Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Моторный, О. В. Моторная, О наилучшем L_1 -приближении алгебраическими многочленами усеченных степеней и классов функций с ограниченной в L_1 производной, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 3, 147–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/im246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:43:57

УДК 517.5

В. П. Моторный, О. В. Моторная

О наилучшем L_1 -приближении алгебраическими многочленами усеченных степеней и классов функций с ограниченной в L_1 производной

Установлено асимптотическое поведение наилучших L_1 -приближений ядер $(x - a)_+^{r-1}$, $r > 2$, и соответствующих классов W_1^r алгебраическими многочленами.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Введение

В некоторых вопросах аппроксимации функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, алгебраическими многочленами усеченная степень $(1/\Gamma(r))(x - a)_+^{r-1}$ играет почти такую же роль, что и ядра Бернулли $D_r(t)$ в теории аппроксимации 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами. Она используется для задания классов W_X^r функций, имеющих производную r -го порядка, принадлежащую единичному шару пространства X :

$$W_X^r := \left\{ f: f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^1 (x-t)_+^{r-1} \phi(t) dt, \right. \\ \left. x \in [-1, 1], \quad \phi \in X, \quad \|\phi\|_X \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Так же, как в периодическом случае, вопрос о наилучшем приближении некоторых классов функций сводится к задаче о наилучшем приближении усеченных степеней. Так, в силу соотношений двойственности для наилучших приближений [1, с. 42]

$$E_n(W_1^r)_1 = \sup_{a \in [-1, 1]} \frac{1}{\Gamma(r)} E_n((x - a)_+^{r-1})_1, \quad (2)$$

где $E_n(f)_1$ обозначает наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n в пространстве L_1 , $W_1^r = W_{L_1}^r$, а

$$E_n(W_1^r)_1 = \sup_{f \in W_1^r} E_n(f)_1.$$

Используя многочлены наилучшего приближения усеченных степеней, С. М. Никольский [2] построил линейный метод приближения классов W_1^r , $r = 1, 2, \dots$,

в пространстве L_1 , реализующий наилучшее приближение классов W_1^r . Заметим, что этот метод приближения удалось применить и для нецелых r , в случае $r \in (0, 2)$ в работах [3], [4], а в случае $r > 2$ – в настоящей работе. Для целых $r > 0$ С.М. Никольский [5] доказал следующее утверждение.

Для любого $\eta \in (0, 1)$ равномерно относительно $a \in [-\eta, \eta]$ выполняется асимптотическое равенство

$$E_n \left(\frac{1}{\Gamma(r)} (x - a)_+^{r-1} \right)_1 = \frac{K_r (\sqrt{1-a^2})^r}{n^r} + O \left(\frac{\ln n}{n^{r+1}} \right), \quad (3)$$

где K_r – константы Фавара.

Используя соотношения (2) и (3), С.М. Никольский [2] получил асимптотически точную оценку для наилучших приближений классов W_1^r (r натуральное):

$$E_n(W_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r} + o \left(\frac{1}{n^r} \right). \quad (4)$$

Кроме того, величина наилучшего приближения усеченной степени позволяет выяснить (см. [6], [7]) некоторые свойства функций из класса $W^r H_\infty^n$ – класса функций $f(x) \in W_\infty^r$, r -я производная которых ортогональна многочленам степени не выше n . Например, для любой точки $a \in (-1, 1)$ и $n \geq r - 1$ (r натуральное) имеет место равенство [8]

$$\sup_{f \in W^r H_\infty^n} f(a) = E_n \left(\frac{1}{\Gamma(r)} (x - a)_+^{r-1} \right)_1. \quad (5)$$

Поэтому возникла задача об уточнении равенства (3). Эта задача была решена в работах [6], [7], в которых было установлено для любого натурального числа r и $a \in (-1, 1)$ асимптотическое равенство

$$E_n \left(\frac{1}{\Gamma(r)} (x - a)_+^{r-1} \right)_1 = \frac{K_r (\sqrt{1-a^2})^r}{n^r} + O \left(\frac{(\sqrt{1-a^2})^{r-1}}{n^{r+1}} \right), \quad (6)$$

где числовой множитель в остаточном члене зависит только от r .

Равенства (5), (6) позволили (см. [6], [9]–[11]) найти асимптотически точные оценки наилучших L_1 -приближений классов W_∞^r (см. [6], [7]), W_p^r , $1 < p < \infty$, B_p^r , $1 < p < \infty$ [9], $W^r H^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ [10]. Всюду в этих случаях r является натуральным числом.

В настоящей работе рассматривается задача об асимптотическом поведении наилучших L_1 -приближений алгебраическими многочленами усеченных степеней для нецелых $r > 2$. Случай $r \in (0, 2)$ исследован в работах [3], [4]. Без доказательства результаты работ [3], [4] и данной работы опубликованы в [20]. Заметим, что в периодическом случае задача о наилучшем $\tilde{L}_1$ -приближении ядер $D_r(t)$ (и некоторых их обобщений) тригонометрическими полиномами для нецелых r решена в работах [12]–[15]. Основные результаты работы состоят в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Для любого нецелого $r > 2$ имеет место асимптотическое равенство

$$E_n\left(\frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)_+^{r-1}\right)_1 = \frac{K_r(\sqrt{1-a^2})^r}{n^r} + O\left(\frac{(\sqrt{1-a^2})^{r-1}}{n^{r+1}} + \frac{1}{n^{2r}}\right), \quad (7)$$

где K_r есть наилучшее приближение константой в $\tilde{L}_1$ функции

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r},$$

а числовой множитель в остаточном члене в (7) зависит только от r .

ТЕОРЕМА 2. Для любого нецелого $r > 2$ имеет место асимптотическое равенство

$$E_n(W_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), \quad (8)$$

где константа K_r та же, что и в равенстве (7), а числовой множитель в остаточном члене зависит только от r . Кроме того, существует линейный метод приближения, который реализует наилучшее приближение класса W_1^r .

Для натуральных r K_r -константы Фавара, а для нецелых r величины K_r указаны В. К. Дзядыком при решении задачи Фавара о нахождении величины наилучшего приближения классов 2π -периодических функций, имеющих r -ю производную нецелого порядка, тригонометрическими полиномами.

§ 2. Основные определения и вспомогательные результаты

1. Напомним определение усеченной степени:

$$g_{r,a}(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)_+^{r-1} := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)}(x-a)^{r-1}, & \text{если } x > a, \\ 0, & \text{если } x \leq a, \end{cases}$$

где $\Gamma(r)$ – гамма-функция Эйлера. Для удобства усеченную степень будем обозначать через $g_{r,a}(x)$. Ядро $g_{r,a}(x)$ при $r > 1$ имеет $[r]$ -ю интегрируемую производную ($[r]$ – целая часть числа r):

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{[r]} g_{r,a}(x) = g_{\rho,a}(x),$$

где $\rho = r - [r]$, $x \neq a$, удовлетворяющую условию Липшица в L_1 порядка ρ . Отсюда следует грубая оценка

$$E_n(g_{r,a})_1 \leq \frac{C_r}{n^r}. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать символом C , а величины, зависящие от параметра r , через C_r , хотя в разных местах они могут иметь различные значения.

2. Стандартная замена переменной $x = \cos t$ приводит к равенству

$$E_n(g_{r,a})_1 = \frac{1}{2} \tilde{E}_{n+1}(g_{r,\cos \theta}(\cos t) \sin t)_1, \quad (10)$$

редуцирующему задачу о наилучшем L_1 -приближении алгебраическими многочленами усеченной степени в задачу о наилучшем $\tilde{L}_1$ -приближении тригонометрическими полиномами, где $\tilde{E}_{n+1}(f)_1$ обозначает наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами степени не выше $n+1$ в пространстве $\tilde{L}_1$, $a = \cos \theta$, $\theta \in (0, \pi)$.

