Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Альбрехт, О дифференцируемых операторах почти наилучшего приближения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 4, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 02:32:41

УДК 517.982.256

П. В. Альбрехт

О дифференцируемых операторах почти наилучшего приближения

Пусть X – линейное нормированное пространство, $Y \subset X$ – конечномерное подпространство, $\varepsilon > 0$. *Мультипликативной ε -выборкой* $M: X \rightarrow Y$ назовем такое отображение, что

$$\forall x \in X \quad \|Mx - x\| \leq \inf\{\|x - y\|: y \in Y\}(1 + \varepsilon).$$

В работе доказывается существование ε -выборки M , имеющей ту же гладкость, что и норма пространства X . На примере пространства $L^p[0, 1]$ показано, что построить ε -выборку большей гладкости, вообще говоря, нельзя.

Библиография: 6 наименований.

Пусть X – действительное линейное нормированное пространство, $Y \subset X$ – подпространство, $\dim Y = n < \infty$; $B = \{x: \|x\| \leq 1\}$, $S = \{x: \|x\| = 1\}$, $\rho(x, Y)$ – расстояние от элемента $x \in X$ до подпространства Y , $P = P_Y: X \rightarrow Y$ – оператор метрической проекции, т.е. такое отображение, что для любого $x \in X$

$$Px = \{y \in Y: \|x - y\| = \rho(x, Y)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\varepsilon > 0$, $U \subseteq X$. *Мультипликативной (аддитивной) ε -выборкой* $M: U \rightarrow Y$ ($A: U \rightarrow Y$) назовем такое однозначное отображение, что

$$\begin{aligned} \forall x \in U \quad Mx &\in \{y \in Y: \|x - y\| \leq \rho(x, Y)(1 + \varepsilon)\} \\ (Ax &\in \{y \in Y: \|x - y\| \leq \rho(x, Y) + \varepsilon\}). \end{aligned}$$

Из [1] вытекает, что для любого конечномерного подпространства Y существует липшицева мультипликативная ε -выборка $M: X \rightarrow Y$, т.е. такая, что

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \|Mx_1 - Mx_2\| \leq C(n, \varepsilon)\|x_1 - x_2\|,$$

где константа C не зависит от x_1, x_2 .

В настоящей работе доказывается существование дифференцируемых ε -выборок, имеющих ту же гладкость, что и норма пространства X (теоремы 1 и 2). Показано также, что построить ε -выборку большей гладкости, вообще говоря, нельзя (теорема 4).

Сформулируем более точно основные результаты работы.

Пусть Z – линейное нормированное пространство, $U \subseteq X$ – замкнутое множество, отображение $F: U \rightarrow Z$ определено и непрерывно в некоторой окрестности множества U ; $r > 0$, $r = k + \gamma$, где

$$k = \begin{cases} [r], & r \notin \mathbb{N}, \\ r - 1, & r \in \mathbb{N}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем писать $F \in H^r(U)$, если

$$\forall x_1, x_2 \in U \quad \|F^{(k)}(x_1) - F^{(k)}(x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|^\gamma,$$

где константа C не зависит от x_1, x_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $r \geq 1$. Будем писать $X \in (H_r)$, если $\|\cdot\|^r \in H^r(X)$; $X \in (H_\infty)$, если $X \in (H_r)$ для любого $r \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. $X \in (H_1)$ для любого X .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно показать, что условие $X \in (H_r)$ эквивалентно любому из следующих двух условий:

- 1) $\|\cdot\| \in H^r(S)$;
- 2) $\|\cdot\| \in H^r(X \setminus B)$.

Отсюда можно вывести, что $(H_r) \subset (H_{r'})$ для любого $r' \in [1, r]$.

Известно [2, с. 184], что для любого пространства с мерой (T, Σ, μ) и $p > 1$ $L^p(T, \Sigma, \mu) \in (H_p)$; если p четно, то $L^p(T, \Sigma, \mu) \in (H_\infty)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – линейное нормированное пространство, $X \in (H_r)$, $Y \subset X$ – конечномерное подпространство. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует мультипликативная ε -выборка $M: X \rightarrow Y$ такая, что для любого $\delta > 0$ $M \in H^r(Y_\delta)$, где $Y_\delta = \{x \in X: \rho(x, Y) \geq \delta\}$.

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует аддитивная ε -выборка $A: X \rightarrow Y$ такая, что $A \in H^r(Y')$, где $Y' = \{x \in X: \rho(x, Y) \leq 1\}$.

Определим модуль непрерывности отображения F :

$$\omega(F; t) = \sup\{\|Fx_1 - Fx_2\|: x_1, x_2, \quad \|x_1 - x_2\| \leq t\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X = L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, p не является четным числом, $Y = \{\text{const}\}$, $V_\delta = \{x \in X: \rho(x, Y) \geq \delta, \quad \|x\| \leq 1\}$, где $\delta > 0$ достаточно мало.

Тогда найдется такое $\nu > 0$, что функция P_Y не приближается на множестве V_δ функциями класса

$$Z_p = \{f: X \rightarrow Y \mid \omega(f^{([p])}; t) = o(t^{p-[p]}) \quad \text{при } t \rightarrow 0\}$$

с точностью ν .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X = L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, p не является четным числом, Y – подпространство функций, тождественно равных константе на $[0, 1]$. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых не существует ε -выборки $A: X \rightarrow Y$ такой, что на множестве $\{x: \rho(x, Y) \geq \delta, \quad \|x\| \leq 1\}$ имеет место соотношение $\omega(A^{([p])}; t) = o(t^{p-[p]})$ при $t \rightarrow 0$.

§ 1. Классы H^r

ЛЕММА 1. Пусть X_1, X_2, X_3 – линейные нормированные пространства, $U \subseteq X_1, V \subseteq X_2, W \subseteq X_3, Z \subseteq \mathbb{R}, r', r \geq 1$.

1) Если отображения $F_1: U \rightarrow Z, F_2: U \rightarrow V$ таковы, что $F_1, F_2 \in H^{r'}(U)$ для любого $r' \leq r$ и F_1, F_2 ограничены на U , то $(F_1 F_2) \in H^r(U)$.

2) Если отображения $F: U \rightarrow V, G: V \rightarrow W$ таковы, что $F \in H^{r'}(U), G \in H^{r'}(V)$ для любого $r' \leq r$, то $(G \circ F) \in H^r(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть

$$L_1 = \sup_{x \in U} \|F_1(x)\| < \infty, \quad L_2 = \sup_{x \in U} \|F_2(x)\| < \infty.$$

Тогда для любых $x_1, x_2 \in U$

$$\|(F_1 F_2)(x_1) - (F_1 F_2)(x_2)\| \leq L_2 \|F_1(x_1) - F_1(x_2)\| + L_1 \|F_2(x_1) - F_2(x_2)\|,$$

поэтому если $F_1, F_2 \in H^\mu(U)$ для некоторого $\mu \in (0, 1]$, то и $(F_1 F_2) \in H^\mu(U)$.

