infty$, то (учитывая положительность выражения справа в (2.9.6), а значит, и слева) мы бы имели неравенство

$$\left(1 + o(1) - \frac{\varepsilon}{\log n}\right) \cdot \exp\{-\varepsilon\} > 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

опять же невозможное при $n \rightarrow \infty$. Итак, $r(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и из (2.9.6) получаем

$$\left(1 - \frac{\log \log n}{\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)(1 + r(n)(1 + o(1))) = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

откуда

$$1 + r(n)(1 + o(1)) = 1 + \frac{\log \log n}{\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right), \quad r(n) = \frac{\log \log n}{\log n}(1 + o(1)),$$

что и требовалось – сравните (2.9.5) и (2.9.1).

Равенство (2.6.1) и лемма 2.9 позволяют дополнить теорему 2.8 следующим утверждением.

2.10. ТЕОРЕМА. *При каждом $n = 2, 3, \dots$ имеем равенства*

$$\begin{aligned} \text{HE}_n(\delta_M, \Delta) &= \bar{\delta} := \delta\left(2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, M\right) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \log(2Mn) - \log \log n + \frac{\log \log n}{\log n}(1 + o(1)) \right\}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

$$\text{HP}_n(\delta_M, \Delta; x) = Q_{2\lfloor n/2 \rfloor}(M; x) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \bar{\delta} T_{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{2x^2 - 1 - \bar{\delta}^2}{1 - \bar{\delta}^2} \right). \quad (2.10.2)$$

Заметим, что в [11] приведен явный вид (2.10.2) для полинома $\text{HP}_n(\delta_M, \Delta; x)$, а также неправильная асимптотика для $\text{HE}_n(\delta_M, \Delta)$: $\text{HE}_n(\delta_M, \Delta) = (1/n) \log n + O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$.

Асимптотику величин $\text{HE}_n(\chi_M, \Delta)$ можно было бы искать так же, как асимптотику $\text{HE}_n(\delta_M, \Delta)$, используя явное выражение для $A_{2k-1}(\delta; x)$ (см. [10, гл. X, § 52]). Но при этом возникло бы множество существенно более серьезных технических трудностей, чем в случае δ_M . Поэтому ограничимся более простым результатом, который получается лишь на основании уже установленных выше фактов.

2.11. ТЕОРЕМА. *При каждом $M = \text{const} > 0$ имеем*

$$\left| \text{HE}_n(\chi_M, \Delta) - \frac{1}{n} \log(2Mn) \right| \leq \frac{1}{n} \log \log n + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.11.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\text{HE}_{n+1}(\chi_M) > \text{HE}_n(\delta_M)$ при $n \geq 2$. Действительно, если Q – полином степени $\leq 2k + 1$, для которого $H(\chi_M, Q) \leq \text{HE}_{2k}(\delta_M) = \bar{\delta}$, то

$$\max\{Q(x) : |x| \leq \bar{\delta}\} \geq M - \bar{\delta}, \quad \max\{|Q(x)| : \bar{\delta} \leq |x| \leq 1\} \leq \bar{\delta}.$$

В доказательстве теоремы 2.8 установлено, что при этих условиях $Q(x) \equiv Q_{2k}(M; x) \equiv \text{HP}_{2k}(\delta_M, \Delta; x)$. Нетрудно видеть, что замкнутая $\bar{\delta}$ -окрестность Минковского точки $(0, -M)$ графика функции $y = \chi_M(x)$ не пересекается с графиком функции $y = Q_{2k}(M; x)$, что противоречит предположению $H(\chi_M, Q) \leq \bar{\delta}$. Итак, $\text{HE}_{2k+1}(\chi_M) > \text{HE}_{2k}(\delta_M)$. Вместе с (2.8.1) и (2.8.2) это дает нужное неравенство $\text{HE}_{n+1}(\chi_M) > \text{HE}_n(\delta_M)$ ($n \geq 2$). Из него и из (2.10.1) получаем

$$\text{HE}_n(\chi_M) > \frac{\log(2Mn)}{n} - \frac{\log \log n}{n} \quad \forall n \geq n_1(M), \quad (2.11.2)$$

где $n_1(M)$ достаточно велико.

