Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Бабенко, С. А. Богатый, О группе подстановок формальных целочисленных рядов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 2, 39–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:06:56

УДК 512.546.12+515.145.23

И. К. Бабенко, С. А. Богатый

О группе подстановок формальных целочисленных рядов

Изучаются некоторые свойства группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ подстановок формальных степенных рядов от одной переменной с целыми коэффициентами. Показано, что $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ как топологическая группа имеет четыре образующих и не может быть порождена меньшим количеством элементов. В частности, показано, что одномерные непрерывные гомологии группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ изоморфны $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Изучены различные топологические и геометрические свойства пространства орбит $\mathcal{J}(\mathbb{R})/\mathcal{J}(\mathbb{Z})$. Вычислены вещественные когомологии $\tilde{H}^*(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$ с равномерно локально постоянными носителями и показано, что они естественно изоморфны когомологиям нильпотентной части алгебры Ли формальных векторных полей на прямой.

Библиография: 31 наименование.

§ 1. Введение и формулировка результатов

Рассмотрим некоторое кольцо $\mathbf{k}$ с единицей и множество $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ всевозможных формальных степенных рядов переменной x с коэффициентами из $\mathbf{k}$, имеющих вид

$$f(x) = x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \cdots = x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots), \quad \alpha_n \in \mathbf{k}. \quad (1.1)$$

Известно [1], что подстановка ряда в ряд с последующими раскрытием скобок и приведением подобных членов задает закон умножения $f \circ g = f(g(x))$ и превращает $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ в группу. Заметим, что группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ естественно действует справа на кольце формальных степенных рядов $\mathbf{k}[[x]]$: $h \cdot f = h \circ f = h(f(x))$, где $f(x) \in \mathcal{J}(\mathbf{k})$ и $h(x) \in \mathbf{k}[[x]]$. Заданное действие точно и $\mathbf{k}$ -линейно. С этой точки зрения $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ можно считать группой формальных диффеоморфизмов кольца $\mathbf{k}[[x]]$.

Интерес к группе $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ (для разных колец $\mathbf{k}$) возник достаточно давно. Не претендуя на точную историческую справку, можно сказать, что одно из первых исследований в данном направлении было проведено в работе [2], в которой даже рассматривался случай многих переменных. Первой работой, в которой были установлены общие алгебраические свойства группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, была, наверное, статья [1], которая остается актуальной и по сей день. За последующие почти 25 лет мы не можем указать каких-либо работ, так или иначе связанных с группами $\mathcal{J}(\mathbf{k})$. В 1978 г. в работе [3] была установлена неожиданная связь

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 07-01-0046а), работа второго – при частичной поддержке РФФИ (грант № 06-01-00764а).

группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ с алгеброй стабильных когомологических операций в комплексных кобордизмах. Собственно эта работа не изучает структуру группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$, но выявляет ее важную роль для алгебраической топологии.

С самого конца 80-х – начала 90-х годов прошлого века в изучении групп $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ наступил период большой активности. Практически все работы по этой тематике за последние 15 лет были, в действительности, посвящены изучению групп $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$, где p – простое. Это объясняется тесными связями групп $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$ с теорией чисел (с группами Галуа), с одной стороны, и с теорией проконечных групп – с другой. За эти годы свойства групп $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$ (для простых p) были достаточно хорошо изучены. В настоящий момент издано много работ, посвященных изучению групп $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$, и даже введен общий термин “ноттингемская (Nottingham) группа”, обозначающий группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$; см. [4]. Не имея возможности в рамках настоящей статьи сделать сколь-нибудь удовлетворительный обзор результатов, полученных для групп $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$, предлагаем интересующемуся читателю ознакомиться с работами [4]–[6], где он найдет другие многочисленные ссылки. Ниже мы упомянем лишь те результаты, касающиеся $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$, которые имеют непосредственное отношение к содержанию настоящей работы.

Если $\mathbf{k}$ – топологическое кольцо, то $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ наделяется естественной топологией прямого произведения, как $\mathbf{k}^{\mathbb{N}}$, что превращает $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ в топологическую группу. Наличие той или иной естественной топологии на $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ играет существенную роль во всех последних исследованиях этих групп. Если кольцо $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_p$ снабженно дискретной топологией, то $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$ становится компактной нульмерной топологической группой и, следовательно, обладает мерой Хаара. Естественная топология на $\mathbb{Z}$ также дискретна, но возникающая на $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ топология уже гораздо сложнее, чем в случае конечной характеристики. Группа на $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ также нульмерна, но не компактна и даже не локально компактна, поэтому к ней не применимы стандартные результаты о топологических группах (см., например, [7], [8]). Топологически группа $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ гомеоморфна множеству иррациональных чисел. Естественные топологии на $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ превращают $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ в бесконечномерную односвязную группу Ли. Эта группа представляет собой обратный предел евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$ со структурой алгебраических групп (см. [3]). Интересные примеры возникают, когда $\mathbf{k}$ – кольцо целых p -адических или, соответственно, поле p -адических чисел, но в рамках настоящей статьи мы эти примеры не рассматриваем.

В отличие от групп $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$ группа $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ изучена крайне мало. За исключением нескольких общих результатов, справедливых для любой группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ – кольцо нулевой характеристики (см. [1], [9]), авторам не известны никакие результаты, специально относящиеся к этой группе.

Говорят, что топологическая группа G порождена n элементами $a_1, \dots, a_n$, если эти элементы порождают подгруппу, плотную в G . Известно, что $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$ порождается двумя образующими для простых нечетных p и имеет три порождающих, если $p = 2$ (см. [5]). Эти образующие определены неоднозначно, и, как доказанно в [10], при почти любом (в смысле меры Хаара) выборе этих образующих они порождают свободную подгруппу в $\mathcal{J}(\mathbb{Z}_p)$. В группе $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ нет естественной меры, поэтому для измерения относительной массы подмножеств

в $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ мы используем понятие плотности, заимствованное нами из теории целых аналитических функций [11] (точные определения см. ниже). Выражение “почти любой элемент” будет далее означать, что плотность подмножества таких элементов равна единице. Сформулируем один из центральных результатов настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Группа $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ имеет четыре образующих как топологическая группа и не может быть задана меньшим числом образующих. Почти при любом выборе этих образующих они порождают свободную подгруппу ранга 4.*

Мы показываем, что в качестве образующих можно взять следующие четыре элемента:

$$\begin{aligned} f_1 &= x(1 + x + \mathcal{O}(x^2)), & f_2 &= x(1 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)), \\ f_4 &= x(1 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)), & f_6 &= x(1 + x^6 + \mathcal{O}(x^7)), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где остаточные члены $\mathcal{O}(x^k)$, $k = 2, 3, 5, 7$, могут быть выбраны произвольно, при этом почти любой выбор этих остаточных членов приводит к элементам f_1, f_2, f_4, f_6 , порождающим свободную подгруппу ранга 4.

Для доказательства минимальности системы (1.2) мы вычисляем одномерные непрерывные гомологии $H_1(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); \mathbb{Z})$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Имеет место изоморфизм*

$$H_1(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

С одной стороны, теорема 1.1 показывает, что группа $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ представляет собой топологическое замыкание сравнительно простой группы – свободной группы $\mathbf{F}_4$, с другой стороны, теорема 1.2 утверждает, что образованная таким образом алгебро-топологическая структура достаточно сложна. Эту сложность подчеркивает еще и то, что, хотя в $\mathbf{F}_4$ и нет никаких соотношений, в полученном замыкании их уже много (см. пример в [9]). Сложность группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ отражают еще и достаточно “большие” вещественные когомологии этой группы, которые мы вычисляем в § 4.

Поскольку $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ – топологическая группа, то когомологии существенным образом зависят от выбора коцепей (естественно, непрерывных). Здесь мы рассматриваем коцепи с равномерно локально постоянными носителями (точные определения даны ниже). Полученные когомологии, которые мы обозначаем $\tilde{H}^*(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$, перестановочны с функтором обратного предела и в этом смысле близки к когомологиям Александера–Чеха [12] для общих топологических пространств. Вычисление вещественных когомологий $\tilde{H}^*(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$ существенно опирается на изучение пространства смежных классов $K_\infty = \mathcal{J}(\mathbb{R})/\mathcal{J}(\mathbb{Z})$. Это пространство интересно и само по себе, его изучению посвящен § 3.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пространство K_∞ является компактным метрическим, топологически однородным пространством, обладающим следующими свойствами:*

а) *естественное отображение $p_\infty: \mathcal{J}(\mathbb{R}) \rightarrow K_\infty$ является главным расслоением Гуревича со свойством единственности накрывающего пути и обратным пределом накрытий, но не является накрытием;*

- б) компакт K_∞ есть пространство Эйленберга–Маклейна типа $(\mathcal{J}(\mathbb{Z}), 1)$;
- в) компакт K_∞ не является локально полуодносвязным, поэтому не имеет универсального накрытия и гомотопически не эквивалентен никакому CW-комплексу;
- г) на пространстве K_∞ имеется естественная борелевская вероятностная мера $\mathbf{m}$, инвариантная относительно левого действия $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ на K_∞ ;
- д) существует непрерывное отображение

$$P: (I^{\mathbb{N}}, \lambda^{\otimes \mathbb{N}}) \rightarrow (K_\infty, \mathbf{m}),$$

гильбертова куба $I^{\mathbb{N}}$ на K_∞ , являющееся изоморфизмом пространств с мерой, где $\lambda = dx$ – мера Лебега на единичном интервале $I = [0, 1]$ и $\lambda^{\otimes \mathbb{N}}$ – колмогоровская степень лебеговой меры λ .

Теорема 1.3 показывает, в частности, что K_∞ играет роль классифицирующего пространства группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$. Несмотря на свою крайне сложную локальную структуру это пространство очень близко к нильмногообразиям, ниже мы покажем, что K_∞ разлагается в обратный спектр нильмногообразий. При надлежащем выборе коомологий для этого пространства справедлива теорема типа теоремы Номидзу [13], связывающая вещественные коомологии некоторого нильмногообразия с коомологиями соответствующей нильпотентной алгебры Ли. Для коомологий группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ мы устанавливаем следующие результаты (ниже $\bar{H}^*(X; G)$ обозначают коомологии Александера–Чеха пространства X).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть G – равномерно локально постоянный $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ -модуль. Имеет место изоморфизм

$$\tilde{H}^*(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); G) \simeq \bar{H}^*(K_\infty; G).$$

ТЕОРЕМА 1.5. Имеет место изоморфизм вещественных коомологий

$$\tilde{H}^*(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); \mathbb{R}) \simeq H^*(W_1(1); \mathbb{R}),$$

где $W_1(1)$ – нильпотентная часть алгебры Витта.