Для любых $h_1, \dots, h_k \in X_1$ имеем

$$(F_1 F_2)^{(k)}[h_1, \dots, h_k] = \sum F_1^{(i)}[h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(i)}] F_2^{(k-i)}[h_{\sigma(i+1)}, \dots, h_{\sigma(k)}],$$

где суммирование ведется по $i = 0, 1, \dots, k$ и по σ – всевозможным перестановкам на множестве $\{1, \dots, k\}$.

По условию $F_1^{(i)} \in H^\mu(U), F_2^{(k-i)} \in H^\nu(U)$ для любого i , где

$$\mu = \begin{cases} 1, & i \leq k-1, \\ \gamma, & i = k, \end{cases} \quad \nu = \begin{cases} 1, & k-i \leq k-1, \\ \gamma, & k-i = k, \end{cases}$$

а так как $H^1(U) \subseteq H^\gamma(U)$, то в силу вышесказанного каждое слагаемое в выражении $(F_1 F_2)^{(k)}$ принадлежит $H^\gamma(U)$, а значит, и $(F_1 F_2)^{(k)} \in H^\gamma(U)$, т.е. $(F_1 F_2) \in H^r(U)$.

2) Для любых $h_1, \dots, h_k \in X_1$ имеем

$$(G \circ F)^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k] = \sum G^{(s)}(F(x)) \left\{ F^{(j_1)}(x)[h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(j_1)}], \right. \\ \left. F^{(j_2)}(x)[h_{\sigma(j_1+1)}, \dots, h_{\sigma(j_1+j_2)}], \dots, F^{(j_s)}(x)[h_{\sigma(k-j_s+1)}, \dots, h_{\sigma(k)}] \right\},$$

где суммирование ведется по $s = 1, \dots, k$, по $j_1, \dots, j_s$ так, что $j_1 + \dots + j_s = k$, и по σ – всевозможным перестановкам на множестве $\{1, \dots, k\}$.

Так как все отображения $F^{(j_m)}(x)$ гёльдеровы с показателем $\gamma, 1 \leq m \leq s$, то и выражение в квадратных скобках гёльдерово, а значит, $(G \circ F)^{(k)} \in H^\gamma(U)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $F: U \rightarrow \mathbb{R}, U \subseteq X, F \in H^{r'}(U)$ для любого $r' \leq r$ и

$$0 < \inf_{x \in U} |F(x)| \leq \sup_{x \in U} |F(x)| < \infty,$$

то $1/F \in H^r(U)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $F: X \rightarrow Z$ называется *однородным с показателем β* ($\beta \in \mathbb{R}$), если для любых $x \in X$ и $t > 0$ $F(tx) = t^\beta F(x)$.

ЛЕММА 2. Пусть отображение $F: X \rightarrow Z$ однородно с показателем β и существует $F^{(l)}(x)$ ($x \neq 0$). Тогда для любого $t > 0$ существует $F^{(l)}(tx)$ и

$$F^{(l)}(tx) = t^{\beta-l} F^{(l)}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по l . При $l = 0$ утверждение верно по определению однородности.

Пусть для $l - 1$ утверждение доказано. Для любых $t > 0$ и h такого, что $\|h\| \leq \|tx\|$, имеем

$$\begin{aligned} F^{(l-1)}(tx + h) &= t^{\beta-l+1} F^{(l-1)}\left(x + \frac{h}{t}\right) \\ &= t^{\beta-l+1} \left(F^{(l-1)}(x) + F^{(l)}(x) \left[\frac{h}{t} \right] + o\left(\frac{h}{t}\right) \right) \\ &= F^{(l-1)}(tx) + t^{\beta-l} F^{(l)}(x) + o(h). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 2. Мультипликативные ε -выборки

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $x \in Y$, то положим $Mx = x$. Для $x \notin Y$ определим

$$M(x) = \frac{D(x)}{G(x)},$$

где

$$D(x) = \int_Y \frac{y d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha}, \quad G(x) = \int_Y \frac{d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha},$$

$d\mu(y)$ – лебегова мера на Y при $\alpha > n + 1$.

1) Покажем, что интегралы сходятся абсолютно. Для любого $x \notin Y$ имеем

$$\begin{aligned} \|D(x)\| &\leq \int_{\{y: \|y\| \leq 2\|x\|\}} \frac{\|y\| d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha} + \int_{\{y: \|y\| > 2\|x\|\}} \frac{\|y\| d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha} \leq \\ &\leq \frac{2\|x\|}{\rho(x, Y)^\alpha} \int_{\{y: \|y\| \leq 2\|x\|\}} d\mu(y) + 2^\alpha \int_{\{y: \|y\| > 2\|x\|\}} \frac{d\mu(y)}{\|y\|^{\alpha-1}} < \infty \end{aligned}$$

при $\alpha > n + 1$. Аналогично доказывается, что $|G(x)| < \infty$ при $\alpha > n + 1$.

2) Покажем, что M однородно и перестановочно с оператором сдвига вдоль Y . Пусть $x \notin Y$, $t > 0$. Тогда

$$M(tx) = \frac{\int_Y \frac{y d\mu(y)}{\|tx - y\|^\alpha}}{\int_Y \frac{d\mu(y)}{\|tx - y\|^\alpha}} = t \cdot \frac{\int_Y \frac{(y/t) d\mu(y/t)}{t^\alpha \|x - y/t\|^\alpha}}{\int_Y \frac{d\mu(y/t)}{t^\alpha \|x - y/t\|^\alpha}} = t \cdot Mx.$$

Для любого $y_0 \in Y$ имеем

$$M(x - y_0) = \frac{\int_Y \frac{y d\mu(y)}{\|(x - y_0) - y\|^\alpha}}{\int_Y \frac{d\mu(y)}{\|(x - y_0) - y\|^\alpha}} = \frac{\int_Y \frac{(y + y_0) d\mu(y + y_0)}{\|x - (y + y_0)\|^\alpha}}{\int_Y \frac{d\mu(y + y_0)}{\|x - (y + y_0)\|^\alpha}} - y_0 = Mx - y_0.$$

Свойство однородности и перестановочности со сдвигом будем обозначать буквами (ОП).

3) Покажем, что при $\alpha \geq n + 1 + n/\varepsilon$ для любого $x \notin Y$

$$Mx \in P_m^\varepsilon x = \{y \in Y: \|x - y\| \leq \rho(x, Y)(1 + \varepsilon)\},$$

где $n = \dim Y$. Так как $M \in (\text{ОП})$, то достаточно доказать включение для таких x , что $\rho(x, Y) = \|x\|$, $0 \in Px$.

