Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Я. Казарновский, Укорочения систем уравнений, идеалов и многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 3, 119–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:41:32

УДК 517.55

Б. Я. Казарновский

Укорочения систем уравнений, идеалов и многообразий

Основной результат работы – построение специальных, называемых *запертыми*, системообразующих полиномиальных идеалов, позволяющих контролировать поведение соответствующих алгебраических многообразий при подходе к бесконечности. Следствием этого результата является наличие, по модулю действия торов, стандартной минимальной торической компактификации неприводимого двумерного многообразия.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

1.1. Описание результатов. Основной результат работы – построение некоторых специальных, называемых *запертыми*, систем образующих полиномиальных идеалов (теорема 1). Такие системы позволяют контролировать поведение многообразия нулей идеала при подходе к бесконечности и к координатным гиперплоскостям. Приведены также некоторые следствия этой теоремы. Например, оказывается, что по модулю действия торов неприводимая поверхность имеет стандартную минимальную торическую компактификацию.

Опишем этот результат подробнее. Напомним, что конечное множество выпуклых многогранных целочисленных конусов размерностей от нуля до d называется d -мерным *веером конусов*, если любая грань конуса также является конусом этого веера, а пересечение любых двух конусов веера является их общей гранью. Конус веера минимальной размерности является линейным подпространством. Назовем веер *острым*, если это подпространство нульмерно. Острому вееру конусов может быть сопоставлено торическое многообразие, т.е. пополнение тора, на котором действие тора продолжается [1]–[3]. Это сопоставление является классификацией торических многообразий.

Скажем, что острый веер *достаточен для d -мерного M* , если замыкание многообразия $M \subset \mathbb{T}$ в соответствующем торическом многообразии компактно. Веер *достаточен для M* , если и только если его носитель (т.е. объединение конусов) содержит некоторое множество $\mathcal{R}_M$, являющееся минимальным из носителей достаточных для M вееров. Существует много d -мерных достаточных для M вееров с носителем $\mathcal{R}_M$. Такой веер можно построить по любой запертой системе образующих идеала. Назовем веер с носителем $\mathcal{R}_M$ *минимальным*, если любой другой

Работа выполнена при поддержке программы INTAS (проект 96-0713).

веер с тем же носителем является его разбиением (один острый веер является разбиением второго, если любой конус второго веера целиком составлен из конусов первого).

Для кривой в $\mathbb{T}$ минимальный веер существует. Он состоит из точки нуль и лучей, вдоль которых кривая выходит на бесконечность (см. п. 1.3), т.е. кривая имеет стандартную торическую компактификацию. Это верно также для гиперповерхности, если она не остается инвариантной при действии какого-либо подтора $\mathbb{T}$. Минимальным является остов коразмерности 1 веера двойственных конусов многогранника Ньютона уравнения гиперповерхности (в исключенных случаях такой веер не является острым). Противоположный пример – подтор размерности, большей 1.

Множество $\mathfrak{R}_M$ строится (п. 1.2) по идеалу кольца полиномов Лорана. Оказывается, что $\mathfrak{R}_M$ стандартным образом разбивается в объединение непересекающихся подмножеств, называемых ниже *камерами укорочений*. Для кривых и гиперповерхностей камеры являются конусами и образуют веер конусов. Для гиперповерхностей с описанным выше исключением и для кривых, отличных от одномерного подтора, этот веер является минимальным. Вообще, каждая камера целиком составлена из конусов любого веера с носителем $\mathfrak{R}_M$. Если камеры укорочений многообразия M являются выпуклыми конусами и образуют острый веер, то такой веер является минимальным для M , иначе (если M не кривая) минимального веера не существует.

Мы покажем (§ 4), что если двумерная поверхность неприводима, то камеры укорочений образуют веер, а если поверхность не остается инвариантной при действии какого-либо подтора $\mathbb{T}$ (т.е. не является тором или произведением тора на кривую), то этот веер является минимальным (иначе веер не острый). Возможно, это верно для любых размерностей. Теория торических многообразий не используется.

Результаты работы частично анонсированы в [5], где они применялись при изучении экспоненциальных аналитических множеств – пересечений алгебраических многообразий с многомерными комплексными обмотками тора. В этом причина повышенного внимания к φ -укорочениям с нецелочисленными φ .

Еще одно приложение результатов работы – теорема о линейной асимптотике экспоненциальных кривых – также анонсировано в [5]. Его вывод не содержится в тексте, так как он использует не рассматриваемый здесь локальный вариант теоремы 1.

1.2. Формулировка результатов. Пусть A – кольцо полиномов Лорана (линейных комбинаций характеров тора, т.е. мономов вида $\{z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}, m_i \in \mathbb{Z}\}$), E^* – сопряженное пространству $E = \operatorname{Re} \mathbb{C}^N$ пространство с двойственной целочисленной решеткой. Точки этой решетки отождествляем с характерами тора $\mathbb{T}$. Множество характеров, входящих в полином Лорана f с ненулевыми коэффициентами, обозначаем через $\operatorname{supp} f$ и называем *носителем полинома*. При $\varphi \in E$ определим φ -степень полинома $d^\varphi(f)$ как максимальное значение φ на $\operatorname{supp} f$. Старшую φ -однородную компоненту f назовем φ -укорочением и обозначим через f_φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. φ -укорочением:

- (i) системы полиномов Лорана $F = \{f^1, \dots\}$;
- (ii) идеала I кольца A ;
- (iii) алгебраического многообразия нулей этого идеала M ;

называется:

- (i) система $F_\varphi = \{f_\varphi^1, \dots\}$;
- (ii) идеал I_φ , порожденный полиномами $\{f_\varphi, f \in I\}$;
- (iii) многообразие M_φ нулей идеала-укорочения I_φ .

