Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, О множествах инъективности преобразования Радона на сферах,
Изв. РАН. Сер. матем., 1999, том 63, выпуск 3, 63–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 07:40:52

УДК 517.5

В. В. Волчков

О множествах инъективности преобразования Радона на сферах

Решена проблема описания ядра преобразования Радона на сферах относительно множеств со сферической симметрией. Это позволило, в частности, охарактеризовать все множества инъективности указанного вида. Методика доказательства этих фактов дает и другие точные результаты, связанные со сферическими средними: новые теоремы о двух радиусах и теореме единственности.

Библиография: 25 наименований.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – класс функций, локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$. Для всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$ и почти всех (по мере Лебега) $r \in (0, +\infty)$ определено преобразование Радона на сферах

$$\mathcal{R}f(x, r) = \int_{S^{n-1}} f(x + r\sigma) d\sigma,$$

где $d\sigma$ – элемент поверхности сферы S^{n-1} . Ядром преобразования $\mathcal{R}$ (на классе $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$) относительно множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множество функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, у которых $\mathcal{R}f(x, r) = 0$ для всех $x \in A$ и почти всех $r \in (0, +\infty)$. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством инъективности* преобразования $\mathcal{R}$, если ядро $\mathcal{R}$ относительно A содержит только нулевую функцию. Аналогично определяются ядро и множества инъективности преобразования $\mathcal{R}$ на других классах локально суммируемых функций.

Для данного $A \subset \mathbb{R}^n$ возникает следующая

ПРОБЛЕМА. *Выяснить, является ли A множеством инъективности и если не является, то описать ядро преобразования $\mathcal{R}$ относительно A .*

Известно, что всякое множество A , плотное в некотором шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, является множеством инъективности (см. [1, с. 103], а также [2, теорема 5]). В случае, когда A нигде не плотно в $\mathbb{R}^n$, поставленные вопросы являются, как правило, чрезвычайно трудными и почти не исследованы. Немногочисленные результаты в

Работа написана при поддержке MNF (гранты № U9D000, U9D200).

этом направлении имеются лишь для гораздо более узких, чем $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, классов функций (см. [3] и библиографию к этой работе). Единственный из известных до настоящего времени точных результатов получен при $n = 2$ М. Л. Аграновским и Е. Т. Квинто: множество $A \subset \mathbb{R}^2$ является множеством инъективности преобразования $\mathcal{R}$ на классе финитных функций тогда и только тогда, когда A не содержится в объединении множества нулей однородного гармонического многочлена и конечного числа точек в $\mathbb{R}^2$ (см. [3]). Доказательство этого утверждения основано на применении микролокального анализа и существенно использует компактность носителей рассматриваемых функций. Некоторые более частные результаты для классов $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2n/(n-1)$, недавно получены М. Л. Аграновским, К. А. Беренштейном и П. А. Кучментом [4].

В последние годы автором данной работы разработана другая методика, использующая разложения по специальным функциям и позволяющая решать многие задачи, связанные с шаровыми и сферическими средними (см. [5]–[14] и библиографию к этим работам). В данной работе на основе техники, предложенной в [5]–[7], получено решение сформулированной выше проблемы для сферически симметричных (т.е. инвариантных относительно вращений) множеств A (см. ниже теорему 1). Методика доказательства дает и другие точные результаты, связанные с преобразованием Радона на сферах (см. теоремы 2, 3).

§ 1. Формулировки основных результатов

Далее все функции, определенные и непрерывные в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, а также допускающие непрерывное продолжение в точку 0, считаются доопределенными в нуле по непрерывности.

Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на открытом множестве $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ – пространство распределений на $\mathcal{U}$ (см., например, [15, гл. 2, § 5]), ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ (для любого $x \in \mathbb{R}^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = x/\rho \in S^{n-1}$), J_ν – функция Бесселя первого рода порядка $\nu \geq 0$, $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел. Следуя [16, гл. 4, § 2], обозначим $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$, ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k , рассматриваемом как подпространство $L^2(S^{n-1})$. Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad (1)$$

где

$$f_{kl}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma,$$

$$F_{kl}(x) = f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ положим

$$\begin{aligned}\Phi_{kl}(x) &= J_{\frac{n}{2}+k-1}(\rho)\rho^{1-\frac{n}{2}}Y_l^{(k)}(\sigma), \\ \Lambda_k(A) &= \{\zeta > 0: |x|^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}+k-1}(\zeta|x|) = 0 \quad \forall x \in A\}.\end{aligned}$$

В частности, если $0 \in A$, то (см. начало § 1) $\Lambda_0(A) = \emptyset$, а при $k \geq 1$

$$\Lambda_k(A \setminus \{0\}) = \Lambda_k(A).$$

Пусть также $\text{Ker}_A \mathcal{R}$ – ядро преобразования $\mathcal{R}$ относительно A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – сферически симметричное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) A не является множеством инъективности преобразования $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n: |x|^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda|x|) = 0\}$ при некоторых $k \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda > 0$;

2) для того чтобы функция $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ принадлежала $\text{Ker}_A \mathcal{R}$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство

$$F_{kl}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_k(A)} c_{\lambda,k,l} \Phi_{kl}(\lambda x), \quad (2)$$

в котором ряд сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (здесь и далее суммы с пустым множеством индексов суммирования считаются равными нулю).