Как следствие этих результатов и теоремы Гончаровой [14], мы получаем следующую информацию о вещественных коомологиях группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Для всех $k \geq 1$ имеет место изоморфизм

$$\tilde{H}^k(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Работа начата во время пребывания второго автора в университете Монпелье-2. Пользуясь случаем, хочу поблагодарить CNRS Франции за приглашение и университет Монпелье-2 за гостеприимство. Авторы также благодарят рецензента за полезные замечания и постановку интересной задачи для дальнейшего исследования.

§ 2. Образующие группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$

Основным содержанием настоящего параграфа являются доказательства теорем 1.1 и 1.2.

Множество всех элементов группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ таких, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \in \mathbf{k}$, образует подгруппу, которую мы будем обозначать через $\mathcal{J}_{n+1}(\mathbf{k})$. Для упрощения обозначений факторгруппу $\mathcal{J}(\mathbf{k})/\mathcal{J}_{n+1}(\mathbf{k})$ мы будем впредь обозначать через $\mathcal{J}^n(\mathbf{k})$. Доказательству теоремы 1.1 предположим следующее предложение, представляющее самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Отображение $\varphi: \mathcal{J}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, заданное формулой*

$$\begin{aligned} \varphi(x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \mathcal{O}(x^7))) \\ = \left(\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1^2, \alpha_4 + \alpha_3 + \frac{\alpha_2(\alpha_2 + 1)}{2} \mod 2, \alpha_6 + \alpha_4 \alpha_2 + \alpha_4 \mod 2 \right), \end{aligned}$$

является сюръективным гомоморфизмом групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что рассматриваемое отображение является суръекцией. Выбором числа α_1 мы можем получить для $\varphi(x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \mathcal{O}(x^7)))$ любое целое число на первом месте, выбором числа α_2 мы можем получить любое целое число на втором месте, выбором числа α_4 мы можем получить число любой четности на третьем месте, выбором числа α_6 мы можем получить число любой четности на четвертом месте.

Предложенное отображение корректно факторизуется через факторгруппу $\mathcal{J}^6(\mathbb{Z})$. Это индуцированное отображение группы $\mathcal{J}^6(\mathbb{Z})$ в группу $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ мы также будем обозначать через φ .

Чтобы проверить, что предъявленное отображение является гомоморфизмом группы $\mathcal{J}^6(\mathbb{Z})$, необходимо выписать элемент, являющийся произведением двух заданных элементов группы $\mathcal{J}^6(\mathbb{Z})$. Непосредственной подстановкой ряда $g = x(1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6 + \mathcal{O}(x^7))$ в ряд $f = x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \mathcal{O}(x^7))$ проверяется, что справедлива

ЛЕММА 2.2. *Произведением выписанных выше элементов группы $\mathcal{J}^6(\mathbb{Z})$ является элемент*

$$\begin{aligned} f \circ g = x[1 + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_2)x^2 \\ + (\alpha_3 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_1^2 + \beta_3)x^3 \\ + (\alpha_4 + 4\alpha_3\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_3 + 2\alpha_1\beta_2\beta_1 + \beta_4)x^4 \\ + (\alpha_5 + 5\alpha_4\beta_1 + 4\alpha_3\beta_2 + 6\alpha_3\beta_1^2 + 3\alpha_2\beta_3 + 6\alpha_2\beta_2\beta_1 + \alpha_2\beta_1^3 + 2\alpha_1\beta_4 \\ + 2\alpha_1\beta_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2^2 + \beta_5)x^5 + (\alpha_6 + 6\alpha_5\beta_1 + 5\alpha_4\beta_2 + 10\alpha_4\beta_1^2 \\ + 4\alpha_3\beta_3 + 12\alpha_3\beta_2\beta_1 + 4\alpha_3\beta_1^3 + 3\alpha_2\beta_4 + 6\alpha_2\beta_3\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2^2 + 3\alpha_2\beta_2\beta_1^2 \\ + 2\alpha_1\beta_5 + 2\alpha_1\beta_4\beta_1 + 2\alpha_1\beta_3\beta_2 + \beta_6)x^6 + \mathcal{O}(x^7)]. \end{aligned}$$

Теперь прямым вычислением проверяется, что отображение φ является гомоморфизмом. Предложение доказано.

Для элемента $f = x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots) \in \mathcal{J}(\mathbb{Z})$ через $\tilde{f}$ обозначим формальный ряд $1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$, который не лежит в группе $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ и который надо рассматривать как элемент кольца $\mathbb{Z}[[x]]$ всех формальных рядов переменной x с обычными операциями сложения и умножения формальных рядов. Следующее утверждение описывает первые два “нелинейных” члена произведения в группе $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $f = x(1 + \alpha_m x^m + \alpha_{m+k} x^{m+k} + \dots)$, $g = x(1 + \beta_n x^n + \beta_{n+l} x^{n+l} + \dots)$. Тогда

$$f \circ g = x[\tilde{f} + \tilde{g} - 1 + \gamma_{m+n} x^{m+n} + \gamma_{m+n+s} x^{m+n+s} + \mathcal{O}(x^{m+n+s+1})],$$

где $\gamma_{m+n} = (m+1)\alpha_m \beta_n$, $s = \min\{k, l, n\}$, $\gamma_{m+n+s} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ и

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \begin{cases} (m+k+1)\alpha_{m+k}\beta_n & \text{при } s = k, \\ 0 & \text{при } s \neq k, \end{cases} \\ \delta_2 &= \begin{cases} (m+1)\alpha_m \beta_{n+l} & \text{при } s = l, \\ 0 & \text{при } s \neq l, \end{cases} \\ \delta_3 &= \begin{cases} C_{m+1}^2 \alpha_m \beta_n^2 & \text{при } s = n, \\ 0 & \text{при } s \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственной подстановкой ряда $g = x(1 + \beta_n x^n + \beta_{n+l} x^{n+l} + \dots)$ в ряд $f = x(1 + \alpha_m x^m + \alpha_{m+k} x^{m+k} + \dots)$ получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} f \circ g &= x(1 + \beta_n x^n + \beta_{n+l} x^{n+l} + \dots)[1 + \alpha_m x^m (1 + \beta_n x^n + \beta_{n+l} x^{n+l} + \dots)^m \\ &\quad + \alpha_{m+k} x^{m+k} (1 + \beta_n x^n + \beta_{n+l} x^{n+l} + \dots)^{m+k} + \dots] \\ &= x(1 + \beta_n x^n + \beta_{n+l} x^{n+l} + \dots) \\ &\quad \times (1 + \alpha_m x^m + \alpha_{m+k} x^{m+k} + \dots + m\alpha_m \beta_n x^{m+n} + m\alpha_m \beta_{n+l} x^{m+n+l} \\ &\quad + C_m^2 \alpha_m \beta_n^2 x^{m+2n} + (m+k)\alpha_{m+k} \beta_n x^{m+n+k} + \dots) \\ &= x(1 + \alpha_m x^m + \alpha_{m+k} x^{m+k} + \dots + m\alpha_m \beta_n x^{m+n} + m\alpha_m \beta_{n+l} x^{m+n+l} \\ &\quad + C_m^2 \alpha_m \beta_n^2 x^{m+2n} + (m+k)\alpha_{m+k} \beta_n x^{m+n+k} + \beta_n x^n \\ &\quad + \beta_{n+l} x^{n+l} + \dots + \alpha_m \beta_n x^{m+n} + \alpha_m \beta_{n+l} x^{m+n+l} \\ &\quad + \alpha_{m+k} \beta_n x^{m+n+k} + m\alpha_m \beta_n^2 x^{m+2n} + \dots). \end{aligned}$$

Приведение подобных членов в последнем выражении дает искомую формулу. Предложение доказано.

Для определения первых двух ненулевых коэффициентов коммутатора двух элементов группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ полезна следующая формула, первоначально полученная в малодоступной диссертации Йорка и воспроизведенная в [15, лемма 2.1]. Эту формулу можно получить с помощью предложения 2.3 при рассмотрении “разности” произведений $f \circ g$ и $g \circ f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $f = x(1 + \alpha_m x^m + \alpha_{m+k} x^{m+k} + \mathcal{O}(x^{m+k+1}))$, $g = x(1 + \beta_n x^n + \beta_{n+l} x^{n+l} + \mathcal{O}(x^{n+l+1}))$. Тогда

$$[f, g] = x[1 + \gamma_{m+n} x^{m+n} + \gamma_{m+n+s} x^{m+n+s} + \mathcal{O}(x^{m+n+s+1})],$$

где $\gamma_{m+n} = (m-n)\alpha_m \beta_n$, $s = \min\{k, l, n, m\}$, $\gamma_{m+n+s} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$ и

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \begin{cases} (m+k-n)\alpha_{m+k}\beta_n & \text{при } s = k, \\ 0 & \text{при } s \neq k, \end{cases} \\ \delta_2 &= \begin{cases} -(n+l-m)\alpha_m\beta_{n+l} & \text{при } s = l, \\ 0 & \text{при } s \neq l, \end{cases} \\ \delta_3 &= \begin{cases} (C_{m+1}^2 - (n+1)(m-n))\alpha_m\beta_n^2 & \text{при } s = n, \\ 0 & \text{при } s \neq n, \end{cases} \\ \delta_4 &= \begin{cases} -(C_{n+1}^2 - (m+1)(n-m))\alpha_m^2\beta_n & \text{при } s = m, \\ 0 & \text{при } s \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Элементы $f_1 = x(1+x+\mathcal{O}(x^2))$, $f_2 = x(1+x^2+\mathcal{O}(x^3))$, $f_4 = x(1+x^4+\mathcal{O}(x^5))$, $f_6 = x(1+x^6+\mathcal{O}(x^7)) \in \mathcal{J}(\mathbb{Z})$ топологически порождают группу $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ при любом выборе остаточных членов в $\mathcal{O}(x^k)$, $k = 2, 3, 5, 7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любого натурального n образы элементов f_1, f_2, f_4, f_6 в группе $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$ порождают эту группу. Впредь элемент группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ и его образ в группе $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$ мы будем обозначать одинаковым символом. Применение предложения 2.4 показывает, что

$$[f_2, f_1] = x(1 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)). \quad (2.1)$$

Пусть элемент $[f_2, f_1]$ имеет коэффициент при x^5 , равный γ . Тогда с помощью леммы 2.2 легко находим, что

$$f_3 = [f_2, f_1] \circ f_4^{-\gamma} = x(1 + x^3 + \mathcal{O}(x^5)). \quad (2.2)$$

Теперь с помощью элемента f_2 мы можем получить из элемента f_1 новый элемент, который будет иметь вид $x(1 + x + \mathcal{O}(x^3))$. Далее из полученного элемента с помощью f_3 и f_4 мы получим элемент вида $x(1 + x + \mathcal{O}(x^5))$. Аналогично, из элемента f_2 с помощью f_3 и f_4 мы можем получить новый элемент, который будет иметь вид $x(1 + x^2 + \mathcal{O}(x^5))$. Следовательно, образы элементов f_1, f_2, f_4 в группе $\mathcal{J}^4(\mathbb{Z})$ порождают эту группу.