Обозначим через $\mathfrak{R}_I$ или $\mathfrak{R}_M$ (не зависящее ввиду свойства мультипликативности $(fg)_\varphi = f_\varphi g_\varphi$ от выбора идеала, определяющего многообразие) подмножество точек $\varphi \in E$, для которых $I_\varphi \neq A$. Зададим в $\mathfrak{R}_I$ соотношение эквивалентности $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow I_\varphi = I_\psi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Камерами укорочений идеала* называются компоненты связности классов заданного соотношения эквивалентности.

Для системы F определим множество $\mathfrak{R}_F \subset E$, состоящее из таких φ , что каждый из полиномов системы F_φ содержит по крайней мере два монома. Рассмотрим в $\mathfrak{R}_F$ соотношение эквивалентности $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow F_\varphi = F_\psi$. Классы эквивалентности этого соотношения являются конусами и определяют представление $\mathfrak{R}_F$ в виде объединения конусов некоторого веера.

В тексте предполагается, что все используемые конусы выпуклы, многогранны, целочисленны и открыты в порождаемых ими подпространствах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Конечную систему образующих $F = \{f^1, \dots, f^q\}$ идеала I назовем *запертой*, если при любом $\varphi \in E$ верно, что:

- 1) среди φ -укорочений образующих $\{f_\varphi^1, \dots, f_\varphi^q\}$ имеется характер с ненулевым коэффициентом, если $\varphi \notin \mathfrak{R}_I$;
- 2) F_φ является системой образующих идеала I_φ ;
- 3) при любом $f \in I$ найдется запись вида $f = \sum_{i=1}^q g^i f^i$, в которой

$$d^\varphi(f) = \max_i d^\varphi(g^i f^i).$$

Условие 2) оставлено для удобства. Оно вытекает из 3).

Если F – запертая система образующих I , то $\mathfrak{R}_I = \mathfrak{R}_F$. Таким образом, выбор запертой системы образующих идеала задает в $\mathfrak{R}_I$ структуру веера конусов. Каждая камера укорочения идеала составлена целиком из некоторого количества конусов этого веера.

ТЕОРЕМА 1. *В любом идеале кольца A существует запертая система образующих.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если F – запертая система образующих идеала I , то F_φ – запертая система образующих идеала I_φ .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Максимальная из размерностей многообразий-укорочений равна $\dim M$. Если M равноразмерно (т.е. составлено из неприводимых компонент одинаковой размерности), то все непустые многообразия-укорочения также равноразмерны, а их размерность равна размерности M .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть K – коническое множество (т.е. такое, что $\lambda K = K \forall \lambda > 0$) в пространстве E . Определим φ -локализацию K^φ следующим образом: если φ принадлежит замыканию K , то $K^\varphi = \{k + \mu\varphi: k \in K, \mu \in \mathbb{R}\}$, если не принадлежит, то $K^\varphi = \emptyset$.

Если $\varphi \in \text{supp } \Sigma$, где Σ – веер конусов, то обозначим через Σ^φ и назовем φ -локализацией веера Σ образующее веер множество конусов вида K^φ .

Если K – выпуклый конус, то K^φ зависит только от содержащей φ грани K . Если Σ – веер конусов, то Σ^φ состоит из локализаций конусов, замыкания которых содержат φ (этот веер не является острым).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если Σ – веер конусов запертой системы F образующих идеала I , то Σ^φ – веер конусов системы F_φ .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При целочисленном φ многообразие M_φ составлено из таких $z \in \mathbb{T}$, что существует лежащая в M алгебраическая кривая, уходящая на бесконечность вдоль проходящей через z в направлении φ сдвинутой полуднопараметрической (см. п. 1.3).*

Введем следующие обозначения:

$\mathcal{K}_\varphi$ – содержащая φ камера укорочения;

$\mathbb{T}_\varphi = \{t \in \mathbb{T}: tI_\varphi = I_\varphi\}$ – стабилизатор идеала-укорочения;

$\mathcal{E}_\varphi$ – пересечение алгебры Ли $\mathbb{T}_\varphi$ с E .

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) $\mathcal{K}_\varphi$ – открытое коническое подмножество $\mathcal{E}_\varphi$.

2) Множества подпространств вида $\mathcal{E}_\varphi$ и камер укорочения конечны.

3) Множества разных идеалов-укорочений и разных многообразий-укорочений конечны. Каждый из идеалов-укорочений является φ -укорочением исходного идеала при некотором целочисленном φ .

4) Максимальная размерность камеры укорочения равна $\dim M$.

5) Если M равноразмерно, то каждая камера укорочения принадлежит замыканию некоторой камеры максимальной размерности.

6) Множество сдвинутых однопараметрических, вдоль которых происходит уход на бесконечность принадлежащих M алгебраических кривых, образует алгебраическое многообразие $M_\infty = \bigcup_{\varphi \neq 0} M_\varphi$.

7) Любой острый веер, отвечающий запертой системе образующих идеала I , достаточен для M , а $\mathbb{R}_M$ является пересечением носителей всех достаточных вееров.

ТЕОРЕМА 2. *Множество φ -локализаций камер укорочений многообразия M совпадает с множеством камер укорочения многообразия-укорочения M_φ .*

СЛЕДСТВИЕ 2. Любая камера укорочения многообразия M составлена целиком из конусов любого веера с носителем $\mathbb{R}_M$.

Если A, B – подмножества метрического пространства с функцией расстояния ρ , то определим обычным образом расстояние от A до B как $\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b)$, а расстояние между A и B как максимум из двух расстояний от одного до другого. Расстояния на торе измеряются в инвариантной эрмитовой метрике.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1) Расстояние между $\operatorname{Re} \log M$ и $\mathbb{R}_M$ конечно, где $\operatorname{Re} \log M$ – множество вещественных частей логарифмов точек M .