Теперь возьмем $\varepsilon \in (0, 1)$ и положим

$$P(\varepsilon; x) := \frac{1}{2} \left\{ Q_{2k} \left(\frac{M}{\varepsilon}; \frac{x - \varepsilon \bar{\delta}}{1 + \varepsilon} \right) - Q_{2k} \left(\frac{M}{\varepsilon}; \frac{x + \varepsilon \bar{\delta}}{1 + \varepsilon} \right) \right\}, \quad \bar{\delta} = \delta \left(2k, \frac{M}{\varepsilon} \right).$$

Очевидно, $P(\varepsilon; x)$ – нечетный полином степени $\leq 2k - 1$. Так как $|Q_{2k}(M/\varepsilon; t)| \leq \bar{\delta}$ при $\bar{\delta} \leq |t| \leq 1$, то

$$|P(\varepsilon; x)| \leq \bar{\delta} \quad \text{при} \quad (1 + 2\varepsilon)\bar{\delta} \leq |x| \leq 1. \quad (2.11.3)$$

Оценим снизу величину $M_\varepsilon := \max\{P(\varepsilon; x) : |x| \leq (1 + 2\varepsilon)\bar{\delta}\}$. Из убывания полинома $Q_{2k}(x) := Q_{2k}(M/\varepsilon; x)$ на $[0, \bar{\delta}]$ следует, что

$$\begin{aligned} M_\varepsilon &\geq \frac{1}{2} \max \left\{ Q_{2k} \left(t - \frac{\varepsilon \bar{\delta}}{1 + \varepsilon} \right) - Q_{2k} \left(t + \frac{\varepsilon \bar{\delta}}{1 + \varepsilon} \right) : \frac{\varepsilon \bar{\delta}}{1 + \varepsilon} \leq t \leq \frac{\bar{\delta}}{1 + \varepsilon} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \omega \left(Q_{2k}, [0, \bar{\delta}], \frac{2\varepsilon \bar{\delta}}{1 + \varepsilon} \right) \end{aligned}$$

($\omega(f, E, \delta)$ – модуль непрерывности функции f на множестве E). Так как $\omega(t\delta) \geq \omega(\delta)/(1 + 1/t)$ для любого $t \in (0, 1)$ и любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$, то отсюда

$$\begin{aligned} M_\varepsilon &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} + 1 \right)^{-1} \cdot \omega(Q_{2k}, [0, \bar{\delta}], \bar{\delta}) \\ &= \frac{\varepsilon}{1 + 3\varepsilon} \{Q_{2k}(0) - Q_{2k}(\bar{\delta})\} = \frac{\varepsilon}{1 + 3\varepsilon} \left\{ \left(\frac{M}{\varepsilon} - \bar{\delta} \right) - \bar{\delta} \right\}, \\ M - 2\varepsilon \bar{\delta} &\leq (1 + 3\varepsilon) M_\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.11.4)$$

Рассмотрим нечетный полином $Q(\varepsilon; x) := (M - 2\varepsilon \bar{\delta})P(\varepsilon; x)/M_\varepsilon$ степени $\leq 2k - 1$. Из (2.11.4) и (2.11.3) при $(1 + 2\varepsilon)\bar{\delta} \leq |x| \leq 1$ имеем

$$|Q(\varepsilon, x)| \leq (1 + 3\varepsilon)|P(\varepsilon; x)| \leq (1 + 3\varepsilon)\bar{\delta}.$$

В то же время по определению M_ε

$$\max\{Q(\varepsilon; x) : |x| \leq (1 + 2\varepsilon)\bar{\delta}\} = M - 2\varepsilon\bar{\delta}.$$

Отсюда $H(\chi_M, Q) \leq (1 + 3\varepsilon)\delta(2k, M/\varepsilon)$, и при $n = 2k - 1 \geq \varepsilon/M$ из (2.9.3) получаем

$$\text{HE}_n(\chi_M) \leq \frac{1}{n}(1 + 3\varepsilon) \log \frac{2Mn}{\varepsilon}.$$

Положив здесь $\varepsilon = 1/\log n$, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \text{HE}_n(\chi_M) &\leq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{3}{\log n}\right) \{\log(2Mn) + \log \log n\} \\ &\leq \frac{1}{n} \{\log(2Mn) + \log \log n + 4\} \quad \forall n > n_2(M) \end{aligned}$$

($n_2(M)$ достаточно велико). Отсюда и из (2.11.2) следует (2.11.1).