Положим $\|z\| = \inf\{t > 0: z/t \in P_m^\varepsilon x\}$ – функционал Минковского множества $P_m^\varepsilon x$. Отметим, что:

а) $\|\lambda z\| = \lambda\|z\|$ при $\lambda \geq 0$;

б) $\|z\| \leq 1$, если и только если $z \in P_m^\varepsilon x$.

Если выполняется неравенство

$$\left\| \int_Y \frac{y d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha} \right\| \leq \int_Y \frac{d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha},$$

то $Mx \in P_m^\varepsilon x$. Ввиду неравенства Йенсена достаточно проверить, что

$$\int_Y \frac{\|y\| d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha} \leq \int_Y \frac{d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha}. \quad (1)$$

Если $y \in P_m^\varepsilon x$, то, полагая $\|y\| = u$, $y_1 = y/u$, ввиду выпуклости нормы получаем

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - uy_1\| \leq u\|x - y_1\| + (1 - u)\|x\| \leq \\ &\leq u(1 + \varepsilon)\rho(x, Y) + (1 - u)\rho(x, Y) = (1 + \varepsilon u)\rho(x, Y); \end{aligned}$$

если $y \notin P_m^\varepsilon x$, то $\|x - y\| \geq (1 + \varepsilon u)\rho(x, Y)$.

Таким образом, для любого $y \in Y$

$$\frac{\|y\| - 1}{\|x - y\|^\alpha} \leq \frac{u - 1}{\rho(x, Y)^\alpha (1 + \varepsilon u)^\alpha}. \quad (2)$$

Воспользуемся следующим фактом: если функция $f: Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ измерима, для любого $u \in \mathbb{R}_+$ $F(u) = \mu\{y: f(y) \leq u\} < \infty$, функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена, то

$$\int_Y g(f(y)) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}_+} g(u) dF(u).$$

Положив $f(y) = \|y\|$, $g(u) = (u - 1)/(1 + \varepsilon u)^\alpha$, мы имеем

$$F(u) = \mu\{y: \|y\| \leq u\} = u^n F(1) = Ku^n,$$

где K – объем множества $P_m^\varepsilon x$, и ввиду (2) находим

$$\begin{aligned} \int_Y \frac{(\|y\| - 1) d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha} &\leq \frac{Kn}{\rho(x, Y)^\alpha} \int_0^\infty \frac{(u - 1)u^{n-1}}{(1 + \varepsilon u)^\alpha} du = \\ &= \frac{Kn}{\varepsilon^{n+1}\rho(x, Y)^\alpha} \int_0^\infty \frac{(v - \varepsilon)v^{n-1}}{(1 + v)^\alpha} dv. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{v^{n-1}}{(1+v)^\alpha} \left(v - \frac{n}{\alpha - n - 1} \right) dv = 0,$$

то при $\varepsilon \geq n/(\alpha - n - 1)$, т.е. $\alpha \geq n + 1 + n/\varepsilon$, выполняется неравенство (1), и $Mx \in P_m^\varepsilon x$.

4) Покажем, что для любого $x \notin Y$, $j = 1, \dots, k$ существует $M^{(j)}(x)$ и $M \in H^r(Y_\delta)$ для любого $\delta > 0$. Через $C_1, C_2, \dots$ будем обозначать положительные константы, зависящие только от n, δ и ε .

Обозначим $F(x) = \|x\|^{-\alpha}$. Так как F однородно с показателем $-\alpha$ и $\|F^{(j)}(x)\| \leq C_1$ при $\|x\| = 1$, то по лемме 2 для любого $x \notin Y$

$$\|F^{(j)}(x)\| = \frac{1}{\|x\|^{\alpha+j}} \left\| F^{(j)} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{C_1}{\|x\|^{\alpha+j}}. \quad (3)$$

Имеем

$$G(x) = \int_Y F(x-y) d\mu(y), \quad D(x) = \int_Y y F(x-y) d\mu(y).$$

Покажем, что для любого $x \notin Y$, $j = 0, \dots, k$ существует производная $D^{(j)}(x)$, которая записывается в виде

$$D^{(j)}(x) = \int_Y y F^{(j)}(x-y) d\mu(y).$$

Применим индукцию по j . При $j = 0$ утверждение тривиально. Пусть для $j-1$ утверждение доказано. Если элемент h таков, что $\|h\| \leq \rho(x, Y)/2$, то

$$D^{(j-1)}(x+h) - D^{(j-1)}(x) = \int_Y F^{(j)}(x-y)[h]y d\mu(y) + \varkappa,$$

где элемент $\varkappa$ удовлетворяет неравенству

$$\|\varkappa\| \leq C_2 \int_Y \sup_{x' \in [x, x+h]} \|F^{(j)}(x'-y) - F^{(j)}(x-y)\| \|h\| \|y\| d\mu(y).$$

Первый интеграл сходится абсолютно, так как

$$\begin{aligned} \int_Y \|F^{(j)}(x-y)[h]\| \|y\| d\mu(y) &= \int_{\{y: \|y\| \leq 2\|x\|\}} \|F^{(j)}(x-y)[h]\| \|y\| d\mu(y) \\ &\quad + \int_{\{y: \|y\| > 2\|x\|\}} \|F^{(j)}(x-y)[h]\| \|y\| d\mu(y) \\ &\leq C_3 \int_{\{y: \|y\| \leq 2\|x\|\}} \frac{\|y\| d\mu(y)}{\|x-y\|^{\alpha+j}} + C_4 \int_{\{y: \|y\| > 2\|x\|\}} \frac{\|y\| d\mu(y)}{\|y\|^{\alpha+j}} \leq C_5. \end{aligned}$$

В силу (3) и замечания 2 $F^{(j)} \in H^\mu(Y_\delta)$, где $\mu = \begin{cases} 1, & j < k, \\ \gamma, & j = k \end{cases}$. Кроме того, по лемме 2 для любого $t > 0$

$$F^{(j)}(tx) = t^{-\alpha-j} F^{(j)}(x),$$

поэтому если $x_1, x_2 \notin Y$ таковы, что $\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1\|/2$, то

$$\begin{aligned} \|F^{(j)}(x_1) - F^{(j)}(x_2)\| &= \|x_1\|^{-\alpha-j} \left\| F^{(j)}\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}\right) - F^{(j)}\left(\frac{x_2}{\|x_1\|}\right) \right\| \\ &\leq C_6 \|x_1\|^{-\alpha-j} \left\| \frac{x_1 - x_2}{\|x_1\|} \right\|^\mu \\ &= C_6 \|x_1\|^{-\alpha-j-\mu} \|x_1 - x_2\|^\mu. \end{aligned} \quad (4)$$