3. Пусть $\phi(t)$ – интегрируемая 2π -периодическая функция, k – натуральное число. Обозначим

$$I_k \phi := \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x-t) D_k(t) dt.$$

Если $\phi(t)$ в среднем равна нулю, то $\phi(t)$ есть производная порядка k функции $I_k \phi$. Известно [15], что

$$\tilde{E}_n(I_r \phi)_1 \leq \frac{K_r}{(n+1)^r} \tilde{E}_n(\phi)_1, \quad (11)$$

где K_r – константа Фавара.

4. Чтобы получить оценку снизу величины $E_n(g_{r,a})_1$, докажем утверждение, которое является аналогом леммы 4 из работы [3].

ЛЕММА 1. Пусть $r > 1$, $a_k = \cos \theta_k$, где $\theta_k = k\pi/(n+2) + \gamma/(n+2)$, $k = 0, 1, \dots, n+2$, а γ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \gamma < \pi. \quad (12)$$

Тогда имеют место следующие неравенства:

$$E_n((x-a)_+^{r-1})_1 > E_n((x-a_{k_0})_+^{r-1})_1 \left(1 - \frac{r\pi}{n}\right), \quad (13)$$

если $a \in (a_{k+1}, a_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, где $k_0 = k+1$, если $a < 0$, и $k_0 = k$, если $a \geq 0$;

$$E_n((x-a)_+^{r-1})_1 \leq E_n((x-a_n)_+^{r-1})_1 \left(1 + \frac{2\pi^2}{n^2}\right)^r, \quad (14)$$

если $a \in [-1, a_n]$;

$$E_n((x-a)_+^{r-1})_1 < \frac{\sin^{2r} \theta}{r}, \quad (15)$$

если $a = \cos \theta \in [a_1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a < 0$, $z = 1 + a - a_{k+1}$ и $P_n(t)$ – алгебраический полином степени не выше n наилучшего L_1 -приближения функции $(x - a)_+^{r-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} E_n((x - a)_+^{r-1})_1 &= \frac{1}{z^r} \int_{-z}^z \left| (t - za)_+^{r-1} - z^{r-1} P_n\left(\frac{t}{z}\right) \right| dt \\ &= \frac{1}{z^r} \int_{-z-s}^{z-s} \left| (x + s - za)_+^{r-1} - z^{r-1} P_n\left(\frac{x+s}{z}\right) \right| dx \\ &\geq \frac{1}{z^r} E_n((x - a_{k+1})_+^{r-1})_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где $s = za - a_{k+1}$. Здесь мы использовали неравенства $z - s = 1 + a(1 - z) > 1$ и $s > 0$. Так как $z > 1$ и $a - a_{k+1} > 0$, то очевидно, что

$$\frac{1}{z^r} = \frac{1}{(1 + (a - a_{k+1}))^r} > 1 - r(a - a_{k+1}) > 1 - r \frac{\pi}{n+2}. \quad (17)$$

Из неравенств (16) и (17) следует неравенство (13). Случай $a \geq 0$ аналогичен. Заменяя a на a_n и a_{k+1} на a в (16) и используя неравенство (12), получим (14). Нетрудно проверить, что $E_n((x - a)_+^{r-1})_1 \leq \|(x - a)_+^{r-1}\|_1 = (1/r)(1 - a)^r < (1/r) \sin^{2r} \theta$, если $a = \cos \theta \in [a_1, 1]$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из неравенств (14), (15) следует, что теорему 1 достаточно доказать для $a = \cos \theta$, удовлетворяющих условию

$$\sin \theta = \sqrt{1 - a^2} \geq \sin \frac{\pi}{n+2}. \quad (18)$$

5. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ производную k -го порядка (k – натуральное число, большее 1) и удовлетворяет краевым условиям $f^{(j)}(-1) = 0$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, то суперпозицию $f(\cos t)$ можно представить в виде

$$f(\cos t) = \sum_{j=0}^m I_{k+j} f_j + I_{k+m} \tilde{f}_m, \quad (19)$$

где m – произвольное неотрицательное целое число,

$$f_j(t) = -\sin t P_{k,j}(t) f^{(k)}(\cos t), \quad (20)$$

где

$$P_{k,j}(t) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k+j-1} (\cos t - u)^{k-1} \Big|_{u=\cos t}$$

– тригонометрические многочлены степени $k-1$, не зависящие от f , а

$$\tilde{f}_m = \frac{1}{(k-1)!} \int_{-1}^{\cos t} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k+m} (\cos t - u)^{k-1} f^{(k)}(u) du. \quad (21)$$

В случае $m = 0$ соотношение (19) хорошо известно. В указанном виде оно использовалось в работах [6], [7], [17]. Но для суперпозиции $f(\sin t)$ оно, по-видимому, впервые появилось в работе [18].

Считая $r > 1$, положим $k = [r] + 1$, $m = k + 1$ и воспользуемся представлением (19) для усеченной степени $g_{r+1, \cos \theta}(x)$:

$$g_{r+1, \cos \theta}(\cos t) = \sum_{j=0}^{k+1} I_{k+j} y_j + I_{2k+1} \tilde{y}_{k+1}, \quad (22)$$

где

$$y_j(t) = y_{j, \theta}^k(t) := -\sin t P_{k,j}(t) g_{\rho, \cos \theta}(\cos t), \quad j = 0, 1, \dots, k+1, \quad (23)$$

а

$$\tilde{y}_{k+1}(t) := \frac{1}{(k-1)!} \int_{-1}^{\cos t} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2k+1} (\cos t - u)^{k-1} g_{\rho, \cos \theta}(u) du. \quad (24)$$

Дифференцируя равенство (22), получим

$$-g_{r, \cos \theta}(\cos t) \sin t = \sum_{j=0}^{k+1} I_{k+j-1} y_j + I_{2k} \tilde{y}_{k+1}. \quad (25)$$

Так как $P_{k,j}(t)$ – тригонометрические полиномы степени не выше $k-1$, то из неравенства (9) и равенства (10) для всех $j = 0, 1, \dots, k+1$ следует неравенство

$$\tilde{E}_n(y_j)_1 \leq \frac{C_r}{n^\rho}, \quad (26)$$

которое вместе с неравенством (11) позволяет оценить два предпоследних слагаемых в правой части равенства (25):

$$\tilde{E}_n(I_{2k-1} y_k)_1 \leq \frac{C_r}{n^{r+k}}, \quad (27)$$

$$\tilde{E}_n(I_{2k} y_{k+1})_1 \leq \frac{C_r}{n^{r+k+1}}. \quad (28)$$

Применяя неравенство Бернштейна к тригонометрическому полиному $(\cos t - u)^{k-1}$, получим из равенства (24) оценку:

$$|\tilde{y}_{k+1}(t)| \leq \frac{2^k (k-1)^{2k+1}}{(k-1)!}.$$

Следовательно,

$$\tilde{E}_n(I_{2k} \tilde{y}_{k+1})_1 \leq \frac{C_r}{n^{2k}}. \quad (29)$$

Правые части неравенств (27)–(29) по порядку меньше остаточного члена в равенстве (7). Чтобы оценить наилучшее приближение функций y_j для $j = 0, 1, \dots, k-1$, получим следующее свойство полиномов $P_{k,j}(t)$.

