Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Марченко, Об асимптотических значениях целых функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 3, 133–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/im245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:36:26

УДК 517.56

И. И. Марченко

Об асимптотических значениях целых функций

В теории функций под асимптотическим местом функции f понимается пара $\{a, \Gamma\}$, где $a \in \mathbb{C}$, Γ – непрерывная кривая такая, что $f(z) \rightarrow a$ ($z \rightarrow \infty$, $z \in \Gamma$). В работе вводится новое понятие – сильное асимптотическое место. С использованием этого понятия некоторые результаты Л. Альфорса об асимптотических местах целых функций конечного порядка распространяются на функции бесконечного порядка. Получены точные оценки для числа различных сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$ целых функций как конечного, так и бесконечного нижнего порядка.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Напомним определение асимптотического значения целой функции [1, с. 223], [2]. Число $a \in \mathbb{C}$ называется *асимптотическим значением целой функции* $f(z)$, если существует непрерывная кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$, задаваемая уравнением $z = z(t)$, $0 \leq t < \infty$, $z(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in \Gamma} f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(z(t)) = a.$$

Пара $\{a, \Gamma\}$ в этом случае называется *асимптотическим местом* [2]. Два асимптотических места, $\{a_1, \Gamma_1\}$ и $\{a_2, \Gamma_2\}$, считаются одинаковыми, если $a_1 = a_2 = a$ и существует последовательность непрерывных кривых γ_k таких, что один конец γ_k лежит на Γ_1 , другой на Γ_2 и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{z \in \gamma_k} |z| = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty, z \in \bigcup_k \gamma_k} f(z) = a.$$

Существование асимптотических значений целых функций следует из теоремы Ф. Иверсена.

ТЕОРЕМА А [1, с. 224], [3]. *Для каждой целой функции, отличной от постоянной, значение ∞ является асимптотическим.*

В случае целых функций конечного нижнего порядка

$$\lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} \log \log \max_{|z|=r} |f(z)| / \log r$$

отметим теорему Л. Альфорса.

ТЕОРЕМА В [1, с. 226], [4]. *Целая функция конечного нижнего порядка λ не может иметь более чем $\max(1, [2\lambda])$ различных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$, где $[x]$ – целая часть числа x .*

Для целых функций бесконечного нижнего порядка множество асимптотических мест может быть равно ∞ (это легко следует из примера функции $\exp e^z$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что ∞ является *сильным асимптотическим значением* целой функции $f(z)$, если существует непрерывная кривая $\Gamma: z = z(t)$, $0 \leq t < \infty$, $z(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z(t))|}{\log M(|z(t)|, f)} = 1, \quad M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Если ∞ – сильное асимптотическое значение функции $f(z)$, то асимптотическое место $\{\infty, \Gamma\}$ будем называть *сильным асимптотическим местом*.

Настоящая работа посвящена исследованию числа сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$ целых функций.

Для формулировки основных результатов работы нам понадобится определение величины отклонения мероморфной функции $f(z)$ от числа a , которую ввел и исследовал В. П. Петренко.

Для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$ положим

$$\mathcal{L}(r, a, f) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a|}, \quad \mathcal{L}(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \log^+ |f(z)|.$$

Величиной отклонения функции $f(z)$ от числа a называется

$$\beta(a, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{T(r, f)},$$

где $T(r, f)$ – неванлинновская характеристика мероморфной функции $f(z)$.

Величина $\beta(a, f)$ характеризует скорость приближения функции $f(z)$ к значению a в более сильной метрике, чем величина неванлинновского дефекта. Оказалось, что для мероморфных функций конечного нижнего порядка свойства величин отклонений напоминают свойства дефектов. Так, В. П. Петренко получил точную оценку сверху для $\beta(a, f)$, а также некоторую оценку для $\sum_{(a)} \beta(a, f)$.

ТЕОРЕМА С [5]. *Для мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ и для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$*

$$\beta(a, f) \leq \begin{cases} \pi \lambda \sin^{-1} \pi \lambda, & \text{если } \lambda \leq 0.5, \\ \pi \lambda, & \text{если } \lambda > 0.5. \end{cases}$$

В работе [6] получена точная оценка для $\sum_{(a)} \beta(a, f)$.