Применяя (4) для $x_1 = x - y$, $x_2 = x - y + h$, находим

$$\|\varkappa\| \leq C_7 \int_Y \|x - y\|^{-\alpha-j-\mu} \|h\|^{1+\mu} \|y\| d\mu(y) \leq C_8 \|h\|^{1+\mu},$$

значит, $\|\varkappa\| = o(\|h\|)$ при $h \rightarrow 0$, и существование $D^{(j)}(x)$ доказано. Кроме того, мы доказали, что для любого $x \in Y_\delta$

$$\|D^{(j)}(x)\| \leq C_9. \quad (5)$$

Положим $\tilde{Y} = \{x \in X : \rho(x, Y) \geq 1/2, \|x\| \leq 2\}$. Покажем, что $D^{(j)} \in H^\mu(\tilde{Y})$. Пусть $x_1, x_2 \in \tilde{Y}$ и $\|x_1 - x_2\| \leq \rho(x_1, Y)/2$. Тогда в силу (4)

$$\begin{aligned} \|D^{(j)}(x_1) - D^{(j)}(x_2)\| &\leq \int_Y \|y\| \|F^{(j)}(x_1 - y) - F^{(j)}(x_2 - y)\| d\mu(y) \\ &\leq C_6 \|x_1 - x_2\|^\mu \int_Y \|y\| \|x_1 - y\|^{-\alpha-j-\mu} d\mu(y) \\ &\leq C_{10} \|x_1 - x_2\|^\mu. \end{aligned}$$

Если $\|x_1 - x_2\| > \rho(x_1, Y)/2$, то ввиду (5)

$$\begin{aligned} \|D^{(j)}(x_1) - D^{(j)}(x_2)\| &\leq \|D^{(j)}(x_1)\| + \|D^{(j)}(x_2)\| \\ &\leq 2C_9 < \frac{4C_9}{\rho(x_1, Y)} \|x_1 - x_2\| \leq C_{11} \|x_1 - x_2\|^\mu. \end{aligned}$$

Итак, $D^{(j)} \in H^\mu(\tilde{Y})$.

Аналогично показывается, что для всех $x \notin Y$ существует $G^{(j)}(x)$; при $x \in Y_\delta$

$$\|G^{(j)}(x)\| \leq C_{12} \quad (6)$$

и $G^{(j)} \in H^\mu(\tilde{Y})$. Кроме того, имеем оценку снизу: для любого $x \in \tilde{Y}$

$$|G(x)| \geq \int_{\{y: \|y\| \leq 1\}} \frac{d\mu(y)}{\|x - y\|^\alpha} \geq \frac{C_{13}}{\rho(x, Y)^\alpha (1 + \varepsilon)^\alpha} \geq C_{14}. \quad (7)$$

Используя лемму 1, 1), следствие и неравенства (5)–(7), получаем, что для отображения $M = D/g$ справедливо включение $M \in H^r(\tilde{Y})$.

Так как множество $\tilde{Y}$ ограничено, то отсюда, в частности, вытекает, что для любого $x \in \tilde{Y}$

$$\|M^{(j)}(x)\| \leq C_{15}. \quad (8)$$

Нам осталось показать, что $M \in H^r(Y_\delta)$. Докажем сперва, что оценка (8) выполняется на всем Y_δ .

Так как $M \in (\text{ОП})$, то достаточно проверить это для таких $x \in Y_\delta$, что $\rho(x, Y) = \|x\|$, $0 \in Px$. Так как для таких x выполняется $x/\|x\| \in \tilde{Y}$, то ввиду (8)

$$\|M^{(j)}(x)\| = \frac{1}{\|x\|^{j-1}} \left\| M^{(j)}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \frac{C_{15}}{\|x\|^{j-1}} \leq C_{16}.$$

Рассмотрим произвольные элементы $x_1 \in Y_\delta$ и x_2 такие, что $\|x_1 - x_2\| \leq \rho(x_1, Y)/2$. Для любого $y_0 \in Px_1$ в силу однородности и инвариантности $M^{(j)}$ имеем

$$\begin{aligned} \|M^{(j)}(x_1) - M^{(j)}(x_2)\| &= \|M^{(j)}(x_1 - y_0) - M^{(j)}(x_2 - y_0)\| \\ &= \frac{1}{\rho(x_1, Y)^{j-1}} \left\| M^{(j)}\left(\frac{x_1 - y_0}{\rho(x_1, Y)}\right) - M^{(j)}\left(\frac{x_2 - y_0}{\rho(x_1, Y)}\right) \right\| \\ &\leq \frac{C_{17}}{\rho(x_1, Y)^{j-1}} \left\| \frac{(x_1 - y_0) - (x_2 - y_0)}{\rho(x_1, Y)} \right\|^\mu \\ &= \frac{C_{17}}{\rho(x_1, Y)^{j-1+\mu}} \|x_1 - x_2\|^\mu \leq \frac{C_{17}}{\delta^{j-1+\mu}} \|x_1 - x_2\|^\mu \\ &\leq C_{18} \|x_1 - x_2\|^\mu. \end{aligned}$$

Наконец, если $x_1 \in Y_\delta$ и $\|x_1 - x_2\| > \rho(x_1, Y)/2$, то в силу (8)

$$\begin{aligned} \|M^{(j)}(x_1) - M^{(j)}(x_2)\| &\leq \|M^{(j)}(x_1)\| + \|M^{(j)}(x_2)\| \\ &\leq 2C_{15} < \frac{4C_{15}}{\rho(x_1, Y)} \|x_1 - x_2\| \\ &\leq C_{19} \|x_1 - x_2\| \leq C_{19} \|x_1 - x_2\|^\mu. \end{aligned}$$

Таким образом, $M \in H^r(Y_\delta)$. Теорема доказана.

§ 3. Аддитивные ε -выборки

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $T: X \rightarrow Y$ — линейный проектор на подпространство Y . Тогда для любых $x \in X$, $y \in Y$

$$\|Tx - x\| = \|T(x - y) - (x - y)\| \leq (\|T\| + 1)\|x - y\|,$$

поэтому $\rho(x, Y) \leq \|Tx - x\| \leq (\|T\| + 1)\rho(x, Y)$. Кроме того, отсюда следует, что T является аддитивной ε -выборкой на множестве $\{x: \rho(x, Y) \leq \varepsilon/\|T\|\}$.