ЛЕММА 2. Для любого $k > 1$ тригонометрические полиномы $P_{k,j}(t)$ можно представить в виде

$$P_{k,j}(t) = (\sin t)^{k-j-1} \tilde{P}_{k,j}(t), \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad (30)$$

где $\tilde{P}_{k,j}(t)$ – некоторые фиксированные тригонометрические полиномы степени не выше j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение многочленов $P_{k,j}(t)$ и формулу Лейбница для дифференцирования произведения, нетрудно получить для всех $k \geq 2$ и $j = 1, 2, \dots$ равенство

$$P_{k+1,j}(t) = P'_{k+1,j-1}(t) - \sin t P_{k,j}(t). \quad (31)$$

Так как [17] $P_{k,0}(t) = (-\sin t)^{k-1}$ и $P_{k,1}(t) = (-1)^{k+1} C_k^2 (\sin t)^{k-2} \cos t$, то (30) имеет место для $k = 2$ и $j = 0, 1$. Предполагая, что (30) имеет место для индекса $k = m$ и любого $j = 0, 1, \dots, m-1$, из (31) получаем (30) для $k = m+1$. Лемма доказана.

Для $\theta \in (\pi/6, 5\pi/6)$ из неравенства (26) также следуют оценки для наилучших приближений функций $I_{k+j-1} y_j$, $j = 1, 2, \dots, k-1$:

$$\tilde{E}_n(I_{k+j-1} y_j)_1 \leq \frac{C_r}{n^{r+j}}, \quad (32)$$

по порядку не хуже остаточного члена в асимптотическом равенстве (7) для указанных значений θ . Если же $\theta \in (0, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi)$, то необходимо сделать более аккуратные оценки. При этом следует отметить, что в случае целых r достаточно было рассмотреть $\theta \in (0, \pi/2)$, так как для $n \geq r$

$$E_n(g_{r,a})_1 = E_n(g_{r,-a})_1. \quad (33)$$

В случае дробных r равенство (33) не имеет места. Более того, $E_n(g_{r,a})_1$ различно ведет себя (как функция a) у концов отрезка $[-1, 1]$.

Из определения функций $y_j(t)$ и равенства (30) для всех $j = 1, 2, \dots, k-1$ следует неравенство

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{n+j}(y_j)_1 &\leq \|\tilde{P}_{k,j}\|_C \tilde{E}_n(\sin^{k-j} t g_{\rho, \cos \theta}(\cos t))_1 \\ &\leq 2\|\tilde{P}_{k,j}\|_C \left(\tilde{E}_n(\sin^{k-j} t u_1(t))_1 + \tilde{E}_n(\sin^{k-j} t u_2(t))_1 \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$u_1(t) = \begin{cases} \frac{\sin^{\rho-1} \theta}{\Gamma(\rho)} (\theta - t)_+^{\rho-1}, & \text{если } t \in [0, \pi], \\ 0, & \text{если } t \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

а $u_2(t) = \phi(t) - u_1(t)$, где

$$\phi(t) = \phi_\theta(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\rho)} (\cos t - \cos \theta)_+^{\rho-1}, & t \in [0, \pi], \\ 0, & t \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

В §3 мы оценим $\tilde{E}_n(\sin^{k-j} t u_1(t))_1$ и $\tilde{E}_n(\sin^{k-j} t u_2(t))_1$ для всех $\theta \in (0, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi)$.

6. Так же, как в работе [3], используя формулу Тейлора, определим функции $\cos C(t)$, $\cos S(t)$, $\gamma(x)$, $x(t)$ и $\cos b(t)$:

$$\cos t - \cos \theta = (\theta - t) \sin \theta - \frac{1}{2}(\theta - t)^2 \cos C(t), \quad (35)$$

$$\cos \theta = \cos t - (\theta - t) \sin t - \frac{(\theta - t)^2 \cos S(t)}{2},$$

$$(1 - x)^{\rho-1} = 1 + (1 - \rho)(1 - \gamma(x))^{\rho-2}x, \quad x < \frac{1}{2}, \quad 0 < \rho < 1,$$

$$x(t) = \frac{(\theta - t) \cos C(t)}{2 \sin \theta}, \quad (36)$$

$$\sin t = \sin \theta - (\theta - t) \cos b(t), \quad t \in [0, \theta]. \quad (37)$$

Эти функции являются аналитическими, но непериодическими. Будем использовать следующие свойства этих функций, установленные в работе [3].

ЛЕММА 3. *Функции $\cos C(t)$ и $\cos S(t)$ убывают на интервале $(0, \theta)$ и имеют ограниченные производные:*

$$\left| \frac{d}{dt} \cos C(t) \right| < 1, \quad \left| \frac{d}{dt} \cos S(t) \right| < 2. \quad (38)$$

ЛЕММА 4. *Функции $(1 - \gamma(x(t)))^{\rho-2}$ и $(1 - x(t))^{\rho-2}$ убывают на интервале $(0, \theta)$, если $\theta < \pi/2$, и возрастают на интервале $(\pi/2, \theta)$, если $\theta > \pi/2$.*

ЛЕММА 5. *Для любого $t \in (0, \theta)$ имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{\cos S(t)}{2 \sin \theta}. \quad (39)$$

Из определения функций $\cos S(t)$ и $\cos C(t)$ непосредственно следует, что $\cos S(0) = 4 \sin^2(\theta/2)/\theta^2$ для всех $\theta \in (0, \pi)$ и $\cos C(0) < 0$, если $\theta \geq 5\pi/6$. Поэтому из равенства (36) следует, что функция $x(t)$ отрицательна на отрезке $[0, \theta]$ и имеет единственный минимум в некоторой точке интервала $(0, \pi/2)$. Следовательно, функция $(1 - x(t))^{\rho-m}$ для любого натурального m имеет единственный минимум в этой же точке и

$$V_0^{\frac{\pi}{2}} \{(1 - x(t))^{\rho-m}\} \leq 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{m-\rho} \sin^{m-\rho} \theta. \quad (40)$$

Учитывая определение функций $\cos C(t)$, $\gamma(x)$ и $x(t)$, функцию $u_2(t)$ можно представить в виде

$$u_2(t) = \begin{cases} \frac{(1 - \rho) \sin^{\rho-1} \theta}{\Gamma(\rho)} (\theta - t)_+^{\rho-1} (1 - \gamma(x(t)))^{\rho-2} x(t), & \text{если } t \in [0, \pi], \\ 0, & \text{если } t \in [-\pi, 0). \end{cases} \quad (41)$$

§ 3. Оценки наилучших приближений функций $u_1(t) \sin^j t$ и $u_2(t) \sin^j t$

Чтобы оценить эти величины, докажем несколько вспомогательных утверждений. Через $\omega(f; h)_1$ обозначим интегральный модуль непрерывности функции f :

$$\omega(f; h)_1 = \sup_{0 < u < h} \int_0^{2\pi} |f(x+u) - f(x)| dx.$$

Пусть $\beta_j(t) = u_1(t) \sin^j t$, $j = 0, 1, \dots$. Если $\theta \in (0, \pi/2)$, то функции $\beta_j(t)$ не убывают на полуинтервале $[-\pi, \theta)$. Поэтому

$$\omega(\beta_j; h)_1 \leq \frac{2 \sin^{j+\rho-1} \theta}{\Gamma(\rho+1)} h^\rho$$

и, следовательно,

$$\tilde{E}_n(\beta_j)_1 \leq \frac{C_j \sin^{j+\rho-1} \theta}{n^\rho}. \quad (42)$$

Покажем, что (42) имеет место для $\theta > \pi/2$.

