Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Анохин, О вложении решеток в некоторые решетки многообразий групп,
Изв. РАН. Сер. матем., 1999, том 63, выпуск 4, 19–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/im250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 02:30:30

УДК 512.543.2+512.567

М. И. Анохин

О вложении решеток в некоторые решетки многообразий групп

Для многообразия групп $\mathfrak{V}$ и его подмногообразия $\mathfrak{U}$ пусть $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{V} \rangle$ обозначает полную решетку всех многообразий групп $\mathfrak{X}$ таких, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{V}$. Пусть также $\Lambda = \mathbb{C} \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, где Λ_n – решетка всех подпространств n -мерного линейного пространства над полем из двух элементов, а $\mathbb{C} \prod$ – операция декартова произведения. Непустое подмножество K полной решетки M называется *полной подрешеткой* M , если $\sup_M X \in K$ и $\inf_M X \in K$ для любого непустого подмножества $X \subseteq K$.

Доказано, что Λ изоморфна полной подрешетке $\langle \mathfrak{A}_2^4, \mathfrak{A}_2^5 \rangle$. С другой стороны, легко видеть, что $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{U} \rangle$ изоморфна полной подрешетке Λ для любого локально конечного многообразия групп $\mathfrak{U}$. Из этого следуют некоторые критерии изоморфизма (полной) подрешетки решетки $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{U} \rangle$ для некоторого локально конечного многообразия групп $\mathfrak{U}$. Кроме того, показано, что существует подрешетка $\langle \mathfrak{A}_2^4, \mathfrak{A}_2^5 \rangle$, порожденная четырьмя элементами и содержащая бесконечную цепь.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Введение и формулировки основных результатов

Прежде чем формулировать основные результаты настоящей работы, уточним значения некоторых используемых терминов. Пусть M и N – некоторые полные решетки. Отображение $\varphi: M \rightarrow N$ назовем *полным гомоморфизмом*, если для любого *непустого* подмножества $X \subseteq M$ справедливы равенства $(\sup_M X)\varphi = \sup_N(X\varphi)$ и $(\inf_M X)\varphi = \inf_N(X\varphi)$. Очевидно, что любой полный гомоморфизм является решеточным гомоморфизмом. Непустое подмножество K полной решетки M называется *полной подрешеткой* решетки M , если $\sup_M X \in K$ и $\inf_M X \in K$ для любого *непустого* подмножества $X \subseteq K$. Это эквивалентно тому, что K является полной решеткой относительно ограничения на него порядка на M , причем $\sup_K X = \sup_M X$ и $\inf_K X = \inf_M X$ для любого *непустого* подмножества $X \subseteq K$. Таким образом, мы не требуем, чтобы полный гомоморфизм переводил наименьший элемент в наименьший и наибольший элемент в наибольший и чтобы полная подрешетка содержала наименьший и наибольший элементы исходной решетки. Отметим, что непустое подмножество полной решетки M может являться подрешеткой M и полной решеткой относительно ограничения на него порядка на M , но не быть полной подрешеткой решетки M , хотя всякая полная подрешетка M обладает обоими указанными свойствами. Скажем, что полная решетка M *вполне вложима* в полную решетку N , если существует инъективный полный гомоморфизм M в N (называемый *полным вложением*), или, что равносильно, M изоморфна полной подрешетке N .

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ – такие многообразия групп, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{V}$. Обозначим через $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{V} \rangle$ множество всех многообразий групп $\mathfrak{X}$ таких, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{V}$. Очевидно, что $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{V} \rangle$ является полной подрешеткой решетки всех многообразий групп. Положим $\Lambda = \mathcal{C} \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, где Λ_n – решетка всех подпространств n -мерного линейного пространства над полем из двух элементов, а $\mathcal{C} \prod$ – операция декартова произведения. Как обычно, $\mathfrak{A}_2$ обозначает многообразие всех (абелевых) групп, экспонента которых делит 2 (см. также § 2).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Решетка Λ вполне вложима в $\langle \mathfrak{A}_2^4, \mathfrak{A}_2^5 \rangle$.*

В то же время для любого локально конечного многообразия групп $\mathfrak{U}$ решетка $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{U} \rangle$ вполне вложима в Λ (см. лемму 5.3). Это вместе с основной теоремой позволяет получить следующие критерии изоморфизма (полной) подрешетке решетки $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{U} \rangle$ для некоторого локально конечного многообразия групп $\mathfrak{U}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Для произвольной (полной) решетки M следующие условия эквивалентны:*

- 1) M изоморфна (полной) подрешетке решетки $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{U} \rangle$ для некоторого локально конечного многообразия групп $\mathfrak{U}$;
- 2) M изоморфна (полной) подрешетке решетки $\langle \mathfrak{A}_2^4, \mathfrak{A}_2^5 \rangle$;
- 3) M изоморфна (полной) подрешетке решетки Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Согласно лемме 5.1 решетка Λ изоморфна двойственной ей решетке. Поэтому (полная) решетка удовлетворяет эквивалентным условиям следствия 1.1 тогда и только тогда, когда им удовлетворяет двойственная ей решетка.

В 1978 г. А. В. Кузнецов поставил вопросы о локальной конечности решетки всех локально конечных многообразий групп [1, вопрос 6.14а] и решетки всех многообразий групп [1, вопрос 6.14б].

Отрицательный ответ на второй вопрос следует из результата Ю. Г. Клеймана [2, предложение 6.11], согласно которому существует многообразие групп $\mathfrak{V}$ такое, что $F_2(\mathfrak{V})$ содержит вербальную элементарную абелеву 2-подгруппу G счетного ранга, все подгруппы которой также вербальны в $F_2(\mathfrak{V})$ (обозначения см. в § 2). Действительно, решетка всех вербальных подгрупп $F_{\infty}(\mathfrak{V})$, антиизоморфная решетке всех подмногообразий $\mathfrak{V}$, гомоморфно отображается на решетку всех вербальных подгрупп $F_2(\mathfrak{V})$ (см. п. 1) леммы 5.2), которая содержит в качестве подрешетки решетку всех подгрупп G . Последняя решетка не является локально конечной, так как она содержит подрешетку, изоморфную Λ (это следует из леммы 3.6), а Λ не локально конечна ввиду леммы 5.5. Таким образом, решетка всех подмногообразий $\mathfrak{V}$ не локально конечна.

Для получения отрицательного ответа на второй вопрос можно также использовать результат А. М. Сторожева [3], который отличается от сформулированного выше результата Ю. Г. Клеймана тем, что подгруппа G изоморфна $F_{\infty}(\mathfrak{A})$, а не $F_{\infty}(\mathfrak{A}_2)$. В этом случае нужно пользоваться тем, что решетка всех подгрупп $F_{\infty}(\mathfrak{A})$ не локально конечна (из леммы 5.4 нетрудно вывести, что даже решетка всех подгрупп $F_2(\mathfrak{A})$ не локально конечна). Отметим, что многообразие $\mathfrak{V}$ из формулировки результата Ю. Г. Клеймана может быть выбрано разрешимым ступени не более 7.

Из следующего утверждения вытекает, что первый вопрос также имеет отрицательный ответ.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Существует подрешетка $\langle \mathfrak{A}_2^4, \mathfrak{A}_2^5 \rangle$, порожденная четырьмя элементами и содержащая бесконечную цепь. В частности, решетка $\langle \mathfrak{A}_2^4, \mathfrak{A}_2^5 \rangle$ не локально конечна.*

Отметим, что число порождающих бесконечной подрешетки $\langle \mathfrak{A}_2^4, \mathfrak{A}_2^5 \rangle$ не может быть уменьшено, так как ввиду известного результата Дедекинда любая модулярная решетка (см., например, [4, гл. III, теорема 8]) с тремя порождающими содержит не более 28 элементов.

Основным методом работы является метод, развитый Ю. Г. Клейманом в [2], который в свою очередь восходит к идеям работ [5], [6]. Этот метод позволяет сводить изучение некоторых подгрупп некоторой относительно свободной группы к изучению подмножеств в более просто устроенных относительно свободных группах.