Применяя далее предложение 2.4, получаем равенство

$$f_5 = [f_3, f_2] = x(1 + x^5 + \mathcal{O}(x^6)). \quad (2.3)$$

Повторив описанную выше процедуру, мы можем далее без ограничения общности считать, что $f_1 = x(1 + x + \mathcal{O}(x^7))$, $f_2 = x(1 + x^2 + \mathcal{O}(x^7))$, $f_3 = x(1 + x^3 + \mathcal{O}(x^7))$, $f_4 = x(1 + x^4 + \mathcal{O}(x^7))$, $f_5 = x(1 + x^5 + \mathcal{O}(x^7))$,

$f_6 = x(1 + x^6 + \mathcal{O}(x^7))$. Таким образом, элементы f_1, f_2, f_4, f_6 порождают группу $\mathcal{J}^6(\mathbb{Z})$.

Предложение 2.4 позволяет вычислить следующие коммутаторы:

$$\begin{aligned} f_7 &= [f_4, f_3] = x(1 + x^7 + \mathcal{O}(x^{10})), \\ [f_6, f_1] &= x(1 + 5x^7 + 11x^8 + \mathcal{O}(x^9)), \\ [f_5, f_3] &= x(1 + 2x^8 + \mathcal{O}(x^{11})), \end{aligned}$$

где мы считаем, что элемент f_6 “подправлен” с помощью f_7 так, что он имеет вид $x(1 + x^6 + \mathcal{O}(x^8))$. Таким образом возникает элемент (вид которого находится применением леммы 2.2)

$$f_8 = [f_6, f_1] \circ f_7^{-5} \circ [f_5, f_3]^{-5} = x(1 + x^8 + \mathcal{O}(x^9)),$$

и мы видим, что наши элементы порождают группу $\mathcal{J}^8(\mathbb{Z})$.

Далее рассуждаем по индукции. Предположим уже доказанным, что образы элементов f_1, f_2, f_4, f_6 порождают группу $\mathcal{J}^{4k}(\mathbb{Z})$, $k \geq 2$. Покажем, что соответствующие образы этих элементов порождают и группу $\mathcal{J}^{4k+4}(\mathbb{Z})$.

Для $-1 \leq i \leq 3$ рассмотрим элементы

$$f_{2k+i} = x(1 + x^{2k+i} + \mathcal{O}(x^{4k+1})),$$

которые согласно предположению выражаются через f_1, f_2, f_4, f_6 . Тогда при $k \geq 2$ через f_1, f_2, f_4, f_6 выражается и элемент

$$f_{4k+1} = [f_{2k+1}, f_{2k}] = x(1 + x^{4k+1} + \mathcal{O}(x^{6k+1})).$$

Рассмотрим некоторый элемент

$$f_{4k-2} = x(1 + x^{4k-2} + \mathcal{O}(x^{4k+1})),$$

который выражается через f_1, f_2, f_4, f_6 . Вычисляя с помощью предложения 2.4 коммутаторы, находим

$$\begin{aligned} [f_{4k-2}, f_2] &= x(1 + (4k-4)x^{4k} + (8k^2 - 18k + 13)x^{4k+2} + \mathcal{O}(x^{4k+3})), \\ [f_{2k+1}, f_{2k-1}] &= x(1 + 2x^{4k} + \mathcal{O}(x^{6k-1})), \\ [f_{2k+2}, f_{2k}] &= x(1 + 2x^{4k+2} + \mathcal{O}(x^{6k+2})). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно получаем

$$\begin{aligned} [f_{4k-2}, f_2] \circ [f_{2k+1}, f_{2k-1}]^{2-2k} \circ [f_{2k+2}, f_{2k}]^{-4k^2+9k-6} \\ = x(1 + x^{4k+2} + \mathcal{O}(x^{4k+3})). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Кроме того, рассмотрим элемент

$$f_{4k+3} = [f_{2k+2}, f_{2k+1}] = x(1 + x^{4k+3} + \mathcal{O}(x^{6k+2})). \quad (2.5)$$

Равенства (2.4), (2.5) позволяют получить элемент, выражающийся через f_1, f_2, f_4, f_6 и имеющий вид

$$f_{4k+2} = x(1 + x^{4k+2} + \mathcal{O}(x^{4k+4})).$$

Дальнейшее применение предложения 2.4 дает

$$\begin{aligned} [f_{2k+3}, f_{2k+1}] &= x(1 + 2x^{4k+4} + \mathcal{O}(x^{6k+2})), \\ [f_{4k+2}, f_1] &= x(1 + (4k+1)x^{4k+3} + (8k^2 + 2k + 1)x^{4k+4} + \mathcal{O}(x^{4k+5})). \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно находим выражающийся через f_1, f_2, f_4, f_6 элемент

$$\begin{aligned} f_{4k+4} &= [f_{4k+2}, f_1] \circ [f_{2k+1}, f_{2k+2}]^{4k+1} \circ [f_{2k+1}, f_{2k+3}]^{4k^2+k} \\ &= x(1 + x^{4k+4} + \mathcal{O}(x^{4k+5})). \end{aligned}$$

Это завершает индукцию и доказательство.

Поскольку в пространстве $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ нет естественной меры, то, чтобы говорить о массивности множеств, нам понадобятся следующие определения, навеянные соответствующими понятиями из теории целых аналитических функций [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть M – бесконечное нигде не плотное множество в $\mathbb{R}^n$. Назовем *плотностью порядка τ* (где τ , возможно, вещественное число) множества M следующую величину:

$$p_\tau(M) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\#(M \cap B_\infty(t))}{t^\tau},$$

если эта величина положительна и конечна. Здесь $B_\infty(t)$ – шар радиусом t в l_∞ -норме на $\mathbb{R}^n$, а $\#(X)$ – мощность множества X .

Обозначим через π_n естественную проекцию, $\pi_n: \mathbb{Z}^\infty \rightarrow \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть M – подмножество в $\mathbb{Z}^\infty$. Назовем *плотностью коразмерности k* множества M величину

$$p^k(M) = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_{n-k}(\pi_n(M)).$$

Наконец, пусть $N \subset (\mathcal{J}(\mathbb{Z}))^s \simeq (\mathbb{Z}^\infty)^s$ – аффинное подмножество коразмерности k и $M \subset N$ – подмножество. Скажем, что *почти любой элемент N содержится в M* , если $p^k(M) = 1$.

Произведение четырех экземпляров $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ мы отождествляем с $\mathbb{Z}^\infty$ естественным образом. В предложении 2.5 образующие f_1, f_2, f_4, f_6 определены неоднозначно, они остаются (топологическими) образующими при любом выборе коэффициентов при высших членах. Пусть $N \subset (\mathcal{J}(\mathbb{Z}))^4$ – множество всех таких четверок элементов f_1, f_2, f_4, f_6 группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$. Подмножество $M \subset N$ состоит из всех четверок элементов, порождающих свободную группу ранга 4. Заметим, что общее число фиксированных коэффициентов у элементов множества N равно 13, т. е. N является аффинной подрешеткой коразмерности 13.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Имеет место $p^{13}(M) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение проекции $\pi_n: \mathcal{J}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$ на каждом сомножителе определяет проекцию $(\pi_n)^4: (\mathcal{J}(\mathbb{Z}))^4 \rightarrow (\mathcal{J}^n(\mathbb{Z}))^4 \simeq \mathbb{Z}^{4n}$. Прежде всего покажем, что $(\pi_n)^4(N) = (\pi_n)^4(M)$. Рассмотрим естественные проекции $\chi: \mathcal{J}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{Z}_3)$ и $\chi_n: \mathcal{J}^n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{J}^n(\mathbb{Z}_3)$. Легко посчитать, что мера Хаара множества $\chi(N)$ равна 3^{-13} . Согласно [10, теорема 1] мера Хаара подмножества $K \subset (\mathcal{J}(\mathbb{Z}_3))^4$ всех четверок, порождающих свободную подгруппу, равна 1. Таким образом, $\mu(K \cap \chi(N)) = \mu(\chi(N)) > 0$. Поэтому $\mu(\pi_n(K \cap \chi(N))) = \mu(\pi_n(\chi(N))) > 0$. Отсюда следует, что

$$\pi_n(K \cap \chi(N)) = \pi_n(\chi(N)). \quad (2.6)$$

Если образ группы с четырьмя образующими является свободной группой ранга четыре, то и сама группа свободна. Это влечет включение

$$M \supset \chi^{-1}(K \cap \chi(N)). \quad (2.7)$$

Поскольку проекция коммутирует с оператором приведения по простому модулю, то из (2.6) и (2.7) имеем

$$\pi_n(M) \supset \pi_n(\chi^{-1}(K \cap \chi(N))) = \chi^{-1}(\chi(\pi_n(N))) \supset \pi_n(N).$$

Определение множества N вместе с последним включением дает равенство

$$\pi_n(M) = \pi_n(N).$$

Переходя к плотностям немедленно получаем требуемый результат. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Предложение 2.5 указывает четыре элемента, которые топологически порождают группу. Предложение 2.1 предъявляет гомоморфизм рассматриваемой группы на группу с четырьмя образующими, поэтому группа $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ не может быть задана меньшим числом образующих. Последнее утверждение непосредственно вытекает из предложения 2.8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Для элемента $f = x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \mathcal{O}(x^7)) \in \mathcal{J}(\mathbb{Z})$ следующие условия эквивалентны:*

1) *имеют место равенства*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_3 \equiv \alpha_4 \equiv \alpha_6 \pmod{2}; \quad (2.8)$$

2) *элемент f лежит в ядре $\text{Ker}(\varphi)$ гомоморфизма φ ;*

3) *элемент f лежит в коммутаторе $[\mathcal{J}(\mathbb{Z}), \mathcal{J}(\mathbb{Z})]$ группы, т. е. является пределом конечного произведения коммутаторов элементов группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\iff$ 2). Гомоморфизм φ предложения 2.1 задан явными формулами, поэтому равносильность этих условий легко проверяется непосредственно.