Некоторые результаты, уточняющие характер сходимости ряда (2) для гладких функций $f \in \text{Ker}_A \mathcal{R}$, получены в § 3.

Обозначим $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < R\}$, E_k ($k \in \mathbb{Z}_+$) – множество чисел вида α/β , где $\alpha, \beta > 0$, и $J_{\frac{n}{2}+k-1}(\alpha) = J_{\frac{n}{2}+k-1}(\beta) = 0$, $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$, $r_1, r_2 \in (0, R)$ фиксированы и

$$\mathcal{R}f(r_k x, r) = 0 \quad (3)$$

для любого $x \in S^{n-1}$ и почти всех $r \in (0, R - r_k)$, $k = 1, 2$.

Тогда выполнены следующие утверждения:

1) если $r_1 + r_2 \leq R$ и $r_1/r_2 \notin E$, то $f = 0$;

2) если $r_1 + r_2 > R$ или $r_1/r_2 \in E$, то существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющая (3).

Пусть $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, – класс функций f , у которых $|f|^p \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Для $p \in [1, 2n/(n-1)]$ и $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ обозначим

$$M_R(f)_p = \frac{1}{\mu_p(R)} \int_{B_R} |f(x)|^p dx,$$

где $\mu_p(R) = R^{n-p(n-1)/2}$ при $p < 2n/(n-1)$ и $\mu_p(R) = \ln R$ при $p = 2n/(n-1)$.

Пусть также $\mathcal{L}(f) = \lim_{R \rightarrow \infty} M_R(f)_p$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p \in [1, 2n/(n-1)]$, $f, g \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $r_1, r_2 > 0$ фиксированы и

$$\mathcal{R}f(r_1x, r) = \mathcal{R}g(r_2x, r) = 0 \quad (4)$$

для любого $x \in S^{n-1}$ и почти всех $r \in (0, +\infty)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $r_1/r_2 \notin E$ и $\mathcal{L}(f-g)_p = 0$, то $f = g = 0$;
- 2) если $r_1/r_2 \in E$ и $\mathcal{L}(f-g)_p = 0$, то $f = g$ (при этих условиях существуют ненулевые функции $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие (4));
- 3) для любых $r_1, r_2 > 0$, $q > 2n/(n-1)$ существуют ненулевые и различные функции $f, g \in C^\infty \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие (4), для которых $M_R(f-g)_p = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$ и любом $p \in [1, 2n/(n-1)]$.

В частности, полагая $g = 0$, отсюда получаем, что сфера в $\mathbb{R}^n$ является множеством инъективности $\mathcal{R}$ на классе функций с условием $\mathcal{L}(f)_p = 0$. Из доказательства третьего утверждения теоремы 3 следует (см. § 4), что данное условие нельзя существенно ослабить.

Теоремы 2, 3 интересно сравнить с различными вариантами известных теорем о двух радиусах, полученных Ж. Дельсартом, Л. Зальцманом и другими авторами (см. [17]–[21], а также [2], [5]–[14]). По поводу других результатов, связанных с классическим преобразованием Радона и его обобщениями, см. [22], [23] и библиографию к этим работам.

Автор благодарит профессоров М. Л. Аграновского и Л. Зальцмана за полезные обсуждения и предоставленную литературу.

§ 2. Обозначения и вспомогательные конструкции

Пусть $\text{SO}(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$ с нормированной мерой Хаара $d\tau$, $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления группы $\text{SO}(n)$ на пространство $\mathcal{H}_k$ (см. [24, гл. 9, § 2, п. 7]), $\{t_{ls}^k\}$, $1 \leq l, s \leq a_k$, – матрица представления $T^k(\tau)$, т.е.

$$(T^k(\tau)Y_l^{(k)})(\sigma) = Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{s=1}^{a_k} t_{ls}^k(\tau)Y_s^{(k)}(\sigma)$$

для любых $\tau \in \text{SO}(n)$, $\sigma \in S^{n-1}$. При $n = 2$ удобно использовать следующий базис в $\mathcal{H}_k$ ($k \geq 1$):

$$Y_1^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad Y_2^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k$$

(в этом случае $a_k = 2$ при $k \geq 1$). Если τ – вращение на угол θ в $\mathbb{R}^2$, то для этого базиса

$$t_{11}^k(\tau) = e^{-ik\theta}, \quad t_{22}^k(\tau) = e^{ik\theta}, \quad t_{12}^k(\tau) = t_{21}^k(\tau) = 0.$$

При этом для членов ряда (1) имеем равенство

$$F_{ki}(x) = \int_{\text{SO}(2)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{ii}^k(\tau)} d\tau. \quad (5)$$