ЛЕММА 6. Для всех $\rho \in (0, 1)$ и θ , удовлетворяющих условию (18), имеет место неравенство

$$\tilde{E}_n(\beta_1)_1 \leq \frac{C \sin^\rho \theta}{n^\rho}, \quad (43)$$

где C — абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию $\beta_1(t)$ представим в виде

$$\beta_1(t) = d_1(t) + d_2(t),$$

где

$$d_1(t) = \begin{cases} \frac{\sin^\rho \theta}{\Gamma(\rho)} (\theta - t)_+^{\rho-1}, & t \in [0, \pi], \\ \frac{(\pi + t) \sin^\rho \theta}{\pi \Gamma(\rho)} \theta^{\rho-1}, & t \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

$$d_2(t) = \begin{cases} -\frac{\sin^{\rho-1} \theta}{\Gamma(\rho)} (\theta - t)_+^\rho \cos b(t), & t \in [0, \pi], \\ -\frac{(\pi + t) \sin^\rho \theta}{\pi \Gamma(\rho)} \theta^{\rho-1}, & t \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

а функция $\cos b(t)$ определяется уравнением (37). Нетрудно видеть, что интегральный модуль непрерывности функции $d_1(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(d_1; h)_1 \leq C \sin^\rho \theta h^\rho, \quad (44)$$

а функция $d_2(t)$ абсолютно непрерывна и

$$\omega(d'_2; h)_1 \leq C(\sin^{\rho-1} \theta) h^\rho.$$

Из соотношения (11) следует оценка

$$\tilde{E}_n(d_2)_1 \leq \frac{C \sin^{\rho-1} \theta}{n^{\rho+1}}. \quad (45)$$

В силу условия (18), из неравенств (44) и (45) получаем (43). Лемма доказана.

Положим $\alpha_j = u_1(t)(\sin \theta - \sin t) \sin^j t$, $j = 0, 1, \dots$

ЛЕММА 7. Для всех $\rho \in (0, 1)$, $j = 0, 1, \dots$ и θ , удовлетворяющих условию (18), имеют место неравенства (42) и

$$\tilde{E}_n(\alpha_j)_1 \leq \frac{C_j \sin^{j+\rho} \theta}{n^\rho}. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\tilde{E}_n(\beta_0)_1 \leq \frac{C \sin^{\rho-1} \theta}{n^\rho}. \quad (47)$$

Из неравенств (43) и (47) следует оценка (46) для $j = 0$. Пусть утверждение леммы имеет место для индекса $j = m > 0$. Оценим сначала величину $\tilde{E}_n(\beta_{m+1})_1$;

$$\begin{aligned} \beta_{m+1}(t) &= u_1(t) \sin^{m+1} t = u_1(t) \sin^{m+1} \theta - u_1(t)(\sin \theta - \sin t) \sum_{j=0}^m \sin^{m-j} \theta \sin^j t \\ &= u_1(t) \sin^{m+1} \theta - \sum_{j=0}^m \sin^{m-j} \theta \alpha_j(t). \end{aligned}$$

Используя предположение индукции, получим

$$\tilde{E}_n(\beta_{m+1})_1 \leq C \left(\frac{\sin^{m+\rho} \theta}{n^\rho} + \sum_{j=0}^m \sin^{m-j} \theta \tilde{E}_n(\alpha_j)_1 \right) \leq C_m \frac{\sin^{m+\rho} \theta}{n^\rho}.$$

Рассмотрим теперь функцию $\alpha_{m+1}(t)$ и ее производную

$$\alpha'_{m+1}(t) = \beta_{m+1}(t)((1-\rho) \cos b(t) - \cos t) + (m+1)\alpha_m(t) \cos t.$$

Так как функция $(1-\rho) \cos b(t) - \cos t$ имеет ограниченную производную, то

$$\tilde{E}_n(\alpha'_{m+1})_1 \leq \frac{C_{m+1} \sin^{m+\rho} \theta}{n^\rho}.$$

Учитывая соотношение (11) и условие (18), получим неравенство

$$\tilde{E}_n(\alpha_{m+1})_1 \leq \frac{C_{m+1} \sin^{m+\rho} \theta}{n^{\rho+1}} \leq \frac{C_{m+1} \sin^{m+1+\rho} \theta}{n^\rho}.$$

Лемма доказана.

Пусть $m_j(t) = m_{j,\theta}(t) := u_2(t) \sin^j t$, $j = 1, 2, \dots$. Для $\theta \in [\pi/6, 5\pi/6]$ в работе [3] (см. неравенство (34)) доказано неравенство

$$\tilde{E}_{n+1}(u_2(t) \sin t)_1 \leq \frac{C}{n^{\rho+1}},$$

где C – абсолютная константа. Следовательно, для этих θ будет иметь место неравенство

$$\tilde{E}_{n+1}(m_j)_1 \leq \frac{C_j}{n^{\rho+1}}.$$

Если $\theta \in [0, \pi/6]$, то в этой же работе установлено, что

$$V_{-\pi}^\pi \{u_2\} = 2u_2(0) \leq C \sin^{2\rho-2} \theta$$

и

$$\int_0^\theta |\Delta_h u'_2| dt \leq C(\sin^{\rho-2} \theta) h^\rho,$$

где $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, $h > 0$. Но тогда

$$V_{-\pi}^\pi \{u_2(t) \sin^{j-1} t \cos t\} \leq C \sin^{2\rho-3+j} \theta \quad (48)$$

и

$$\omega(u'_2(t) \sin^j t; h)_1 \leq C_j (\sin^{j+\rho-2} \theta) h^\rho. \quad (49)$$

Так как $m'_j = j u_2(t) \sin^{j-1} t \cos t + u'_2(t) \sin^j t$, то из (48) и (49) получаем неравенство

$$\omega(m'_j; h)_1 \leq C_j \{(\sin^{j+\rho-2} \theta) h^\rho + (\sin^{2\rho-3+j} \theta) h\},$$

а затем, используя теорему Джексона и условие (18), получаем оценку

$$\tilde{E}_{n+1}(m_j)_1 \leq \frac{C_j \sin^{j+\rho-2} \theta}{n^{\rho+1}}. \quad (50)$$

Чтобы получить неравенство (50) для $\theta \in (5\pi/6, \pi)$, докажем несколько вспомогательных утверждений. Прежде всего покажем, что имеют место неравенства

$$\omega(u_2; h)_1 \leq 4 \frac{\sin^{\rho-1} \theta}{\Gamma(\rho+1)} h^\rho, \quad h \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \quad (51)$$

$$\omega(u'_2; h)_1 \leq C(\sin^{\rho-2} \theta) h^\rho, \quad h \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right). \quad (52)$$

Так как в силу леммы 3 $\cos C(t)$ убывает на отрезке $[0, \theta]$, а $\cos C(0) < 0$, то $0 > u_2(t) = \phi(t) - u_1(t)$ для $t \in (0, \theta)$, а тогда, используя монотонность функций $\phi(t)$ и $u_1(t)$, получим для $h \in (0, \pi/6)$ неравенство (51):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi |\Delta_h u_2(t)| dt &\leq \int_0^\theta |\Delta_h \phi(t)| dt + \int_0^\theta |\Delta_h u_1(t)| dt \\ &\leq 4 \int_{\theta-h}^\theta u_1(t) dt = 4 \frac{\sin^{\rho-1} \theta}{\Gamma(\rho+1)} h^\rho. \end{aligned}$$