Далее, T — гладкий оператор: для любых $x, h \in X$

$$T'(x)[h] = Th, \quad T^{(j)}(x) = 0, \quad j = 2, \dots, k.$$

Пусть $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ — такая функция класса C^∞ , что

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 1, & \text{если } \theta \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Функция $f(x) = x - Tx$ принадлежит $H^{r'}(Y')$, функция $\varphi(x) = \|x\|$ принадлежит $H^{r'}(Y'_\delta)$ для любого $\delta > 0$, где $Y'_\delta = Y' \cap \{x: \|x\| \geq \delta\}$, $r' \in [1, r]$; поэтому по лемме 1, 2) $\varphi \circ f \in H^r(Y'_\delta)$. Снова применяя лемму 1, 2) к функциям ψ и $\varphi \circ f$, находим, что $\chi \equiv \psi \circ \varphi \circ f \in H^r(Y'_\delta)$, где

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|x - Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 1, & \text{если } \|x - Tx\| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть $M: X \rightarrow Y$ – мультипликативная ε -выборка, построенная в теореме 1; тогда $M \in H^r(Y_\nu)$, где $Y_\nu = \{x: \rho(x, Y) \geq \nu\}$, $\nu = \varepsilon/(2(\|T\| + 2))$. Пусть $\delta \leq \nu$. Очевидно, что M является аддитивной ε -выборкой на множестве Y' .

Для всех $x \in Y'$ определим

$$\tilde{A}x = \chi(x)(x - Mx) + (1 - \chi(x))(x - Tx) = x - (\chi(x)Mx + (1 - \chi(x))Tx).$$

Отображения $\chi(x)$ и $x - Mx$ ограничены на Y_ν и принадлежат $H^r(Y_\nu)$, поэтому по лемме 1, 1) их произведение также принадлежит $H^r(Y_\nu)$, а так как в окрестности множества Y_ν $\chi(x) = 0$, то отображение $\chi(x)(x - Mx)$ принадлежит $H^r(Y')$. Аналогично, по лемме 1, 1) отображение $(1 - \chi(x))(x - Tx)$ принадлежит $H^r(Y')$.

Таким образом, $\tilde{A} \in H^r(Y')$, но тогда и для отображения $Ax = \chi(x)Mx + (1 - \chi(x))Tx$ выполняется $A \in H^r(Y)$.

Отметим, что $Ax = x$ при $x \in Y$; в окрестности Y , а именно на множестве $\{x: \|x - Tx\| \leq \varepsilon/2\}$, имеем $Ax = Tx$.

Покажем, что A является аддитивной ε -выборкой на Y' . Если x таков, что $\|x - Tx\| \leq \varepsilon$, то по определению отображения A имеем

$$\begin{aligned} \|Ax - x\| &\leq \chi(x)(\rho(x, Y) + \varepsilon) + (1 - \chi(x))\varepsilon \leq \chi(x)(\rho(x, Y) + \varepsilon) + \\ &+ (1 - \chi(x))(\rho(x, Y) + \varepsilon) = \rho(x, Y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Если $\|x - Tx\| > \varepsilon$, то $\chi(x) = 1$ и $\|Ax - x\| \leq \rho(x, Y) + \varepsilon$. Теорема доказана.

§ 4. Порядок полиномиальности симметрических функций

Цель настоящего параграфа – доказать усиление результата С.М. Семенова [3, с. 82, лемма 6].

Пусть $I = [c, d] \subseteq [0, 1]$, μ – мера Лебега, $\Xi(I, \mu)$ – группа преобразований множества I , сохраняющих меру μ . Рассмотрим пространство $L^p(I, \mu)$, $p \geq 1$, и действие группы Ξ на нем:

$$[\sigma(x)](\omega) = x(\sigma^{-1}(\omega)),$$

где $\omega \in I$, $x \in L^p(I, \mu)$, $\sigma \in \Xi(I, \mu)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, где $M \subseteq L^p(I, \mu)$, называется *симметрической*, если $f(\sigma(x)) = f(x)$ для любых $\sigma \in \Xi(I, \mu)$, $x \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x(t)$, $y(t)$ – измеримые функции на $[0, 1]$ и $[c, d] \subseteq [0, 1]$.
Функция

$$U_{x,y,\zeta}^{[c,d]}(t) = \begin{cases} x\left(\frac{d-c}{\zeta-c}t + c\frac{\zeta-d}{\zeta-c}\right), & c < t < \zeta, \\ y\left(\frac{c-d}{\zeta-d}t + d\frac{\zeta-c}{\zeta-d}\right), & \zeta < t < d, \\ x(t), & t \notin [c, d], \end{cases}$$

называется μ -выпуклой комбинацией функций x , y на $[c, d]$ с параметром ζ , где $c < \zeta < d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $U \subseteq L^p[0, 1]$ называется μ -выпуклым, если для любого $[c, d] \subseteq [0, 1]$ и функций $x, y \in U$ таких, что $(x - y)|_{[0,1] \setminus [c,d]} = 0$, функция, являющаяся μ -выпуклой комбинацией функций x , y на $[c, d]$, принадлежит U при любом значении $\zeta \in (c, d)$.

ПРИМЕР. Пусть $Y = \{\text{const}\}$ – подпространство функций, тождественно равных константе на $[0, 1]$. Покажем, что множество

$$V_\delta = \{x \in L^p[0, 1]: \rho(x, Y) \geq \delta, \quad \|x\| \leq 1\}$$

является μ -выпуклым для любого $\delta \in [0, 1]$.

Пусть $x_1, x_2 \in V_\delta$, $U = U_{x_1, x_2, \zeta}^{[c,d]}$ – μ -выпуклая комбинация функций x_1, x_2 на отрезке $[c, d] \subseteq [0, 1]$ с параметром $\zeta \in (c, d)$. Тогда для любого $y \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} \|U - y\|^p &= \int_0^c \|x_1 - y\|^p dt + \int_c^d \|x_1 - y\|^p \frac{\zeta - c}{d - c} dt \\ &\quad + \int_c^d \|x_2 - y\|^p \frac{d - \zeta}{d - c} dt + \int_d^1 \|x_1 - y\|^p dt \\ &= \frac{\zeta - c}{d - c} \int_0^1 \|x_1 - y\|^p dt + \frac{d - \zeta}{d - c} \int_0^1 \|x_2 - y\|^p dt \\ &\geq \frac{\zeta - c}{d - c} \delta^p + \frac{d - \zeta}{d - c} \delta^p = \delta^p, \end{aligned}$$

т.е. $\rho(U, Y) \geq \delta$. Аналогично доказывается, что $\|U\| \leq 1$, поэтому $U \in V_\delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $K \subseteq L^p[0, 1]$, $p \geq 1$. Если функция $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$\left(\forall x, y \in K \quad \int_0^1 x^j(t) dt = \int_0^1 y^j(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad k \leq [p] \Rightarrow f(x) = f(y) \right),$$

то f называется функцией порядка полиномиальности не больше k на K .

ЛЕММА 3 [3]. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – симметричное открытое множество, содержащее вместе с любой точкой $x = (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$ отрезки, соединяющие x и $x_{(i)} = (x_i, 0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$; $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ – симметрическая функция, обладающая непрерывной производной $f^{(k)}$ на U ;

$$W_{f^{(k)}}(X) = \sup_{u, v \in X} \|f^{(k)}(u) - f^{(k)}(v)\|,$$

где X – объединение отрезков, соединяющих x и $x_{(i)}$, $i = k + 1, \dots, n$.