2.12. Вполне аналогично тому, что задачу наилучшего приближения функций $\delta_M(x)$ и $\chi_M(x)$ алгебраическими полиномами в метрике Хаусдорфа решают алгебраические ужи, задачу о наилучшем хаусдорфовом приближении 2π -периодических функций $\delta_M^T(x)$ и $\chi_M^T(x)$ посредством тригонометрических полиномов решают ужи тригонометрические.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на промежутке $\Delta = [a, b)$ задано n -мерное чебышевское подпространство L функций l , допускающих непрерывное $(b - a)$ -периодическое продолжение, и пара таких функций g и G , что $-\infty \leq g(x) < G(x) \leq +\infty \quad \forall x \in \Delta$. Пусть $F(g)$ и $F(G)$ – дополненные графики $(b - a)$ -периодических продолжений g и G соответственно. Тогда элемент $l^* \in L$ (и его график $G(l^*)$) назовем $(b - a)$ -периодическим ужом из L , порожденным парой (g, G) , если $g(x) \leq l^*(x) \leq G(x) \quad \forall x$ и на Δ имеется такой набор из $n - 1$ точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$, что с ростом k от 1 до $n - 1$ точки $M_k = (x_k, l^*(x_k))$ попеременно попадают то на $F(g)$, то на $F(G)$ (начиная с любого из этих дополненных графиков). Часть графика $G(l^*)$ ужа l^* между точками $M_k \in F(g)$ и $M_{k+1} \in F(G)$ называется *восходящим сегментом* ужа l^* , а между точками $M_k \in F(G)$ и $M_{k+1} \in F(g)$ – *нисходящим сегментом* его (при этом, например, в случае восходящего сегмента может быть $l^*(x_k) > l^*(x_{k+1})$).

Известно (см. [5], [8]), что если $(b - a)$ -периодические функции $g(x)$ и $G(x)$ непрерывны и существует такой элемент $l \in L \in \text{TCH}_n(\Delta)$, что $g(x) < l(x) < G(x) \quad \forall x$, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ существуют ровно два $(b - a)$ -периодических ужа $\underline{l}(t; x)$ и $\bar{l}(t; x)$ из L , порожденных парой (g, G) и проходящих через точку $(t, l(t))$, причем эта точка лежит на нисходящем сегменте ужа $\underline{l}(t; x)$ и восходящем сегменте ужа $\bar{l}(t; x)$. В общем случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 2.1.

Ниже рассматриваются лишь тригонометрические ужи. При $\lambda \in (0, \pi)$ определим на периоде $[-\pi, \pi]$ 2π -периодическую пару (g^T, G^T) так: $g^T(x) = -1$ и $G^T(x) = 1$ при $x \in [-\pi, -\lambda] \cup [\lambda, \pi]$, $g^T(x) = -\infty$ и $G^T(x) = +\infty$ при $x \in (-\lambda, \lambda)$. Пусть $f_\alpha(x) := -\cos(nx - \alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $p_-^T(x) = p_+^T(x) = 1/G^T(x)$, $p^T = (p_-^T, p_+^T)$, L_{n-1}^T – $(2n - 1)$ -мерное чебышевское на $[0, 2\pi)$ пространство всех тригонометрических полиномов порядка $\leq n - 1$.

2.13. Нетрудно видеть, что при каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ полином

$$B_n(\lambda, \alpha; x) := \frac{l(p^T, L_{n-1}^T, f_\alpha; x) - f_\alpha(x)}{E(p^T, L_{n-1}^T, f_\alpha)} \quad (2.13.1)$$

является ужом порядка n , порожденным парой (g^T, G^T) . Нетрудно также показать, что семейство всех тригонометрических ужей порядка n , порожденных парой (g^T, G^T) , совпадает с семейством $\{B_n(\lambda, \alpha; x) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, элементы которого зависят 2π -периодически и непрерывно от параметра α . При этом для каждого фиксированного тригонометрического полинома $T(x)$ порядка $\leq n$, для которого $g^T(x) < T(x) < G^T(x) \quad \forall x$, точки $x_i(\alpha) = x_i(T; \alpha)$, в которых $B_n(\lambda, \alpha; x_i) = T(x_i)$, непрерывно и строго монотонно зависят от α . Из (2.13.1) получаем тождества

$$B_n(\lambda, \alpha; x) = -B_n(\lambda, \pi + \alpha; x), \quad B_n(\lambda, \alpha; x) = -B_n(\lambda, \pi - \alpha; -x), \quad (2.13.2)$$

показывающие, что при описании семейства $\{B_n(\lambda, \alpha; x) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ достаточно рассматривать $B_n(\lambda, \alpha; x)$ лишь для $\alpha \in [0, \pi/2]$. Из (2.13.2) следует четность $B_n(\lambda; x) := B_n(\lambda, 0; x)$ и нечетность $B_n^*(\lambda; x) := B_n(\lambda, \pi/2; x)$. Эти полиномы и являются тригонометрическими полиномами порядка $\leq n$ наилучшего хаусдорфова приближения для функций $\delta_M^T(x)$ и $\chi_M^T(x)$ соответственно.