ТЕОРЕМА D [6]. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ . Тогда

$$\sum_{(a)} \beta(a, f) \leq \begin{cases} 2\pi\lambda \sin^{-1} \pi\lambda, & \text{если } \lambda \leq 0.5, \\ 2\pi\lambda, & \text{если } \lambda > 0.5. \end{cases}$$

В случае мероморфных функций бесконечного нижнего порядка величина $\beta(a, f)$ может быть равна ∞ . Поэтому в этом случае интересен результат В. Бергвайлера и Г. Бока.

ТЕОРЕМА E [7]. Для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{rT'_-(r, f)} \leq \pi, \quad (0.1)$$

где $T'_-(r, f)$ – левосторонняя производная функции $T(r, f)$.

Отметим, что $rT'_-(r, f) = A(r, f) + O(1)$ ($r \rightarrow \infty$), где $A(r, f)$ – сферическая площадь круга $\{z: |z| \leq r\}$ при отображении $w = f(z)$, деленная на площадь сферы Римана. В связи с оценкой (0.1) А. Еременко ввел величину

$$b(a, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{A(r, f)}$$

и доказал аналог соотношения дефектных значений для этих величин [8].

Настоящая работа посвящена доказательству следующих двух результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z)$ – целая функция, не равная тождественно постоянной, имеет конечный нижний порядок λ и p различных сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$, $j = 1, \dots, p$. Тогда

$$p \leq \begin{cases} \max\left(1, \left\lceil \frac{\pi\lambda \sin \pi\lambda}{\beta(\infty, f)} \right\rceil\right), & \text{если } \lambda \leq 0.5, \end{cases} \quad (0.2)$$

$$\begin{cases} \left\lceil \frac{\pi\lambda}{\beta(\infty, f)} \right\rceil, & \text{если } \lambda > 0.5, \end{cases} \quad (0.3)$$

где $[x]$ – целая часть числа x .

ТЕОРЕМА 2. Если целая функция $f(z)$ бесконечного нижнего порядка имеет p различных сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$, $j = 1, \dots, p$, то

$$p \leq \left\lceil \frac{\pi}{b(\infty, f)} \right\rceil.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если для целой функции $f(z)$ выполнено $b(\infty, f) > 0$, то множество ее различных сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$ конечно.

Легко видеть, что для функции $\exp e^z$ множество сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$ бесконечно. Поэтому условие $b(\infty, f) > 0$ является существенным.

Отметим, что соответствующие оценки в теоремах 1, 2 в некотором смысле являются точными.

Оценка в теореме 2 достигается на функции $f_1(z) = E_0(z^n)$, где $E_0(z)$ – целая функция из работы [9, с. 126], а n – любое натуральное число. Эта функция имеет n сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$, где $\Gamma_j = \{te^{(2\pi i/n)j}, 0 \leq t < \infty\}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, $b(\infty, f_1) = \pi/n$.

Если $\lambda \geq p/2$, то оценка (0.3) достигается на функции $f_2(z) = E_{\lambda/n}(z^n)$, где $E_\rho(z)$ – функция Миттаг-Леффлера порядка ρ . Из асимптотик функции $E_\rho(z)$ (см. [1, с. 114]) легко следует, что нижний порядок $f_2(z)$ равен λ , число сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$ равно n и $\beta(\infty, f_1) = \pi\lambda/n$.

Если $\lambda < 1/2$ и $p = 1$, оценка (0.2) достигается для функции из примера 3 работы [1, с. 282]. Из асимптотик этой функции получаем, что она имеет нижний порядок λ , одно сильное асимптотическое место $\{\infty, \Gamma\}$ и $\beta(\infty, f) = \pi\lambda \sin(\pi\lambda)$.

Таким образом, сильные асимптотические места являются естественным аналогом асимптотических мест, введенных М. Хейнсом, на которые распространяются классические теоремы для функций конечного порядка. Кроме того, это понятие оказалось полезным и при изучении функций конечного порядка. Например, удалось найти связь величины $\beta(\infty, f)$, введенной В. П. Петренко, и величины $b(\infty, f)$, введенной в работах А. Еременко, В. Бергвайлера и Г. Бока, с числом сильных асимптотических мест целых функций как конечного, так и бесконечного порядков.

§ 1. Вспомогательные результаты

ЛЕММА А [1, с. 226]. Пусть $f(z)$ – целая функция и $\{\infty, \Gamma_j\}$, $j = 1, 2, \dots, p$, – различные асимптотические места $f(z)$. Тогда существуют натуральное число n_0 и p неограниченных областей $\Omega_j^{(n_0)}$, которые попарно не пересекаются и удовлетворяют следующим свойствам:

- а) функция $f(z)$ удовлетворяет в $\Omega_j^{(n_0)}$ неравенству $|f(z)| > n_0$;
- б) на части границы $\Omega_j^{(n_0)}$, лежащей в конечной части плоскости, выполняется $|f(z)| = n_0$;
- в) существует число R_0 такое, что $\Gamma_j \cap \{|z| > R_0\} \subset \Omega_j^{(n_0)}$, $j = 1, 2, \dots, p$.