Если $n \geq 3$, из неприводимости представлений $T^k(\tau)$ (см. [24, гл. 9, § 2, п. 10]) следует, что при всех $1 \leq l, s \leq a_k$

$$f_{kl}(\rho)Y_s^{(k)}(\sigma) = a_k \int_{\text{SO}(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{ls}^k(\tau)} d\tau \quad (6)$$

(см. [6, формула (6)]). Пусть $\{\nu_{q,k}\}_{q=1}^\infty$ – последовательность всех положительных корней функции $J_{\frac{n}{2}+k-1}$, занумерованных в порядке возрастания. Нетрудно видеть (см., например, [5, формула (11)]), что

$$\sum_{q=1}^\infty \nu_{q,k}^{-\alpha} < \infty \quad (7)$$

для любых $\alpha > 1, k \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, имеет место неравенство

$$J_{\frac{n}{2}+k}^2(\nu_{q,k}) > c\nu_{q,k}^{-1}, \quad (8)$$

где c больше нуля и не зависит от q (см. [5, формулы (10), (11)]).

Далее, для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ обозначим $xy = \sum_{m=1}^n x_m y_m$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $[x] = x\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0)$. Пусть также $\Delta = \sum_{m=1}^n \partial^2 / \partial x_m^2$ – оператор Лапласа и $\chi_r(x)$ – характеристическая функция (индикатор) шара B_r .

ЛЕММА 1. Пусть $a > 1, F \in C^m[0, a], m \geq 1$ и $F = 0$ на $[0, 1]$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ существует функция $g \in C^m(-a, a)$ такая, что $g(-t) = (-1)^k g(t)$ для всех $t \in (-a, a)$, $g = 0$ на $[-1, 1]$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t \cos \varphi) \cos k\varphi d\varphi = F(t) \quad (9)$$

при любом $t \in [0, a]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы докажем индукцией по k . Пусть $k = 0$. В этом случае уравнение (9) сводится к интегральному уравнению Абеля и имеет единственное решение

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (F'(\xi)t^2 + F(\xi)) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (10)$$

на $[0, a]$ (см. [22, гл. 1, § 2, доказательство теоремы 2.6]). Из (10) следует, что $g = 0$ на $[0, 1]$ и $g \in C^{m-1}[0, a]$. Полагая $g(t) = g(-t)$ при $t \in (-a, 0)$, имеем функцию, удовлетворяющую всем требованиям леммы при $k = 0$.

Предположим, что утверждение леммы верно при любом $k \leq \nu$, и докажем его при $k = \nu + 1$. Из условия следует, что функция $G(t) = t^\nu \int_0^t F(\xi) \xi^{-\nu} d\xi$ принадлежит классу $C^{m+1}[0, a]$. По предположению индукции существует функция $h \in C^m(-a, a)$ такая, что $h(-t) = (-1)^\nu h(t)$, $h = 0$ на $[-1, 1]$ и $G(t) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t \cos \varphi) \cos \nu \varphi d\varphi$ на $[0, a]$. Полагая $g(t) = h'(t)$, имеем

$$G'(t) - \frac{\nu}{t} G(t) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t \cos \varphi) \cos(\nu + 1)\varphi d\varphi = F(t).$$

Таким образом, функция g удовлетворяет всем требованиям леммы при $k = \nu + 1$. Лемма доказана.

Аналогично случаю $k = 0$ в лемме 1 доказывается

ЛЕММА 2. Пусть $a > 1$, $F \in C^m[0, a)$, $m \geq 1$ и $F = 0$ на $[0, 1]$. Тогда при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ существует четная функция $g \in C^{m-1}(-a, a)$ такая, что $g = 0$ на $[-1, 1]$ и $F(t) = \int_0^\pi g(t \sin \varphi) \sin^k \varphi d\varphi$ на $[0, a)$.

ЛЕММА 3. Пусть $a > 1$, $F \in C^m[0, a)$, $m \geq n - 1$ и $F = 0$ на $[0, 1]$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ существует функция $g \in C^{m-n+1}(-a, a)$ такая, что $g(-t) = (-1)^k g(t)$ для всех $t \in (-a, a)$, $g = 0$ на $[-1, 1]$ и

$$\int_{S^{n-1}} g(\rho \sigma_1) (\sigma_1 + i\sigma_2)^k d\sigma = F(\rho) \quad (11)$$

при любом $0 \leq \rho < a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ утверждение следует из леммы 1. Пусть $n \geq 3$. Используя сферические координаты, перепишем равенство (11) в виде

$$F(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{[0, \pi]^{n-2}} \cos(k\theta_1) g(\Pi_1(\theta) \rho \cos(k\theta_1)) \Pi_2(\theta) d\theta_2 \dots d\theta_{n-1},$$

где

$$\Pi_1(\theta) = \prod_{m=2}^{n-1} \sin \theta_m, \quad \Pi_2(\theta) = \prod_{m=1}^{n-1} (\sin \theta_m)^{k+m-1}.$$

Применяя лемму 1, а затем $n - 2$ раза лемму 2, получим утверждение леммы 3.