Тогда существует система однородных многочленов $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ с коэффициентами в $\mathbb{R}$, причем $\deg \mathcal{P}_j = j$, такая, что для любых U , f с указанными свойствами и любого $x = (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$ выполняется

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^k \mathcal{P}_j \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f(x) x_i^{j-1} + \varepsilon_i(x) x_i^{k-1},$$

причем $\|\varepsilon_i(x)\| \leq B_k W_{f^{(k)}}(X)$, где константа B_k зависит только от k .

ЛЕММА 4. Пусть $I = [c, d] \subseteq [0, 1]$, $L_I = \{x \in L^p[0, 1]: x|_I = 0\}$, $\mathcal{P}S_p^k$ – пространство однородных симметрических многочленов степени не выше k на $L^p(I, \mu)$, $U \subseteq L^p[0, 1]$ – открытое симметричное множество, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ – симметрическая функция такая, что $\omega(f^{([p])}; \delta) = o(\delta^{p-[p]})$ при $\delta \rightarrow 0$.

Тогда для любого $I \subseteq [0, 1]$ существуют такие функции $\lambda_{i,f}^I: L_I \cap U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, [p]$, что для любых $x \in L_I \cap U$ и $h \in L^p[0, 1]$ имеем

$$f'(x)[h] = \sum_{s=1}^{[p]} \lambda_{s,f}^I(x) \int_0^1 h(t) x^{s-1}(t) dt,$$

причем существуют линейные непрерывные операторы $A^{I,s}: \mathcal{P}S_p^s(I, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любого $x \in L_I \cap U$, $s = 1, \dots, [p]$, выполняется

$$\lambda_{s,f}^I(x) = A^{I,s}(\mathcal{D}^s f(x)|_{L^p(I)}),$$

где $\mathcal{D}^s f(x)[h] = \frac{1}{s!} f^{(s)}(x)[h]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем аналогично [3, лемма 6]. Пусть $\Delta_1^N, \dots, \Delta_{2^N}^N$ – разбиение отрезка $[0, 1]$ на множества $((i-1)/2^N, i/2^N)$, $i = 1, \dots, 2^N$; Φ_N – множество функций, постоянных на Δ_i^N . Отметим, что если $x \in \Phi_N$,

$$f'(x)[h] = \int_0^1 u(t) h(t) dt,$$

то $u = \text{const}$ на каждом Δ_i^N .

В Φ_N выберем базис

$$e_i^N(t) = \begin{cases} 2^{\frac{N}{p}}, & t \in \Delta_i^N, \\ 0, & t \notin \Delta_i^N. \end{cases}$$

Обозначим $\zeta_{1,N}, \dots, \zeta_{2^N,N}$ координаты функции $x \in \Phi_N$ в базисе $\{e_i^N\}_{i=1, \dots, 2^N}$; тогда $\zeta_{i,N} = x_{i,N} \cdot 2^{-N/p}$.

Пусть $I = [0, a]$ (этого можно добиться перестановкой). Выберем N' таким большим, чтобы при $x \in \Phi_{N_0} \cap L_{[0,a]} \cap U$ выполнялось:

- а) $[p] \cdot 2^{-N} < a$ при $N > N_0, N'$;
- б) $\max_{i=1, \dots, 2^N} |\zeta_{i,N}| < 2^{-1/p} \cdot \inf\{\|x - y\| \mid y \in L^p[0, 1] \setminus U\}$.

Тогда $x \in \Phi_{N+l}$ для любых $N > N', N_0$ и $l \geq 0$.

При фиксированном $N > N', N_0$ обозначим $U_N = U \cap \Phi_N$, X_N – объединение отрезков, соединяющих x с точками

$$\zeta_{(i,N)} = (\zeta_{i,N}, 0, \dots, 0, \zeta_{[p]+1,N}, \dots, \zeta_{i-1,N}, 0, \zeta_{i+1,N}, \dots, \zeta_{2^N,N}).$$

Очевидно, U_N симметричны, функция $f|_{U_N}$ симметрическая, для любого достаточно малого $\delta > 0$

$$\omega((f|_{U_N})^{([p])}; \delta) = o(\delta^{p-[p]}).$$

Если $x = (\zeta_{1,N}, \dots, \zeta_{2^N,N})$, то $\zeta_{1,N} = \dots = \zeta_{[p],N} = 0$, отрезки $[\zeta_{(i,N)}, x]$, $i = 1, \dots, 2^N$, принадлежат U_N , так как

$$\|\zeta_{i,N} - x\| \leq 2^{\frac{1}{p}} |\zeta_{i,N}| < \inf\{\|x - y\| \mid y \in L^p[0, 1] \setminus U\}.$$

Из леммы 3 следует, что при $i = 1, \dots, 2^N$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta_{i,N}}(x) = \sum_{j=1}^{[p]} \mathcal{P}_j \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_{1,N}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \zeta_{j,N}} \right) f(x) \zeta_{i,N}^{j-1} + \varepsilon_i^N(x) \zeta_{i,N}^{[p]-1},$$

причем $|\varepsilon_i^N(x)| \leq B_{[p]} W_{f^{([p])}}(X_N)$.

Пусть $h \in \Phi_N$, $h|_{\Delta_i^N} = h_{i,N}$; тогда

$$\begin{aligned} f'(x)[h] &= \sum_{i=1}^{2^N} \frac{\partial f}{\partial \zeta_{i,N}} h_{i,N} \cdot 2^{-\frac{N}{p}} \\ &= \sum_{i=1}^{2^N} h_{i,N} \cdot 2^{-\frac{N}{p}} \left\{ \varepsilon_i^N(x) \zeta_{i,N}^{[p]-1} + \sum_{j=1}^{[p]} \mathcal{P}_j \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_{1,N}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \zeta_{j,N}} \right) f(x) \zeta_{i,N}^{j-1} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{[p]} \mathcal{P}_j \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_{1,N}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \zeta_{j,N}} \right) f(x) \left[\sum_{i=1}^{2^N} 2^{-\frac{N}{p}} h_{i,N} \zeta_{i,N}^{j-1} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2^N} h_{i,N} \varepsilon_i^N(x) \zeta_{i,N}^{[p]-1} \cdot 2^{-\frac{N}{p}}. \end{aligned}$$

Так как $\zeta_{i,N} = 2^{-N/p} x_{i,N}$, то, полагая

$$\theta(x, h, N) = \sum_{i=1}^{2^N} h_{i,N} 2^{-\frac{N}{p}} \varepsilon_i^N(x) \zeta_{i,N}^{[p]-1},$$