3) $\implies$ 2). Поскольку гомоморфизм φ факторизуется через факторгруппу $\mathcal{J}^6(\mathbb{Z})$, то он является непрерывным. При этом образом гомоморфизма φ является абелева группа, поэтому коммутатор $[\mathcal{J}(\mathbb{Z}), \mathcal{J}(\mathbb{Z})]$ содержится в ядре гомоморфизма φ .

1), 2) $\implies$ 3). Рассмотрим такой элемент $f = x(1 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \mathcal{O}(x^7)) \in \mathcal{J}(\mathbb{Z})$, что $\alpha_3 \equiv \alpha_4 \equiv \alpha_6 \pmod{2}$, и элемент $[f_2, f_1] = x(1 + x^3 + \mathcal{O}(x^4))$ из (2.1). Тогда, пользуясь леммой 2.2, несложно получить, что $g = f \circ [f_2, f_1]^{-\alpha_3} = x(1 + \beta_4 x^4 + \mathcal{O}(x^5))$ для некоторого целого числа β_4 . Ядро $\text{Ker}(\varphi)$ является подгруппой, поэтому $g = f \circ [f_2, f_1]^{-\alpha_3} \in \text{Ker}(\varphi)$. Следовательно, согласно уже доказанной равносильности условий 1) и 2) число β_4 является четным. Тогда корректно определен элемент $[f_3, f_1]^{-\frac{\beta_4}{2}}$, где f_3 – элемент из (2.2) и $[f_3, f_1] = x(1 + 2x^4 + \mathcal{O}(x^5))$ согласно предложению 2.4. Пользуясь леммой 2.2, теперь несложно получить, что $g \circ [f_3, f_1]^{-\frac{\beta_4}{2}} = x(1 + \beta_5 x^5 + \mathcal{O}(x^6))$. Повторное применение леммы 2.2 позволяет вычислить элемент

$$h = g \circ [f_3, f_1]^{-\frac{\beta_4}{2}} \circ [f_3, f_2]^{-\beta_5} = x(1 + \beta_6 x^6 + \mathcal{O}(x^7)),$$

где $[f_3, f_2] = x(1 + x^5 + \mathcal{O}(x^6))$ из (2.3). Элемент h лежит в ядре $\text{Ker}(\varphi)$, поэтому согласно условию (2.8) число β_6 четно.

Теперь рассмотрим элемент $[f_4, f_2] = x(1 + 2x^6 + \mathcal{O}(x^7))$, где f_4 – произвольный элемент вида $f_4 = x(1 + x^4 + \mathcal{O}(x^5))$. Тогда, пользуясь леммой 2.2, получаем

$$f \circ [f_2, f_1]^{-\alpha_3} \circ [f_3, f_1]^{-\frac{\beta_4}{2}} \circ [f_3, f_2]^{-\beta_5} \circ [f_4, f_2]^{-\frac{\beta_6}{2}} = x(1 + \mathcal{O}(x^7)) \in \mathcal{J}_7(\mathbb{Z}).$$

Непосредственно из доказательства предложения 2.5 вытекает, что имеет место включение $\mathcal{J}_7(\mathbb{Z}) \subset [\mathcal{J}(\mathbb{Z}), \mathcal{J}(\mathbb{Z})]$; это завершает доказательство предложения.

Из предложения 2.9 вытекает теорема 1.2.

§ 3. Пространство смежных классов $K_\infty = \mathcal{J}(\mathbb{R})/\mathcal{J}(\mathbb{Z})$

Группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, является бесконечномерной аналитической группой Ли (необходимые определения можно найти, например, в [16]). Модельным пространством для $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ служит локально выпуклое топологическое пространство $\mathbf{k}^\infty$ с топологией обратного предела (произведения Тихонова). Алгеброй Ли группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ является хорошо известная алгебра $W_1(1)$ – нильпотентная часть алгебры Витта формальных векторных полей на прямой. Эта алгебра также рассматривается как топологическая с топологией обратного предела, в качестве модельного пространства берется то же самое пространство $\mathbf{k}^\infty$. Напомним, что $W_1(1)$ имеет естественный базис $e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}$, $i = 1, 2, \dots$, и каждый элемент $W_1(1)$ представляется как сходящийся (в топологии обратного предела) ряд

$$h = \left(\sum_{i \geq 1} \mu_i x^{i+1} \right) \frac{d}{dx}, \quad \mu_i \in \mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Экспоненциальное отображение $\exp: W_1(1) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{k})$ является $\mathbf{k}$ -аналитическим диффеоморфизмом и может быть задано простой формулой

$$\exp(h) = e^h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k(x)}{k!}. \quad (3.2)$$

Здесь $h^k(x)$ – k -я итерация дифференциального оператора h , примененная к функции x . Формулу (3.2) часто понимают как формальную формулу [1], т. е. как соотношение между формальными рядами. Однако легко видеть, что отображение (3.2) – это $\mathbf{k}$ -аналитическое отображение между двумя пространствами $\mathbf{k}^\infty$. В рассматриваемой конкретной ситуации группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ бесконечномерная аналитичность имеет простое “классическое” проявление. Если h задано (3.1) и

$$\exp(h) = x \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x^i \right), \quad \alpha_i \in \mathbf{k},$$

то $\alpha_i = \Phi(\mu_1, \dots, \mu_i)$ – универсальный полином степени i . Алгебра Ли $W_1(1)$ – бесконечномерная нильпотентная алгебра Ли, а $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ – соответствующая ей бесконечномерная нильпотентная группа Ли. Набор чисел $(\mu_1, \mu_2, \dots)$ является бесконечномерным аналогом мальцевских координат 1-го рода [17] на нильпотентных группах.

Еще одной полезной структурой, которой обладают группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ для любого кольца $\mathbf{k}$, является гомотетия. Для произвольного элемента $t \in \mathbf{k}$ определим отображение $\delta_t: \mathcal{J}(\mathbf{k}) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{k})$, задав его формальной формулой

$$\delta_t(f(x)) = \frac{1}{t} f(tx), \quad f(x) \in \mathcal{J}(\mathbf{k}).$$

Заметим, что деление на t в этой формуле фиктивно, поэтому δ_t определено для всех t включая и нуль.

Легко видеть, что при любом t гомотетия δ_t – групповой гомоморфизм. Кроме того, δ_t мультипликативен по t , т. е. $\delta_{t_1 t_2} = \delta_{t_1} \circ \delta_{t_2}$. Отсюда следует, что если t обратим в $\mathbf{k}$, то δ_t – изоморфизм. В случаях $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ гомотетия имеет прозрачный геометрический смысл. Так, например, $\delta_t(\mathcal{J}(\mathbf{k}))$, $0 \leq t \leq 1$, где $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, осуществляет топологическое стягивание $\mathcal{J}(\mathbf{k})$.

Рассмотрим теперь случай $\mathbf{k} = \mathbb{R}$. Изучаемая нами группа $\mathcal{J}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{J}(\mathbb{R})$ имеет достаточно простую топологическую структуру. Эта группа нульмерна, сепарабельна, полна и не локально компактна, поэтому согласно теореме Александрова–Урысона [18] она как пространство гомеоморфна пространству иррациональных чисел, т. е. бэровскому пространству $\mathbb{Z}^\infty$. Группа $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ действует (правыми сдвигами) на пространстве $\mathcal{J}(\mathbb{R})$. Это действие свободно, но не является вполне разрывным. Таким образом, к факторпространству (пространству орбит) $K_\infty = \mathcal{J}(\mathbb{R})/\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ не применимы известные общие теоремы (см. [8]). Наша ближайшая цель – показать, что пространство K_∞ , имея очень сложную локальную природу, сохраняет, тем не менее, многие свойства конечномерных нильмногообразий, хотя отображение проекции

$$p_\infty: \mathcal{J}(\mathbb{R}) \rightarrow K_\infty \quad (3.3)$$

и не является накрытием. Как мы увидим, пространство K_∞ вообще не имеет универсального накрытия. Тем не менее, по своим гомотопическим свойствам отображение (3.3) очень близко к накрытию, в частности, справедлива теорема о поднятии пути.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1.3, рассмотрим последовательность конечномерных нильпотентных групп Ли $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$. Подгруппы $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$ являются в них равномерными решетками, а соответствующие факторпространства $K_n = \mathcal{J}^n(\mathbb{R})/\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$ представляют собой нильмногообразия. Каждая группа $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$, имеет каноническое матричное представление в группе нижнетреугольных $((n+1) \times (n+1))$ -матриц (см. [3]). Заметим, что группа $\mathcal{J}^3(\mathbb{R})$ изоморфна классической группе Гейзенберга верхнетреугольных (3×3) -матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а $\mathcal{J}^3(\mathbb{Z})$ при этом изоморфизме переходит в стандартную решетку целочисленных матриц.

Рассмотрим коммутативную диаграмму групп Ли и соответствующих нильмногообразий

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{J}^3(\mathbb{R}) & \xleftarrow{h_3^4} & \dots & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{J}^{n-1}(\mathbb{R}) & \xleftarrow{h_{n-1}^n} & \mathcal{J}^n(\mathbb{R}) & \xleftarrow{h_n^{n+1}} & \dots & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{J}(\mathbb{R}) \\ p_3 \downarrow & & & & p_{n-1} \downarrow & & p_n \downarrow & & & & p_\infty \downarrow \\ K_3 & \xleftarrow{q_3^4} & \dots & \xleftarrow{\quad} & K_{n-1} & \xleftarrow{q_{n-1}^n} & K_n & \xleftarrow{q_n^{n+1}} & \dots & \xleftarrow{\quad} & K_\infty \end{array} \quad (3.4)$$

Заметим, что гомотетия δ_t , определенная выше, естественно определена и на всех группах $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$. Она является групповым гомоморфизмом, коммутирующим со всеми проекциями h_n^{n+1} . Если t меняется на отрезке $[0, 1]$, то δ_t также осуществляет топологическое стягивание $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Определим непрерывное отображение гильбертова куба на K_∞ . С этой целью рассмотрим подмножество

$$I^\mathbb{N} = \{x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots) : 0 \leq \alpha_i \leq 1\} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}).$$

Как счетное произведение интервалов оно гомеоморфно гильбертову кубу Q . Очевидно, что любой элемент $x(1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots) \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ правым сдвигом на подходящий элемент из $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ можно перевести в $I^\mathbb{N}$. Таким образом, $p_\infty : I^\mathbb{N} \rightarrow K_\infty$ является суръекцией. Отсюда вытекает, что K_∞ – это метризуемый компакт.