Далее нам потребуются некоторые простые утверждения о свойствах функций Φ_{kl} .

ЛЕММА 4. При любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$, $\lambda > 0$ имеют место следующие утверждения:

- 1) $\Delta(\Phi_{kl}(\lambda x)) + \lambda^2 \Phi_{kl}(\lambda x) = 0$;
- 2) при любом $r > 0$

$$\int_{S^{n-1}} \Phi_{kl}(\lambda(x + r\sigma)) d\sigma = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\lambda r)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r) \Phi_{kl}(\lambda x); \quad (12)$$

- 3) для любой функции $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{kl}(\lambda x) g(x) dx = O(\lambda^{-m}) \quad (13)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$ и любом $m > 0$;

4) функция Φ_{kl} и ее частные производные любого порядка ограничены в $\mathbb{R}^n$ и $\Phi_{kl}(x) = O(|x|^{(1-n)/2})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение легко получить из равенства

$$\Phi_{kl}(x) = \frac{i^k}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S^{n-1}} e^{ix\eta} Y_l^{(k)}(\eta) d\eta \quad (14)$$

(см. [22, введение, лемма 3.6]). Утверждение 2) является следствием теоремы о среднем значении для решений уравнения Гельмгольца (см. [25, гл. 4, § 3, формула (39)]). Третье утверждение вытекает из (14) и быстрого убывания на бесконечности преобразования Фурье функции g . Утверждение 4) следует из (14) и известной оценки для функций Бесселя (см., например, [5, формула (10)]).

§ 3. Свойства функций класса $\Psi(B_R)$

При $R > 1$ обозначим $\Psi(B_R)$ множество функций $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$, у которых $\mathcal{R}f(x, r) = 0$ для всех $x \in S^{n-1}$ и почти всех $r \in (0, R - 1)$. Пусть также $\Psi^m(B_R) = \Psi \cap C^m(B_R)$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Нетрудно видеть, что $f \in \Psi(B_R)$ тогда и только тогда, когда для любого $r \in (0, R - 1)$ свертка $f * \chi_r$ равна нулю на S^{n-1} . Аппроксимируя χ_r гладкими радиальными (т.е. зависящими только от $|\cdot|$) функциями, получаем, что условие $f \in \Psi(B_R)$ эквивалентно тому, что для любой радиальной функции $g \in \mathcal{D}(B_{R-1})$ свертка $f * g$ равна нулю на S^{n-1} . В частности, если $f \in \Psi(B_R)$ и функция $g \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < R - 1$, радиальна, то $f * g \in \Psi^m(B_{R-\varepsilon})$ при любом $m \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in \Psi^m(B_R)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(x) = 0$ при любом $x \in S^{n-1}$;
- 2) $f_{kl}(\rho) Y_s^{(k)}(\sigma) \in \Psi^m(B_R)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l$, $s \leq a_k$ (аналогичное утверждение верно и для $f \in \Psi(B_R)$);
- 3) если $m \geq 2$, то $\Delta f \in \Psi^{m-2}(B_R)$.

В частности, если $f(x) = u(\rho)Y(\sigma)$ при некотором $Y \in \mathcal{H}_k$, то

$$(u''(\rho) + (n-1)u'(\rho)\rho^{-1} - (n+k-2)u(\rho)\rho^{-2})Y(\sigma) \in \Psi^{m-2}(B_R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности f вытекает равенство

$$\mathcal{R}f(x, r) = r^{n-1}f(x) \int_{S^{n-1}} d\sigma + o(r^{n-1})$$

при $r \rightarrow 0$. Отсюда и из определения $\Psi(B_R)$ имеем утверждение 1). Утверждение 2) следует из равенств (5), (6) и определения классов $\Psi^m(B_R)$ и $\Psi(B_R)$. Для доказательства третьего утверждения используем замечания в начале § 3. Для любой радиальной функции $g \in \mathcal{D}(B_{R-1})$ имеем $\Delta f * g = f * \Delta g = 0$ на S^{n-1} , поскольку Δg радиальна. Таким образом, $\Delta f \in \Psi^{m-2}(B_R)$. Если $f(x) = u(\rho)Y(\sigma)$, отсюда и из [5, формула (7)] получаем утверждение 3).

ЛЕММА 6. Пусть $f \in \Psi^{n-1}(B_R)$ и $f = 0$ в B_1 . Тогда $f = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (5), (6) и утверждения 2) леммы 5 следует, что вместе с f функции $f_{kl}(\rho)Y_s^{(k)}(\sigma)$ удовлетворяют условиям леммы 6. Поэтому достаточно доказать лемму 6 в случае, когда функция f имеет вид $f(x) = F(\rho)(\sigma_1 + i\sigma_2)^k$. Не ограничивая общности, можно считать, что $Y_1^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$ (базис здесь можно выбирать произвольно). Пусть $g \in C(-R, R)$ – решение уравнения (11), удовлетворяющее условиям леммы 3. Из равенств (5), (6) и (11) имеем

$$f(x) = c \int_{\text{SO}(n)} g([\rho\tau^{-1}\sigma]) \overline{t_{11}^k(\tau)} d\tau, \quad (15)$$

где постоянная c зависит только от n и k .