Чтобы получить неравенство (52), используя равенство (41), представим $u'_2(t)$ на отрезке $[0, \pi/2]$ в виде $u'_2(t) = \phi'(t) - u'_1(t)$, а на отрезке $[\pi/2, \theta]$ в виде $u'_2(t) = q_2(t) - q_1(t)$, где

$$q_1(t) = -\frac{(1-\rho)^2 \sin^{\rho-2} \theta}{2\Gamma(\rho)} (\theta-t)^{\rho-1} (1-\gamma(x(t)))^{\rho-2} \cos C(t),$$

$$q_2(t) = -\frac{(1-\rho) \sin^{\rho-2} \theta}{2\Gamma(\rho)} (\theta-t)^{\rho-1} (1-x(t))^{\rho-2} \cos S(t).$$

Так как функции $\phi'(t)$ и $u'_1(t)$ на отрезке $[0, 2\pi/3]$ имеют ограниченные производные, то для $h \in (0, \pi/6)$

$$\int_0^{\pi/2} |\Delta_h u'_2(t)| dt \leq \{C \sin^{\rho-1} \theta\} h. \quad (53)$$

Функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ положительны на отрезке $[\pi/2, \theta]$ и в силу лемм 3 и 4 монотонно возрастают. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\theta} |\Delta_h u'_2(t)| dt &\leq \int_{\pi/2}^{\theta} |\Delta_h q_1(t)| dt + \int_{\pi/2}^{\theta} |\Delta_h q_2(t)| dt \\ &\leq 2 \int_{\theta-h}^{\theta} q_1(t) dt + 2 \int_{\theta-h}^{\theta} q_2(t) dt \leq \frac{4 \sin^{\rho-2} \theta}{\Gamma(\rho+1)} h^{\rho}. \end{aligned} \quad (54)$$

Из неравенств (53), (54) следует неравенство (52). Обозначим

$$l = \max_{\frac{\pi}{2} \leq t \leq \theta} \left(-\frac{2}{\cos C(t)} \right) \quad \text{и} \quad t_0 = \max \left(\theta - l \sin \theta, \frac{\pi}{2} \right).$$

Нетрудно проверить, что для $\theta \in (5\pi/6, \pi)$ функция $\cos C(t)$ меньше $-1/2$ для всех $t \in (\pi/2, \theta)$, следовательно, $l < 4$.

ЛЕММА 8. Пусть $\theta \in (5\pi/6, \pi)$. Тогда для любого $k = 2, 3, \dots$ и $j = 0, 1, \dots, k-2$ имеет место неравенство

$$\int_0^{t_0} (\theta-t)^{2\rho-k-1} \sin^j t dt \leq C_k \sin^{2\rho-k+j} \theta. \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции. Пусть $k = 2$. Тогда $j = 0$ и

$$\int_0^{t_0} (\theta-t)^{2\rho-3} dt < \frac{l^{2\rho-2}}{2(1-\rho)} \sin^{2\rho-2} \theta.$$

Пусть (55) имеет место для $k = m \geq 2$ и любого $j = 0, 1, \dots, k-2$. Тогда, учитывая неравенство $|\cos b(t)| \leq 1$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} (\theta - t)^{2\rho-m-2} \sin^j t \, dt \\ &= \int_0^{t_0} (\theta - t)^{2\rho-m-2} \left(\sin^j \theta - (\theta - t) \cos b(t) \sum_{i=0}^{j-1} \sin^{j-i-1} \theta \sin^i t \right) dt \\ &\leq \frac{t_0^{2\rho-m-1}}{m+1-2\rho} \sin^{2\rho+j-m-1} \theta + \int_0^{t_0} (\theta - t)^{2\rho-m-1} \sum_{i=0}^{j-1} \sin^{j-i-1} \theta \sin^i t \, dt \\ &\leq C_{m+1} \sin^{2\rho+j-m-1} \theta. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для $k = 2, 3, \dots$ и $j = 0, 1, \dots, k-2$ положим

$$W_{k,j}(t) = \begin{cases} (1-x(t))^{\rho-k} (\theta - t)_+^\rho \sin^j t, & t \in (0, \pi], \\ 0, & t \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

ЛЕММА 9. Для всех $\theta \in (5\pi/6, \pi)$, $k = 2, 3, \dots$, $j = 0, 1, \dots, k-2$, функция $W_{k,j}(t)$ является функцией ограниченной вариации на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет место неравенство

$$V_{-\pi}^\pi \{W_{k,j}\} = V_0^\theta \{W_{k,j}\} \leq C_{k,j} \sin^{\rho+j} \theta. \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $(\theta - t)_+^\rho \sin^j t$ является функцией ограниченной вариации на отрезке $[0, \pi/2]$, то из неравенства (40) получаем

$$V_0^{\frac{\pi}{2}} \{W_{k,j}\} \leq C \sin^{k-\rho} \theta < C \sin^{\rho+j} \theta.$$

Вариация функции $W_{k,j}$ на отрезке $[\pi/2, \theta]$ будет:

$$\begin{aligned} V_{\frac{\pi}{2}}^\theta \{W_{k,j}\} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta |W'_{k,j}|(t) \, dt \leq (k-\rho) \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta (1-x(t))^{\rho-k-1} (\theta - t)_+^\rho \sin^j t |x'(t)| \, dt \\ &\quad + \rho \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta (1-x(t))^{\rho-k} (\theta - t)_+^{\rho-1} \sin^j t \, dt \\ &\quad + j \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta (1-x(t))^{\rho-k} (\theta - t)_+^\rho \sin^{j-1} t \cos t \, dt := I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Оценим интеграл I_1 . Так как $(1 - x(t))^{\rho-2} < 1$, $(1 - x(t))^{\rho-2} < (-x(t))^{\rho-2}$ и $-x(t) \geq l^{-1}(\theta - t)/\sin \theta$ для $t \in [\pi/2, \theta]$, то, используя неравенство (39), получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{k - \rho}{2 \sin \theta} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} (-x(t))^{\rho-k-1} (\theta - t)_+^\rho \sin^j t \, dt + \int_{t_0}^{\theta} (\theta - t)_+^\rho \sin^j t \, dt \right) \\ &\leq \frac{k - \rho}{2 \sin \theta} \left(l^{k+1-\rho} \sin^{k+1-\rho} \theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} (\theta - t)^{2\rho-k-1} \sin^j t \, dt \right. \\ &\quad \left. + \sin^j t_0 \int_{t_0}^{\theta} (\theta - t)_+^\rho \, dt \right). \end{aligned}$$

При этом первый интеграл отсутствует, если $t_0 = \pi/2$. Применяя лемму 8 и неравенство $\sin t_0 \leq (l + 1) \sin \theta$, получим

$$I_1 \leq C_{k,j} \sin^{\rho+j} \theta.$$

Аналогично оцениваются интегралы I_2 и I_3 . Заметим лишь, что интеграл I_3 оценивается для $j > 0$ и $k > 2$. Лемма доказана.