§ 2. Определения, обозначения и необходимые факты

Под $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_e$, $\mathfrak{A}_e$ понимается соответственно единичное многообразие, многообразие всех групп, многообразие всех абелевых групп, бернсайдово многообразие экспоненты e (т.е. многообразие всех групп, экспонента которых делит e) и многообразие $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}_e$. Пусть также $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел; $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – поле из двух элементов; $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}$; $\text{End } G$ – полугруппа всех эндоморфизмов группы G ; $\text{Aut } G$ – группа всех автоморфизмов группы G ; KG – групповое кольцо группы G над кольцом K ; G' – коммутант группы G ; G^e – подгруппа, порожденная e -ми степенями всевозможных элементов G (т.е. вербальная подгруппа группы G , соответствующая многообразию $\mathfrak{B}_e$); $a^b = b^{-1}ab$, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ (коммутатор a и b), где a, b – элементы произвольной группы. Коммутатор вида $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ предполагается левонормированным, т.е. равным $\dots [[a_1, a_2], a_3], \dots, a_n]$. Отношение изоморфизма будет обозначаться символом $\cong$, а операция прямого произведения групп – символом $\amalg$ (последний символ используется также для обозначения операции произведения элементов). Как обычно, сумма пустого множества слагаемых считается равной нулю, а произведение пустого множества сомножителей – единице.

Записи вида $\text{gr } M$, $\text{sp } M$, $\text{lt } M$ будут обозначать соответственно группу, линейное пространство и решетку, порожденную множеством M . Если $n \in \mathbb{N}_1$, то через $M^{(n)}$ мы обозначаем декартово произведение n экземпляров множества M , т.е. множество всех последовательностей из n элементов множества M . Иногда мы будем записывать такие последовательности в скобках, а иногда без них. С каждым отображением $\varphi: M \rightarrow N$ можно естественным образом связать отображение $M^{(n)} \rightarrow N^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}_1$), переводящее произвольную последовательность $(m_1, \dots, m_n) \in M^{(n)}$ в последовательность $(m_1\varphi, \dots, m_n\varphi) \in N^{(n)}$. Это отображение мы будем обозначать той же буквой, что и исходное.

Если полная решетка M вполне вложима в полную решетку N (см. § 1), то мы будем писать $M \leq_c N$. Как и выше, через Λ_n будет обозначаться решетка всех подпространств n -мерного линейного пространства над полем $\mathbb{Z}_2$, а через $\amalg$ – операция декартова произведения. Для произвольной решетки M обозначим через M^* решетку, двойственную M .

Пусть $F = F_\infty$ – свободная группа счетного ранга. Зафиксируем алфавит $t_1, t_2, \dots$ в качестве системы свободных порождающих F и будем называть элементы этой группы *словами* от $t_1, t_2, \dots$. Буквы t_i можно рассматривать как пе-

ременные, тогда *значением* слова $v(t_1, \dots, t_n)$ ($n \in \mathbb{N}_1$) в произвольной группе G называется любой элемент вида $v(g) = v(g_1, \dots, g_n)$, где $g = g_1, \dots, g_n \in G^{(n)}$. Множество всех значений слова $v(t)$ в G мы обозначим через $v[G]$, а соответствующую вербальную подгруппу, т.е. $\text{gr } v[G]$, через $v(G)$.

Если $\mathfrak{V}$ – многообразие групп, то $F_n(\mathfrak{V})$ будет обозначать $\mathfrak{V}$ -свободную группу ранга n (при $n = \infty$ – счетного ранга). Вербальную подгруппу произвольной группы G , соответствующую многообразию $\mathfrak{V}$, мы будем обозначать через $\mathfrak{V}(G)$. Напомним, что для многообразий групп $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ через $\mathfrak{UV}$ обозначается многообразие, состоящее из всевозможных расширений групп из $\mathfrak{U}$ посредством групп из $\mathfrak{V}$ (см. также [7, определение 21.11]), а через $[\mathfrak{U}, \mathfrak{V}]$ – многообразие, определенное множеством тождеств $\{[u(t), v(t)] = 1 \mid u(t) \in \mathfrak{U}(F), v(t) \in \mathfrak{V}(F)\}$ (см. также [7, гл. 2, § 1]). Если G – некоторая относительно свободная группа, а H – ее вербальная подгруппа, то через $\text{Verb}(G, H)$ мы будем обозначать полную решетку всех вербальных (равносильно – вполне характеристических) подгрупп группы G , содержащихся в H .

Пусть G и H – некоторые группы, π – эпиморфизм $G \rightarrow H$, а K – ядро π . Тогда каждому эндоморфизму φ группы G такому, что $K\varphi \subseteq K$, можно сопоставить единственный эндоморфизм φ' группы H , удовлетворяющий условию $\pi\varphi' = \varphi\pi$. Этот эндоморфизм φ' мы будем называть *индуцированным* эндоморфизмом φ (относительно эпиморфизма π). Отметим, что если G относительно свободна, то всякий эндоморфизм группы H индуцируется некоторым эндоморфизмом группы G . Если $H = G/K$, то индуцированные эндоморфизмы будут подразумеваться взятыми относительно естественного эпиморфизма $G \rightarrow G/K$.

Определим теперь, следуя [2], объекты, с которыми мы будем работать. Пусть $\mathfrak{R}$ – произвольное многообразие, отличное от $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_2^3 \cap [\mathfrak{A}_2^2, \mathfrak{E}]$; $R = F_\infty(\mathfrak{R})$, $A = F_\infty(\mathfrak{A}_2\mathfrak{R})$, $S = F_\infty(\mathfrak{L}\mathfrak{R})$, $H = F_\infty(\mathfrak{A}_2)$ – свободные группы счетного ранга соответствующих многообразий; $\{x_1, x_2, \dots\}$, $\{y_1, y_2, \dots\}$, $\{s_1, s_2, \dots\}$, $\{h_1, h_2, \dots\}$ – системы свободных порождающих R, A, S, H соответственно. Для произвольного $n \in \mathbb{N}_1$ через R_n будет обозначаться группа $\text{gr}\{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть также $L = \mathfrak{R}(S)$, тогда легко видеть, что L – свободная группа счетного ранга многообразия $\mathfrak{L}$ и L^4 – элементарная абелева 2-группа, содержащаяся в центре L .

Эпиморфизмы $S \rightarrow A$ и $A \rightarrow R$, отображающие соответственно s_i в y_i и y_i в x_i для всех $i \in \mathbb{N}_1$, мы называем *естественными*. Говоря об индуцировании эндоморфизмов группы A эндоморфизмами группы S , мы будем подразумевать индуцирование относительно естественного эпиморфизма $S \rightarrow A$. В данном случае индуцированный эндоморфизм существует для каждого эндоморфизма группы S , так как ядром естественного эпиморфизма $S \rightarrow A$ является вполне характеристическая подгруппа L^2 группы S .

ЛЕММА 2.1 [2, лемма 4.1]. 1) Пусть U – множество представителей всех смежных классов $L \setminus L^2$ по L^2 . Тогда множество $\{u^4 \mid u \in U\}$ является базисом элементарной абелевой 2-группы L^4 .

2) Пусть $v_1(t), v_2(t) \in \mathfrak{R}(F)$. Тогда

$$v_1^4(s) = v_2^4(s) \iff v_1(y) = v_2(y).$$

Как уже было отмечено выше, ядром естественного эпиморфизма $S \rightarrow A$ является L^2 . Поэтому если $v_1(s) \equiv v_2(s) \pmod{L^2}$, где $v_1(t), v_2(t) \in \mathfrak{R}(F)$, то

$v_1(y) = v_2(y)$ и $v_1^4(s) = v_2^4(s)$ по п. 2) леммы 2.1. Отсюда следует, что базис из п. 1) леммы 2.1 совпадает с множеством $t_1^4[L] \setminus \{1\}$ всех неединичных четвертых степеней элементов L (так как если $g^4 \neq 1$, где $g \in L$, то $g \notin L^2$) и, в частности, не зависит от выбора множества представителей U . Из п. 2) леммы 2.1 также вытекает, что отображение η , заданное формулой

$$v(y)\eta = v^4(s), \quad \text{где } v(t) \in \mathfrak{R}(F),$$

определено корректно и отображает взаимно однозначно $\mathfrak{R}(A)$ на $t_1^4[L]$. В частности, $\mathfrak{R}(A) \setminus \{1\}$ отображается на базис из п. 1) леммы 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Очевидно, что $\text{gr}((v[A] \setminus \{1\})\eta) = \text{gr}(v[A]\eta) = v^4(S)$ для любого $v(t) \in \mathfrak{R}(F)$, причем $(v[A] \setminus \{1\})\eta$ является базисом группы $v^4(S)$ как подмножество базиса $t_1^4[L] \setminus \{1\}$ группы L^4 . Поэтому если $\{v_\omega(t) \mid \omega \in \Omega\}$ – некоторое семейство слов из $\mathfrak{R}(F)$ такое, что $v_{\omega_1}[A] \cap v_{\omega_2}[A] = \{1\}$ для любых различных $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, то произведение подгрупп $v_\omega^4(S)$ по всем $\omega \in \Omega$ является прямым, так как эти подгруппы порождаются попарно непересекающимися подмножествами $(v_\omega[A] \setminus \{1\})\eta$ ($\omega \in \Omega$) базиса $t_1^4[L] \setminus \{1\}$ группы L^4 .