Установим сначала гомеоморфизм

$$K_\infty = \varprojlim_n K_n. \quad (3.5)$$

Естественное отображение

$$q : K_\infty \longrightarrow K = \varprojlim_n K_n \quad (3.6)$$

корректно определено для любой обратной последовательности главных накрытий и является инъективным. Проверим инъективность отображения q . Предположим, что для двух элементов $y = \{y_i\}_{i=3}^\infty \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ и $y' = \{y'_i\}_{i=3}^\infty \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ имеет место равенство $q(p_\infty(y)) = q(p_\infty(y'))$. Поскольку $p_n(y'_n) = p_n(y_n)$, $n = 3, 4, \dots$, то однозначно определены элементы $g_n \in \mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$, $n = 3, 4, \dots$, такие, что $y'_n = y_n g_n$, $n = 3, 4, \dots$. Из (3.4) теперь имеем

$$y_{n-1} g_{n-1} = y'_{n-1} = h_{n-1}^n(y'_n) = h_{n-1}^n(y_n g_n) = y_{n-1} h_{n-1}^n(g_n).$$

Поскольку все группы $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$, $n = 3, 4, \dots$, действуют свободно, то последнее равенство влечет $g_{n-1} = h_{n-1}^n(g_n)$, $n = 4, 5, \dots$. Таким образом, мы получаем элемент $g = \{g_i\}_{i=3}^\infty \in \mathcal{J}(\mathbb{Z})$ такой, что $y' = yg$, а это и означает равенство $p_\infty(y) = p_\infty(y')$.

Как показывает пример p -адического соленида и соответствующей последовательности накрытий, отображение q , вообще говоря, может и не быть сюръективным и может не быть гомеоморфизмом на свой образ. В нашем случае это будет вытекать из эпиморфности всех проекций h_{n-1}^n , ограниченных на группы $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$. Покажем, что в рассматриваемой ситуации отображение q является сюръективным. Пусть $x \in K$, $x = \{x_i\}_{i=3}^\infty$, $x_i \in K_i$. Возьмем $y_3 \in \mathcal{J}^3(\mathbb{R})$, $p_3(y_3) = x_3$ и выберем некоторый элемент $y_4 \in \mathcal{J}^4(\mathbb{R})$, $p_4(y_4) = x_4$. Если $h_3^4(y_4) = y_3$, то перейдем к выбору $y_5 \in \mathcal{J}^5(\mathbb{R})$, $p_5(y_5) = x_5$. Предположим, что $h_3^4(y_4) = y'_3 \neq y_3$; тогда существует $g_3 \in \mathcal{J}^3(\mathbb{Z})$, $y'_3 g_3 = y_3$. Выберем некоторый $g_4 \in \mathcal{J}^4(\mathbb{Z})$ такой, что $h_3^4(g_4) = g_3$, и положим $\bar{y}_4 = y_4 g_4$. С одной стороны, последнее равенство обеспечивает $p_4(\bar{y}_4) = p_4(y_4) = x_4$, а с другой стороны, $h_3^4(\bar{y}_4) = h_3^4(y_4 g_4) = y'_3 g_3 = y_3$. Таким образом, заменив взятый изначально y_4 на $\bar{y}_4$, мы можем переходить к выбору y_5 . Легко видеть, что, продолжая такой процесс выбора по индукции, мы найдем такой элемент $y = \{y_i\}_{i=3}^\infty \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$, что $q(p_\infty(y)) = x$. Таким образом мы показали, что отображение q является биекцией компакта K_∞ , поэтому является и гомеоморфизмом [19, теорема 3.1.13].

Существование естественных (геодезических) метрик на K_∞ будет показано в п. 3.2 (см. теорему 3.4). Однородность компакта K_∞ следует из того, что левое действие группы $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ на себе коммутирует с правым действием группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ и, следовательно, опускается на K_∞ .

а) Пусть X – пространство и заданы отображения $f: X \times \{0\} \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R})$ и $H: X \times [0, 1] \rightarrow K_\infty$ так, что $H|_{X \times \{0\}} = p_\infty \circ f$. Рассмотрим отображения

$$f_n = h_n \circ f: X \times \{0\} \rightarrow \mathcal{J}^n(\mathbb{R}), \quad H_n = q_n \circ H: X \times [0, 1] \rightarrow K_n.$$

Из равенства $p_n \circ h_n = q_n \circ p_\infty$ следует, что $H_n|_{X \times \{0\}} = f_n$. Но отображение p_n является накрытием (в частности, расслоением Гуревича со свойством единственности накрывающего пути), поэтому существует такое отображение $\tilde{H}_n: X \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}^n(\mathbb{R})$, что $f_n = \tilde{H}_n|_{X \times \{0\}}$. Из равенства $p_n \circ h_n^{n+1} = q_n^{n+1} \circ p_{n+1}$ следует, что отображения $\tilde{H}_n$ и $h_n^{n+1} \circ \tilde{H}_{n+1}$ являются поднятиями гомотопии H_n . Из единственности поднятия гомотопии для накрытий вытекает равенство $\tilde{H}_n = h_n^{n+1} \circ \tilde{H}_{n+1}$. Последнее равенство означает, что набор отображений $\{\tilde{H}_n\}_{n=3}^\infty: X \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}^n(\mathbb{R})$ корректно задает отображение $\tilde{H}: X \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R})$. Из справедливости равенств $h_n \circ \tilde{H}_n|_{X \times \{0\}} = h_n \circ f$ и $p_n \circ h_n \circ \tilde{H} = q_n \circ H$

следует, что $\tilde{H}_n|_{X \times \{0\}} = f$ и $p_\infty \circ \tilde{H} = H$, т.е. $\tilde{H}$ является искомым поднятием гомотопии H . Поскольку слой отображения p_∞ нульмерен, то он вполне несвязен [20], что влечет единственность этого поднятия.

б) Пусть $x \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ – единичный элемент и $p_\infty(x) = \hat{x} \in K_\infty$. Рассмотрим замкнутый путь $\hat{\gamma}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(1) = \hat{x}$, в K_∞ . Его поднятие $\gamma(t)$, $\gamma(0) = x$ (согласно п. а) оно существует), определяет элемент $a = \gamma(1) \in \mathcal{J}(\mathbb{Z})$. В силу нульмерности слоя $p_\infty^{-1}(\hat{x}) = \mathcal{J}(\mathbb{Z})$ элемент a не зависит от класса гомотопии пути $\hat{\gamma}$. Так как пространство $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ стягиваемо, то, таким образом, мы получаем взаимно однозначное суръективное отображение

$$\varphi: \pi_1(K_\infty) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{Z}).$$

Очевидно, что φ согласовано с групповой операцией и, следовательно, является изоморфизмом.

Докажем, что $\pi_n(K_\infty) = 0$ при $n \geq 2$.

Пусть $\hat{f}: S^n \rightarrow K_\infty$ – непрерывное отображение. Если S , N – соответственно южный и северный полюсы стандартной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то считаем $\hat{f}(S) = \hat{x}$. Рассматривая S^n как непрерывное семейство сфер, параллельных экватору, понимаем f как гомотопию сферы S^{n-1} , начинающуюся в $\hat{x}$ и заканчивающуюся в $\hat{f}(N) \in K_\infty$. Согласно а) мы можем поднять эту гомотопию:

$$f: S^{n-1} \times I \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R}),$$

причем $f(q, 0) = x$, $f(q, 1) \in p_\infty^{-1}(\hat{f}(N))$, $q \in S^{n-1}$. Поскольку слой $p_\infty^{-1}(\hat{f}(N))$ вполне несвязен, то $f(S^{n-1}, 1)$ состоит из одной точки, т.е. в действительности f является отображением сферы $f: S^n \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R})$, накрывающим $\hat{f}$. Стягиваемость $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ влечет необходимый результат.

в) Несправедливость локальной полуодносвязности, т.е. существование сколь угодно малых петель, нестягиваемых по всему пространству, вытекает из структуры обратного спектра (3.5). Это, в свою очередь, влечет не эквивалентность K_∞ никакому CW-комплексу.

Доказательства пп. г) и д) приводятся ниже, где строится мера на K_∞ .

3.1. Мера на K_∞ . Лебегову меру на прямой далее обозначаем $\lambda = dx$. Рассмотрев единичный интервал $I = [0, 1]$, снабженный мерой λ , и взяв ее колмогоровскую степень, мы получаем меру $\lambda^{\otimes \mathbb{N}}$ на гильбертовом кубе $I^{\mathbb{N}}$.

На пространстве K_∞ возникает естественная борелевская вероятностная мера, инвариантная относительно левого действия группы $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ на K_∞ . Сначала определим меру на K_n . С этой целью на группе $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$ в естественных координатах $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ положим

$$\mathbf{m}_n = d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge \dots \wedge d\alpha_n, \quad (3.7)$$

что задает обычную лебегову меру $\mathbf{m}_n = \lambda^{\otimes n}$ в этих координатах. Покажем, что эта мера биинвариантна на $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$. Действительно, пусть $f = x(1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) + \mathcal{O}(x^{n+2})$, $g = x(1 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n) + \mathcal{O}(x^{n+2})$ и $g \circ f = g(f(x)) =$

$x(1 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_n x^n) + \mathcal{O}(x^{n+2})$. Согласно [1] имеем

$$\gamma_r = \beta_r + \alpha_r + \sum_{s=1}^{r-1} \beta_s \Phi_{r,s}(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}), \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (3.8)$$

где $\Phi_{r,s}$ – полином от $(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$ взвешенной степени $r - s$ (последнее означает, что переменная α_i имеет степень i). Для правого сдвига на f координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ постоянны, поэтому из (3.8) имеем

$$d\gamma_r = d\beta_r + \sum_{s=1}^{r-1} \Phi_{r,s}(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}) d\beta_s, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

откуда для внешнего произведения получим

$$d\gamma_1 \wedge d\gamma_2 \wedge \dots \wedge d\gamma_n = d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge \dots \wedge d\beta_n.$$

Если рассматривается левый сдвиг на g , то постоянны координаты $\beta_1, \dots, \beta_n$ и

$$d\gamma_r = d\alpha_r + \sum_{j=1}^{r-1} \left(\sum_{s=1}^{r-1} \beta_s \frac{\partial \Phi_{r,s}(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})}{\partial \alpha_j} \right) d\alpha_j, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда немедленно получаем

$$d\gamma_1 \wedge d\gamma_2 \wedge \dots \wedge d\gamma_n = d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge \dots \wedge d\alpha_n.$$

Эти вычисления показывают бинвариантность формы объема $d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge \dots \wedge d\alpha_n$ и, следовательно, задаваемой ею меры $\mathbf{m}_n$.