2) В дополнении к достаточно большому торическому шару с центром в единице расстояние от M до M_∞ сколь угодно мало.

Для одномерных многообразий второе утверждение является ослаблением известного свойства кривых (см. п. 1.3). Многомерный аналог этого свойства – теорема 4.

Следующее утверждение дает для равноразмерных подмногообразий тора согласованный со взятием укорочений вариант леммы Нётера о нормализации.

Для целочисленного $\phi \in E$ через $\mathbb{T}^\phi$ обозначим одномерный подтор $\exp(\mathbb{C}\phi)$, через $\pi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/\mathbb{T}^\phi$ – отображение факторизации, через E_1 – факторпространство $E/\mathbb{R}\phi$, а через $d\pi: E \rightarrow E_1$ – отображение факторизации по $\mathbb{R}\phi$ или, иначе, ограничение производной π на E .

ТЕОРЕМА 3. Если $\phi \notin \mathbb{R}_M$, то ограничение π на M – собственное отображение.

Если ϕ не содержится в объединении подпространств вида $\mathcal{E}_\varphi$, то при любом $\psi \in E_1$ ψ -укорочение многообразия $\pi(M)$ совпадает с объединением многообразий $\pi(M_\sigma)$, где σ пробегает конечное множество лучей в $\mathbb{R}_M$, проектирующихся в ψ при отображении $d\pi$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если алгебра Ли подтора $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}$ размерности, равной $\operatorname{codim} M$, пересекает множество $\mathbb{R}_M \cup \mathbb{R}_{M_\varphi}$ только в нуле, то и M , и M_φ являются конечнолистными накрытиями тора $\mathbb{T}/\mathbb{T}_1$ при проекции $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/\mathbb{T}_1$.

При $V \subset E$ обозначим через $(V)_{\text{exp}}$ подмножество тора, вещественные части логарифмов точек которого принадлежат V , а через $V^{a,b}$ – a -окрестность V без части, принадлежащей b -окрестности границы V .

ТЕОРЕМА 4. Для любого $\varphi \in E$ и любого $a > 0$ расстояние между $M \cap ((\mathcal{K}_\varphi)^{a,b})_{\text{exp}}$ и $M_\varphi \cap ((\mathcal{K}_\varphi)^{a,b})_{\text{exp}}$ стремится к нулю с ростом b .

Ввиду (очевидной) леммы 1 и первого утверждения предложения 5 теорема 4 дает картину асимптотического расположения M вблизи бесконечности.

ЛЕММА 1. При любых $A < B$ окрестность радиуса A носителя любого веера конусов принадлежит объединению непересекающихся множеств вида $\mathcal{K}^{a,b}$, где $\mathcal{K}$ пробегает множество всех конусов веера с a, b , зависящими от конуса и такими, что $A \leq a < b$ и $b > B$.

Для полинома Лорана f положим $\|f\|(x) = |f(x)|/\Psi(x)$, где

$$\Psi(x) = \max_{\chi \in \text{supp } f} |\chi(x)|,$$

а для системы $F = \{f_1, \dots\}$ положим $\|F\|(x) = \|f_1\|(x) + \dots$

ТЕОРЕМА 5. Пусть M – многообразие корней запертой системы уравнений F . Тогда для любого ε найдется δ такое, что $\|F\| \geq \delta$ вне торической ε -окрестности M .

В § 2 доказана теорема 1 и вытекающие из нее факты о структуре множества $\mathfrak{R}_M$, в § 3 – остальные сформулированные выше утверждения. В § 4 доказано, что все камеры укорочений 2-мерного неприводимого многообразия выпуклы, т.е. 1-мерная камера укорочения – либо луч, либо прямая (что верно для любых многообразий), а 2-мерная камера $\mathcal{K}_\varphi$ – либо вся плоскость $\mathcal{E}_\varphi$, либо угол, не превосходящий π .

В приведенных в п. 1.3 примерах многообразий множество камер укорочений образует веер конусов. Противоположный пример – объединение двух двумерных подторов четырехмерного тора.

1.3. Примеры.

ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ. Если M – гиперповерхность, заданная уравнением $f = 0$, то $\mathfrak{R}_M$ может быть построено по многограннику Ньютона f следующим образом. Многогранником Ньютона полинома f называется выпуклая оболочка его носителя. Если $\Delta \subset \Gamma$ – грань многогранника Ньютона (любой размерности), то определим двойственный ей конус $\mathcal{K}_\Delta$, состоящий из таких $e \in E$, что функция $\langle e, \dots \rangle$ в E^* достигает максимума на многограннике Γ во всех точках грани Δ , и нигде больше. Таким образом, пространство E представляется в виде объединения попарно непересекающихся конусов. Идеал I_φ является главным идеалом с образующей f_φ .

Множество $\mathfrak{R}_M$ является объединением конусов, двойственных граням ненулевой размерности. Эти конусы образуют веер. Если $\varphi \in \mathcal{K}_\Delta$, то $\mathcal{K}_\varphi = \mathcal{K}_\Delta$. Система из одной образующей f является запертой. Если многогранник Ньютона f не содержится в собственном аффинном подпространстве E (т.е. f не является полиномом меньшего числа переменных), то построенный веер конусов минимален (иначе он не острый).

КРИВЫЕ. Если M – кривая, отличная от сдвинутой однопараметрической (т.е. сдвинутого одномерного подтора), то $\mathfrak{R}_M$ – конечное множество целочисленных лучей и точка нуль. По направлениям этих лучей происходит выход кривой на бесконечность. Если M – сдвинутая однопараметрическая, то $\mathfrak{R}_M$ – соответствующая прямая.