В настоящей работе мы будем предполагать, что $\mathfrak{R}$ – локально конечное многообразие, экспонента которого является степенью двойки. Это равносильно тому, что R_n является конечной 2-группой для любого $n \in \mathbb{N}_1$. Если $G \in \{R, A\}$ и $g \in G$, то через $\bar{g}$ мы будем обозначать gG^2 , т. е. образ g при естественном эпиморфизме $G \rightarrow G/G^2$. Для произвольной последовательности $g = (g_1, \dots, g_n) \in G^{(n)}$ ($G \in \{R, A\}, n \in \mathbb{N}_1$) мы полагаем $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n) \in (G/G^2)^{(n)}$.

§ 3. Полное вложение в решетку некоторых вербальных подгрупп

Нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. Пусть G – некоторая относительно свободная группа счетного ранга, $z_1, z_2, \dots$ – система свободных порождающих G , а $G_n = \text{gr}\{z_1, \dots, z_n\}$ при $n \in \mathbb{N}_1$. Предположим, что G_n является конечной p -группой для любого $n \in \mathbb{N}_1$ (p – некоторое простое число). Тогда произвольная конечная последовательность элементов группы G , линейно независимая по модулю $G^p G'$, может быть дополнена до некоторой системы свободных порождающих группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – конечная последовательность элементов группы G , линейно независимая по модулю $G^p G'$. Если $G = \{1\}$, то g пуста, и утверждение леммы тривиально. Предположим теперь, что $G \neq \{1\}$. Выберем некоторое $n \in \mathbb{N}_1$ такое, что $g \subseteq G_n$. Очевидно, что $gG_n^p G'_n \subseteq G_n/G_n^p G'_n$ линейно независима, поэтому существует последовательность $g' \subseteq G_n$ такая, что $gG_n^p G'_n, g'G_n^p G'_n$ – базис $G_n/G_n^p G'_n$. В частности, система g, g' порождает G_n по модулю $G_n^p G'_n$. Последняя подгруппа совпадает с подгруппой Фраттини группы G_n , так как G_n – конечная p -группа (это вытекает из [8, теорема 12.2.1]). Поэтому система g, g' порождает G_n и, следовательно, порождает эту группу свободно ввиду ее хопфовости и того, что $|\{g, g'\}| = n$ (см. [7, утверждение 41.33]). Тогда $g, g', z_{n+1}, z_{n+2}, \dots$ – искомая система свободных порождающих группы G , содержащая g . Лемма доказана.

Пусть $m \in \mathbb{N}_1$. В этом параграфе через I_m мы будем обозначать множество всех $a \in A^{(m)}$ таких, что система $\bar{a}$ линейно независима (как система элементов элементарной абелевой 2-группы A/A^2). На этом множестве введем следующее отношение эквивалентности:

$$a \sim b \iff \text{gr}\{\bar{a}\} = \text{gr}\{\bar{b}\}, \quad a, b \in I_m.$$

Сформулируем некоторые определения. Переменная t_n называется *существенной* для слова $v(t) \in F$, если $v(t)\delta_n \neq v(t)$, где δ_n – эндоморфизм F , для которого $t_i\delta_n = t_i$ при $i \neq n$ и $t_n\delta_n = 1$. Очевидно, что переменная существенна для слова $v(t)$ тогда и только тогда, когда она входит в несократимую запись слова $v(t)$ в алфавите $t_1, t_2, \dots$. Слово $v(t) = v(t_1, \dots, t_m) \in F$, для которого переменные $t_1, \dots, t_m$ (и только они) существенны, назовем *невыврожденным*, если для любой последовательности $a \in A^{(m)}$

$$v(a) = 1 \iff \bar{a} \text{ линейно зависима.} \quad (1)$$

Легко видеть, что если среди переменных $t_1, \dots, t_m$ имеются несущественные для слова $v(t)$, то эквивалентность (1) заведомо не выполняется. Кроме того, если $\{t_1, \dots, t_m\}$ совпадает с множеством существенных переменных для слова $v(t)$, то m определяется словом $v(t)$ однозначно. В дальнейшем мы будем предполагать, что если невырожденное слово $v(t)$ записано в виде $v(t_1, \dots, t_m)$, то переменные $t_1, \dots, t_m$ (и только они) существенны для $v(t)$.

Пусть слово $v(t_1, \dots, t_m) \in \mathfrak{R}(F)$ невырождено. Положим

$$U_0 = \text{gr}\{v(a)\eta v(b)\eta \mid a, b \in I_m, a \sim b\}.$$

ЛЕММА 3.2. *Подгруппа U_0 вербальна (равносильно – вполне характеристична) в S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = v(a)\eta v(b)\eta$, где $a, b \in I_m$ и $a \sim b$, а $\varphi \in \text{End } S$. Покажем, что $g\varphi \in U_0$. Обозначим через φ' эндоморфизм A , индуцированный эндоморфизмом φ . Тогда для любого $w(t) \in \mathfrak{R}(F)$

$$w(y)\eta\varphi = w^4(s)\varphi = (w(s)\varphi)^4 = w(s)\varphi\pi\eta = w(y)\varphi'\eta, \quad (2)$$

где π – естественный эпиморфизм $S \rightarrow A$. Поэтому

$$g\varphi = v(a)\eta\varphi v(b)\eta\varphi = v(a)\varphi'\eta v(b)\varphi'\eta = v(a\varphi')\eta v(b\varphi')\eta. \quad (3)$$

Пусть φ'' – эндоморфизм A/A^2 , индуцированный эндоморфизмом φ' , а $W = \text{gr}\{\bar{a}\} = \text{gr}\{\bar{b}\}$ (последнее равенство вытекает из того, что $a \sim b$). Возможны следующие два случая:

1) φ'' инъективен на W . Тогда системы $\overline{a\varphi'} = \bar{a}\varphi''$ и $\overline{b\varphi'} = \bar{b}\varphi''$ линейно независимы, т.е. $a\varphi', b\varphi' \in I_m$. Кроме того, $\text{gr}\{\overline{a\varphi'}\} = \text{gr}\{\bar{a}\}\varphi'' = \text{gr}\{\bar{b}\}\varphi'' = \text{gr}\{\overline{b\varphi'}\}$. Это значит, что $a\varphi' \sim b\varphi'$. Поэтому $g\varphi \in U_0$ ввиду формулы (3) и определения U_0 .

2) φ'' неинъективен на W . Тогда системы $\overline{a\varphi'} = \bar{a}\varphi''$ и $\overline{b\varphi'} = \bar{b}\varphi''$ линейно зависимы. Следовательно, $v(a\varphi') = v(b\varphi') = 1$ (так как $v(t)$ невырождено), поэтому $g\varphi = 1$ ввиду формулы (3).

Таким образом, в обоих случаях $g\varphi \in U_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Для любых $a, b \in I_m$*

$$v(a) = v(b) \implies a \sim b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(a) = v(b)$, где $a, b \in I_m$. Предположим, что $\text{gr}\{\bar{b}\} \not\subseteq \text{gr}\{\bar{a}\}$. Тогда существует некоторый элемент b_0 последовательности b такой, что $\bar{b}_0 \notin \text{gr}\{\bar{a}\}$ и, следовательно, система $\bar{a}, \bar{b}_0$ линейно независима. Из леммы 3.1 вытекает, что существует $\varphi \in \text{End } A$, действующий на элементах a тождественно и переводящий b_0 в 1. Тогда

$$v(a) = v(a\varphi) = v(a)\varphi = v(b)\varphi = v(b\varphi) = 1,$$

так как система $\overline{b\varphi}$ линейно зависима и слово $v(t)$ невырождено. Следовательно, система $\bar{a}$ также линейно зависима (ввиду невырожденности $v(t)$), что противоречит тому, что $a \in I_m$. Таким образом, $\text{gr}\{\bar{b}\} \subseteq \text{gr}\{\bar{a}\}$. Из этого включения следует равенство $\text{gr}\{\bar{a}\} = \text{gr}\{\bar{b}\}$, так как $|\text{gr}\{\bar{a}\}| = |\text{gr}\{\bar{b}\}| = 2^m$ ввиду линейной независимости систем $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Это означает, что $a \sim b$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. *Пусть T – произвольное множество представителей всех классов эквивалентности I_m по отношению $\sim$. Тогда $\{v(a)\eta U_0 \mid a \in T\}$ – базис $v^4(S)/U_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду замечания 2.1 множество

$$\begin{aligned} \{v(a)\eta \mid a \in I_m\} &= \{v(a)\eta \mid a \in A^{(m)}, \bar{a} \text{ линейно независима}\} \\ &= (v[A] \setminus \{1\})\eta \end{aligned}$$

является базисом $v^4(S)$ (последнее равенство справедливо ввиду невырожденности $v(t)$). На этом базисе мы определим следующее отношение эквивалентности:

$$v(a)\eta \approx v(b)\eta \iff a \sim b, \quad a, b \in I_m.$$

Это определение корректно, так как если $v(a)\eta = v(a')\eta$, где $a, a' \in I_m$, то $v(a) = v(a')$ и $a \sim a'$ по лемме 3.3. Теперь утверждение леммы вытекает из того, что $\{v(a)\eta \mid a \in T\}$ содержит в точности по одному элементу из каждого класса эквивалентности $\{v(a)\eta \mid a \in I_m\}$ по отношению $\approx$ (это следует непосредственно из определения отношения $\approx$). Лемма доказана.