Легко видеть, что последовательность пространств с мерой $\{\mathcal{J}^n(\mathbb{R}), m_n\}_{n=1}^{\infty}$ согласована в смысле [21] относительно естественных проекций $h_{n-1}^n: \mathcal{J}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{J}^{n-1}(\mathbb{R})$. Факторизуя по правому действию группы $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$, мы получим меру на K_n , которую обозначим также $\mathbf{m}_n$. Последовательность $\{K_n, \mathbf{m}_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространств с мерой согласована относительно проекций $q_{n-1}^n: K_n \rightarrow K_{n-1}$. Пусть $Q_n = I^n = \{f \in \mathcal{J}^n(\mathbb{R}): 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ – фундаментальная область для $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$. Очевидно, что $\mathbf{m}_n(Q_n) = 1$, т. е. $\mathbf{m}_n$ – вероятностная мера. Применяя аналог теоремы Колмогорова для обратных пределов [21], мы получаем требуемую вероятностную меру

$$\mathbf{m} = \varprojlim_n \mathbf{m}_n$$

на K_{∞} , что доказывает п. г) теоремы 1.3. Инвариантность предельной меры $\mathbf{m}$ относительно левого действия группы $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$ на K_{∞} вытекает из соответствующей инвариантности конечных факторов.

Как показано выше, $\mathbf{m}_n = \lambda^{\otimes n}$. Накрывающее отображение $p_n: \mathcal{J}^n(\mathbb{R}) \rightarrow K_n$, ограниченное на Q_n , дает, очевидно, метрический изоморфизм

$$p_n: (Q_n, \mathbf{m}_n) \rightarrow (K_n, \mathbf{m}_n).$$

Для окончания доказательства п. д) теоремы 1.3 достаточно перейти к обратному пределу в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & (Q_{n-1}, \lambda^{\otimes(n-1)}) & \xleftarrow{h_{n-1}^n} & (Q_n, \lambda^{\otimes n}) & \xleftarrow{h_n^{n+1}} & \cdots \longleftarrow (I^{\mathbb{N}}, \lambda^{\otimes \mathbb{N}}) \\
 & & \downarrow p_{n-1} & & \downarrow p_n & & \downarrow p \\
 \cdots & \longleftarrow & (K_{n-1}, \mathbf{m}_{n-1}) & \xleftarrow{q_{n-1}^n} & (K_n, \mathbf{m}_n) & \xleftarrow{q_n^{n+1}} & \cdots \longleftarrow (K_\infty, \mathbf{m})
 \end{array}$$

пространств с мерами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Форма объема типа (3.7), записанная в координатах первого или второго рода, на любой односвязной нильпотентной группе Ли всегда биинвариантна. Естественные координаты $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$ не являются координатами ни первого, ни второго рода, поэтому мы предпочли дать независимое доказательство.

3.2. Некоторые метрики на $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ и K_∞ . Наиболее естественной метрикой на $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ является следующая ультраметрика. Пусть

$$f(x) = x \left(1 + \sum_{k \geq 1} \alpha_k x^k \right), \quad g(x) = x \left(1 + \sum_{k \geq 1} \beta_k x^k \right)$$

– два элемента группы $\mathcal{J}(\mathbb{R})$. Положим

$$\varrho(f, g)^{-1} = \min_k \{\alpha_k \neq \beta_k\},$$

где мы естественно считаем, что если $\alpha_k = \beta_k$ для всех k , то последний минимум равен $+\infty$. Неравенство треугольника для этой метрики справедливо в более сильной форме:

$$\varrho(f, g) \leq \max\{\varrho(f, h), \varrho(h, g)\},$$

для любых $f, g, h \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$. Легко проверить, что ультраметрика ϱ биинвариантна:

$$\varrho(f \circ h, g \circ h) = \varrho(h \circ f, h \circ g) = \varrho(f, g),$$

и инвариантна относительно гомотетий:

$$\varrho(\delta_t \circ f, \delta_t \circ g) = \varrho(f, g), \quad t \neq 0.$$

К сожалению, топология, определяемая этой метрикой, более сильная, чем естественная на $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ топология обратного предела. Можно сказать, что эта топология соответствует дискретной топологии на поле $\mathbb{R}$. На пространстве K_∞ возникают более естественные метрики, которые, с одной стороны, согласованы с топологией K_∞ , а с другой – имеют гладкую природу, обусловленную тем, что члены обратного предела K_n – многообразия, а отображения проектирования

$$q_n^{n+1}: K_{n+1} \rightarrow K_n \tag{3.9}$$

являются гладкими расслоениями. Рассмотрим несколько простых конструкций и утверждений. Пусть

$$\{X_n, \varrho_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (3.10)$$

– последовательность метрических пространств и $q_n^{n+1}: X_{n+1} \rightarrow X_n$, $n = 1, 2, \dots$, – непрерывные отображения. Предположим, что все пространства имеют ограниченный диаметр

$$\text{diam}(X_n, \varrho_n) \leq d, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда на обратном пределе $X = \varprojlim_n X_n$ возникает естественная метрика

$$\varrho(a, b) = \sup_n \varrho_n(a_n, b_n), \quad a, b \in X,$$

где $a_n = q_n(a)$, $b_n = q_n(b)$, $q_n: X \rightarrow X_n$ – каноническая проекция. Метрика ϱ , вообще говоря, не согласована с топологией обратного предела, однако если каждое (X_n, ϱ_n) – полное пространство, то и (X, ϱ) полно.

Далее положим

$$d_n = \sup_{x \in X_{n-1}} \text{diam}(q_n^{n-1})^{-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Теперь рассмотрим последовательность метрических пространств (3.10) и предположим, что отображения $\{q_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ не увеличивают расстояние:

$$\varrho_n(q_n^{n+1}(x), q_n^{n+1}(y)) \leq \varrho_{n+1}(x, y), \quad x, y \in X_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим также, что для любой пары точек $x, y \in X_{n+1}$ всегда найдется пара точек $x', y' \in X_{n+1}$ таких, что

$$\begin{aligned} q_n^{n+1}(x) &= q_n^{n+1}(x'), & q_n^{n+1}(y) &= q_n^{n+1}(y'), \\ \varrho_n(q_n^{n+1}(x), q_n^{n+1}(y)) &= \varrho_{n+1}(x', y'), & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

ЛЕММА 3.2. *Если в сделанных выше предположениях ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ сходится, то топология на X , определенная метрикой ϱ , совпадает с топологией обратного предела.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $a \in X$, и пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем такое k , что $\sum_{n \geq k+1} d_n < \varepsilon/4$. Из условия (3.11) немедленно получаем

$$\varrho_{n+1}(x, y) \leq \varrho_n(q_n^{n+1}(x), q_n^{n+1}(y)) + 2d_n. \quad (3.12)$$

Если $b \in X$ таково, что $\varrho_k(q_k(b), q_k(a)) < \varepsilon/2$, то, итерируя (3.12), имеем

$$\varrho(a, b) \leq 2 \sum_{n \geq k+1} d_n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, ε -окрестность точки a содержит подмножество

$$\{b \in X, \varrho_k(q_k(b), q_k(a)) < \varepsilon/2\},$$

открытое в топологии X .

Обратно, пусть $O \subset X_k$ открыто, $U_O = \{b \in X, q_k(b) \in O\}$ и $a \in U_O$ – некоторая точка. Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что ε -окрестность точки $a_k = q_k(a)$ содержится в O . Тогда, очевидно, ε -окрестность точки a в X содержится в U_O .

Напомним, что метрика h на линейно связном пространстве Y называется *геодезической*, если для любой пары точек $x, y \in Y$ существует изометрическое отображение отрезка

$$\gamma: [0, L] \rightarrow Y, \quad L = h(x, y),$$

такое, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = y$. В этом случае кривую $\gamma(t)$ называют *геодезической*, или просто *кратчайшей*, соединяющей точки x и y .

Теперь предположим, что пространства $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ линейно связны, а метрики $\{\varrho_n\}_{n=1}^\infty$ являются геодезическими. Предположим, кроме того, что условие (3.11) выполнено не только в смысле расстояния, но и в смысле поднятия кратчайших. Последнее означает, что для любой пары точек $x, y \in X_{n+1}$ и любой кратчайшей $\gamma_n(t)$, соединяющей $q_n^{n+1}(x)$ и $q_n^{n+1}(y)$ в X_n , найдется пара точек $x', y' \in X_{n+1}$ и соединяющая их кратчайшая $\gamma_{n+1}(t)$ в X_{n+1} такие, что $q_n^{n+1}(\gamma_{n+1}(t)) = \gamma_n(t)$. Последнее равенство очевидно влечет (3.11).

ЛЕММА 3.3. *В сделанных выше предположениях метрика ϱ на X является геодезической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in X$ — две произвольные точки. Точки $a_n = q_n(a)$, $b_n = q_n(b)$ из X_n соединим некоторой кратчайшей $\gamma_n(t)$, $t \in [0, L_n]$, $L_n = \varrho_n(a_n, b_n)$. Согласно предположению существует накрывающая кратчайшая $\gamma_{n+1}(t)$ той же длины, причем $q_n^{n+1}(\gamma_{n+1}(0)) = a_n$, $q_n^{n+1}(\gamma_{n+1}(L_n)) = b_n$. Для $\gamma_{n+1}(t)$ существует накрывающая кратчайшая $\gamma_{n+2}(t)$. Итерируя эту конструкцию, мы получим кривую $\hat{\gamma}_n(t)$, $0 \leq t \leq L_n$, в X такую, что $q_n(\hat{\gamma}_n(t)) = \gamma_n(t)$. Рассмотрим семейство кривых $\{\hat{\gamma}_n(t)\}_{n=1}^\infty$. Очевидно, это семейство равномерно непрерывно, следовательно, из него можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\hat{\gamma}_{n_k}(t)\}_{k=1}^\infty$, и пусть

$$\Gamma(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_{n_k}(t).$$

Из доказательства леммы 3.2 легко заключаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_{n_k}(0) = a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_{n_k}(L_{n_k}) = b.$$

Обозначим через L длину кривой $\Gamma(t)$ в метрике ϱ . Из полунепрерывности снизу длины кривых заключаем, что

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} L_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho_{n_k}(q_{n_k}(a), q_{n_k}(b)) = \varrho(a, b).$$

Таким образом, любые две точки из X можно соединить геодезической. Лемма доказана.