Из неравенства (56) для $k = 2, 3, \dots$ и $j = 0, 1, \dots, k - 2$ немедленно следует оценка

$$\tilde{E}_n(W_{k,j})_1 \leq C_{k,j} \frac{\sin^{\rho+j} \theta}{n}. \quad (57)$$

ЛЕММА 10. Для всех $\rho \in (0, 1)$, $k = 2, 3, \dots$, $j = 0, 1, \dots$ и θ , удовлетворяющих условию (18), имеет место неравенство (57).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции по индексу $N = j - k$. Для $N = -2$ неравенство (57) имеет место. Пусть оно имеет место для k и j таких, что $j - k \leq m$, где $m \geq -2$. Для $t \in [0, \pi]$ рассмотрим функцию

$$W_{k,j+1}(t) = (1 - x(t))^{\rho-k} (\theta - t)_+^\rho \sin^{j+1} t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W'_{k,j+1}(t) &= (k - \rho)(1 - x(t))^{\rho-k-1} (\theta - t)_+^\rho \sin^{j+1} t \, x'(t) \\ &\quad - \rho(1 - x(t))^{\rho-k} (\theta - t)_+^{\rho-1} \sin^{j+1} t + (j + 1)(1 - x(t))^{\rho-k} (\theta - t)_+^\rho \sin^j t \cos t \\ &= -\frac{(k - \rho) \cos S(t)}{2 \sin \theta} W_{k+1,j+1}(t) - \rho(1 - x(t))^{\rho-k} (\theta - t)_+^{\rho-1} \sin^{j+1} t \\ &\quad + (j + 1) \cos t W_{k,j}(t). \end{aligned}$$

Так как разность индексов у функций $W_{k+1,j+1}(t)$ и $W_{k,j}(t)$ не превосходит m , то по предположению индукции и с учетом сомножителей получаем

$$\tilde{E}_n \left(\frac{(k - \rho) \cos S(t)}{2 \sin \theta} W_{k+1,j+1}(t) \right)_1 \leq C_{k,j} \frac{\sin^{\rho+j} \theta}{n} \quad (58)$$

и

$$\tilde{E}_n((j+1)\cos t W_{k,j}(t))_1 \leq C_{k,j} \frac{\sin^{\rho+j} \theta}{n}. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\begin{aligned} & \rho(1-x(t))^{\rho-k}(\theta-t)_+^{\rho-1} \sin^{j+1} t \\ &= \rho(1-x(t))^{\rho-k}(\theta-t)_+^{\rho-1} \left(\sin^{j+1} \theta - (\theta-t) \cos b(t) \sum_{i=0}^j \sin^{j-i} \theta \sin^i t \right) \\ &= \rho \sin^{j+1} \theta (1-x(t))^{\rho-k}(\theta-t)_+^{\rho-1} - \rho \cos b(t) \sum_{i=0}^j \sin^{j-i} \theta W_{k,i}(t), \end{aligned}$$

где разность индексов у функции $W_{k,i}(t)$: $i-k \leq j-k \leq m$. Поэтому

$$\tilde{E}_n(\rho(1-x(t))^{\rho-k}(\theta-t)_+^{\rho-1} \sin^{j+1} t)_1 \leq C \frac{\sin^{1+j} \theta}{n^\rho} + C_{k,j} \frac{\sin^{\rho+j} \theta}{n}. \quad (60)$$

Из неравенств (58)–(60) следует

$$\tilde{E}_n(W'_{k,j+1})_1 \leq C \frac{\sin^{1+j} \theta}{n^\rho} + C_{k,j} \frac{\sin^{\rho+j} \theta}{n}.$$

Наконец, применяя соотношение (11) и учитывая условие (18), получим неравенство

$$\tilde{E}_n(W_{k,j+1})_1 \leq C_{k,j} \frac{\sin^{\rho+j+1} \theta}{n}.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть для любых $\rho \in (0, 1)$, $\theta \in (5\pi/6, \theta_n)$, $j = 0, 1, \dots$

$$v_j(t) = \begin{cases} (1-x(t))^{\rho-2}(\theta-t)_+^{\rho-1} \sin^j t, & t \in (0, \pi], \\ 0, & t \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Тогда

$$\tilde{E}_n(v_j)_1 \leq C_j \frac{\sin^j \theta}{n^\rho}. \quad (61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для функции $v_0(t)$ имеет место неравенство

$$\omega(v_0; h)_1 \leq Ch^\rho, \quad h > 0, \quad (62)$$

которое влечет неравенство (61) для $j = 0$. Для любого $j > 0$

$$v_j(t) = v_0(t) \sin^j \theta - \rho \cos b(t) \sum_{i=0}^{j-1} \sin^{j-i-1} \theta W_{2,i}(t).$$

Используя (61) для $j = 0$, утверждение леммы 10 и условие (18), получим

$$\tilde{E}_n(v_j)_1 \leq C_j \left(\frac{\sin^j \theta}{n^\rho} + \frac{\sin^{j-1+\rho} \theta}{n} \right) \leq C_j \frac{\sin^j \theta}{n^\rho}.$$

В дальнейшем нам будет необходимо следствие из леммы 10 и утверждение леммы 10 для $k = 2$.**6** Определим теперь наилучшее приближение функции $m_j(t) = u_2(t) \sin^j t$.

ЛЕММА 11. Для всех $\rho \in (0, 1)$, $j = 1, 2, \dots$ и $\theta \in (5\pi/6, \theta_n)$ имеет место неравенство (50):

$$\tilde{E}_n(m_j)_1 \leq \frac{C_j \sin^{j+\rho-2} \theta}{n^{\rho+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $j = 1$ это неравенство получено в работе [3]. Пусть оно имеет место для индекса $j = p \geq 1$. Рассмотрим

$$m'_{p+1}(t) = u'_2(t) \sin^{p+1} t + (p+1)u_2(t) \sin^p t \cos t.$$

В силу предположения индукции и условия (18)

$$\tilde{E}_n(m_p \cos t)_1 \leq \frac{C_p \sin^{p+\rho-2} \theta}{n^{\rho+1}} \leq \frac{C_p \sin^{p+\rho-1} \theta}{n^\rho}. \quad (63)$$

Так как

$$u'_2(t) = (1-\rho) \frac{u_2(t)}{\theta-t} - \frac{(1-\rho) \sin^{\rho-2} \theta}{2\Gamma(\rho)} (\theta-t)_+^{\rho-1} (1-x(t))^{\rho-2} \cos S(t),$$

то

$$\begin{aligned} u'_2(t) \sin^{p+1} t &= u'_2(t) \sin^{p+1} \theta \\ &+ \frac{(1-\rho) \sin^{\rho-2} \theta}{2\Gamma(\rho)} (\theta-t)_+^{\rho-1} (1-x(t))^{\rho-2} \cos S(t) (\sin^{p+1} \theta - \sin^{p+1} t) \\ &- (1-\rho) \frac{u_2(t)}{\theta-t} (\sin^{p+1} \theta - \sin^{p+1} t) := R_1(t) + R_2(t) + R_3(t). \end{aligned}$$

Неравенство (52) влечет оценку наилучшего приближения функции $R_1(t)$:

$$\tilde{E}_n(R_1)_1 \leq \frac{C \sin^{p+\rho-1} \theta}{n^\rho}. \quad (64)$$

Из ограниченности производной функции $\cos S(t)$ (см. неравенство (38)) и неравенств (61), (62) следует оценка

$$\tilde{E}_n(R_2)_1 \leq \frac{C_p \sin^{p+\rho-1} \theta}{n^\rho}. \quad (65)$$

Представляя $R_3(t)$ в виде

$$D_3(t) = (1-\rho)u_2(t) \cos b(t) \sum_{i=0}^p \sin^{p-i} \theta \sin^i t$$

и пользуясь предположением индукции для $i = 1, 2, \dots, p$, неравенством (51) для $i = 0$ и условием (18), получим

$$\tilde{E}_n(R_3)_1 \leq \frac{C \sin^{p+\rho-1} \theta}{n^\rho} + \frac{C_p \sin^{p+\rho-2} \theta}{n^{\rho+1}} \leq \frac{C_{p+1} \sin^{p+\rho-1} \theta}{n^\rho}. \quad (66)$$

Из неравенств (63)–(66) получаем неравенство

$$\tilde{E}_n(m'_{p+1})_1 \leq \frac{C_{p+1} \sin^{p+\rho-1} \theta}{n^\rho},$$

а затем, используя соотношение (11), и неравенство (50). Лемма доказана.