Пусть теперь $\{v_i(t_1, \dots, t_m) \mid i = 1, \dots, n\}$ – семейство невырожденных слов из $\mathfrak{R}(F)$ такое, что $v_i[A] \cap v_j[A] = \{1\}$ при $i \neq j$. Пусть также T – произвольное множество представителей всех классов эквивалентности I_m по отношению $\sim$. Тогда по лемме 3.2 подгруппы

$$U_i = \text{gr}\{v_i(a)\eta v_i(b)\eta \mid a, b \in I_m, a \sim b\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

вербальны в S . Кроме того, $\{v_i(a)\eta U_i \mid a \in T\}$ – базис $v_i^4(S)/U_i$ для каждого $i = 1, \dots, n$ в силу леммы 3.4.

Положим $V = v_1^4(S) \dots v_n^4(S)$ и $U = U_1 \dots U_n$. В силу тривиальности пересечения $v_i[A]$ и $v_j[A]$ при $i \neq j$ и замечания 2.1 эти произведения являются прямыми. Поэтому отображение

$$(g_1 \dots g_n)U \rightarrow (g_1 U_1, \dots, g_n U_n), \quad g_i \in v_i^4(S), \quad (4)$$

является изоморфизмом между V/U и $\prod_{i=1}^n v_i^4(S)/U_i$. Для $i \in \{1, \dots, n\}$ и $a \in T$ положим $w_i(a) = v_i(a)\eta U$. Тогда $\{w_i(a) \mid i \in \{1, \dots, n\}, a \in T\}$ – базис V/U , так как при изоморфизме (4) он отображается на базис $\prod_{i=1}^n v_i^4(S)/U_i$. Пусть также $W(a) = \text{gr}\{w_1(a), \dots, w_n(a)\}$ для произвольного $a \in T$. Тогда $w_1(a), \dots, w_n(a)$ – базис $W(a)$ и V/U разлагается в прямое произведение подгрупп $W(a)$ по всем $a \in T$.

Пусть E – n -мерное линейное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$, а $e_1, \dots, e_n$ – некоторый базис E . Обозначим через ξ_a , где $a \in T$, изоморфизм $E \rightarrow W(a)$, отображающий e_i в $w_i(a)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Определим теперь отображение ξ , переводящее произвольное подпространство $X \subseteq E$ в (прямое) произведение подгрупп $X\xi_a$ по всем $a \in T$.

ЛЕММА 3.5. *Отображение ξ – решеточное (и, следовательно, полное) вложение решетки всех подпространств E (изоморфной Λ_n) в решетку $\text{Verb}(S/U, V/U)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что ξ – решеточное вложение решетки всех подпространств E в решетку подгрупп V/U . Осталось доказать, что для любого подпространства $X \subseteq E$ подгруппа $X\xi$ вербальна (равносильно – вполне характеристична) в S/U .

Пусть $a \in T$ и $\varphi \in \text{End}(S/U)$. Достаточно показать, что $X\xi_a\varphi \subseteq X\xi$. Пусть $e = e_{i_1} + \dots + e_{i_k}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$) – произвольный элемент X ; тогда $e\xi_a = w_{i_1}(a) \dots w_{i_k}(a) = (v_{i_1}(a)\eta \dots v_{i_k}(a)\eta)U$.

Обозначим через φ_0 некоторый эндоморфизм группы S , индуцирующий эндоморфизм φ в S/U , а через φ'_0 – эндоморфизм группы A , индуцированный φ_0 . Тогда в силу формулы (2) имеем

$$\begin{aligned} e\xi_a\varphi &= (v_{i_1}(a)\eta\varphi_0 \dots v_{i_k}(a)\eta\varphi_0)U \\ &= (v_{i_1}(a)\varphi'_0\eta \dots v_{i_k}(a)\varphi'_0\eta)U \\ &= (v_{i_1}(a\varphi'_0)\eta \dots v_{i_k}(a\varphi'_0)\eta)U. \end{aligned}$$

Возможны следующие два случая.

1. Система $\overline{a\varphi'_0}$ линейно независима. Тогда $a\varphi'_0 \in I_m$, следовательно, $a\varphi'_0 \sim a'$ для некоторого $a' \in T$. Поэтому $v_{i_j}(a\varphi'_0)\eta \equiv v_{i_j}(a')\eta \pmod{U_{i_j}}$ для всех $j = 1, \dots, k$. Отсюда следует, что

$$e\xi_a\varphi = (v_{i_1}(a')\eta \dots v_{i_k}(a')\eta)U = w_{i_1}(a') \dots w_{i_k}(a') = e\xi_{a'} \in X\xi_{a'} \subseteq X\xi.$$

2. Система $\overline{a\varphi'_0}$ линейно зависима. Тогда $v_{i_j}(a\varphi'_0) = 1$ для всех $j = 1, \dots, k$ (ввиду невырожденности $v_{i_j}(t)$) и, следовательно, $e\xi_a\varphi = U \in X\xi$.

Таким образом, в обоих случаях $e\xi_a\varphi \in X\xi$. Отсюда вытекает, что $X\xi_a\varphi \subseteq X\xi$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. Пусть $\{G_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ – некоторое семейство групп, а M_ω – некоторая (полная) подрешетка решетки Γ_ω всех подгрупп группы G_ω ($\omega \in \Omega$). Тогда

$$M = \left\{ \prod_{\omega \in \Omega} X_\omega \mid X_\omega \in M_\omega \text{ для любого } \omega \in \Omega \right\}$$

является (полной) подрешеткой решетки Γ всех подгрупп $\prod_{\omega \in \Omega} G_\omega$ и $M \cong \mathcal{C} \prod_{\omega \in \Omega} M_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – отображение, сопоставляющее произвольному $(X_\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{C} \prod_{\omega \in \Omega} \Gamma_\omega$ прямое произведение $\prod_{\omega \in \Omega} X_\omega \in \Gamma$. Тогда непосредственно проверяется, что φ – полное вложение $\mathcal{C} \prod_{\omega \in \Omega} \Gamma_\omega$ в Γ . Утверждение леммы теперь следует из того, что $(\mathcal{C} \prod_{\omega \in \Omega} M_\omega)\varphi = M$. Лемма доказана.

Следующий результат является основным в настоящем параграфе.