Перейдем к построению конкретных метрик на K_∞ . Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n < \infty$. Обозначим через $\mathcal{L}_n$ алгебру Ли группы $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$, и пусть $e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}$, $i = 1, 2, \dots, n$, — ее канонический базис. Определим скалярное произведение в $\mathcal{L}_n$, полагая, что базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ ортогонален и $\|e_i\| = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$. Это скалярное произведение определяет правоинвариантную риманову метрику на $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$, которая опускается

на K_n . Соответствующее геодезическое расстояние на K_n обозначим через ϱ_n . Легко видеть, что проекции q_n^{n+1} из (3.8) не увеличивают расстояние. Кроме того, каждое отображение (3.9) есть главное S^1 -расслоение, и диаметр каждого слоя не превосходит $\alpha_n/2$.

Рассмотрим базис правоинвариантных 1-форм $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ на $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$, двойственный к базису $\{e_i\}_{i=1}^n$. Легко видеть, что ω_{n+1} — форма связности расслоения (3.9). Поднимая отрезок простой (несамопересекающейся) геодезической $\gamma(t) \subset K_n$, как кривую $\tilde{\gamma}(t) \subset K_{n+1}$ такую, что $\tilde{\gamma}'(t) \in \ker \omega_{n+1}$, мы получим необходимое геодезическое поднятие. Итак, последовательность метрических пространств $\{K_n, \varrho_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет всем условиям лемм 3.2 и 3.3. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3.4. *На пространстве K_∞ можно ввести геодезическую метрику, согласованную с топологией. При естественной проекции $K_\infty \rightarrow K_n$ эта метрика согласована с некоторой дифференциально-геометрической метрикой нильмногообразия K_n .*

§ 4. Вещественные когомологии группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$

В теории групп хорошо известно, что выбор подходящего модуля коэффициентов в гомологиях или когомологиях конечно порожденной группы позволяет наиболее полно отразить те или иные ее свойства. Для топологических групп наиболее подходящими будут когомологии, учитывающие еще и ее топологические свойства. Поскольку топология на группах $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ вводится как обратный предел топологий на группах $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$ и $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$ соответственно, то наиболее естественным является рассмотрение когомологий, которые перестановочны с взятием обратного предела, т.е. непрерывны. Когомологии с непрерывными носителями являются именно такими на категории компактных групп [22], [23]. Однако группы $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ не компактны, поэтому нам приходится немного видоизменить определение когомологий с непрерывными носителями и рассмотреть когомологии с равномерно постоянными носителями.

Пусть топологическая группа X равномерно локально постоянно действует справа и слева на топологическом $\mathbb{Z}$ -модуле G . Это означает, что имеются такие непрерывные отображения

$$G \times X \rightarrow G, \quad X \times G \rightarrow G,$$

являющиеся автоморфизмами G при фиксированном $x \in X$, что для некоторой окрестности $V \subset X$ единичного элемента $e \in X$ из $x_1^{-1}x_2 \in V$ следует $gx_1 = gx_2$ и $x_1g = x_2g$ для всех элементов $g \in G$.

Определим равномерно локально постоянные коцепи размерности p с коэффициентами в G как такие отображения $f: X^p \rightarrow G$, что существует окрестность U_f единицы $e \in X$ такая, что как только $x_1^{-1}y_1 \in U_f, \dots, x_p^{-1}y_p \in U_f$, так $f(x_1, \dots, x_p) = f(y_1, \dots, y_p)$. Во всех рассматриваемых нами случаях правое и левое действия будут тривиальны, т.е. для всех $x \in X$ и $g \in G$ имеют место равенства $gx = g = xg$, поэтому можно считать, что уже в определениях коцепей действие группы X отсутствует. На множестве $C^p(X; G)$ всех

равномерно локально постоянных коцепей размерности p с коэффициентами в G естественным образом определяется операция сложения:

$$(f_1 + f_2)(x_1, \dots, x_p) = f_1(x_1, \dots, x_p) + f_2(x_1, \dots, x_p),$$

превращающая $C(X^p; G)$ в абелеву группу.

Оператор кограницы $\delta: C^p(X; G) \rightarrow C^{p+1}(X; G)$ задается стандартной формулой

$$\begin{aligned} (\delta f)(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) &= x_1 f(x_2, \dots, x_{p+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^p (-1)^i f(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{p+1}) + (-1)^{p+1} f(x_1, \dots, x_p) x_{p+1}. \end{aligned}$$

Поскольку правое и левое действия группы G являются равномерно локально тривиальными, то непосредственно проверяется, что коцепь $\delta f: X^{p+1} \rightarrow G$ является равномерно локально постоянной. Равенство $\delta^2 = 0$ чисто алгебраическое и справедливо на множестве всех коцепей [24]–[26], [22], поэтому оно справедливо и на множестве всех равномерно локально постоянных коцепей. Это означает, что корректно определены когомологии, которые мы будем обозначать через $\tilde{H}^*(X; G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Легко видеть, что всякая равномерно локально тривиальная коцепь является непрерывной коцепью, поэтому определен естественный гомоморфизм $\tilde{H}^*(X; G) \rightarrow \bar{H}^*(X; G)$ в когомологии группы X с непрерывными коцепями. В случае, когда топология на группе X является дискретной, всякая коцепь является равномерно локально тривиальной, поэтому для всякой дискретной группы X , например группы $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$, введенные когомологии естественным образом изоморфны стандартным когомологиям абстрактной группы X .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В случае, когда топологическая группа X является компактной, а группа коэффициентов G является дискретной, всякая непрерывная коцепь является равномерно локально тривиальной. В указанном случае введенные когомологии естественным образом изоморфны непрерывным когомологиям группы X [22]. В этом смысле можно говорить, что введенные группы когомологий являются естественным обобщением непрерывных когомологий проконечных групп на случай общих нульмерных групп.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. p -мерные когомологии абстрактной группы X можно определять и с помощью однородных $(p+1)$ -мерных коцепей [24]–[26]. Аналогичным образом и группы $\tilde{H}^*(X; G)$ можно определять с помощью однородных $(p+1)$ -мерных равномерно локально постоянных коцепей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Если топологическая группа X является обратным пределом обратной последовательности групп $\{X_i, h_i^{i+1}\}$ с сюръективными гомоморфизмами $h_i^{i+1}: X_{i+1} \rightarrow X_i$, то

$$\tilde{H}^p(X; G) = \varprojlim_i \{ \tilde{H}^p(X_i; G), (h_i^{i+1})^* \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$X = \varprojlim_i \{X_i, h_i^{i+1}\},$$

то корректно определены гомоморфизмы $(h_i^{i+1})^*: \tilde{H}^p(X_i; G) \rightarrow \tilde{H}^p(X; G)$, которые порождают гомоморфизм

$$\theta: \varinjlim_i \{\tilde{H}^p(X_i; G), (h_i^{i+1})^*\} \rightarrow \tilde{H}^p(X; G).$$

Покажем, что θ является изоморфизмом. Для доказательства сюръективности θ покажем, что сюръективен гомоморфизм

$$\theta_c: \varinjlim_i \{C^p(X_i; G), (h_i^{i+1})^c\} \rightarrow C^p(X; G).$$

Пусть $f \in C^p(X; G)$, по определению существует такая окрестность U_f единичного элемента $e \in X$, что $f(x_1, \dots, x_p) = f(y_1, \dots, y_p)$, как только $x_1^{-1}y_1 \in U_f, \dots, x_p^{-1}y_p \in U_f$. Так как X является обратным пределом, то существуют такой номер n и такая окрестность V единичного элемента группы X_n , что $h_n^{-1}(V) \subset U_f$. Из полученного включения вытекает, что коцепь f факторизуется через X_n , т. е. $f = f_n \circ (h_n)^p$ для некоторой коцепи $f_n: X_n^p \rightarrow G$. Легко видеть, что при этом коцепь f_n является равномерно локально постоянной с “окрестностью постоянства” V . Отображение h_i является сюръективным, поэтому из тривиальности коцепи $f_i \circ (h_i)^p$ вытекает тривиальность коцепи f_i . Отсюда вытекает, что коцикл f ($\delta f = 0$) факторизуется через коцикл f_n . Аналогично, кограница f ($f = \delta g$) для некоторой коцепи $g \in C^{p-1}(X; G)$ факторизуется через кограницу f_n . Теперь инъективность и сюръективность гомоморфизма θ проверяется непосредственно.