Далее рассмотрим функцию

$$u_j(z) = \begin{cases} \log |f(z)|, & \text{если } z \in \Omega_j^{(n_0)}, \\ n_0, & \text{если } z \notin \Omega_j^{(n_0)}. \end{cases}$$

Ясно, что $u_j(z)$ – субгармоническая функция в $\mathbb{C}$. Поэтому функция (см. [10])

$$m^*(r, \theta, u_j) = \frac{1}{2\pi} \sup_{|E|=2\theta} \int_E u_j(re^{i\varphi}) d\varphi \quad (1.1)$$

является субгармонической в $K = \{re^{i\theta} : 0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi\}$, непрерывной на $K \cup (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, логарифмически выпуклой при $r > 0$ для каждого фиксированного $\theta \in [0, \pi]$ и, кроме того,

$$m^*(r, \theta, u_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta u_j^*(r, \varphi) d\varphi, \quad \frac{\partial m^*}{\partial \theta}(r, \theta, u_j) = \frac{1}{\pi} u_j^*(r, \theta), \quad 0 < \theta < \pi,$$

где $u_j^*(r, \theta)$ – круговая перестройка функции $u_j(re^{i\theta})$ [11, с. 90].

Для вещественной функции $\varphi(r)$ рассмотрим оператор

$$L\varphi(r) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(re^h) + \varphi(re^{-h}) - 2\varphi(r)}{h^2}.$$

Если $\varphi(r)$ – дважды дифференцируемая функция в точке r , то

$$L\varphi(r) = r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \varphi(r).$$

В силу логарифмической выпуклости $m^*(r, \theta, u_j)$ имеем, что для всех $r > 0$ и $\theta \in [0, \pi]$ выполняется неравенство

$$Lm^*(r, \theta, u_j) \geq 0. \quad (1.2)$$

ЛЕММА 1. Для всех $r > 0$ и для почти всех $\theta \in (0, \pi)$

$$Lm^*(r, \theta, u_j) \geq -\frac{1}{\pi} \frac{\partial u_j^*}{\partial \theta}(r, \theta). \quad (1.3)$$

В случае дважды дифференцируемой функции $m^*(r, \theta, u_j)$ лемма 1 следует из субгармоничности $m^*(z, u_j) = m^*(r, \theta, u_j)$, $z = re^{i\theta}$. Действительно,

$$\begin{aligned} Lm^*(r, \theta, u_j) &= r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} m^*(r, \theta, u_j) = r^2 \Delta m^*(r, \theta, u_j) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} m^*(r, \theta, u_j) \\ &\geq -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} m^*(r, \theta, u_j) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial u_j^*}{\partial \theta}(r, \theta), \end{aligned}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $z = re^{i\theta} = x + iy$.

В общем случае лемма 1 доказывается аналогично лемме 1 из [12] (см. также [13]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u^*(r, \theta)$ убывает на $[0, \pi]$, то почти всюду на $[0, \pi]$ существует $\partial u_j^*(r, \theta)/\partial \theta$. Если $\partial u_j^*(r, \theta)/\partial \theta = 0$, то лемма следует из (1.2). Пусть $\partial u_j^*(r, \theta)/\partial \theta < 0$ и $\theta \in (0, \pi)$. Из этого условия следует, что для всех $\theta \in (0, \pi)$ имеем $u_j^*(r, \theta) > n_0$. В противном случае существовало бы $\theta \in (0, \pi)$ такое, что $u_j^*(r, \theta) \leq n_0$. Поэтому для всех $h \in (0, \pi - \theta)$ мы имели бы $n_0 \leq u_j^*(r, \theta + h) \leq u_j^*(r, \theta) \leq n_0$. Отсюда $u_j^*(r, \theta + h) = n_0$ ($h \in (0, \pi - \theta)$). Поэтому $\partial u_j^*(r, \theta)/\partial \theta = 0$. Противоречие.