ЛЕММА 3.7. Пусть существует семейство

$$\{v_{ij}(t_1, \dots, t_{m_i}) \mid i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, n_i\} \quad (5)$$

невырожденных слов из $\mathfrak{A}(F)$ такое, что $v_{i_1 j_1}[A] \cap v_{i_2 j_2}[A] = \{1\}$ при $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$. Тогда

$$\mathcal{C} \prod_{i=1}^{\infty} \Lambda_{n_i} \leq_c \text{Verb}(S, L^4).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть семейство (5) удовлетворяет условию леммы. Положим $V_i = v_{i1}^4(S) \dots v_{in_i}^4(S)$ для произвольного $i \in \mathbb{N}_1$. Тогда $\Lambda_{n_i} \leq_c \text{Verb}(S/U_i, V_i/U_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}_1$, где U_i – некоторая вербальная подгруппа группы S , содержащаяся в V_i (см. лемму 3.5). Следовательно,

$$\mathcal{C} \prod_{i=1}^{\infty} \Lambda_{n_i} \leq_c \mathcal{C} \prod_{i=1}^{\infty} \text{Verb}(S/U_i, V_i/U_i). \quad (6)$$

Из леммы 3.6 вытекает, что

$$M = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid X_i \in \text{Verb}(S/U_i, V_i/U_i) \text{ для любого } i \in \mathbb{N}_1 \right\}$$

является полной подрешеткой решетки всех подгрупп $\prod_{i=1}^{\infty} V_i/U_i$ и

$$\mathcal{C} \prod_{i=1}^{\infty} \text{Verb}(S/U_i, V_i/U_i) \cong M. \quad (7)$$

Пусть $V = V_1 V_2 \dots$ и $U = U_1 U_2 \dots$. В силу тривиальности пересечения $v_{i_1 j_1}[A]$ и $v_{i_2 j_2}[A]$ при $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ и замечания 2.1 эти произведения являются прямыми. Поэтому отображение

$$(g_1 U_1, g_2 U_2, \dots) \rightarrow (g_1 g_2 \dots) U, \quad g_i \in V_i,$$

является изоморфизмом между $\prod_{i=1}^{\infty} V_i/U_i$ и V/U , который мы обозначим через φ (здесь $g_i = 1$ для всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}_1$, поэтому произведение $g_1 g_2 \dots$ определено). Очевидно, что если $X \in M$, т.е. $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_i = Y_i/U_i \in \text{Verb}(S/U_i, V_i/U_i)$ (или, эквивалентно, $Y_i \in \text{Verb}(S, V_i)$) для каждого $i \in \mathbb{N}_1$, то $X\varphi = (Y_1 Y_2 \dots)/U \in \text{Verb}(S/U, V/U)$. Поэтому отображение $X \rightarrow X\varphi$ ($X \in M$) – полное вложение M в $\text{Verb}(S/U, V/U)$, так как M и $\text{Verb}(S/U, V/U)$ – полные подрешетки решеток всех подгрупп $\prod_{i=1}^{\infty} V_i/U_i$ и V/U соответственно. Таким образом,

$$M \leq_c \text{Verb}(S/U, V/U). \quad (8)$$

Утверждение леммы теперь следует из соотношений (6)–(8) и очевидной полной вложимости $\text{Verb}(S/U, V/U)$ в $\text{Verb}(S, L^4)$. Лемма доказана.

§ 4. Определение и свойства некоторых слов

Цель этого параграфа – построение семейства (5), удовлетворяющего условию леммы 3.7 и такого, что последовательность $n_1, n_2, \dots$ не ограничена. Такое семейство будет построено в случае, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2^2$.

Мы начнем с некоторых результатов о групповом кольце $\mathbb{Z}_2 G$, где $G = F_{\infty}(\mathfrak{A}_2)$ – элементарная абелева 2-группа счетного ранга. Во избежание недоразумений отметим, что линейная (не)зависимость элементов некоторой элементарной абелевой 2-группы всегда означает их линейную (не)зависимость как элементов этой группы, а не группового кольца. Через Δ будет обозначаться фундаментальный идеал кольца $\mathbb{Z}_2 G$, т.е. идеал $\mathbb{Z}_2 G$, порожденный всевозможными элементами вида $g - 1$, где $g \in G$. Если $n \in \mathbb{N}_0$, то Δ^n обозначает n -ю степень идеала Δ . В частности, $\Delta^0 = \mathbb{Z}_2 G$.

Фиксируем некоторый базис $z_1, z_2, \dots$ группы G . Для произвольного конечного множества $\sigma \subseteq \mathbb{N}_1$ положим $\beta_{\sigma} = \prod_{i \in \sigma} (z_i - 1)$. В частности, $\beta_{\emptyset} = 1$. Очевидно, что $(g - 1)^2 = 0$ для любого $g \in G$, поэтому для произвольных конечных множеств $\sigma, \tau \subseteq \mathbb{N}_1$

$$\beta_{\sigma} \beta_{\tau} = \begin{cases} \beta_{\sigma \cup \tau}, & \text{если } \sigma \cap \tau = \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

ЛЕММА 4.1 (см. также [6, лемма 1.8]). *Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ $\{\beta_{\sigma} \mid \sigma \subseteq \mathbb{N}_1, n \leq |\sigma| < \infty\}$ – базис Δ^n над полем $\mathbb{Z}_2$. В частности, если $|\sigma| < n$, то $\beta_{\sigma} \notin \Delta^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = z_{i_1} \dots z_{i_k}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k$) – произвольный элемент G . Тогда

$$g = \prod_{j=1}^k ((z_{i_j} - 1) + 1) = \sum_{\sigma \subseteq \{i_1, \dots, i_k\}} \beta_{\sigma}, \quad (10)$$

$$g - 1 = \sum_{\emptyset \neq \sigma \subseteq \{i_1, \dots, i_k\}} \beta_{\sigma}. \quad (11)$$

Очевидно, что $\text{sp}\{\beta_{\sigma} \mid \sigma \subseteq \mathbb{N}_1, n \leq |\sigma| < \infty\} \subseteq \Delta^n$. Кроме того, из формул (10), (11) и (9) следует, что для любых $g, g_1, \dots, g_n \in G$ справедливо равенство

$g \prod_{i=1}^n (g_i - 1) = \sum_{j=1}^l \beta_{\sigma_j}$, где $\sigma_j \subseteq \mathbb{N}_1$ и $n \leq |\sigma_j| < \infty$ при $j = 1, \dots, l$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta^n &= \text{sp} \left\{ g \prod_{i=1}^n (g_i - 1) \mid g, g_1, \dots, g_n \in G \right\} \\ &\subseteq \text{sp} \{ \beta_\sigma \mid \sigma \subseteq \mathbb{N}_1, n \leq |\sigma| < \infty \}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{ \beta_\sigma \mid \sigma \subseteq \mathbb{N}_1, n \leq |\sigma| < \infty \}$ порождает Δ^n как линейное пространство над $\mathbb{Z}_2$.

Из формулы (10) вытекает, что $\text{sp} \{ \beta_\sigma \mid \sigma \subseteq \{1, \dots, m\} \} = \mathbb{Z}_2 \text{gr} \{ z_1, \dots, z_m \}$ для любого $m \in \mathbb{N}_1$. Следовательно, система $\{ \beta_\sigma \mid \sigma \subseteq \{1, \dots, m\} \}$ линейно независима, так как ее мощность совпадает с размерностью $\mathbb{Z}_2 \text{gr} \{ z_1, \dots, z_m \}$ над $\mathbb{Z}_2$. Ввиду произвольности m это означает, что система $\{ \beta_\sigma \mid \sigma \subseteq \mathbb{N}_1, |\sigma| < \infty \}$ линейно независима. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть $g_1, \dots, g_n \in G$, где $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$\prod_{i=1}^n (g_i - 1) = 0 \iff \text{система } g_1, \dots, g_n \text{ линейно зависима.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала система $g_1, \dots, g_n$ линейно зависима. Тогда $g_l = g_{i_1} \dots g_{i_k}$ для некоторых $l, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $i_1 < \dots < i_k$ и $l \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Следовательно,

$$g_l - 1 = \left(\prod_{j=1}^k ((g_{i_j} - 1) + 1) \right) - 1 = \sum_{\emptyset \neq \sigma \subseteq \{i_1, \dots, i_k\}} \prod_{i \in \sigma} (g_i - 1).$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{i=1}^n (g_i - 1) = \sum_{\emptyset \neq \sigma \subseteq \{i_1, \dots, i_k\}} \prod_{i \in \sigma} (g_i - 1) \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}} (g_j - 1) = 0,$$

так как каждое слагаемое делится на $(g_{i_m} - 1)^2 = 0$ при некотором m .