получаем

$$\begin{aligned} f'(x)[h] &= \sum_{j=1}^{[p]} \mathcal{P}_j \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_{1,N}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \zeta_{j,N}} \right) f(x) \cdot (2^{-N})^{\frac{j}{p}-1} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{i=1}^{2^N} h_{i,N} x_{i,N}^{j-1} 2^{-N} \right\} + \theta(x, h, N) \\ &= \sum_{j=1}^{[p]} \mathcal{P}_j \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_{1,N}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \zeta_{j,N}} \right) f(x) (2^{-N})^{\frac{j}{p}-1} \\ &\quad \times \int_0^1 h(t) x^{j-1}(t) dt + \theta(x, h, N). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
|\theta(x, h, N)| &\leq \sum_{i=1}^{2^N} |h_{i,N}| |x_{i,N}|^{[p]-1} (2^{-N})^{\frac{[p]}{p}} |\varepsilon_i^N(x)| \\
&\leq (2^{-N})^{\frac{[p]}{p}-1} \left\{ \int_0^1 |h(t)| |x(t)|^{[p]-1} dt \right\} B_{[p]} W_{f^{([p])}}(X_N), \\
W_{f^{([p])}}(X_N) &= \sup_{y, y' \in X_N} \|f^{([p])}(y') - f^{([p])}(y)\| \\
&\leq 2 \left\{ \sup_{y \in X_N} \|f^{([p])}(x) - f^{([p])}(y)\| \right\} \\
&\leq 2 \left\{ \sup_{y \in U: \|y-x\| \leq 2^{1/p} \|x\|_{[0,1]} \cdot 2^{-N/p}} \|f^{([p])}(x) - f^{([p])}(y)\| \right\}.
\end{aligned}$$

Пусть $\omega(f^{([p])}; \delta) = \nu(\delta) \delta^{p-[p]}$, где $\nu(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда в силу монотонности модуля непрерывности

$$W_{f^{([p])}}(X_N) \leq 2\nu\left(2^{\frac{1-N}{p}} \|x\|\right) \left(2^{\frac{1-N}{p}} \|x\|\right)^{p-[p]} = \kappa_1 \nu\left(2^{\frac{1-N}{p}} \|x\|\right) \cdot 2^{\frac{-N(p-[p])}{p}},$$

где величина κ_1 ограничена и не зависит от N .

Пусть $\kappa_2 = \int_0^1 |h(t)| |x(t)|^{[p]-1} dt B_{[p]}$; тогда

$$|\theta(x, h, N)| \leq \kappa_1 \kappa_2 \nu\left(2^{\frac{1-N}{p}} \|x\|\right) \cdot 2^{\frac{-N(p-[p])}{p}} \cdot 2^{\frac{-N([p]-p)}{p}} = \kappa_1 \kappa_2 \nu\left(2^{\frac{1-N}{p}} \|x\|\right) \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$ (устремлять N к ∞ можно, так как если $h, x \in \Phi_N$, то $h, x \in \Phi_{N_1}$ для любого $N_1 > N$).

Осталось показать, что

$$\lambda_{j,f}^{[0,a]}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (2^{-N})^{\frac{j}{p}-1} \mathcal{P}_j\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_{1,N}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \zeta_{j,N}}\right) f(x)$$

существуют и удовлетворяют условию. Доказательство этого факта проводится без каких-либо изменений.

Следующее утверждение доказывается на основе леммы 4 так же, как в [3, лемма 8].

ЛЕММА 5. Пусть $U \subseteq L^p[0, 1]$ – открытое, симметричное, μ -выпуклое множество, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ – симметрическая функция такая, что существует $f^{([p])}$ на U и $\omega(f^{([p])}; \delta) = o(\delta^{p-[p]})$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда порядок полиномиальности f на U не превосходит $[p]$.

ЛЕММА 6. Пусть $X = L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, p не является четным числом, $Y = \{\text{const}\}$. Тогда для любого достаточно малого $\delta > 0$ порядок полиномиальности отображения P_Y на множестве $V_\delta = \{x \in X: \rho(x, Y) \geq \delta, \|x\| \leq 1\}$ не меньше, чем $[p] + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $p > 2$. Рассмотрим произвольную функцию $x \in V_\delta$ такую, что $P_Y x = 0$, т.е. согласно критерию элемента наилучшего приближения [4, с. 56]

$$\int_0^1 |x|^{p-1} \operatorname{sgn} x \, dt = 0.$$

Положим

$$N = \left\{ x' \in V_\delta : \int_0^1 x' \, dt = \int_0^1 x \, dt, \dots, \int_0^1 x'^{[p]} \, dt = \int_0^1 x^{[p]} \, dt \right\},$$

$$L = \{x' \in V_\delta : P_Y x' = 0\}.$$

По определению порядка полиномиальности достаточно показать, что $N \not\subset L$, или $(T_x L)^\perp \not\subset (T_x N)^\perp$, где $T_x L$ и $T_x N$ – касательные пространства к множествам L и N в точке x , знак $\perp$ обозначает аннулятор множества.

Согласно теореме о касательном пространстве [5, с. 80]

$$T_x N = \left\{ h \in V_\delta : \int_0^1 h \, dt = \int_0^1 x h \, dt = \dots = \int_0^1 x^{[p]-1} h \, dt = 0 \right\},$$

$$T_x L = \left\{ h \in V_\delta : \int_0^1 |x|^{p-2} h \, dt = 0 \right\}.$$

Пусть $\mathbf{1}(t) \equiv 1$ на $[0, 1]$. Так как

$$(T_x N)^\perp = \operatorname{Lin}\{\mathbf{1}, x, \dots, x^{[p]-1}\}, \quad (T_x L)^\perp = \operatorname{Lin}\{|x|^{p-2}\},$$

то нужно доказать существование такой функции $x \in V_\delta$, что

$$|x|^{p-2} \notin \operatorname{Lin}\{\mathbf{1}, x, \dots, x^{[p]-1}\}.$$

Возьмем $x(t) = t - 1/2$. Очевидно, что не существует такого набора чисел $(\lambda_0, \dots, \lambda_{[p]-1})$, что

$$\lambda_0 + \lambda_1 \left(t - \frac{1}{2}\right) + \dots + \lambda_{[p]-1} \left(t - \frac{1}{2}\right)^{[p]-1} + \left|t - \frac{1}{2}\right|^{p-2} \equiv 0.$$

Утверждение доказано.

б) $1 < p < 2$. Пусть $x \in V_\delta$ такова, что $x(1-t) = -x(t)$ на $[0, 1]$; тогда $P_Y x = 0$ и $\int_0^1 x \, dt = 0$.

Имеем

$$N = \left\{ x' \in V_\delta : \int_0^1 x' \, dt = 0 \right\}, \quad L = \{x' \in V_\delta : P_Y x' = 0\}.$$

Для функции

$$x'(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ -\frac{1}{2}, & t \in (\frac{1}{3}, 1], \end{cases}$$

будет $x' \in N$, но $x' \notin L$. Лемма доказана.