Рассмотрим множества $A_j = \{\varphi: u_j(r, \varphi) = u_j(r, \theta)\}$, $B_j = \{\varphi: \log |f(re^{i\varphi})| = u_j^*(r, \theta)\}$. Если $\varphi \in A_j$, то $u_j(r, \varphi) = u_j^*(r, \theta) > n_0$. Теперь из определения функции $u_j(r, \varphi)$ следует, что $u_j(r, \varphi) = \log |f(re^{i\varphi})|$. Таким образом, $\log |f(re^{i\varphi})| = u_j(r, \theta)$, т.е. $\varphi \in B_j$. Значит, $A_j \subset B_j$. Так как f целая, то множество B_j конечно.

Далее, положим

$$G_j(r, \theta) = \{\varphi: u_j(r, \varphi) > u_j^*(r, \theta)\}.$$

Поскольку A_j конечно, $\text{mes } G_j(r, \theta) = 2\theta > 0$ и поэтому [9]

$$m^*(r, \theta, u_j) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E u_j(r, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{G_j(r, \theta)} u_j(r, \varphi) d\varphi.$$

Пусть $r_0 > 0$ – произвольное фиксированное число. Рассмотрим функцию

$$\psi_j(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{G_j(r_0, \theta)} u_j(r, \varphi) d\varphi.$$

Ясно, что $\psi_j(r_0) = m^*(r_0, \theta, u_j)$ и $\psi_j(r) \leq m^*(r, \theta, u_j)$ для всех $r \neq r_0$. Поэтому

$$\begin{aligned} Lm^*(r_0, \theta, u_j) &\geq L\psi_j(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{G_j(r_0, \theta)} r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \log |f(re^{i\varphi})| \Big|_{r=r_0} d\varphi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{G_j(r_0, \theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \log |f(r_0 e^{i\varphi})| d\varphi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \log |f(r_0 e^{i\varphi})| d\varphi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f(r_0 e^{i\varphi})| \Big|_{\alpha_k}^{\beta_k}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $G_j(r_0, \theta) = \bigcup_{k=1}^m (\alpha_k, \beta_k)$, (α_k, β_k) – составляющие интервалы $G_j(r_0, \theta)$, $k = 1, \dots, m$.

Кроме того, имеем

$$u_j(r_0, \alpha_k) = u_j(r_0, \beta_k) = \log |f(r_0 e^{i\alpha_k})| = \log |f(r_0 e^{i\beta_k})| = u_j^*(r_0, \theta).$$

Поэтому в силу неравенства (1.3) из работы [12] следует

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \varphi} \log |f(r_0 e^{i\varphi})| \Big|_{\alpha_k}^{\beta_k} \leq 2m^2 \frac{\partial u_j^*}{\partial \theta}(r_0, \theta). \quad (1.5)$$

Из соотношений (1.4), (1.5) и $m \geq 1$ получаем утверждение леммы 1 и в этом случае. Лемма 1 доказана.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится еще один результат из работы [5, с. 29].

ЛЕММА В. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ . Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности S_k и R_k , стремящиеся к бесконечности, такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (S_k/R_k) = 0$ и для $k \geq k_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\frac{T(2R_k, f)}{R_k^\lambda} + \frac{T(2S_k, f)}{S_k^\lambda} < \varepsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

В работе [7] были введены последовательности пиков Поля для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. Напомним их определение.

Для любых последовательностей $M_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ существуют последовательности $\rho_n \rightarrow \infty$, $\mu_n \rightarrow \infty$ такие, что для всех r , удовлетворяющих неравенству $|\log(r/\rho_n)| \leq M_n/\mu_n$, выполняется неравенство

$$T(r, f) \leq (1 + \varepsilon_n) \left(\frac{r}{\rho_n} \right)^{\mu_n} T(\rho_n, f). \quad (1.6)$$

Последовательность μ_n можно выбрать так, чтобы

$$\mu_n = \bar{o}(\log^{3/2} T(\rho_n, f)).$$

Положим

$$P_n = \rho_n e^{-M_n/\mu_n}, \quad Q_n = \rho_n e^{M_n/\mu_n}.$$

Тогда неравенство (1.6) выполняется для всех $r \in [P_n, Q_n]$. Будем считать, что $M_n > 1$. Рассмотрим множества

$$A_n = \left\{ r \in [\rho_n, Q_n] : T(r, f) \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \left(\frac{r}{\rho_n} \right)^{\mu_n} T(\rho_n, f) \right\},$$

$$B_n = \left\{ r \in [P_n, \rho_n] : T(r, f) \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \left(\frac{r}{\rho_n} \right)^{\mu_n} T(\rho_n, f) \right\}.$$

Положим

$$R_n = \begin{cases} \min A_n, & \text{если } A_n \neq \emptyset, \\ Q_n, & \text{если } A_n = \emptyset, \end{cases} \quad t_n = \begin{cases} \max B_n, & \text{если } B_n \neq \emptyset, \\ P_n, & \text{если } B_n = \emptyset, \end{cases}$$

$$S_n = e^{-1/\mu_n} R_n, \quad T_n = e^{-2/\mu_n} R_n.$$

Тогда $t_n < \rho_n < T_n < S_n < R_n$.