Пусть теперь система $g_1, \dots, g_n$ линейно независима. Тогда

$$\prod_{i=1}^n (g_i - 1) = \sum_{\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in \sigma} g_i \neq 0,$$

так как $\{ \prod_{i \in \sigma} g_i \mid \sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \}$ — непустое семейство различных элементов группы G . Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть $g_1, \dots, g_n, g'_1, \dots, g'_n \in G$, где $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда если

$$\prod_{i=1}^n (g_i - 1) = \alpha \prod_{i=1}^n (g'_i - 1) \neq 0$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}_2 G$, то $\text{gr} \{ g_1, \dots, g_n \} = \text{gr} \{ g'_1, \dots, g'_n \}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенств $\prod_{i=1}^n (g_i - 1) \neq 0$, $\prod_{i=1}^n (g'_i - 1) \neq 0$ и леммы 4.2 системы $g_1, \dots, g_n$ и $g'_1, \dots, g'_n$ линейно независимы. Если $n = 0$, то утверждение леммы тривиально. Предположим теперь, что $n \geq 1$. Фиксируем произвольное $j \in \{1, \dots, n\}$. Переходя к факторгруппе по модулю $\text{gr}\{g'_j\}$, получим, что $\prod_{i=1}^n (g_i \text{gr}\{g'_j\} - \text{gr}\{g'_j\}) = 0$ в кольце $\mathbb{Z}_2(G/\text{gr}\{g'_j\})$. По лемме 4.2 система $g_1, \dots, g_n$ линейно зависима по модулю $\text{gr}\{g'_j\}$. Это значит, что существуют $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $i_1 < \dots < i_k$, $k \geq 1$, и $g_{i_1} \dots g_{i_k} \in \text{gr}\{g'_j\} = \{1, g'_j\}$. В то же время $g_{i_1} \dots g_{i_k} \neq 1$, так как система $g_1, \dots, g_n$ линейно независима. Поэтому $g_{i_1} \dots g_{i_k} = g'_j$. Ввиду произвольности j отсюда следует, что $\text{gr}\{g'_1, \dots, g'_n\} \subseteq \text{gr}\{g_1, \dots, g_n\}$. Из этого включения вытекает равенство $\text{gr}\{g_1, \dots, g_n\} = \text{gr}\{g'_1, \dots, g'_n\}$, так как $|\text{gr}\{g_1, \dots, g_n\}| = |\text{gr}\{g'_1, \dots, g'_n\}| = 2^n$ в силу линейной независимости систем $g_1, \dots, g_n$ и $g'_1, \dots, g'_n$. Лемма доказана.

Вернемся к группам R и A (см. § 2). С этого момента мы считаем, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2^2$. Пусть также $B = R/R^2$, $b_i = \bar{x}_i$ при $i \in \mathbb{N}_1$, а $B_n = \text{gr}\{b_1, \dots, b_n\}$, где $n \in \mathbb{N}_1$. Очевидно, что B – элементарная абелева 2-группа счетного ранга, а $b_1, b_2, \dots$ – ее базис.

Пусть G – произвольная группа. Через $H \text{ wr } G$ будет обозначаться дискретное сплетение групп H и G . Мы считаем базу этого сплетения (обозначаемую через $H^{(G)}$) мультипликативно записываемым свободным правым $\mathbb{Z}_2 G$ -модулем с базисом $h_1, h_2, \dots$.

Согласно известной теореме Магнуса–Шмелькина о вложении (см., например, [7, теорема 22.48]) гомоморфизмы $\varkappa: R \rightarrow H \text{ wr } B$ и $\mu: A \rightarrow H \text{ wr } R$, отображающие соответственно x_i в $b_i h_i$ и y_i в $x_i h_i$ для всех $i \in \mathbb{N}_1$, инъективны. Мы закрепляем обозначения $\varkappa$ и μ за вышеуказанными гомоморфизмами.

Очевидно, что R^2 – элементарная абелева 2-группа счетного ранга, на которой группа R (фактически B) действует сопряжением. Следовательно, можно рассматривать R^2 как правый $\mathbb{Z}_2 B$ -модуль, который мы будем записывать мультипликативно. Пусть Δ – фундаментальный идеал кольца $\mathbb{Z}_2 B$, а Δ^n – его n -я степень. Обозначим через Q_n ($n \in \mathbb{N}_0$) подгруппу R^2 , порожденную всевозможными r^δ , где $r \in R^2$, а $\delta \in \Delta^n$. В частности, $\Delta^0 = \mathbb{Z}_2 B$ и $Q_0 = R^2$. Очевидно, что

$$R^2 = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq \dots \quad (12)$$

Для произвольного $r \in R^2$ положим

$$\chi(r) = \begin{cases} n, & \text{если } r \in Q_n \setminus Q_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ \infty, & \text{если } r \in \bigcap_{i=0}^{\infty} Q_i. \end{cases}$$

Из (12) следует, что $\chi(r)$ определено корректно для любого $r \in R^2$. Нетрудно показать, что $\bigcap_{i=0}^{\infty} Q_i = \{1\}$ (следовательно, $\chi(r) = \infty$ тогда и только тогда, когда $r = 1$), но этот факт нам в дальнейшем не понадобится.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Очевидно, что для произвольного $n \in \mathbb{N}_0$ подгруппа Q_n вполне характеристична в R , поэтому если $\varphi \in \text{End } R$, то $\chi(r\varphi) \geq \chi(r)$ для любого $r \in R^2$ (разумеется, мы считаем, что $n < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$). Если же $\varphi \in \text{Aut } R$, то $\chi(r\varphi) = \chi(r)$ для любого $r \in R^2$, так как $\chi(r\varphi) \geq \chi(r) = \chi(r\varphi\varphi^{-1}) \geq \chi(r\varphi)$.

Определим теперь следующие слова из F :

$$\begin{aligned} u_n(t) &= [t_1^2, t_2, \dots, t_n], \quad n \in \mathbb{N}_1, \\ v_{ij}(t) &= [t_1^4, u_{i+2}(t), u_{j+1}(t)], \quad i \in \mathbb{N}_1, \quad j \in \{1, \dots, i\}. \end{aligned}$$

Отметим, что слова $u_n(t)$ использовались в работе [9]. Очевидно, что $v_{ij}(t) \in \mathfrak{A}(F)$ для любых $i \in \mathbb{N}_1$ и $j \in \{1, \dots, i\}$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $n \in \mathbb{N}_1$. Тогда для любой последовательности $r \in R^{(n)}$

$$u_n(r) = 1 \iff \bar{r} \text{ линейно зависима.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся вложением $\varkappa: R \rightarrow H \operatorname{wr} B$. Пусть $r = r_1, \dots, r_n$ и $r_i \varkappa = \bar{r}_i \alpha_i$, где $\alpha_i \in H^{(B)}$, $i = 1, \dots, n$. Легко видеть, что

$$u_n(r) \varkappa = u_n(\bar{r}_1 \alpha_1, \dots, \bar{r}_n \alpha_n) = \alpha_1^{\prod_{i=1}^n (\bar{r}_i - 1)}. \quad (13)$$

Если $\bar{r}$ линейно зависима, то по лемме 4.2 $\prod_{i=1}^n (\bar{r}_i - 1) = 0$. Поэтому $u_n(r) \varkappa = 1$ и, следовательно, $u_n(r) = 1$ ввиду инъективности $\varkappa$. Если же $\bar{r}$ линейно независима, то из леммы 3.1 следует, что $u_n(r) \varphi = u_n(x)$ для некоторого $\varphi \in \operatorname{Aut} R$. Вычислив $u_n(x) \varkappa$ по формуле (13) с $r_i = x_i$ (и, следовательно, $\bar{r}_i = b_i$ и $\alpha_i = h_i$) при $i = 1, \dots, n$, получим

$$u_n(x) \varkappa = h_1^{\prod_{i=1}^n (b_i - 1)}, \quad (14)$$

где $\prod_{i=1}^n (b_i - 1) \neq 0$ ввиду линейной независимости системы $b_1, \dots, b_n$ и леммы 4.2. Поэтому $u_n(x) \neq 1$ и $u_n(r) \neq 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. Пусть $n \in \mathbb{N}_1$. Тогда $\chi(g) = n - 1$ для любого $g \in u_n[R] \setminus \{1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = u_n(r) \neq 1$, где $r \in R^{(n)}$. По лемме 4.4 $\bar{r}$ линейно независима. Поэтому ввиду леммы 3.1 $g \varphi = u_n(x)$ для некоторого $\varphi \in \operatorname{Aut} R$. Следовательно, достаточно доказать, что $\chi(u_n(x)) = n - 1$, так как $\chi(g) = \chi(u_n(x))$ согласно замечанию 4.1.

Из определения $u_n(t)$ вытекает, что $u_n(x) \in Q_{n-1}$. Покажем, что $u_n(x) \notin Q_n$. Очевидно, что если $w \varkappa = \bar{w} \alpha$, где $w \in R$ и $\alpha \in H^{(B)}$, то $w^2 \varkappa = \alpha^{\bar{w}-1}$. Отсюда следует, что для любых $w' \in Q_n$ и $i \in \mathbb{N}_1$ координата при h_i элемента $w' \varkappa$ принадлежит Δ^{n+1} . В то же время координата при h_1 элемента $u_n(x) \varkappa$, равная $\prod_{i=1}^n (b_i - 1)$ (см. формулу (14)), не принадлежит Δ^{n+1} в силу леммы 4.1. Таким образом, $u_n(x) \in Q_{n-1} \setminus Q_n$ и, следовательно, $\chi(g) = \chi(u_n(x)) = n - 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_2 R'$. Тогда если $(x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1) \alpha_1 = \alpha \alpha_2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}_2 R$, то $\alpha_1 = \alpha' \alpha_2$ для некоторого $\alpha' \in \mathbb{Z}_2 R'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторое множество M представителей всех смежных классов R по R' , содержащее 1. Тогда M является базисом $\mathbb{Z}_2 R$ как свободного правого $\mathbb{Z}_2 R'$ -модуля. Очевидно, что $x_1^i \not\equiv 1 \pmod{R'}$ при $i \in \{1, 2, 3\}$, так как R/R' – свободная группа многообразия $\mathfrak{A}_2^2 \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_4$ и $x_1 R', x_2 R', \dots$ – система свободных порождающих этой группы. Поэтому координата при 1 в базисе M элемента $(x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1) \alpha_1$ равна α_1 .