Обозначим

$$u(r, \tau^{-1}\mathbf{e}) = \int_{B_r} g([\tau^{-1}(x + \mathbf{e})]) dx = \int_{-r}^r g(\xi + [\tau^{-1}\mathbf{e}]) (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi. \quad (16)$$

Из (15) и (11) получаем

$$\int_{\text{SO}(n)} u(r, \tau^{-1}\mathbf{e}) \overline{t_{11}^k(\tau)} d\tau = 0. \quad (17)$$

Используя (16), отсюда имеем

$$\int_{-r}^r (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\text{SO}(n)} g(\xi + [\tau^{-1}\mathbf{e}]) \overline{t_{11}^k(\tau)} d\tau d\xi = 0. \quad (18)$$

Согласно (5) и (6) внутренний интеграл с точностью до постоянного множителя равен $\int_{S^{n-1}} g(\xi + \sigma_1)(\sigma_1 + i\sigma_2)^k d\sigma$ и является четной функцией переменной $\xi \in (-r, r)$. Тогда из (18) следует (см. [22, гл. 1, доказательство теоремы 2.6]), что

$$\int_{S^{n-1}} g(\xi + \sigma_1)(\sigma_1 - i\sigma_2)^k d\sigma = 0 \quad (19)$$

при любом $\xi \in (1 - R, R - 1)$. Учитывая, что $g = 0$ на $[-1, 1]$, и повторяя рассуждения из доказательства леммы 6 в работе [5], из равенства (19) получим $g = 0$ на $(-R, R)$. Отсюда и из (11) следует утверждение леммы 6.

ЛЕММА 7. Пусть $R > 1$, $m \geq n + 1$ и $f \in C^m(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in \Psi(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство

$$\rho^{\frac{n}{2}-1} f_{kl}(\rho) = \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_{q,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1}(\nu_{q,k}\rho), \quad (20)$$

где

$$\lambda_{q,k,l} = \frac{2}{J_{\frac{n}{2}+k}^2(\nu_{q,k})} \int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}} f_{kl}(\rho) J_{\frac{n}{2}+k-1}(\nu_{q,k}\rho) d\rho, \quad (21)$$

$\lambda_{q,k,l} = O(\nu_{q,k}^{-m+1/2})$ при $q \rightarrow \infty$ и ряд (20) сходится равномерно на B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ. Из условия и утверждения 4) леммы 4 следует, что при всех $1 \leq l \leq a_k$ ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \nu_{q,k}^{-1+\frac{n}{2}} \lambda_{q,k,l} \Phi_{kl}(\nu_{q,k}x)$$

сходится равномерно в B_R к функции F_{kl} (см. (7)). Поскольку $\Phi_{kl}(\nu_{q,k}x) \in \Psi(B_R)$ (см. (12)), имеем $F_{kl} \in \Psi(B_R)$. Отсюда следует (см. [5, доказательство леммы 3]), что $f \in \Psi(B_R)$.

Для доказательства необходимости достаточно повторить рассуждения из доказательства леммы 10 в работе [5], используя лемму 6 и утверждения леммы 5.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $R > 1$, $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in \Psi(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство

$$F_{kl}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \nu_{q,k}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_{q,k,l} \Phi_{kl}(\nu_{q,k}x), \quad (22)$$

в котором коэффициенты $\lambda_{q,k,l}$ определяются по формуле (21), $\lambda_{q,k,l} = O(\nu_{q,k}^{-m})$ при $q \rightarrow \infty$ и любом $m > 0$. Ряд (22) сходится в $\mathcal{D}(B_R)$.

Доказательство следует из леммы 7 и утверждения 4) леммы 4.

ЛЕММА 8. Пусть $R > 1$ и $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in \Psi(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство

$$F_{kl}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} c_{q,k,l}(f) \Phi_{kl}(\nu_{q,k}x), \quad (23)$$

где

$$c_{q,k,l}(f) = \frac{2\nu_{q,k}^{n-2}}{J_{\frac{n}{2}+k}^2(\nu_{q,k})} \int_{B_1} f(x) \overline{\Phi_{kl}(\nu_{q,k}x)} dx. \quad (24)$$

Ряд (23) сходится к F_{kl} в $\mathcal{D}'(B_R)$. Кроме того, из равенства (24) следует, что $c_{q,k,l}(f) = o(\nu_{q,k}^{n-1})$ при $q \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Полагая

$$u(x) = 2(-1)^k J_{\frac{n}{2}+k}^{-2}(\nu_{q,k}) \chi_1(x) \overline{\Phi_{kl}(\nu_{q,k}x)} \nu_{q,k}^{n-2},$$