В работе [7] доказано, что

$$\frac{T(R_n, f)}{R_n^{\mu_n}} + \frac{T(t_n, f)}{t_n^{\mu_n}} = o\left(\mu_n \int_{t_n}^{T_n} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_n+1}} dr\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

§ 2. Целые функции конечного нижнего порядка

В этом параграфе мы докажем теорему 1. Будем предполагать, что число сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}$, $j = 1, 2, \dots, p$, целой функции $f(z)$ больше 1, т.е. $p \geq 2$. При $p \leq 1$ доказывать нечего.

Рассмотрим функцию [6]

$$m_0^*(r, \theta, f) = \sum_{j=1}^p m^*(r, \theta, u_j), \quad (2.1)$$

где функция $m^*(r, \theta, u_j)$ определена соотношением (1.1).

Далее, для каждого α , $0 < \alpha \leq \min(\pi, \pi/(2\lambda))$, положим [14], [15]

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha m_0^*(r, \theta, f) \cos \lambda \theta d\theta. \quad (2.2)$$

Из неравенства (1.2) получаем

$$L\sigma(r) \geq \int_0^\alpha Lm_0^*(r, \theta, f) \cos \lambda \theta d\theta \geq \sum_{j=1}^p \int_0^\alpha Lm^*(r, \theta, u_j) \cos \lambda \theta d\theta \geq 0. \quad (2.3)$$

Пусть на окружности $|z| = r$ нет нулей функции $f(z)$. Тогда функция $u_j(re^{i\theta})$ аналитична по θ на $[0, 2\pi]$. Поэтому ее круговая перестройка $u_j^*(r, \theta)$ абсолютно непрерывна на $[0, \pi]$ [11]. Далее, используя неравенство (1.3) и формулу интегрирования по частям, имеем

$$L\sigma(r) \geq -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^p \int_0^\alpha \frac{\partial u_j^*(r, \theta)}{\partial \theta} \cos \lambda \theta d\theta = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^p u_j^*(r, \theta) \cos \lambda \theta \Big|_0^\alpha$$

$$- \lambda m_0^*(r, \alpha, f) \sin \lambda \alpha + \lambda^2 \sigma(r) \equiv h(r) + \lambda^2 \sigma(r). \quad (2.4)$$

В силу (2.3) функция $\sigma(r)$ логарифмически выпукла при $r \geq 0$. Отсюда следует, что функция $r\sigma'_-(r)$ монотонно возрастает на промежутке $[0, \infty)$. Таким образом, для почти всех $r \geq 0$

$$L\sigma(r) = r \frac{d}{dr} r\sigma'_-(r),$$

где $\sigma'_-(r)$ – левосторонняя производная функции $\sigma(r)$ в точке r .

Теперь разделим неравенство (2.4) на $r^{\lambda+1}$ и проинтегрируем его по отрезку $[S_k, R_k]$ (последовательности S_k, R_k определены в лемме В):

$$\int_{S_k}^{R_k} \frac{\frac{d}{dr} r\sigma'_-(r)}{r^\lambda} dr \geq \int_{S_k}^{R_k} \frac{h(r)}{r^{\lambda+1}} dr + \lambda^2 \int_{S_k}^{R_k} \frac{\sigma(r)}{r^{\lambda+1}} dr. \quad (2.5)$$

Из монотонности функции $r\sigma'_-(r)$ следует (см. [12])

$$\int_{S_k}^{R_k} \frac{\frac{d}{dr} r\sigma'_-(r)}{r^\lambda} dr \leq \left(\frac{r\sigma'_-(r)}{r^\lambda} + \lambda \frac{\sigma(r)}{r^\lambda} \right) \Big|_{S_k}^{R_k} + \lambda^2 \int_{S_k}^{R_k} \frac{\sigma(r)}{r^{\lambda+1}} dr. \quad (2.6)$$