Из оценок величин $\tilde{E}_n(u_1 \sin^j t)_1$ и $\tilde{E}_n(u_2 \sin^j t)_1$, неравенства (34) и условия (18) для всех $j = 1, 2, \dots, k-1$ следует неравенство

$$\tilde{E}_n(y_j)_1 \leq C_j \left(\frac{\sin^{\rho+k-j-2} \theta}{n^{\rho+1}} + \frac{\sin^{\rho+k-j-1} \theta}{n^\rho} \right) \leq C_j \frac{\sin^{\rho+k-j-1} \theta}{n^\rho}.$$

Используя соотношение (11) и условие (18), для $j = 1, 2, \dots, k-1$ получаем

$$\tilde{E}_n(I_{k+j-1} y_j)_1 \leq C_j \left(\frac{\sin^{\rho+k-j-1} \theta}{n^{\rho+k+j-1}} \right) \leq C_j \frac{\sin^{r-1} \theta}{n^{r+1}}. \quad (67)$$

§ 4. Доказательство теорем

Пусть $\eta(t) = \eta_\theta t := \{D_r(\theta + t) - D_r(\theta - t)\} \sin^r \theta$, где $a = \cos \theta$. Из равенств (10), (25), оценок (27)–(29) и (67) для всех $\theta \in (\theta_1, \theta_n)$ в силу полуаддитивности величины $\tilde{E}_n(f)_1$ получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{E}_{n+1}(\eta)_1 - \frac{1}{2} \tilde{E}_{n+1}(I_{k-1} y_0 - \eta)_1 - C_k \frac{\sin^{r-1} \theta}{n^{r+1}} \leq E_n(g_{r,a})_1 \\ & \leq \frac{1}{2} \tilde{E}_{n+1}(\eta)_1 + \frac{1}{2} \tilde{E}_{n+1}(I_{k-1} y_0 - \eta)_1 + C_k \frac{\sin^{r-1} \theta}{n^{r+1}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Так как $(-1)^k y_0(t) = \phi(t) \sin^k t + \phi(-t) \sin^k t$, где $\phi(t)$ определяется равенством

$$\phi(t) = \phi_\theta(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\rho)} (\cos t - \cos \theta)_+^{\rho-1}, & t \in [0, \pi], \\ 0, & t \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

то

$$\tilde{E}_{n+1}(I_{k-1} y_0 - \eta)_1 \leq 2 \tilde{E}_{n+1}(I_{k-1} \{(\phi(t) \sin^k t) - \sin^r \theta D_\rho(\theta - t)\})_1. \quad (69)$$

Таким образом, чтобы доказать теорему 1, необходимо оценить правую часть неравенства (69) и определить величину $\tilde{E}_{n+1}(\eta)_1$. В силу соотношения (11), для того чтобы оценить правую часть неравенства (69), рассмотрим наилучшее L_1 -приближение тригонометрическими полиномами функции

$$\zeta(t) = \phi(t) \sin^k t - \sin^r \theta D_\rho(\theta - t).$$

Пусть

$$z_1(t) = \begin{cases} \frac{\sin^r \theta}{\Gamma(\rho)} (\theta - t)_+^{\rho-1}, & t \in [0, \pi], \\ \frac{(\pi + t)}{\pi} \frac{\sin^r \theta}{\Gamma(\rho)} \theta^{\rho-1}, & t \in [-\pi, 0], \end{cases}$$

$$z_2(t) = \begin{cases} -\frac{\sin^{\rho-1} \theta}{\Gamma(\rho)} (\theta - t)_+^{\rho-1} (\sin^k \theta - \sin^k t), & t \in [0, \pi], \\ -\frac{(\pi + t)}{\pi} \frac{\sin^r \theta}{\Gamma(\rho)} \theta^{\rho-1}, & t \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Так как $z_1(t) + z_2(t) = u_1(t) \sin^k t$, то из равенства $\phi(t) = u_1(t) + u_2(t)$ следует, что

$$\zeta(t) = (z_1(t) - \sin^r \theta D_\rho(\theta - t)) + z_2(t) + u_2(t) \sin^k t.$$

Наилучшее приближение последнего слагаемого правой части полученного равенства оценено в лемме 11. Оценим наилучшие приближения двух других слагаемых.

ЛЕММА 12. Для всех $\rho \in (0, 1)$ и θ , удовлетворяющих условию (18), т.е. $\sin \theta \geq \sin(\pi/(n+2))$, имеет место неравенство

$$\tilde{E}_n(z_1(t) - \sin^r \theta D_\rho(\theta - t))_1 \leq \frac{C \sin^{r-1} \theta}{n^{\rho+1}}, \quad (70)$$

где C – абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро $D_\rho(t)$ удовлетворяет равенству (см. [19, с. 133])

$$D_\rho(t) = \frac{t_+^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} + G_\rho(t), \quad t \in (-2\pi, 2\pi),$$

где $G_\rho(t)$ является аналитической функцией на интервале $(-2\pi, 2\pi)$. Более того, на интервале $[-2\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, производная $G'_\rho(t)$ монотонно убывает и ограничена константой M_ε . В частности, $|G'_\rho(t)| \leq 1/\pi$ на интервале $[-\pi, \pi]$. Тогда функция $z_3(t) := z_1(t) - \sin^r \theta D_\rho(\theta - t)$ абсолютно непрерывна, ее производная

$$z'_3(t) = \begin{cases} \sin^r \theta G'_\rho(\theta - t), & t \in (0, \pi], \\ \frac{\theta^{\rho-1} \sin^r \theta}{\pi \Gamma(\rho)} - \frac{(1-\rho)}{\Gamma(\rho)} (\theta - t)_+^{\rho-2} \sin^r \theta + \sin^r \theta G'_\rho(\theta - t), & t \in [-\pi, 0], \end{cases}$$

является функцией ограниченной вариации и

$$V_{-\pi}^\pi \{z'_3\} \leq C \sin^{r+\rho-2} \theta,$$

где C – абсолютная константа. Следовательно, в силу теоремы Джексона и условия (18) получаем (70). Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Для всех $\rho \in (0, 1)$ и θ , удовлетворяющих условию (18), имеет место неравенство

$$\tilde{E}_n(z_2)_1 \leq \frac{C_r \sin^{r-1} \theta}{n^{\rho+1}}. \quad (71)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $z_2(t)$ абсолютно непрерывна и ее производную

$$z'_2(t) = \begin{cases} (\rho - 1)u_1(t) \cos b(t) \sum_{i=0}^{k-1} \sin^{k-i-1} \theta \sin^i t \\ \quad + k u_1(t) \sin^{k-1} t \cos t, & t \in [0, \pi], \\ -\frac{\sin^r \theta}{\pi \Gamma(\rho)} \theta^{\rho-1}, & t \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

можно представить в виде

$$z'_2(t) = p_1(t) + p_2(t),$$

где

$$p_1(t) = (\rho - 1) \cos b(t) \sum_{i=0}^{k-1} \sin^{k-i-1} \theta \beta_i(t) + k \beta_{k-1}(t) \cos t, \\ p_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi], \\ -\frac{\sin^r \theta}{\pi \Gamma(\rho)} \theta^{\rho-1}, & t \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

В силу леммы 7

$$\tilde{E}_n(p_1)_1 \leq \frac{C_k \sin^{r-1} \theta}{n^\rho}. \quad (72)$$

Так как $p_2(t)$ – функция ограниченной вариации, то

$$\tilde{E}_n(p_2)_1 \leq \frac{C \sin^{r-1} \theta}{n}. \quad (73)$$

Из неравенств (72), (73) и соотношения (11) следует (71). Лемма доказана.