В этом параграфе $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ рассматривается в своей естественной топологии. В качестве когомологий мы рассматриваем когомологии с равномерно локально постоянными носителями. Эти когомологии мы обозначили через $\tilde{H}^*(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); G)$, где G – топологический $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ -модуль коэффициентов, а $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ действует равномерно локально постоянно. Для произвольного топологического пространства X мы пользуемся когомологиями Александра $\bar{H}^*(X; G)$ [12]. Хорошо известно, что для конечных комплексов они совпадают с обычными сингулярными когомологиями. Для топологических алгебр Ли ниже мы пользуемся непрерывными вещественными когомологиями с тривиальным действием (см. [27]). Наша первая цель – показать, что когомологии $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ и K_∞ связаны так же, как и когомологии конечно порожденной дискретной группы с когомологиями соответствующего пространства Эйленберга–Маклейна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.4. Поскольку действие равномерно локально постоянно, то существует такая окрестность единицы $x \in O \subset \mathcal{J}(\mathbb{Z})$, что действие каждого элемента $h(x) \in O$ на G тривиально. Для этой окрестности найдется такой номер n , что $\mathcal{J}_{n+1}(\mathbb{Z}) \subset O$. Таким образом, это действие факторизуется через группу $\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$. Значит, для любых $n < k < m$ корректно

определены гомоморфизмы когомологий:

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{J}^k(\mathbb{Z}); G) & \longrightarrow & H^*(\mathcal{J}^m(\mathbb{Z}); G) \\ \parallel & & \parallel \\ H^*(K_k; G) & \longrightarrow & H^*(K_m; G) \end{array} \quad (4.1)$$

где во второй строке рассматриваются сингулярные когомологии многообразия K_s с действием фундаментальной группы, соответствующим данному действию $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$. Вертикальные изоморфизмы корректно определены, поскольку нильмногообразия K_s асферичны [17] и, следовательно, являются классифицирующими пространствами своих фундаментальных групп $\pi_1(K_s) \simeq \mathcal{J}^s(\mathbb{Z})$. Переходя в (4.1) к пределу при $m \rightarrow \infty$ и пользуясь непрерывностью групповых когомологий и когомологий Александера по отношению к обратным спектрам, получаем

$$\tilde{H}^*(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); G) \simeq \varinjlim_{m \rightarrow \infty} H^*(\mathcal{J}^m(\mathbb{Z}); G) \simeq \varinjlim_{m \rightarrow \infty} H^*(K_m; G) \simeq \overline{H}^*(K_\infty; G),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.5 дает существенно бóльшую информацию о когомологиях с тривиальными вещественными коэффициентами.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Теорему 1.5 можно рассматривать как бесконечномерный аналог известной теоремы Номидзу [13] для вещественных когомологий нильмногообразий, или соответствующих нильпотентных групп без кручения.

Применение теоремы Гончаровой [14] лежит в основе доказательства следствия 1.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.6. С одной стороны, для нильмногообразия K_m имеем

$$H^*(\mathcal{J}^m(\mathbb{Z}); \mathbb{R}) \simeq H^*(K_m; \mathbb{R}). \quad (4.2)$$

С другой стороны, применяя теорему Номидзу, получаем

$$H^*(K_m; \mathbb{R}) \simeq H^*(\mathcal{E}_{\text{инв}}^*(\mathcal{J}^m(\mathbb{R})); d), \quad (4.3)$$

где $\mathcal{E}_{\text{инв}}^*(\mathcal{J}^m(\mathbb{R}))$ – комплекс правоинвариантных дифференциальных форм на группе $\mathcal{J}^m(\mathbb{R})$, d – внешний дифференциал. Правые когомологии в (4.3) канонически совпадают с когомологиями алгебры Ли $\mathcal{G}(\mathcal{J}^m(\mathbb{R}))$. Последняя, очевидно, совпадает с урезанной алгеброй Витта $W_1^m(1)$, которую можно задать базисом $e_1, e_2, \dots, e_m$ и коммутаторами

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{j+i}, & \text{если } i+j \leq m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Из сказанного выше, объединяя (4.2), (4.3) и переходя к обратному пределу, будем иметь

$$\tilde{H}^*(\mathcal{J}(\mathbb{Z}); \mathbb{R}) \simeq \varinjlim_{m \rightarrow \infty} H^*(\mathcal{J}^m(\mathbb{Z}); \mathbb{R}) \simeq \varinjlim_{m \rightarrow \infty} H^*(W_1^m(1); \mathbb{R}).$$

Оставшуюся часть доказательства сведем к следующей лемме.

ЛЕММА 4.6. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(W_1(1); \mathbb{R}) \simeq \varinjlim_{m \rightarrow \infty} H^*(W_1^m(1); \mathbb{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если V – топологическое векторное пространство, то под сопряженным пространством V' мы понимаем пространство непрерывных линейных функционалов. В качестве топологии на V' используем соответствующую топологию Маки. В силу двойственности проективных и индуктивных пределов [28] разложение

$$W_1(1) = \varprojlim_{m \rightarrow \infty} W_1^m(1)$$

влечет

$$(W_1(1))' = \varinjlim_{m \rightarrow \infty} (W_1^m(1))'. \quad (4.5)$$

Для конечномерного векторного пространства V обозначим через Λ^*V внешнюю алгебру над V . Для вычисления кохомологий алгебры Ли $\mathcal{G}$ с вещественными коэффициентами используем комплекс $C^*(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ непрерывных полилинейных кососимметрических функций на $\mathcal{G}$ (см. [27]). Аналогично (4.5) будем иметь

$$C^*(W_1(1); \mathbb{R}) = \varinjlim_{m \rightarrow \infty} \Lambda^*((W_1^m(1))'). \quad (4.6)$$

Дифференциалы в алгебрах $C^*(W_1(1); \mathbb{R})$ и $\Lambda^*((W_1^m(1))')$ $\simeq C^*(W_1^m(1); \mathbb{R})$ задаются одной и той же формулой Картана и, естественно, коммутируют с отображениями предела (4.5). Заметим, что в базисе $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty \subset (W_1(1))'$, двойственном базису $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, дифференциал имеет особенно простой вид и задается формулами, двойственными (4.4):

$$d\omega_k = \sum_{i < j, i+j=k} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j.$$

Поскольку прямые пределы коммутируют с короткими точными последовательностями, то, переходя в (4.6) к подпространствам циклов и границ, получаем требуемое утверждение для кохомологий.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. После того как настоящая работа была завершена, авторы узнали о работах [29]–[31], в которых получены глубокие результаты по структуре группы $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$. В частности, в [30] изучается обратная последовательность многообразий $\mathbb{R}^n/\mathcal{J}^n(\mathbb{Z})$.

Список литературы

1. S. A. Jennings, “Substitution groups of formal power series”, *Canadian J. Math.*, **6** (1954), 325–340.
2. M. Gotô, “On the group of formal analytic transformations”, *Kôdai Math. Sem. Rep.*, 1950, № 3, 45–46.

3. В. М. Бухштабер, А. В. Шокуров, “Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 1–11; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, A. V. Shokurov, “The Landweber–Novikov algebra and formal vector fields on the line”, *Funkt. Anal. Appl.*, **12**:3 (1978), 159–168.
4. R. Camina, “The Nottingham group”, *New horizons in pro- p groups*, Progr. Math., **184**, eds. M. P. F. du Sautoy, D. Segal, and A. Shalev, Birkhäuser, Boston, MA, 2000, 205–221.
5. C. R. Leedham-Green, S. McKay, *The structure of groups of prime power order*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **27**, Oxford University Press, Oxford, 2002.
6. I. Fesenko, “On just infinite pro- p -groups and arithmetically profinite extensions of local fields”, *J. Reine Angew. Math.*, **517** (1999), 61–80.
7. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, М., 1973; англ. пер. 2-го изд.: L. S. Pontryagin, *Topological groups*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1966.
8. Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Mathematics, **46**, Academic Press, New York–London, 1972.
9. D. L. Johnson, “The group of formal power series under substitution”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **45**:3 (1988), 296–302.
10. B. Szegedy, “Almost all finitely generated subgroups of the Nottingham group are free”, *Bull. London Math. Soc.*, **37**:1 (2005), 75–79.
11. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.
12. Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: E. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book, New York–Toronto, 1966.
13. K. Nomizu, “On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups”, *Ann. of Math. (2)*, **59**:3 (1954), 531–538.
14. Л. В. Гончарова, “Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой”, *Функц. анализ и его прил.*, **7**:2 (1973), 6–14; англ. пер.: L. V. Goncharova, “The cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on the line”, *Funkt. Anal. Appl.*, **7**:2 (1973), 91–97.
15. B. Klopsch, “Normal subgroups in substitution groups of formal power series”, *J. Algebra*, **228**:1 (2000), 91–106.
16. J. Milnor, “Remarks on infinite-dimensional Lie groups”, *Relativity, groups and topology, II* (Les Houches, 1983), eds. B. S. de Witt, R. Stora, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1007–1057.
17. А. И. Мальцев, “Об одном классе однородных пространств”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:1 (1949), 9–32; англ. пер.: A. I. Mal'tsev, “On a class of homogeneous spaces”, *Am. Math. Soc. Transl.*, **39** (1951).
18. P. S. Alexandrov, P. S. Urysohn, “Über nulldimensionale Punktmengen”, *Ann. Math.*, **98** (1928), 89–106.
19. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, Monografie Matematyczne, **60**, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.
20. S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Math. Ser., **15**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1952.
21. K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Probability and Mathematical Statistics, № 3, Acad. Press, New York–London, 1967.
22. Sze-tsen Hu, “Cohomology theory in topological groups”, *Michigan Math. J.*, **1**:1 (1952), 11–59.
23. Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа*, Мир, М., 1968; пер. с франц.: J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Troisième édition, Lecture Notes in Math., **5**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1965.

24. H. Hopf, “Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören”, *Comment. Math. Helv.*, **17**:1 (1944), 39–79.
25. B. Eckmann, “Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe”, *Comment. Math. Helv.*, **18**:1 (1945), 232–282.
26. S. Eilenberg, “Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 3–37.
27. Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984; англ. пер.: D. B. Fuks, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*, Contemporary Soviet Mathematics, Consultants Bureau, New York, 1986.
28. H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, The Macmillan, New York; Collier-Macmillan, London, 1966.
29. В. М. Бухштабер, А. Н. Холодов, “Группы формальных диффеоморфизмов суперпрямой, производящие функции для последовательностей полиномов и функциональные уравнения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:5 (1989), 944–970; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, A. N. Kholodov, “Groups of formal diffeomorphisms of the superline, generating functions for sequences of polynomials, and functional equations”, *Math. USSR-Izv.*, **35**:2 (1990), 277–305.
30. В. М. Бухштабер, “Группы полиномиальных преобразований прямой, неформальные симплектические многообразия и алгебра Ландвебера–Новикова”, *УМН*, **54**:4 (1999), 161–162; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, “Groups of polynomial transformations of a line, non-formal symplectic manifolds, and the Landweber–Novikov algebra”, *Russian Math. Surveys*, **54**:4 (1999), 837–838.
31. V. M. Buchstaber, A. Lazarev, “The Gelfand transform in commutative algebra”, *Mosc. Math. J.*, **5**:2 (2005), 311–327.

И. К. БАБЕНКО (I. K. BABENKO)

Université Montpellier-II CNRS UMR 5149 Institut de
Mathématiques et de Modélisation de Montpellier,
Montpellier, France

E-mail: babenko@math.univ-montp2.fr

Поступило в редакцию

24.11.2006

С. А. БОГАТЫЙ (S. A. BOGATYI)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

E-mail: bogatyi@mech.math.msu.su