Неравенства (2.5), (2.6) дают

$$\int_{S_k}^{R_k} \frac{h(r)}{r^{\lambda+1}} dr \leq \left(\frac{\sigma'_-(r)}{r^{\lambda-1}} + \frac{\lambda\sigma(r)}{r^\lambda} \right) \Big|_{S_k}^{R_k}. \quad (2.7)$$

Из определения функции $m_0^*(r, \theta, f)$ получаем, что для всех $\theta \in [0, \pi]$

$$m_0^*(r, \theta, f) \leq m(r, f) + pn_0 = T(r, f) + pn_0, \quad (2.8)$$

где n_0 – число, определенное в лемме А. Поэтому из (2.1) получаем

$$\sigma(r) \leq \pi T(r, f) + \pi pn_0.$$

Так как функция $r\sigma'_-(r)$ монотонно возрастает на $[0, \infty)$, то

$$\sigma(2R_k) - \sigma(R_k) = \int_{R_k}^{2R_k} \sigma'_-(r) dr \geq R_k \sigma'_-(R_k) \log 2.$$

Таким образом,

$$R_k \sigma'_-(R_k) \leq \frac{1}{\log 2} \sigma(2R_k) \leq \frac{\pi}{\log 2} T(2R_k, f) + \frac{\pi pn_0}{\log 2}.$$

Из полученных неравенств и леммы В следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует k_0 такое, что при $k \geq k_0$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{\sigma'_-(r)}{r^{\lambda-1}} + \frac{\lambda\sigma(r)}{r^\lambda} \right) \Big|_{S_k}^{R_k} \leq \pi(2 + \lambda) \frac{T(2R_k, f)}{R_k^\lambda} - \frac{\sigma'_-(1)}{S_k^\lambda} < \varepsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Подставляя это неравенство в соотношение (2.7), имеем

$$\int_{S_k}^{R_k} \frac{h(r)}{r^{\lambda+1}} dr < \varepsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что для каждого $k \geq k_0$ существует число $r_k \in [S_k, R_k]$ такое, что

$$h(r_k) < \varepsilon T(r_k, f).$$

Так как $S_k \rightarrow \infty$, то $r_k \rightarrow \infty$. Из определения функции $h(r)$ (см. (2.4)) получаем

$$\sum_{j=1}^p u_j^*(r_k, 0) - \pi \lambda \sin \lambda \alpha T(r_k, f) - \sum_{j=1}^p u_j^*(r_k, \alpha) \cos \lambda \alpha < \varepsilon T(r_k, f). \quad (2.9)$$

Но $\{\infty, \Gamma_j\}$, $j = 1, 2, \dots, p$, – сильные асимптотические места целой функции $f(z)$, поэтому

$$\begin{aligned} u_j^*(r_k, 0) &= \max_{|z|=r_k} u_j(z) = \max_{|z|=r_k, z \in \Omega_j^{(n_0)}} u_j(z) \geq \max_{|z|=r_k, z \in \Gamma_j} u_j(z) \\ &= \max_{|z|=r_k, z \in \Gamma_j} \log |f(z)| > (1 - \varepsilon) \log M(r_k, f), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Напомним определение величины отклонения:

$$\beta(\infty, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)}.$$

Отсюда следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует r_0 такое, что при $r \geq r_0$

$$\log M(r, f) > (1 - \varepsilon) \beta(\infty, f) T(r, f).$$

Поэтому

$$u_j^*(r_k, 0) > (1 - \varepsilon)^2 \beta(\infty, f) T(r_k, f), \quad k \rightarrow \infty.$$

Теперь неравенство (2.9) дает

$$\begin{aligned} p(1 - \varepsilon)^2 \beta(\infty, f) T(r_k, f) - \pi \lambda \sin \lambda \alpha T(r_k, f) \\ - \sum_{j=1}^p u_j^*(r_k, \alpha) \cos \lambda \alpha < \varepsilon T(r_k, f), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вначале рассмотрим случай $\lambda \geq 1/2$. Полагая в неравенстве (2.10) $\alpha = \pi/(2\lambda)$, получим

$$p(1 - \varepsilon)^2 \beta(\infty, f) T(r_k, f) - \pi \lambda T(r_k, f) < \varepsilon T(r_k, f), \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$p < \frac{\pi\lambda + \varepsilon}{\beta(\infty, f)(1 - \varepsilon)^2}.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем утверждение теоремы при $\lambda \geq 1/2$.