Напомним, что алгебраическая кривая в $\mathbb{T}$ выходит на бесконечность вдоль конечного множества сдвинутых полуоднопараметрических. Это значит, что существуют наборы точек тора $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ и целочисленных точек $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E\}$

такие, что вне большого шара с центром в единице расстояние между кривой и объединением полуоднопараметрических $\{\gamma_j \exp(t\varphi_j), \operatorname{Re} t > 0\}$ мало.

Объединение этих сдвинутых полуоднопараметрических – половина определенного в п. 1.2 многообразия M_∞ . Поэтому описанное свойство кривых – усиление второго утверждения предложения 5. Его многомерный аналог – теорема 4.

ПОЛНЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ. Набор N многогранников в N -мерном пространстве называется *развернутым*, если любой луч в двойственном пространстве принадлежит двойственному конусу одной из вершин одного из многогранников набора. Свойство набора многогранников быть развернутым является общим. Класс систем с развернутыми многогранниками выделен и рассмотрен в [4], где для таких систем построен алгоритм теории исключения, отличающийся от классического большей простотой и результативностью.

Для системы N полиномов Лорана от N переменных с конечным множеством корней запертость (очевидно) эквивалентна развернутости набора ее многогранников Ньютона.

§ 2. Укорочения систем

Для доказательства теоремы 1 достаточно при любом ненулевом $\sigma \in E$ построить локально запертую в σ систему образующих $F(\sigma)$ идеала I , т.е. систему, удовлетворяющую условиям определения 3 для φ , принадлежащих некоторому открытому содержащему σ конусу. Действительно, если взять конечное покрытие $E \setminus 0$ такими конусами, то система, состоящая из объединения приписанных этим конусам систем, является запертой.

Перейдем к построению локально запертого базиса идеала. Это построение является объединением конструкции базиса Гребнера [6] с конструкцией базиса из первоначального доказательства теоремы Гильберта о базисе [7]; оно практически совпадает с первой при $k = N$ (см. ниже) и со второй при $k = 1$.

При построении будут использованы следующие понятия. Множество точек координатного пространства $\mathbb{R}^k$ с неотрицательными целочисленными координатами будем называть *октантом* и обозначать O , множество точек вида $m + O$, где $m \in O$, будем называть *сдвинутым октантом*, а m – *вершиной сдвинутого октанта*. Подмножество O , которое с каждой своей точкой m содержит сдвинутый октант с вершиной m , будем называть *октантным*.

ЛЕММА 2 [6]. *Любое октантное множество можно единственным образом представить в виде объединения конечного числа не содержащих друг друга сдвинутых октантов.*

Пусть $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{N-k}$ – такой базис решетки характеров $\mathbb{T}$, что $\{x_i\}$ лежат в полупространстве $\sigma > 0$, а $\{y_i\}$ образуют базис подгруппы характеров, лежащих в гиперплоскости $\sigma = 0$. Если гиперплоскость целочисленна (соответственно чисто нецелочисленна), то $k = 1$ ($k = N$). Обозначим через A^σ кольцо полиномов от переменных $x_1, \dots, x_k$, коэффициенты которых – полиномы Лорана от $y_1, \dots, y_{N-k}$, а через I^σ – идеал $I \cap A^\sigma$ кольца A^σ .

Пусть $\mathbb{R}^k$ – координатное подпространство E^* , порожденное векторами $x_1, \dots, x_k$. Моному x^m кольца A^σ сопоставим его степень m , которую мы будем рассматривать как точку O . По построению значения σ в любых двух целочисленных точках O различны. Поэтому если $f \in A^\sigma$, то $f_\sigma = g(y)x^m$, где m называем *старшей степенью* f . Если f пробегает множество элементов I^σ , имеющих старшую степень m , то множество коэффициентов $g(y)$ образует идеал кольца полиномов Лорана от $y_1, \dots, y_{N-k}$, который мы обозначаем через $I^\sigma(m)$ и называем *идеалом старшей степени*.

Скажем, что точка $m \in O$ является *старшей степенью j -го уровня*, если количество содержащихся в $I^\sigma(m)$ идеалов старших степеней больше или равно j . Старшие степени первого уровня – это все старшие степени полиномов идеала.

Ясно, что множество старших степеней j -го уровня является октантным. Так как $I^\sigma(n) \supseteq I^\sigma(m)$ при $n \in m + O$, то последовательность этих октантных множеств с ростом j убывает и ввиду нётеровости кольца полиномов Лорана является конечной.

Пусть $m_1^j, \dots, m_{p_j}^j$ – вершины сдвинутых октантов, в объединение которых, согласно лемме 2, раскладывается множество старших степеней j -го уровня. Для каждой точки m из набора $\{m_i^j\}$ выберем в идеале I^σ такие полиномы, что их старшая степень равна m , а коэффициенты при x^m дают запертую систему образующих идеала $I^\sigma(m)$. Полученную так систему обозначим через $F(\sigma) = \{f^1, \dots, f^q\}$.

Теперь определим конус, в котором система $F(\sigma)$ будет локально запертой.

Для любой системы полиномов Лорана F определим *зависящий от $\sigma \in E$ конус $\mathcal{X}(\sigma)$* следующим образом. Пусть $\mathcal{X}(\sigma)$ – конус в полупространстве $\{\sigma < 0\}$, замыкание которого пересекает гиперплоскость $\{\sigma = 0\}$ только в вершине; кроме того, носитель $\text{supp } f$ любого полинома системы F принадлежит сумме Минковского двух выпуклых множеств: выпуклой оболочки $\text{supp } f_\sigma$ и $\mathcal{X}(\sigma)$. Конус $\mathcal{X}(\sigma)$ – это двойственный конусу $\mathcal{X}(\sigma)$ конус, т.е.

$$\widetilde{\mathcal{X}}(\sigma) = \{e \in E: \langle e, x \rangle < 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}(\sigma)\}.$$

Смысл определения в том, что при $\varphi \in \widetilde{\mathcal{X}}(\sigma)$ максимум φ на носителе f может достигаться только в точках носителя его старшей σ -однородной компоненты, т.е. $F_\varphi = (F_\sigma)_\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Система $F(\sigma)$ удовлетворяет условиям определения 3 при $\varphi \in \widetilde{\mathcal{X}}(\sigma)$.