2.14. Положим

$$\begin{aligned} \mu_n(\lambda) &:= \max\{B_n(\lambda; x) : x \in [-\lambda; \lambda]\}, \\ \mu_n^*(\lambda) &:= \max\{B_n^*(\lambda; x) : x \in [-\lambda; \lambda]\}. \end{aligned} \quad (2.14.1)$$

При фиксированных $M > 0$ и $n = 1, 2, \dots$ корни уравнений

$$\lambda\mu_n(\lambda) + \lambda = M, \quad \lambda\mu_n^*(\lambda) + \lambda = M \quad (2.14.2)$$

обозначим $\lambda(n) = \lambda(n, M)$ и $\lambda^*(n) = \lambda^*(n, M)$ соответственно. Существование и единственность $\lambda(n)$ и $\lambda^*(n)$ на $(0, \pi)$ вытекает из следующего утверждения.

2.15. ЛЕММА. *Функция*

$$M_n(\lambda; \alpha) := \max\{B(\lambda, \alpha; x) : x \in [-\lambda, \lambda]\} \quad (2.15.1)$$

$(0 \leq \alpha \leq \pi/2)$ переменного $\lambda \in [0, \pi)$ непрерывна и монотонно возрастает, отображая промежуток $[0, \pi)$ на луч $[\cos \alpha, +\infty)$.

Доказательство этой леммы опирается на устойчивость наименьших уклонений $E(p^T, L_{n-1}^T, f_\alpha)$ и наилучших приближений $l(p^T, L_{n-1}^T, f_\alpha; x)$ при вариациях веса p^T , в частности вариациях параметра λ (см. (2.13.1) и пп. 1.8, 1.17).

Доказательство следующего утверждения вполне аналогично доказательству теоремы 2.8.

2.16. ТЕОРЕМА. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $M > 0$, $\lambda(n)$ и $\lambda^*(n)$ – корни первого и второго уравнений (2.14.2) соответственно. Тогда для 2π -периодического точечного всплеска $\delta_M^T(x)$ его тригонометрический полином наилучшего хаусдорфова приближения $\text{HT}_n(\delta_M^T; x)$ единствен и

$$\text{HT}_n(\delta_M^T; x) = \lambda(n)B_n(\lambda(n); x), \quad \text{HE}_n^T(\delta_M^T) = \lambda(n), \quad (2.16.1)$$

а для 2π -периодического точечного колебания $\chi_M^T(x)$ полином $\text{HT}_n(\chi_M^T; x)$ определен с точностью до знака и

$$\text{HT}_n(\chi_M^T; x) = \pm \lambda^*(n)B_n^*(\lambda^*(n); x), \quad \text{HE}_n^T(\chi_M^T) = \lambda^*(n). \quad (2.16.2)$$

Нетрудно найти аналитическое выражение для полиномов $B_n(\lambda; x)$:

$$B_n(\lambda; x) = T_n\left(\frac{2 \cos x + 1 - \cos \lambda}{1 + \cos \lambda}\right). \quad (2.16.3)$$

Действительно, ввиду (2.6.1) функция

$$\begin{aligned} & (-1)^n A_{2n}(\sin(\lambda/2); \sin(x/2)) \\ &= (-1)^n T_n\left\{\frac{2 \sin^2(x/2) - 1 - \sin^2(\lambda/2)}{1 - \sin^2(\lambda/2)}\right\} = T_n\left\{\frac{2 \cos x + 1 - \cos \lambda}{1 + \cos \lambda}\right\} \end{aligned}$$

является четным тригонометрическим полиномом порядка n . По п. б) леммы 2.5 и определению тригонометрического уха порядка n она совпадает с $B_n(\lambda; x)$.

По поводу аналитического выражения для (нечетных) полиномов $B_n^*(\lambda; x)$ ($\lambda > \pi/(2n)$) см. [12].

Теорему 2.16 дополняет

2.17. ТЕОРЕМА. При фиксированных $M > 0$ и $n = 1, 2, \dots$ тригонометрический полином наилучшего хаусдорфова приближения $\text{HT}_n(\delta_M^T; x)$ функции δ_M^T является единственным,

$$\text{HT}_n(\delta_M^T; x) = \bar{\lambda} T_n\left(\frac{2 \cos x + 1 - \cos \bar{\lambda}}{1 + \cos \bar{\lambda}}\right), \quad (2.17.1)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – полином Чебышева n -й степени, $\bar{\lambda} = \lambda(n, M)$ – корень уравнения

$$\lambda T_n\left(\frac{3 - \cos \lambda}{1 + \cos \lambda}\right) + \lambda = M. \quad (2.17.2)$$