из (24) и определения f_{kl} получаем $c_{q,k,l}(f) = (F_{kl} * u)(0)$. Пусть φ – радиальная функция из класса $\mathcal{D}(B_1)$ такая, что $\int_{B_1} \varphi(x) dx = 1$. Для произвольного $\varepsilon \in (0, (R-1)/2)$ положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$. Тогда свертка $u * \varphi_\varepsilon$ ограничена в $\mathbb{R}^n$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u * \varphi_\varepsilon)(x) = u(x)$ для почти всех $x \in B_{(R+1)/2}$ (см. [16, гл. 1, теорема 1.25]). По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F_{kl} * (u * \varphi_\varepsilon))(0) = (F_{kl} * u)(0).$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{q,k,l}(F_{kl} * \varphi_\varepsilon) = c_{q,k,l}(f). \quad (25)$$

Далее, пусть $h_\varepsilon(x) = (F_{kl} * \varphi_\varepsilon)(x)$ при $x \in B_{R-\varepsilon}$ и $h_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| \geq R - \varepsilon$. Поскольку φ_ε радиальна, существует функция H_ε на $[0, +\infty)$ такая, что $H_\varepsilon(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) = h_\varepsilon(x)$ (см. [5, лемма 5]). Кроме того, $h_\varepsilon \in C^\infty(B_{R-\varepsilon})$ и $h_\varepsilon \in \Psi(B_{R-\varepsilon})$ (см. начало § 3). Применяя следствие из леммы 7, имеем равенство

$$h_\varepsilon(x) = \sum_{q=1}^{\infty} c_{q,k,l}(h_\varepsilon)\Phi_{kl}(\nu_{q,k}x), \quad (26)$$

в котором ряд сходится в $\mathcal{D}(B_{R-\varepsilon})$. Учитывая, что $h_\varepsilon \rightarrow F_{kl}$ в $\mathcal{D}'(B_R)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [16, гл. 1, теорема 1.18]), из (25), (26) и третьего утверждения леммы 4 получаем, что ряд в (23) сходится в $\mathcal{D}'(B_R)$ к функции F_{kl} .

Достаточность. Пусть g – радиальная функция из класса $\mathcal{D}(B_{R-1})$. Из равенств (23) и (12) имеем $F_{kl} * g = 0$ на S^{n-1} при любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$. В силу произвольности g получаем $F_{kl} \in \Psi(B_R)$. Отсюда следует (см. [5, доказательство леммы 3]), что $f \in \Psi(B_R)$.

Условие $c_{q,k,l}(f) = o(\nu_{q,k}^{n-1})$ легко получить из (24), (8) и утверждения 4) леммы 4. Таким образом, лемма 8 полностью доказана.

Из леммы 8 следует следующее уточнение леммы 6.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\delta > 0$, $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 - \delta < |x| < 1 + \delta\}$ и $f \in L(U_\delta)$. Предположим, что $f(x) = 0$ в области $1 - \delta < |x| < 1$ и $\mathcal{R}f(x, r) = 0$ при всех $x \in S^{n-1}$ и почти всех $r \in (0, \delta)$. Тогда $f = 0$ в U_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\delta \geq 1$, из (24) следует $c_{q,k,l}(f) = 0$. В этом случае из леммы 8 имеем $F_{kl} = 0$ в $B_{1+\delta}$, откуда $f = 0$ в U_δ . При $\delta < 1$ достаточно положить $f = 0$ в $B_{1-\delta}$ и повторить аналогичное рассуждение.

§ 4. Доказательства основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала докажем второе утверждение теоремы. Пусть $0 \notin A$.

В случае, когда A является сферой, оба утверждения теоремы 1 следуют из леммы 8. Поэтому далее будем предполагать, что A содержит по крайней мере две сферы S_1, S_2 с радиусами r_1, r_2 , $r_1 \neq r_2$. Пусть $f \in \text{Ker}_A \mathcal{R}$; тогда $F_{kl} \in \text{Ker}_A \mathcal{R}$ (см. утверждение 2) леммы 5). Из леммы 8 получаем равенства

$$F_{kl}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{q,k,l} \Phi_{kl}\left(\nu_{q,k} \frac{x}{r_1}\right) = \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{q,k,l} \Phi_{kl}\left(\nu_{q,k} \frac{x}{r_2}\right), \quad (27)$$

в которых ряды сходятся к F_{kl} в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть φ_ε – функция из доказательства леммы 8 и $F_{kl} * \varphi_\varepsilon = h_\varepsilon$. Как и выше (см. доказательство необходимости в лемме 8), заключаем, что

$$h_\varepsilon(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_q(\varepsilon) \Phi_{kl} \left(\nu_{q,k} \frac{x}{r_1} \right) = \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q(\varepsilon) \Phi_{kl} \left(\nu_{q,k} \frac{x}{r_2} \right), \quad (28)$$

где оба ряда сходятся в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha_q(\varepsilon) \rightarrow \alpha_{q,k,l}$, $\beta_q(\varepsilon) \rightarrow \beta_{q,k,l}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предположим, что $\nu_{q,k}r_2 \neq \nu_{m,k}r_1$ при некотором q и любом m . Тогда из (28) имеем (см. [6, лемма 2]) $\alpha_q(\varepsilon) = \alpha_{q,k,l} = 0$. Поскольку S_2 – произвольная сфера, содержащаяся в A и отличная от S_1 , из левого равенства в (27) получаем (2).