ЛЕММА 3. Любой элемент g идеала I^σ можно представить в виде суммы элементов $g^i \in I^\sigma$, $i = 1, \dots$, таких, что:

- а) их σ -степени убывают с ростом i ;
- б) каждое из g^i представимо в виде $x^{n_i}(h^{i,1}(y)\tilde{f}^{i,1} + \dots)$, где $\{\tilde{f}^{i,j}\}$ – подмножество полиномов системы $F(\sigma)$, имеющих фиксированную старшую степень, зависящую от g^i ;
- в) при любом заданном φ коэффициенты $h^{i,j}$ разложений g^i можно подобрать так, что $d^\varphi(g_\sigma^i) = \max_j d^\varphi(x^{n_i}h^{i,j}\tilde{f}_\sigma^{i,j})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. Во-первых, из утверждений а) и б) леммы 3 вытекает, что $F(\sigma)$ является базисом идеала I^σ и, следовательно, также идеала I .

Из определения конуса $\widetilde{\mathcal{X}}(\sigma)$ вытекает, что максимальное значение φ на носителях полиномов вида $h^{i,j}(y)\tilde{f}^{i,j}$ достигается только на носителях их старших σ -компонент. Отсюда, учитывая утверждение в) леммы 3, получаем, что этим свойством обладают и $g^1, \dots$. Пусть $\{G^i\}$ – подмножество $\{g^i\}$, состоящее из полиномов одной и той же φ -степени, равной $\max_i d^\varphi(g_\sigma^i)$. Их старшие φ -компоненты не могут сократиться, так как они имеют разные σ -степени. Поэтому получаем, что $g_\varphi = (G_\sigma^1)_\varphi + \dots$, и это разложение является разложением φ -укорочения g на σ -однородные компоненты.

Отсюда вытекает, что для разложения $g = g^1 + \dots$ выполняется условие 3) определения 3.

Если $I_\varphi = A$, то по теореме Гильберта о нулях существует $g \in I^\sigma$ такой, что g_φ является мономом с ненулевым коэффициентом. Тогда определенное выше множество $\{G^i\}$ состоит из единственного полинома G^1 , и его φ -укорочение также является мономом. Согласно утверждению в) леммы 3 этот моном принадлежит носителю G_σ^1 . Поэтому условие 1) определения 3 является следствием того, что аналогичное условие выполняется для используемой в построении $F(\sigma)$ системы образующих идеала старшей степени из утверждения б) леммы 3 (которая заперта по построению).

Условие 2) определения 3 – следствие условия 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть $g \in I^\sigma$, n – старшая степень g , j – уровень старшей степени n , m – одно из тех $\{m_i^j\}$, при котором n принадлежит сдвинутому октанту с вершиной m , и $\tilde{f}^{1,1}, \tilde{f}^{1,2}, \dots$ – элементы системы $F(\sigma)$ старшей степени m .

По построению системы $F(\sigma)$ существует разложение

$$g_\sigma = x^{n-m}(h^1(y)\tilde{f}_\sigma^{1,1} + h^2(y)\tilde{f}_\sigma^{1,2} + \dots),$$

для которого $d^\varphi(g_\sigma) = \varphi(n-m) + \max_i d^\varphi(h^i f_\sigma^{1,i})$. Положим

$$g^1 = x^{n-m}(h^1 \tilde{f}_\sigma^{1,1} + \dots).$$

При замене g на $g - g^1$ σ -степень g уменьшается, так как по построению $g_\sigma^1 = g_\sigma$. Отсюда вытекает, что после некоторого конечного количества таких замен g станет нулевым. Этим доказано, что $F(\sigma)$ является системой образующих идеала I^σ , и получено разложение вида $g = g^1 + \dots$ с $g_i \in A^\sigma$, для которого выполнены все утверждения леммы 3. Таким образом, лемма 3 и с ней теорема 1 доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 4. $(I_\sigma)_\varphi = I_\varphi$ при $\varphi \in \widetilde{\mathcal{X}}(\sigma)$.

Действительно, включение $(I_\sigma)_\varphi \supset I_\varphi$ вытекает из свойства $F(\sigma)_\varphi = (F(\sigma)_\sigma)_\varphi$, которое лежит в основе определения конуса $\widetilde{\mathcal{X}}(\sigma)$. С другой стороны (в терминах условия леммы 3), $(g_\sigma)_\varphi = g_\varphi^1$, откуда вытекает обратное включение.

СЛЕДСТВИЕ 5. $\mathcal{K}_\sigma \supseteq \mathcal{E}_\sigma \cap \widetilde{\mathcal{X}}(\sigma)$.

(Обозначения см. в п. 1.2.)

Действительно, так как при $\varphi \in \mathcal{E}_\sigma$ идеал I_σ $\mathbb{T}_\varphi$ -инвариантен, то $(I_\sigma)_\varphi = I_\sigma$. С другой стороны, $(I_\sigma)_\varphi = I_\varphi$ при любом $\varphi \in \widetilde{\mathcal{X}}(\sigma)$. Поэтому $I_\varphi = I_\sigma$, что и требуется доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Докажем, что F_σ является запертой системой образующих идеала I_σ . Для этого проверим условия 1) и 3) определения 3 для системы образующих F_σ идеала I_σ .

Предположим, что $(I_\sigma)_\varphi = A$. Покажем (проверяя условие 1)), что среди полиномов системы F найдется такой f^j , что $(f_\sigma^j)_\varphi$ является мономом.