При $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \text{HE}_n^T(\chi_M^T) &= \bar{\lambda} = \lambda(n, M) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \log(2Mn) - \log \log n + \frac{\log \log n}{\log n} (1 + o(1)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.17.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (2.17.1) и равенство $\text{HE}_n^T(\chi_M^T) = \bar{\lambda}$ следуют из (2.16.1) и (2.16.3). Далее заметим, что корень $\delta(n, M)$ уравнения (2.17.2) связан с $\lambda(n, M)$ неравенствами

$$\begin{aligned} 2\delta\left(2n, \frac{M}{2}\right) &\leq \lambda(n, M) \leq 2 \arcsin \delta\left(2n, \frac{M}{2}\right) \\ &= 2\delta\left(2n, \frac{M}{2}\right) + O\left(\delta^2\left(2n, \frac{M}{2}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.17.4)$$

Действительно, при преобразовании $x = \sin(t/2)$ четный тригонометрический полином $\text{HT}_n(\delta_M^T; t)$ переходит в четный алгебраический полином $P(x)$ степени $2n$, а четный алгебраический полином $\text{HP}_{2n}(\delta_{M/2}, \Delta; x)$ ($\Delta = [-1, 1]$) – в четный тригонометрический полином $B(t)$ порядка n . При этом преобразовании отрезок $\{t: -\bar{\lambda} \leq t \leq \bar{\lambda}\}$ соответствует отрезку $\{x: -\sin(\bar{\lambda}/2) \leq x \leq \sin(\bar{\lambda}/2)\}$, а множество $[-\pi, -\bar{\lambda}] \cup [\bar{\lambda}, \pi]$, на котором $|\text{HT}_n(\delta_M^T; t)| \leq \bar{\lambda}$, – множеству $[-1, -\sin(\bar{\lambda}/2)] \cup [\sin(\bar{\lambda}/2), 1]$, на котором $|P(x)| \leq \bar{\lambda}$. Так как

$$M - \bar{\lambda} = \max\{|\text{HT}_n(\delta_M^T; t)|: |t| \leq \bar{\lambda}\} = \max\left\{|P(x)|: |x| \leq \sin\left(\frac{\bar{\lambda}}{2}\right)\right\},$$

то

$$H\left(\frac{P}{2}, \delta_{M/2}\right) \leq \max\left\{\frac{\bar{\lambda}}{2}, \sin\left(\frac{\bar{\lambda}}{2}\right)\right\} = \frac{\bar{\lambda}}{2}.$$

Аналогично, отрезку $[-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$ соответствует отрезок $[-2 \arcsin \bar{\delta}, 2 \arcsin \bar{\delta}]$ и т.д., откуда

$$H(2B, \delta_M^T) \leq \max\left\{2\delta\left(2n, \frac{M}{2}\right), 2 \arcsin \delta\left(2n, \frac{M}{2}\right)\right\} = 2 \arcsin \delta\left(2n, \frac{M}{2}\right).$$

Отсюда и следует (2.17.4). Из (2.17.4) и (2.9.1) получим (2.17.3). Теорема доказана.

В заключение заметим, что ужи $B_n(\lambda, \alpha; x)$ решают и более общую задачу о приближении 2π -периодической функции $f(M, m; x)$, равной 0 при $x \neq 2\pi k$ и равной $[m, M]$ ($m \leq 0 \leq M$) при $x = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Именно при определенных значениях параметров $\lambda = \bar{\lambda} = \lambda(n, M, m)$ и $\alpha = \bar{\alpha} = \alpha(n, M, m)$ полином $\bar{\lambda}B_n(\bar{\lambda}, \bar{\alpha}; x)$ является тригонометрическим полиномом порядка n наилучшего хаусдорфова приближения для $f(M, m; x)$.

Список литературы

1. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 6. С. 59–102.
2. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации (пространство знакочувствительных весов, жесткость и свобода системы) // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 686–689.
3. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации (вопросы единственности и устойчивости) // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 1. С. 5–7.
4. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Метрические пространства полунепрерывных функций // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 48–58.
5. Karlin S. Representation theorems for positive functions // J. of Math. and Mech. 1963. V. 12. № 4. P. 599–618.
6. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
7. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
8. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
9. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Об определении чебышевских ужей // Вестник Московского ун-та. Матем. Мех. 1994. № 3. С. 49–59.
10. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
11. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения. София: Изд-во БАН, 1979.
12. Петухов А. П. Об ужах и приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Analysis Mathematica. 1975. Т. 11. № 1. С. 55–73.

Поступило в редакцию
3.XI.1997