Пусть теперь $0 \in A$. Если $k \geq 1$, то $\Lambda_k(A) = \Lambda_k(A \setminus \{0\})$ и аналогичные рассуждения для множества $A \setminus \{0\}$ дают равенство (2) и в этом случае. Если $k = 0$ и $f \in \text{Ker}_A \mathcal{R}$, то из определения F_{kl} вытекает, что $F_{kl} = 0$. Поскольку $\Lambda_0(A) = \emptyset$, имеем (2) и для $k = 0$. Отсюда и из леммы 8 следует второе утверждение теоремы 1.

Докажем первое утверждение. Пусть

$$\mathcal{N}_{k,\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda|x|) = 0\}$$

и $A \subset \mathcal{N}_{k,\lambda}$ при некоторых $k \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda > 0$. Тогда из (12) получаем, что $\Phi_{kl}(\lambda x) \in \text{Ker}_A \mathcal{R}$ при любом $l \in \{1, \dots, a_k\}$, и, следовательно, A не является множеством инъективности. Предположим теперь, что A не содержится во множестве $\mathcal{N}_{k,\lambda}$ ни при каких $k \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda > 0$. Тогда $\Lambda_k(A) = \emptyset$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, и из утверждения 2) следует, что $\text{Ker}_A \mathcal{R}$ содержит только нулевую функцию. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $r_1 + r_2 \leq R$, $r_1/r_2 \in E$ и выполнено (3). Из леммы 8 имеем равенства (27), в которых ряды сходятся к F_{kl} в $\mathcal{D}'(B_R)$ и

$$|\alpha_{q,k,l}| + |\beta_{q,k,l}| = o(\nu_{q,k}^{n-1}) \quad (29)$$

при $q \rightarrow \infty$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $m > n$. Из (27) и первого утверждения леммы 4 получаем $\Delta^m h = 0$, где

$$h(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\alpha_{q,k,l} \left(\frac{r_1}{\nu_{q,k}} \right)^{2m} \Phi_{kl} \left(\nu_{q,k} \frac{x}{r_1} \right) - \beta_{q,k,l} \left(\frac{r_2}{\nu_{q,k}} \right)^{2m} \Phi_{kl} \left(\nu_{q,k} \frac{x}{r_2} \right) \right). \quad (30)$$

Из (29), (7) и утверждения 4) леммы 4 следует, что ряд в левой части равенства (30) сходится равномерно в B_R и $h \in C(B_R)$. Тогда $h \in C^\infty$ и равенство $\Delta^m h = 0$ имеет место в B_R в обычном смысле (см., например, [15, гл. 5,

§ 24, п. 7]). Проинтегрируем равенство (30) по сфере радиуса $r \in (0, r_1)$ с центром $r_2 y$, $y \in S^{n-1}$. Используя теорему о среднем значении для полигармонических функций (см. [25, гл. 4, § 3, формула (38)]) и (12), получим

$$\sum_{q=0}^{m-1} \frac{(\Delta^q h)(r_2 y)}{q! \Gamma(q + \frac{n}{2})} \left(\frac{r}{2}\right)^{2q} = \sum_{q=1}^{\infty} c_q r^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1} \left(\nu_{q,k} \frac{r}{r_1}\right), \quad (31)$$

где, как обычно, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция и

$$c_q = \alpha_{q,k,l} \left(\frac{r_1}{\nu_{q,k}}\right)^{2m+\frac{n}{2}-1} 2^{\frac{n}{2}-1} \Phi_{kl} \left(\nu_{q,k} y \frac{r_2}{r_1}\right). \quad (32)$$

Умножим равенство (31) на r^{n-2} и применим k раз интегральный оператор $W: C[0, r_1] \rightarrow C^1[0, r_1]$, действующий следующим образом:

$$(Wg)(r) = \int_0^r tg(t) dt, \quad g \in C[0, r_1].$$

Используя соотношения между функциями Бесселя с соседними индексами (см., например, [5, формула (8)]), получим

$$r^{2-\frac{n}{2}-k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{\nu_{q,k}^k} J_{\frac{n}{2}+k-1} \left(\nu_{q,k} \frac{r}{r_1}\right) = P(r), \quad (33)$$

где P – нечетный многочлен степени не выше $2m-1$. Если $P \neq 0$, из последнего равенства следует, что $|c_q| > c\nu_{q,k}^{-2m+1/2}$ при некотором $c > 0$ и всех достаточно больших q (см. [5, § 9, доказательство утверждения 4]). С другой стороны, из (32), (29) и утверждения 4) леммы 4 получаем $c_q = o(\nu_{q,k}^{-2m+1/2})$ при $q \rightarrow \infty$. Таким образом, $P = 0$ и из (33) находим $c_q = 0$ (см., например, [15, гл. 5, § 23, п. 2]). Поскольку $r_1/r_2 \notin E$, в силу произвольности $y \in S^{n-1}$ из (32) имеем $\alpha_{q,k,l} = 0$. Тогда $F_{kl} = 0$ в B_R , откуда следует первое утверждение теоремы 2.