Пусть $g \in I_\sigma$, $\varphi \neq \pm\sigma$, $g_\varphi = 1$. Так как идеал I_σ σ -однороден, то можно выбрать σ -однородное g с такими же свойствами. Пусть $g = h^1 f_\sigma^1 + \dots$ – разложение g с σ -однородными коэффициентами. Положим $f = h^1 f^1 + \dots$; тогда $f_\sigma = g$ и $f_\psi = 1$ при $\psi = \sigma + \varepsilon\varphi$, если ε достаточно мало. Отсюда (по условию 1) для системы F) найдется f^j , ψ -укорочение которого является мономом. Но $f_\psi^j = (f_\sigma^j)_\varphi$, если ε выбрано настолько малым, что ψ принадлежит конусу $\widetilde{\mathcal{X}}(\sigma)$ системы F . Условие 1) определения 3 проверено.

Для проверки условия 3) нужно показать, что при любых $\sigma, \varphi \in E$, $g \in I_\sigma$ существует такое разложение $g = h^1 f_\sigma^1 + \dots$, при котором $d^\varphi g = \max_i d^\varphi(h^i f_\sigma^i)$.

Выберем для σ -однородного g (мы можем ограничиться этим случаем ввиду σ -однородности идеала) такое $f \in I$, что $f_\sigma = g$. Для $\psi = \sigma + \varepsilon\varphi$ с достаточно малым ε рассмотрим (существующее согласно условию 3) для системы F) разложение $f = h^1 f^1 + \dots$, при котором $d^\psi f = \max d^\psi(h^i f^i)$.

Если $\max_i d^\sigma(h^i f^i) = d^\sigma g$, то $g = h^1 f_\sigma^1 + \dots$, и это разложение удовлетворяет условию 3).

Если $\max_i d^\sigma(h^i f^i) > d^\sigma g$, то обозначим через $\tilde{h}^i$ сумму таких σ -однородных компонент h^i , что носители $\tilde{h}^i f_\sigma^i$ лежат выше σ -уровня g . Тогда если ε достаточно мало, то при замене $f, h^1, h^2, \dots$ на $f - \sum_i \tilde{h}^i f^i, h^1 - \tilde{h}^1, h^2 - \tilde{h}^2, \dots$ соотношение $f_\sigma = g$ сохраняется, соотношение $\max_i d^\sigma(h^i f^i) = d^\sigma g$ восстанавливается, а условие 3) для получаемого разложения нового f остается выполненным, т.е. ситуация приведена к разобранной выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Пусть $F = \{f^1, \dots, f^q\}$ – запертая система образующих идеала I , Γ_i – многогранник Ньютона полинома f^i , $\Gamma = \Gamma^1 + \dots + \Gamma^q$ – сумма Минковского многогранников Ньютона системы. Двойственный конус $\mathcal{K}_\Delta$ грани $\Delta \subset \Gamma$ является пересечением однозначно определенных конусов $\mathcal{K}_{\Delta^i}$, двойственных граням $\Delta^i \subset \Gamma^i$ (при этом $\Delta = \Delta^1 + \dots + \Delta^q$). Назовем грань Δ *отмеченной*, если среди граней $\{\Delta^i\}$ не имеется вершин (или, что то же самое, среди конусов $\mathcal{K}_{\Delta^i}$ нет конусов полной размерности). $\mathfrak{R}_F$ – это объединение конусов, двойственных отмеченным граням. Из условия 1) определения 3 вытекает, что $\mathfrak{R}_I = \mathfrak{R}_F$. Легко видеть, что конусы, двойственные отмеченным граням, образуют веер.

Если $\varphi \in \mathcal{K}_\Delta$, то F_φ – система полиномов с многогранниками $\Delta^1, \dots, \Delta^q$. Эта система (предложение 1) является запертой системой образующих идеала I_φ . По-

этому $\mathfrak{K}_{M_\varphi} = \mathfrak{K}_{F_\varphi}$. Отсюда $\mathfrak{K}_{M_\varphi}$ является объединением конусов, двойственных отмеченным граням многогранника $\Delta = \Delta^1 + \dots + \Delta^q$, что и требовалось доказать.

Теперь кратко об утверждениях следствия 1 (при выводе 4)–7) используются доказываемые в § 3 предложения 2 и 4).

Утверждение 1) вытекает из следствия 5. Из конечности количества конусов веера запертой системы вытекают 2) и первое утверждение 3); второе утверждение 3) вытекает из целочисленности конусов этого веера; 4) и 5) вытекают (здесь опущены некоторые детали) из первого и второго утверждений предложения 2; 6) вытекает из утверждения 3) и предложения 4, а 7) – из утверждения 6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу φ -однородности идеала I_φ для любого $\mu \in \mathbb{R}$ имеем $(I_\varphi)_\psi = (I_\varphi)_{(\mu\varphi+\psi)}$. С другой стороны, при достаточно большом μ (следствие 4) $(I_\varphi)_{(\mu\varphi+\psi)} = I_{(\mu\varphi+\psi)}$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Предположим, что носитель веера конусов Σ есть $\mathfrak{K}_I$, а конус K этого веера пересекает несколько камер укорочения. Выберем целочисленный вектор $\varphi \in K$, принадлежащий камере укорочения минимальной размерности. Тогда из предыдущего вытекает, что носитель веера $\text{supp } \Sigma^\varphi$ совпадает с $\mathfrak{K}_{I_\varphi}$, а конус K^φ этого веера пересекает несколько камер укорочения многообразия M_φ . Теперь, переходя к фактортору $\mathbb{T} / \exp(\mathbb{C}\varphi)$, сводим задачу к случаю тора меньшей размерности.