Пусть теперь $(x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1) \alpha_1 = \alpha \alpha_2$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_2 R$. Приравняв координаты при 1 в базисе M левой и правой частей последнего равенства, получим, что $\alpha_1 = \alpha' \alpha_2$, где $\alpha' \in \mathbb{Z}_2 R'$ – координата при 1 элемента α . Лемма доказана.

ЛЕММА 4.7. Для любых $i \in \mathbb{N}_1$ и $j \in \{1, \dots, i\}$:

1) существенными для слова $v_{ij}(t)$ являются переменные $t_1, \dots, t_{i+2}$ и только они;

2) слово $v_{ij}(t) = v_{ij}(t_1, \dots, t_{i+2})$ невырождено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $v_{ij}(t) = v_{ij}(t_1, \dots, t_{i+2})$, следовательно, множество существенных переменных для слова $v_{ij}(t)$ содержится в $\{t_1, \dots, t_{i+2}\}$. Мы докажем, что для произвольной последовательности $a \in A^{(i+2)}$

$$v_{ij}(a) = 1 \iff \bar{a} \text{ линейно зависима.} \quad (15)$$

Пусть $a \in A^{(i+2)}$ и $r \in R^{(i+2)}$ – последовательность образов элементов a при естественном эпиморфизме $A \rightarrow R$. Легко видеть, что если a_1 и r_1 – первые элементы последовательностей a и r соответственно и $a_1\mu = r_1\alpha_1$, где $\alpha_1 \in H^{(R)}$, то

$$v_{ij}(a)\mu = \alpha_1^{(r_1^3 + r_1^2 + r_1 + 1)(u_{i+2}(r) - 1)(u_{j+1}(r) - 1)}. \quad (16)$$

В частности, при $a = y_1, \dots, y_{i+2}$ (и, следовательно, при $r = x_1, \dots, x_{i+2}$ и $\alpha_1 = h_1$)

$$v_{ij}(y)\mu = h_1^{(x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1)(u_{i+2}(x) - 1)(u_{j+1}(x) - 1)}. \quad (17)$$

Предположим сначала, что $\bar{a}$ линейно зависима. Тогда $\bar{r}$ линейно зависима и $u_{i+2}(r) = 1$ по лемме 4.4. Следовательно, $v_{ij}(a)\mu = 1$ (см. формулу (16)) и $v_{ij}(a) = 1$ в силу инъективности μ .

Пусть теперь $\bar{a}$ линейно независима. Из леммы 3.1 следует, что $v_{ij}(a)\varphi = v_{ij}(y)$ для некоторого $\varphi \in \text{Aut } A$. Поэтому достаточно доказать, что $v_{ij}(y) \neq 1$.

Пусть, напротив, $v_{ij}(y) = 1$. Тогда в силу формулы (17) $(x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1) \times (u_{i+2}(x) - 1)(u_{j+1}(x) - 1) = 0$. Из последнего равенства и леммы 4.6 следует, что $(u_{i+2}(x) - 1)(u_{j+1}(x) - 1) = 0$.

С другой стороны, по лемме 4.4 $u_{i+2}(x) \neq 1$ и $u_{j+1}(x) \neq 1$. Кроме того, в силу леммы 4.5 $\chi(u_{i+2}(x)) = i + 1 > i \geq j = \chi(u_{j+1}(x))$. Поэтому, в частности, $u_{i+2}(x) \neq u_{j+1}(x)$ и $u_{i+2}(x)u_{j+1}(x) \neq 1$. Таким образом, система $u_{i+2}(x)$, $u_{j+1}(x)$ линейно независима, следовательно,

$$(u_{i+2}(x) - 1)(u_{j+1}(x) - 1) \neq 0 \quad (18)$$

по лемме 4.2, что противоречит доказанному ранее. Это показывает, что $v_{ij}(y) \neq 1$ и $v_{ij}(a) \neq 1$. Таким образом, эквивалентность (15) доказана.

Предположим, что при некотором $k \in \{1, \dots, i+2\}$ переменная t_k несущественна для слова $v_{ij}(t)$. Тогда если

$$a = y_1, \dots, y_{k-1}, 1, y_{k+1}, \dots, y_{i+2},$$

то $v_{ij}(a) = v_{ij}(y) \neq 1$, и $\bar{a}$ линейно зависима, что противоречит эквивалентности (15). Это означает, что переменные $t_1, \dots, t_{i+2}$ (и только они – см. начало доказательства) существенны для $v_{ij}(t)$. Таким образом, утверждение 1) доказано, а утверждение 2) непосредственно вытекает из 1) и эквивалентности (15). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.8. Пусть $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_1$ и $j_k \in \{1, \dots, i_k\}$ при $k = 1, 2$. Тогда если $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, то $v_{i_1 j_1}[A] \cap v_{i_2 j_2}[A] = \{1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, $g = v_{i_1 j_1}(a') = v_{i_2 j_2}(a) \neq 1$, где $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, $a' \in A^{(i_1+2)}$, $a \in A^{(i_2+2)}$. Тогда в силу леммы 4.7 системы $\bar{a}'$ и $\bar{a}$ линейно независимы. Из леммы 3.1 следует, что $a'\varphi = y_1, \dots, y_{i_1+2}$ для некоторого $\varphi \in \text{Aut } A$. Переходя от g к $g\varphi \neq 1$, можно считать, что $a' = y_1, \dots, y_{i_1+2}$.

Из равенства $v_{i_1 j_1}(y) = v_{i_2 j_2}(a)$ и формул (17) и (16) следует, что если r – последовательность образов элементов a при естественном эпиморфизме $A \rightarrow R$, то

$$h_1^{(x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1)(u_{i_1+2}(x) - 1)(u_{j_1+1}(x) - 1)} = \alpha^{(u_{i_2+2}(r) - 1)(u_{j_2+1}(r) - 1)}$$

для некоторого $\alpha \in H^{(R)}$. Приравнивая координаты при h_1 левой и правой частей последнего равенства, получим

$$(x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1)(u_{i_1+2}(x) - 1)(u_{j_1+1}(x) - 1) = \alpha_1(u_{i_2+2}(r) - 1)(u_{j_2+1}(r) - 1),$$

где $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_2 R$ – координата при h_1 элемента α . Из этого в силу леммы 4.6 вытекает, что

$$(u_{i_1+2}(x) - 1)(u_{j_1+1}(x) - 1) = \alpha'_1(u_{i_2+2}(r) - 1)(u_{j_2+1}(r) - 1) \quad (19)$$

для некоторого $\alpha'_1 \in \mathbb{Z}_2 R'$. Согласно формуле (18) элемент (19) отличен от нуля, поэтому

$$W = \text{gr}\{u_{i_1+2}(x), u_{j_1+1}(x)\} = \text{gr}\{u_{i_2+2}(r), u_{j_2+1}(r)\}$$

согласно лемме 4.3, причем в силу леммы 4.2 $u_{i_1+2}(x)$, $u_{j_1+1}(x)$ и $u_{i_2+2}(r)$, $u_{j_2+1}(r)$ – базисы группы W как элементарной абелевой 2-группы. В частности, из последнего утверждения следует, что

$$\begin{aligned} W \setminus \{1\} &= \{u_{i_1+2}(x), u_{j_1+1}(x), u_{i_1+2}(x)u_{j_1+1}(x)\} \\ &= \{u_{i_2+2}(r), u_{j_2+1}(r), u_{i_2+2}(r)u_{j_2+1}(r)\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что если $w, w' \in R^2$, причем $\chi(w) < \chi(w')$, то $\chi(w w') = \chi(w)$. Пользуясь леммой 4.5 и этим замечанием, вычислим $\chi(w)$ для $w \in W \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} \chi(u_{i_1+2}(x)) &= i_1 + 1, \quad \chi(u_{j_1+1}(x)) = j_1, \quad \chi(u_{i_1+2}(x)u_{j_1+1}(x)) = j_1; \\ \chi(u_{i_2+2}(r)) &= i_2 + 1, \quad \chi(u_{j_2+1}(r)) = j_2, \quad \chi(u_{i_2+2}(r)u_{j_2+1}(r)) = j_2 \end{aligned}$$

(здесь $j_k \leq i_k < i_k + 1$ при $k = 1, 2$). Поэтому

$$\begin{aligned} i_1 &= \max\{\chi(w) \mid w \in W \setminus \{1\}\} - 1 = i_2, \\ j_1 &= \min\{\chi(w) \mid w \in W \setminus \{1\}\} = j_2, \end{aligned}$$

что противоречит условию. Таким образом, $v_{i_1 j_1}[A] \cap v_{i_2 j_2}[A] = \{1\}$. Лемма доказана.