Пусть теперь $r_1 + r_2 > R$ и $r_1/r_2 \notin E$. В этом случае существует ненулевая радиальная функция $g \in C^\infty(B_R)$ такая, что

$$\int_{|x| \leq r_k} g(x+y) dx = 0$$

при любом $y \in B_{R-r_k}$, $k = 1, 2$ (см. [5, § 9, доказательство утверждения 6]). Отсюда следует, что g не является тождественной константой и

$$g(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_q \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1} \left(\nu_{q,1} \frac{\rho}{r_1}\right) = \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1} \left(\nu_{q,1} \frac{\rho}{r_2}\right), \quad (34)$$

где $|\alpha_q| + |\beta_q| = O(\nu_{q,1}^{-m})$ при $q \rightarrow \infty$ и любом $m > 0$ (см. [5, следствие из теоремы 3]). Используя лемму 7 для случая $k = 1$, из (34) и утверждения 2) леммы 5 получаем, что при любом $j \in \{1, \dots, n\}$ функция $\partial g / \partial x_j$ удовлетворяет (3) и не обращается в нуль тождественно.

Если $r_1/r_2 \in E$, то $r_1/r_2 \in E_k$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае функция $\Phi_{kl}(\zeta x)$, где $J_{\frac{n}{2}+k-1}(\zeta r_1) = J_{\frac{n}{2}+k-1}(\zeta r_2) = 0$, удовлетворяет (3) (см. (12)). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\mathcal{L}(f - g)_p = 0$. Обозначим $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$, $g_\varepsilon = g * \varphi_\varepsilon$, где φ_ε — функция из доказательства леммы 8. Тогда $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4) (см. начало § 3) и $\mathcal{L}(f_\varepsilon - g_\varepsilon)_p = 0$ (см. лемму 2 в работе [7]). Используя следствие из леммы 8 и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2 в [7], получаем, что $f_\varepsilon = g_\varepsilon = 0$ при $r_1/r_2 \notin E$, и $f_\varepsilon = g_\varepsilon$ при $r_1/r_2 \in E$. В силу произвольности ε аналогичные утверждения имеют место и для f, g . Если $r_1/r_2 \in E$, то $r_1/r_2 \in E_k$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда из (12) следует, что ненулевые функции

$$f = g = \Phi_{kl}(\zeta x),$$

где

$$J_{\frac{n}{2}+k-1}(\zeta r_1) = J_{\frac{n}{2}+k-1}(\zeta r_2) = 0,$$

удовлетворяют (4). Таким образом, утверждения 1), 2) теоремы 3 доказаны. Всем требованиям утверждения 3) удовлетворяют функции $f = \Phi_{kl}(\zeta_1 x)$, $g = \Phi_{kl}(\zeta_2 x)$, где $J_{\frac{n}{2}+k-1}(\zeta_1 r_1) = J_{\frac{n}{2}+k-1}(\zeta_2 r_2) = 0$ (см. (12) и утверждение 4) леммы 4).

Список литературы

1. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ, 1958.
2. Волчков В. В. Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35. № 4. С. 737–745.
3. Agranovsky M. L., Quinto E. T. Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions // J. of Functional Anal. 1996. V. 139. № 2. P. 383–414.
4. Agranovsky M. L., Berenstein C. A., Kuchment P. A. Approximation by spherical waves in L^p -spaces // J. of Geometric Analysis. 1996. V. 6. № 3. P. 365–383.
5. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.
6. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 71–78.
7. Волчков В. В. Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 59–65.
8. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.
9. Волчков В. В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 30–36.
10. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для полианалитических функций // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 20–28.
11. Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 300–302.
12. Volchkov V. V. Morera type theorems on the unit disk // Ann. Math. 1994. V. 20. P. 49–63.
13. Волчков В. В. Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 3. С. 351–358.
14. Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на ограниченных областях евклидовых пространств // Дифф. уравн. 1994. Т. 30. № 10. С. 1719–1724.
15. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1981.

16. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
17. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 47. P. 237–254.
18. *Zalcman L.* Mean values and differential equations // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 339–352.
19. *Berenstein C. A., Gay R.* A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.
20. *Harchaoui M.* Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques reel et complete (Cas de deux boules) // J. Analyse Math. 1995. V. 67. P. 1–37.
21. *Cohen J. M., Picardello M. A.* The 2-circle and 2-disk problems on trees // Israel J. Math. 1988. V. 64. P. 73–86.
22. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
23. *Quinto E. T.* Radon transforms on curves in the plane // Lecture Notes in Applied Math. 1994. V. 30. P. 231–244.
24. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции теории представлений групп. 2-е изд. М.: Наука, 1991.
25. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Донецкий государственный университет

Поступило в редакцию
1.X.1997