§ 3. Укорочения многообразий

Пусть $\widehat{\mathcal{K}}$ – простой k -мерный конус в пространстве E . Напомним, что *простым* называется симплициальный конус, ребра которого содержат векторы базиса целочисленной решетки порождаемого конусом подпространства. Выберем базис решетки характеров $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{N-k}$ так, что $\widehat{\mathcal{K}} = \{e \in E: \langle e, y_i \rangle = 0, \langle e, x_j \rangle < 0\}$. Обозначим через $\widehat{A}$ кольцо полиномов Лорана от $x_1, \dots, x_k$ с коэффициентами в кольце полиномов Лорана от $y_1, \dots, y_{N-k}$, т.е. кольцо регулярных функций алгебраического многообразия $\mathbb{C}_x^k \oplus \mathbb{T}_y$. Подмногообразие $\{0\} \oplus \mathbb{T}_y \subset \mathbb{C}_x^k \oplus \mathbb{T}_y$ далее называем *вклеенным тором*.

Если $I, M \subset \mathbb{T}$ – соответственно идеал кольца A и многообразие, то пусть $\hat{I} = I \cap \widehat{A}$, $\widehat{M}$ – идеал кольца $\widehat{A}$ и соответствующее ему подмногообразие $\mathbb{C}_x^k \oplus \mathbb{T}_y$. Ясно, что $\widehat{M}$ – замыкание (в топологии Зариского) образа M при вложении $i: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}_x^k \oplus \mathbb{T}_y$. Пересечение $\widehat{M}$ с вклеенным тором обозначим через M^∞ , а прообраз M^∞ при проекции $\mathbb{T}$ на вклеенный тор – через M_∞ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразие $\mathbb{C}_x^k \oplus \mathbb{T}_y$ (как и кольцо $\widehat{A}$) не зависит от выбранного базиса. Это пополнение $\mathbb{T}$, отвечающее вееру, состоящему из конуса $\widehat{\mathcal{K}}$ и его граней.

ЛЕММА 4. Подмногообразие M^∞ многообразия $\widehat{M}$ не содержит целиком ни одной из его неприводимых компонент.

5 Утверждение вытекает из следствия обратимости $x_1, \dots, x_k$ в кольце A .

Пусть $\varphi \in \widehat{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}_\varphi$, где $\mathcal{K}_\varphi$ – содержащая φ камера укорочения. Ясно, что при этом $M_\varphi = M_\infty$. Выбранный так конус $\widehat{\mathcal{K}}$ будем обозначать через $\widehat{\mathcal{K}}_\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Мы должны доказать, что коразмерность M^∞ во вклеенном торе не меньше коразмерности M , а если M равноразмерно, то M^∞ также равноразмерно, а его коразмерность равна коразмерности M . Согласно утверждению 3) следствия 1 мы можем ограничиться целочисленными φ . В этом случае конус $\widehat{\mathcal{K}}(\varphi)$ можно взять одномерным. Поэтому нужные факты вытекают из утверждения леммы 4 при $k = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Пусть лежащая в M алгебраическая кривая уходит на бесконечность вдоль сдвинутой полуоднопараметрической $\{z \exp(t\varphi) : \operatorname{Re} t \rightarrow +\infty\}$. Тогда по построению $z \exp(t\varphi)$ при $\operatorname{Re} t \rightarrow +\infty$ стремится к некоторой точке M^∞ . Поэтому сдвинутая однопараметрическая целиком принадлежит M_φ .

Пусть, наоборот, $\{z \exp(t\varphi)\} \subset M_\varphi$. Обозначим через $\hat{z}$ предельную точку этой сдвинутой однопараметрической в M^∞ . Тогда нужная кривая – это любая кривая в $\widehat{M}$, проходящая через $\hat{z}$ и имеющая дискретное пересечение с M^∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Пусть M – многообразие корней замкнутой системы уравнений $F = \{f^1, \dots\}$. Тогда $\mathfrak{R}_F = \bigcap \mathfrak{R}_{M_i}$, где M_i – гиперповерхности, заданные уравнениями $f^i = 0$. Поэтому (как вытекает из аналогичного утверждения для гиперповерхностей, которое очевидно) расстояние от $\operatorname{Re} \log M$ до $\mathfrak{R}_M$ ограничено. Оставшаяся часть утверждения 1) и утверждение 2) вытекают из теоремы 4, доказательство которой следует ниже.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Ограничение π на M является собственным, так как расстояние от $\operatorname{Re} \log M$ до $\mathfrak{R}_M$ ограничено, и, значит, вдоль ядра проекции не происходит уходов на бесконечность.

Отсюда (теорема 2) получаем, что если ϕ не содержится в объединении подпространств вида $\mathcal{E}_\varphi$, то ограничение на любое многообразие-укорочение также является собственным.

Покажем, что $\pi(M_\varphi) \subset \pi(M)_{d\pi(\varphi)}$. При целочисленном φ утверждение вытекает из предложения 4. Действительно, если кривая в M уходит на бесконечность вдоль сдвинутой полуоднопараметрической $\{z \exp(t\varphi), \operatorname{Re} t > 0\}$, то ее π -образ уходит вдоль π -образа сдвинутой полуоднопараметрической $\{\pi(z) \exp(td\pi(\varphi)), \operatorname{Re} t > 0\}$. Поэтому $\pi(z) \in M_{d\pi(\varphi)}$.

Если же φ нецелочисленно, то согласно следствию 5 в минимальном содержащем φ целочисленном подпространстве H существует такой полноразмерный выпуклый конус $\mathcal{H}$, что $M_\psi = M_\varphi$ при любом $\psi \in \mathcal{H}$. А поскольку $d\pi(H)$ – минимальное целочисленное подпространство E_1 , содержащее $d\pi(\varphi)$, то, если конус $\mathcal{H}$ выбран достаточно малым, $d\pi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{K}_{d\pi(\varphi)}$. Поэтому найдется такое целочисленное ψ , что $M_\psi = M_\varphi$ и $M_{d\pi(\psi)} = M_{d\pi(\varphi)}$.