Пусть $\lambda < 1/2$. Так как $p \geq 2$, то $u_j^*(r, \pi) = \min_{|z|=r} u_j(z) = n_0$ ($j = 1, 2, \dots, p$; $r \rightarrow \infty$). В неравенстве (2.10) положим $\alpha = \pi$; получаем

$$\begin{aligned} p(1 - \varepsilon)^2 \beta(\infty, f) T(r_k, f) - \pi\lambda \sin \pi\lambda T(r_k, f) - pn_0 \cos \pi\lambda \\ < \varepsilon T(r_k, f), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(z)$ целая, отличная от постоянной, $T(r, f) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$p(1 - \varepsilon)^2 \beta(\infty, f) - \pi\lambda \sin \pi\lambda < 2\varepsilon.$$

Поэтому

$$p < \frac{\pi\lambda \sin \pi\lambda + 2\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2 \beta(\infty, f)}.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем утверждение теоремы 1 при $\lambda < 1/2$. Теорема доказана.

§ 3. Целые функции бесконечного нижнего порядка

В этом параграфе мы докажем теорему 2. Рассмотрим функцию

$$\sigma_n(r) = \int_0^{\pi/(2\mu_n)} m_0^*(r, \theta, f) \cos \mu_n \theta d\theta,$$

где функция $m_0^*(r, \theta, f)$ определена соотношением (2.1), а μ_n — последовательность, определенная в соотношении (1.6).

Далее, точно так же, как и в доказательстве теоремы 1, получаем дифференциальное неравенство

$$r \frac{d}{dr} r \sigma_n'(r) \geq h_n(r) + \mu_n^2 \sigma_n(r),$$

где

$$h_n(r) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^p u_j^*(r, 0) - \mu_n m_0^*\left(r, \frac{\pi}{2\mu_n}, f\right),$$

а $\sigma_n'(r)$ — левосторонняя производная функции $\sigma_n(r)$ в точке r .

Разделим полученное неравенство на r^{μ_n+1} и проинтегрируем по отрезку $[t_n, T_n]$ (t_n, T_n определены в соотношении (1.7)):

$$\int_{t_n}^{T_n} \frac{d}{dr} r \sigma_n'(r) dr \geq \int_{t_n}^{T_n} \frac{h_n(r)}{r^{\mu_n+1}} dr + \mu_n^2 \int_{t_n}^{T_n} \frac{\sigma_n(r)}{r^{\mu_n+1}} dr.$$

Отсюда (см. доказательство теоремы 1) получаем

$$\int_{t_n}^{T_n} \frac{h_n(r)}{r^{\mu_n+1}} dr \leq \left(\frac{\sigma'_n(r)}{r^{\mu_n-1}} + \mu_n \frac{\sigma_n(r)}{r^{\mu_n}} \right) \Big|_{t_n}^{T_n}. \quad (3.1)$$

Из определения функции $\sigma_n(r)$ следует

$$\sigma_n(r) \leq \frac{1}{\mu_n} T(r, f).$$

Функция $r\sigma'_n(r)$ монотонно возрастает при $r \geq 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_n(S_n) &\geq \sigma_n(S_n) - \sigma_n(T_n) = \int_{T_n}^{S_n} \sigma'_n(r) dr \\ &\geq T_n \sigma'_n(T_n) \log \frac{S_n}{T_n} = \frac{1}{\mu_n} T_n \sigma'_n(T_n). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$T_n \sigma'_n(T_n) \leq \mu_n \sigma_n(S_n) \leq T(S_n, f) \leq T(R_n, f).$$

Таким образом, из полученных неравенств, (3.1) и соотношения (1.7) следует

$$\int_{t_n}^{T_n} \frac{h_n(r)}{r^{\mu_n+1}} dr < \varepsilon \mu_n \int_{t_n}^{T_n} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_n+1}} dr. \quad (3.2)$$

В силу неравенства (2.8) и определения функции $h_n(r)$ имеем

$$h_n(r) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^p u_j^*(r, 0) - \mu_n (T(r, f) + pn_0).$$

Следовательно,

$$\int_{t_n}^{T_n} \frac{\sum_{j=1}^p u_j^*(r, 0)}{r^{\mu_n+1}} dr < \pi(1 + \varepsilon) \mu_n \int_{t_n}^{T_n} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_n+1}} dr.$$