Леммы 11–13 и соотношение (11) влекут следующую оценку левой части неравенства (69):

$$\tilde{E}_{n+1}(I_{k-1} y_0 - \eta)_1 \leq \frac{C_r \sin^{r-1} \theta}{n^{r+1}}, \quad (74)$$

при условии, что θ удовлетворяет условию (18).

ЛЕММА 14. Пусть $r > 1$. Тогда

$$\tilde{E}_{n+1}(\eta)_1 \leq \frac{2K_r \sin^r \theta}{(n+2)^r} \quad (75)$$

и

$$\tilde{E}_{n+1}(\eta_{\theta_i})_1 = \frac{2K_r \sin^r \theta_i}{(n+2)^r}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (76)$$

где $\theta_i = i\pi/(n+2) + \gamma/(n+2)$, $i = 1, \dots, n+1$, а $\gamma \in [0, \pi)$ является корнем уравнения

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos\{(2j+1)\gamma - r\pi/2\}}{(2j+1)^r} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство

$$\tilde{E}_{n+1}(D_r)_1 = \frac{K_r}{(n+2)^r},$$

доказанное в работе [15] (см. [1, с. 171]), мы получим оценку сверху:

$$\tilde{E}_{n+1}(\eta_\theta)_1 \leq 2 \sin^r \theta \tilde{E}_{n+1}(D_r)_1 = \frac{2K_r(\sqrt{1-a^2})^r}{(n+2)^r}.$$

Величину $\tilde{E}_{n+1}(D_r)_1$ можно представить в виде [15]

$$\tilde{E}_{n+1}(D_r)_1 = \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_r(t) \operatorname{sign} \sin\{(n+2)t - \gamma\} dt \right|. \quad (77)$$

Из (77) и соотношений двойственности для наилучших приближений [1, с. 42] мы получим оценку снизу для величины $\tilde{E}_{n+1}(\eta_{\theta_i})_1$, $i = 1, 2, \dots, n+1$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{n+1}(\eta_{\theta_i})_1 &\geq \sin^r \theta_i \left| \int_{-\pi}^{\pi} [D_r(\theta_i + t) - D_r(\theta_i - t)] \operatorname{sign} \sin(n+2)t dt \right| \\ &= \sin^r \theta_i \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_r(t) \operatorname{sign} \sin\{(n+2)t - (n+2)\theta_i\} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} D_r(t) \operatorname{sign} \sin\{-(n+2)t + (n+2)\theta_i\} dt \right| \\ &= \frac{2K_r(\sqrt{1-a_i^2})^r}{(n+2)^r}. \end{aligned} \quad (78)$$

Из неравенств (75) и (78) следует равенство (76). Лемма доказана.

Неравенства (68), (74), (75) влекут неравенство

$$\frac{1}{\Gamma(r)} E_n((x-a)_+^{r-1})_1 \leq \frac{K_r(\sqrt{1-a^2})^r}{(n+1)^r} + C \frac{(\sqrt{1-a^2})^{r-1}}{(n+1)^{r+1}},$$

где $a \in [a_n, a_1]$ и C_r зависит только от r . Из равенства (76) и оценок (68) и (74) мы получаем следующую оценку нижней границы:

$$\frac{1}{\Gamma(r)} E_n((x-a)_+^{r-1})_1 \geq \frac{K_r(\sqrt{1-a_i^2})^r}{(n+1)^r} - C_k \frac{(\sqrt{1-a_i^2})^{r-1}}{(n+1)^{r+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (79)$$

Пусть теперь a есть любая точка из интервала (a_{i+1}, a_i) , и предположим для определенности, что $a > 0$. Тогда, используя неравенства (13) и (79), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(r)} E_n((x-a)_+^{r-1})_1 &> \frac{1}{\Gamma(r)} E_n((x-a_i)_+^{r-1})_1 \left(1 - \frac{r\pi}{n}\right) \\ &> \frac{K_r(\sqrt{1-a_i^2})^r}{(n+1)^r} - C_r \frac{(\sqrt{1-a_k^2})^{r-1}}{(n+1)^{r+1}}. \end{aligned} \quad (80)$$

Так как для $a \in (a_{i+1}, a_i)$ и $r > 1$

$$\left(\sqrt{1-a_i^2}\right)^r > \left(\sqrt{1-a^2}\right)^r - \frac{r\pi}{n} \left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}$$

и

$$\sqrt{1-a_i^2} < \sqrt{1-a^2},$$

то из неравенства (80) следует (79) для любого $a \in (a_{i+1}, a_i)$. Принимая во внимание неравенство (79) для $i = n$ и неравенства (14) и (15), получаем (7) для всех $a \in [-1, 1]$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что из неравенства (15) следует более точная оценка остаточного члена для $a \in [a_1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из равенств (2) и (7) сразу получаем равенство

$$E_n(W_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

где числовой множитель в остаточном члене зависит от r . Так же, как в работе [2], на базе многочлена наилучшего приближения конструируется линейный метод приближения функций из класса W_1^r . При этом, в отличие от случая $r < 1$, так же как для натуральных r , у нас не возникают вопросы, связанные с единственностью и непрерывностью (от параметра a) многочленов наилучшего приближения усеченной степени.

Список литературы

1. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближений. М.: Наука, 1987.
2. Никольский С. М. О наилучшем линейном методе приближения многочленами в среднем дифференцируемых функций // ДАН СССР. 1947. Т. 58. № 2. С. 185–188.
3. Motornyi V. P., Nitiema P. C. On the best L -approximation by polynomials of the functions which are fractional integrals of summable functions // East J. Appr. 1996. V. 2. № 4. P. 409–425.
4. Нитиема П. К. О наилучшем L_1 -приближении алгебраическими многочленами усеченных степеней // УМЖ. 1998. Т. 50. № 4. С. 593–598.
5. Никольский С. М. О наилучшем приближении многочленами в среднем функций $|a-x|^s$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. № 3. С. 139–180.
6. Моторная О. В. О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1 . Препринт № 93-20. Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1993.
7. Моторная О. В. Об асимптотических оценках наилучших приближений дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1 // УМЖ. 1993. Т. 45. № 6. С. 859–862.
8. Кофанов В. А. Приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 5. С. 1078–1090.
9. Моторный В. П., Моторная О. В. Наилучшее приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Тр. МИРАН. 1995. Т. 210. С. 171–188.
10. Motornyi V. P., Motornaya O. V. On the best approximation of the classes $W^r H^\alpha$ by algebraic polynomials in L_1 // East J. Approx. 1995. V. 3. № 1. P. 309–339.

11. Моторный В. П., Моторная О. В. Об асимптотическом поведении наилучших приближений классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 3. С. 306–307.
12. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими многочленами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 3. С. 643–648.
13. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими многочленами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 1. С. 67–92.
14. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 5. С. 933–950.
15. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Матем. заметки. 1974. Т. 16. № 5. С. 691–701.
16. Тайков Л. В. О приближении в среднем некоторых классов периодических функций // Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 1967. Т. 88. С. 61–70.
17. Моторная О. В. О наилучшем приближении классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в L_1 // Приближение функций и суммирование рядов. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1991. С. 40–51.
18. Sinvet H. Uniform Approximation of Differentiable Function by Algebraic polynomials // J. Approxim. Theory. 1981. V. 32. P. 1–8.
19. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
20. Моторная О. В., Моторный В. П., Нитиема П. К. О наилучшем L_1 -приближении многочленами функций, являющихся дробными интегралами от суммируемых функций // Докл. НАН Украины. 1998. № 2. С. 48–51.