Теперь покажем, что, наоборот, если X – неприводимая компонента $\pi(M)_\psi$, то существует $\varphi \in \mathfrak{R}_M$ такое, что $d\pi(\varphi) = \psi$ и $X \subset \pi(M_\varphi)$.

Считая ψ целочисленным, рассмотрим в $\pi(M)_\psi$ кривую (предложение 4), уходящую на бесконечность вдоль сдвинутой полуоднопараметрической, принадле-

жащей X и не принадлежащей другим компонентам $\pi(M)_\psi$. Тогда в качестве φ можно взять луч, вдоль которого происходит один из π -прообразов этого ухода.

ЛЕММА 5. *Для любого $a > 0$ расстояние между $M \cap ((\widehat{\mathcal{K}}_\varphi)^{a,b})_{\text{exp}}$ и $M_\infty \cap ((\widehat{\mathcal{K}}_\varphi)^{a,b})_{\text{exp}}$ стремится к нулю при $b \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Выберем запертую систему образующих идеала уравнений многообразия M . Существует разбиение веера конусов выбранной системы, являющееся веером простых конусов (см., например, [2]). Теперь утверждение теоремы вытекает из леммы 5 (вывод ее см. ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $t_1, \dots$ – такая последовательность точек тора, что $\|F\|(t_i) \rightarrow 0$, а расстояние от t_i до M ограничено снизу. Ясно, что существуют подпоследовательность $\tau_1, \dots$ и конус $\mathcal{K}$ веера системы F такие, что при любом b , начиная с некоторого члена, все τ_i содержатся в $(\mathcal{K}^{a,b})_{\text{exp}}$.

Отсюда вытекает, что $\|F_\varphi\|(\tau_i)$ при $\varphi \in \mathcal{K}$ также стремится к нулю. Поэтому по теореме 5 для торov меньших размерностей получаем, что τ_i приближаются к M_φ . Значит, согласно теореме 4 они приближаются и к M . Полученное противоречие доказывает теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пользуясь произволом в выборе тора T_y , можно найти его подтор T_1 , удовлетворяющий условию следствия 3. Если ограничить проекцию $\mathbb{C}_x \oplus T_y \rightarrow \mathbb{C}_x \oplus (T_y / T_1)$ на $\widehat{M}$, то получим отображение $\pi: \widehat{M} \rightarrow \mathbb{C}_x \oplus (T_y / T_1)$. Согласно следствию 3 отображение π является собственным на прообразе подмножества базы $(T_x \cup \{0\}) \oplus (T_y / T_1)$, т.е. на $M \cup M^\infty$. Теперь утверждение леммы вытекает из того, что все предельные точки в $\mathbb{C}_x^k \oplus T_y$ последовательности точек тора, лежащей на конечном расстоянии от множества $(\widehat{\mathcal{K}}_\varphi)_{\text{exp}}$ и удаляющейся от его границы, принадлежат вклеенному тору, т.е. $\{0\} \oplus T_y$.

§ 4. Укорочения двумерных многообразий

Как вытекает из утверждения следствия 5, двумерная камера укорочения $\mathcal{K}_\sigma$ является углом на двумерной плоскости $\mathcal{E}_\sigma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть M – равноразмерное двумерное многообразие. Тогда:*

- i) *если $\mathcal{K}_\sigma$ – полуплоскость, то M содержит произведение тора на кривую;*
- ii) *если угол $\mathcal{K}_\sigma$ больше развернутого, то M содержит некоторый сдвиг тора T_σ .*

СЛЕДСТВИЕ 6. *Камеры двумерного неприводимого многообразия образуют веер конусов. Если двумерное неприводимое многообразие не является произведением тора на кривую, то этот веер является острым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. На плоскости $\mathcal{E}_\sigma$ имеется целочисленная прямая L , все ненулевые точки которой принадлежат замыканию $\mathcal{K}_\sigma$. Пусть $\alpha \in \mathcal{K}_\sigma$; тогда аффинная прямая $t\alpha + L$ при положительном t принадлежит $\mathcal{K}_\sigma$. Выберем достаточно большое t . Тогда $t\alpha + L$ находится на большом расстоянии от границы $\mathcal{K}_\sigma$.

Пусть $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}$ – подтор коразмерности 2 такой, что $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \oplus \mathbb{T}_\sigma$, и U_C – C -окрестность единицы тора $\mathbb{T}_1$. Рассмотрим множество $\{(zU_C) \cap M : z \in \exp(t\alpha + L)\}$. Согласно теореме 4 при любом z (если t достаточно велико) это множество состоит из постоянного ненулевого количества точек. Координаты этих точек – голоморфные ограниченные функции на сдвинутом одномерном торе $\exp(t\alpha + L)$. По теореме Лиувилля эти функции постоянны. Отсюда вытекает, что многообразие содержит произведение тора $\exp(L)$ на кривую. Если угол $\mathcal{K}_\sigma$ больше развернутого, то, выбирая L разными способами, получаем, что эта кривая также является тором.

Список литературы

1. *Kemph G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embeddings. // Lect. Notes Math. № 339. Springer-Verlag, 1973.
2. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. № 2. С. 85–134.
3. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и особенности интегралов. М.: Наука, 1994.
4. *Гельфонд О. А., Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и вычеты Гротендика // Докл. РАН. 1996. Т. 3. № 350. С. 298–300.
5. *Казарновский Б. Я.* Экспоненциальные аналитические множества // Функцион. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 2. С. 15–26.
6. *Хованский А. Г.* Суммы конечных множеств, орбиты коммутативных полугрупп и функции Гильберта // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 3. С. 36–50.
7. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.

НТЦ “Информрегистр”
E-mail: kazarn@borisk.mccme.ru

Поступило в редакцию
13.X.1997