Но

$$\mu_n \int_{t_n}^{T_n} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_n+1}} dr = \frac{T(r, f)}{r^{\mu_n}} \Big|_{t_n}^{T_n} + \int_{t_n}^{T_n} \frac{rT'_-(r, f)}{r^{\mu_n+1}} dr.$$

Так как $rT'_-(r, f) = A(r, f) + O(1)$, то из (1.7) следует

$$\mu_n \int_{t_n}^{T_n} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_n+1}} dr = (1 + o(1)) \int_{t_n}^{T_n} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_n+1}} dr, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, таким образом,

$$\int_{t_n}^{T_n} \frac{\sum_{j=1}^p u_j^*(r, 0)}{r^{\mu_n+1}} dr < \pi(1 + \varepsilon) \int_{t_n}^{T_n} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_n+1}} dr, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, существует последовательность $r_n \in [t_n, T_n]$ такая, что

$$\sum_{j=1}^p u_j^*(r_n, 0) < \pi(1 + \varepsilon) A(r_n, f), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Так как $\{\infty, \Gamma_j\}$ – сильные асимптотические места функции $f(z)$, то для всех $r > r_0(\varepsilon)$

$$u_j^*(r, 0) > (1 - \varepsilon) \log M(r, f), \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (3.4)$$

Неравенства (3.3), (3.4) дают

$$p(1 - \varepsilon)b(\infty, f) < \pi(1 + \varepsilon).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что доказательства теорем 1, 2 переносятся без изменений и на более слабые асимптотические места $\{\infty, \Gamma_j\}$, т.е. на α -асимптотические места. Дадим соответствующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что ∞ есть α -асимптотическое значение целой функции $f(z)$, если существует непрерывная кривая $\Gamma_\alpha = \{z = z(t), 0 \leq t < \infty\}$ ($z(t) \rightarrow \infty$) такая, что

$$\liminf_{r \rightarrow \infty, z \in \Gamma_\alpha} \frac{\log |f(z)|}{\log M(|z|, f)} = \alpha > 0.$$

Пару $\{\infty, \Gamma_\alpha\}$ будем называть α -асимптотическим местом целой функции $f(z)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(z)$ – целая функция, $\{\infty, \Gamma_{\alpha_j}\}$ – различные α_j -асимптотические места $f(z)$, $j = 1, 2, \dots, p$. Тогда

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j \leq \begin{cases} \max \left\{ 1, \left[\frac{\pi \lambda \sin \pi \lambda}{\beta(\infty, f)} \right] \right\}, & \text{если } \lambda \leq 0.5, \\ \left[\frac{\pi \lambda}{\beta(\infty, f)} \right], & \text{если } 0.5 < \lambda < \infty, \\ \left[\frac{\pi}{b(\infty, f)} \right], & \text{если } \lambda = \infty. \end{cases}$$

Список литературы

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
2. Heins M. Asymptotic spots of entire and meromorphic functions // Ann. of Math. 1957. V. 66. P. 430–439.
3. Iversen F. Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes // Thèse, Helsingfors. 1914. P. 1–67.
4. Ahlfors L. Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung // Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys. 1932. V. 6. № 9. P. 1–8.
5. Петренко В. П. Рост мероморфных функций. Харьков: Вища школа, 1978.
6. Марченко И. И., Щерба А. И. О величинах отклонений мероморфных функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 1. С. 3–24.
7. Bergweiler W., Bock H. On the growth of meromorphic functions of infinite order // J. Anal. Math. 1994. V. 64. P. 327–336.
8. Eremenko A. An analogue of the defect relation for the uniform metric // Complex Variables Theory Appl. 1997. V. 64. P. 83–97.
9. Хейман У. К. Мероморфные функции. М.: ИЛ, 1966.
10. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta Math. 1974. V. 133. P. 139–169.
11. Хейман У. К. Многолистные функции. М.: ИЛ, 1960.
12. Марченко И. И. О величинах отклонений и протяжений мероморфных функций конечного нижнего порядка // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 85–102.
13. Gariepy R., Lewis I. L. Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions // Arkiv Math. 1975. V. 13. № 1. P. 91–105.
14. Fuchs W. H. J. A theorem on $\min_{|z|=r} \log |f(z)|/T(r, f)$ // Symp. on Compl. Anal. Canterbury, 1973. London: Cambr. Univ. Press, 1975. P. 69–72.
15. Essen M., Shea D. F. Applications of Denjoy integral inequalities and differential inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions // Proc. Roy. Irish Acad. 1982. V. A82. № 2. P. 201–216.

Поступило в редакцию
12.III.1997