§ 5. Границы гладкости ε -выборок в пространстве L^p

Для доказательства основного результата этого параграфа нам понадобится (наряду с результатами предыдущего параграфа) сформулированная ниже теорема А, принадлежащая И. Г. Царькову [6, с. 132].

Пусть X, Y – банаховы пространства, $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, $B(M, Y)$ – класс всех ограниченных функций из M в Y с равномерной нормой, τ – топология на $B(M, Y)$, порожденная множествами

$$U_{x_1, \dots, x_n, y_1^*, \dots, y_n^*}^\varepsilon(g) = \{\varphi \in B(M, Y) : y_i^*[(\varphi - g)(x_i)] < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n\},$$

где $x_i \in M$, $y_i^* \in Y^*$, $g \in B(M, Y)$.

Через $\mathcal{A}$ обозначим класс всех наборов операторов $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T} : B(M, Y) \rightarrow B(M, Y)$ таких, что:

- а) $\forall \alpha \in T \quad \|A_\alpha\| \leq 1$;
- б) T вполне упорядочено и для всех $\alpha, \beta \in T$, $\alpha < \beta$, существует такое $\gamma < \beta$, что $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\gamma$ (в частности, это условие выполняется, если операторы коммутируют).

Обозначим

$$H_k^\omega(M) = \{f \in B(M, Y) \cap C(M, Y) : \forall \delta \geq 0 \quad \omega_k(f; \delta) \leq \omega(\delta)\},$$

где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, $\omega_k(f; \delta)$ – k -й модуль непрерывности функции f (определение см. в [6]).

ТЕОРЕМА А. Пусть X – банахово пространство, Y – рефлексивное банахово пространство, $f \in B(M, Y)$, операторы $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T} \in \mathcal{A}$ τ -непрерывны и инвариантны на τ -замкнутом множестве $P \subset H_k^\omega(M)$, для любого $\alpha \in T$ $A_\alpha f = f$.

Тогда существует функция $\varphi \in P$ такая, что $\|f - \varphi\| = \rho(f, P)$ и для любого $\alpha \in T$ $A_\alpha \varphi = \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Предположим, что P_Y приближается с любой точностью функциями класса Z_p .

Пусть Ω_k – множество всех отображений $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, переставляющих между собой отрезки $[m/2^k, (m+1)/2^k]$, $0 \leq m \leq 2^k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим набор отображений $\{U_{k\sigma}\} : V_\delta \rightarrow V_\delta$, положив

$$U_{k\sigma}(x(u)) = x(\sigma(u)).$$

Пусть $B_k : B(V_\delta, Y) \rightarrow B(V_\delta, Y)$ таково, что $\forall \varphi \in B(V_\delta, Y)$, $\forall x \in V_\delta$

$$B_k(\varphi(x)) = |\Omega_k|^{-1} \sum_{\sigma \in \Omega_k} (U_{k\sigma})^{-1} \varphi(U_{k\sigma}(x)).$$

Применим теорему А; в нашем случае $X = L^p[0, 1]$, $Y = \{\text{const}\}$, $M = V_\delta$, $f = P_Y$, $A_\alpha = B_\alpha$. Операторы B_α коммутируют (см. [6]), кроме того, очевидно, $B_\alpha P_Y = P_Y$ для любого α .

По предположению найдется функция $g : V_\delta \rightarrow Y$ такая, что $\omega(g^{([p])}; t) \equiv \omega_*(t) = o(t^{p-[p]})$ и $\|P_Y - g\| \leq \nu$.

Пусть $P = Z_p^{\omega_*} = \{f: X \rightarrow Y \mid \omega(f^{[p]}; t) \leq \omega_*(t)\}$; тогда $CP \subset H_{[p]+1}^{\omega_*}$ для некоторой константы C , и по теореме А существует функция $\varphi \in P$ такая, что $\|P_Y - \varphi\| \leq \nu$ и $B_\alpha \varphi = \varphi$ для любого α . Отсюда, в частности, вытекает, что φ – симметрическая функция.

Таким образом, функцию P_Y можно приблизить с любой степенью точности симметрическими функциями класса Z_p . Как показывает пример в § 4, множество V_δ μ -выпукло. Применяя лемму 5 на множестве $\text{int } V_\delta$ к приближающим функциям, получаем, что их порядок полиномиальности не превосходит $[p]$. Но тогда и порядок полиномиальности P_Y не превосходит $[p]$, что противоречит лемме 6. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Предположим противное. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая ε -выборка $A = A(\varepsilon): V_\delta \rightarrow Y$, что $A \in Z_p$. В силу теоремы 3 существует функция $x \in V_\delta$, для которой $\|Ax - Px\| \geq \nu$, где $P = P_Y$.

Пусть $\rho = \rho(x, Y)$, $\varkappa_1 = (Px - x)/(\rho + \varepsilon)$, $\varkappa_2 = (Ax - x)/(\rho + \varepsilon)$. Можно считать, что $\varepsilon \leq 1$. По определению отображений P и A имеем $\|\varkappa_1\| \leq 1$, $\|\varkappa_2\| \leq 1$, следовательно,

$$\|\varkappa_1 - \varkappa_2\| \geq \frac{\nu}{\rho + \varepsilon} \geq \frac{\nu}{2}.$$

Пространство L^p равномерно выпукло, поэтому найдется такое число $\alpha \in (0, 2)$, зависящее только от ν , что $\|\varkappa_1 + \varkappa_2\| \leq 2 - \alpha$. Отсюда

$$\left\| \frac{Px + Ax}{2} - x \right\| \leq \frac{(2 - \alpha)(\rho + \varepsilon)}{2} \leq \rho - \frac{\alpha\rho}{2} + \varepsilon;$$

учитывая, что для $x \in V_\delta$ $\rho \geq \delta$, получаем

$$\left\| \frac{Px + Ax}{2} - x \right\| \leq \rho - \frac{\alpha\delta}{2} + \varepsilon.$$

Фиксируя $\varepsilon_0 < \alpha\delta/2$, находим

$$\left\| \frac{Px + A(\varepsilon_0)x}{2} - x \right\| < \rho,$$

а это противоречит включению $(Px + A(\varepsilon_0)x)/2 \in Y$. Теорема доказана.

Автор благодарит С. В. Конягина за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Бердышев В. И. Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 3. С. 483–509.
2. Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and renorming in Banach spaces. N. Y.: Longman Scientific & Technical, 1993.
3. Семенов С. М. Симметрические функции на пространствах L^p : Дис. . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1973.
4. Shapiro H. S. Topics in approximation theory // Lecture Notes in Mathematics. № 187. Berlin, 1971.
5. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
6. Царьков И. Г. Сглаживание равномерных отображений в пространствах L^p // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 3. С. 123–140.