§ 5. Доказательства основных результатов

ЛЕММА 5.1. *Решетка Λ изоморфна двойственной ей решетке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что для любого семейства решеток $\{M_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ справедливо равенство $(\mathbb{C} \prod_{\omega \in \Omega} M_\omega)^* = \mathbb{C} \prod_{\omega \in \Omega} M_\omega^*$. Хорошо также известно, что $\Lambda_n^* \cong \Lambda_n$ для всех $n \in \mathbb{N}_1$ (см., например, [4, гл. VII, теорема 13]). Таким образом,

$$\Lambda^* = \left(\mathbb{C} \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \right)^* = \mathbb{C} \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^* \cong \mathbb{C} \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \Lambda.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Из лемм 3.7, 4.7 и 4.8 следует, что $\Lambda \leq_c \text{Verb}(S, L^4)$. Переходя к двойственным решеткам и применяя лемму 5.1, получаем

$$\Lambda \cong \Lambda^* \leq_c \langle (\mathcal{L} \cap \mathfrak{B}_4)\mathfrak{A}, \mathcal{L}\mathfrak{A} \rangle. \quad (20)$$

Легко видеть, что $\mathfrak{A}_2^2 \subseteq \mathcal{L} \cap \mathfrak{B}_4$ и $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{A}_2^3$. Поэтому

$$\langle (\mathcal{L} \cap \mathfrak{B}_4)\mathfrak{A}, \mathcal{L}\mathfrak{A} \rangle \leq_c \langle \mathfrak{A}_2^2\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_2^3\mathfrak{A} \rangle = \langle \mathfrak{A}_2^4, \mathfrak{A}_2^5 \rangle. \quad (21)$$

Утверждение теоремы теперь следует из (20) и (21). Теорема доказана.

ЛЕММА 5.2. *Пусть G – некоторая относительно свободная группа счетного ранга, $z_1, z_2, \dots$ – система свободных порождающих G , $G_n = \text{gr}\{z_1, \dots, z_n\}$ при $n \in \mathbb{N}_1$, а π_n – эпиморфизм $G \rightarrow G_n$, для которого $z_i \pi_n = z_i$ при $i \leq n$ и $z_i \pi_n = 1$ в противном случае. Пусть также $\mathfrak{U}$ – произвольное многообразие групп и $X \in \text{Verb}(G, \mathfrak{U}(G))$. Тогда:*

- 1) для любого $n \in \mathbb{N}_1$ $X \rightarrow X\pi_n$ – полный гомоморфизм $\text{Verb}(G, \mathfrak{U}(G))$ на $\text{Verb}(G_n, \mathfrak{U}(G_n))$;
- 2) $X \rightarrow (X\pi_1, X\pi_2, \dots)$ – полное вложение $\text{Verb}(G, \mathfrak{U}(G))$ в $\mathbb{C} \prod_{n=1}^{\infty} \text{Verb}(G_n, \mathfrak{U}(G_n))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \mathfrak{X}(G) \in \text{Verb}(G, \mathfrak{U}(G))$, где $\mathfrak{X}$ – некоторое многообразие. Тогда в силу [7, утверждения 12.31 и 13.42] $X\pi_n = \mathfrak{X}(G_n) = X \cap G_n$. Из этого легко вытекает утверждение п. 1) (прообразом произвольной подгруппы из $\text{Verb}(G_n, \mathfrak{U}(G_n))$ относительно отображения из этого пункта является ее вполне характеристическое замыкание в G). Полная гомоморфность отображения из п. 2) следует из п. 1), а его инъективность – из того, что $X = X \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X\pi_n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. *Пусть $\mathfrak{U}$ – произвольное локально конечное многообразие групп. Тогда $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{A}_2\mathfrak{U} \rangle \leq_c \Lambda$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = F_\infty(\mathfrak{A}_2\mathfrak{U})$, $z_1, z_2, \dots$ – система свободных порождающих G , а $G_n = \text{gr}\{z_1, \dots, z_n\}$ при $n \in \mathbb{N}_1$. Тогда

$$\text{Verb}(G, \mathfrak{U}(G)) \leq_c C \prod_{n=1}^{\infty} \text{Verb}(G_n, \mathfrak{U}(G_n)) \leq_c \Lambda$$

в силу п. 2) леммы 5.2 и того, что $\mathfrak{U}(G_n)$ – конечная элементарная абелева 2-группа для любого $n \in \mathbb{N}_1$. Переходя к двойственным решеткам и применяя лемму 5.1, получаем, что $\langle \mathfrak{U}, \mathfrak{A}_2\mathfrak{U} \rangle \leq_c \Lambda^* \cong \Lambda$. Лемма доказана.

Следствие 1.1 вытекает из основной теоремы и леммы 5.3.

Нам потребуется следующее утверждение, проверяемое непосредственно.

ЛЕММА 5.4. Пусть D – ассоциативное кольцо с единицей. Тогда для любых $d, e \in D$

$$((((d, d)D + (1 - e, 1)D) \cap (1, 0)D) + (0, 1)D) \cap (1, 1)D = (ed, ed)D,$$

где $(z_1, z_2)D$ обозначает правый D -подмодуль модуля $D \times D$, порожденный элементом $(z_1, z_2) \in D \times D$.

В следующей лемме для построения бесконечной цепи используется рекуррентное соотношение из работы М.-П. Шютценберже [10].

ЛЕММА 5.5. Существует подрешетка Λ , порожденная четырьмя элементами и содержащая бесконечную цепь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_n = \mathbb{Z}_2[X]/J_n$, где $n \in \mathbb{N}_1$, $\mathbb{Z}_2[X]$ – кольцо многочленов над $\mathbb{Z}_2$ от переменной X , а $J_n = X^n \mathbb{Z}_2[X]$ – идеал этого кольца, порожденный многочленом X^n . Обозначим через M_n решетку всех P_n -подмодулей модуля $P_n \times P_n$. Очевидно, что $M_n \leq_c \Lambda_{2n}$ для любого $n \in \mathbb{N}_1$ (так как размерность $P_n \times P_n$ как линейного пространства над $\mathbb{Z}_2$ равна $2n$), следовательно,

$$C \prod_{n=1}^{\infty} M_n \leq_c C \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_{2n} \leq_c \Lambda.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно найти некоторые $f_1, f_2, f_3, f_4 \in C \prod_{n=1}^{\infty} M_n$ такие, что $\text{lt}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ содержит бесконечную цепь.

Положим $f_i = (f_{i,1}, f_{i,2}, \dots) \in C \prod_{n=1}^{\infty} M_n$ ($i = 1, 2, 3, 4$), где

$$\begin{aligned} f_{1,n} &= ((1 - X) + J_n, 1 + J_n)P_n, \\ f_{2,n} &= (1 + J_n, J_n)P_n, \\ f_{3,n} &= (J_n, 1 + J_n)P_n, \\ f_{4,n} &= (1 + J_n, 1 + J_n)P_n \end{aligned}$$

для любого $n \in \mathbb{N}_1$. Покажем, что $\text{lt}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ содержит бесконечную цепь. Определим индукцией по $k \in \mathbb{N}_0$ следующую последовательность элементов $\text{lt}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$:

$$\begin{aligned} c_0 &= f_4, \\ c_{k+1} &= (((c_k \vee f_1) \wedge f_2) \vee f_3) \wedge f_4 \quad (k \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Пусть $c_k = (c_{k,1}, c_{k,2}, \dots)$. Тогда из леммы 5.4 вытекает, что

$$c_{k,n} = (X^k + J_n, X^k + J_n)P_n \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Отсюда следует, что $c_k > c_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$, так как $c_{k,n} \geq c_{k+1,n}$ для всех $n \in \mathbb{N}_1$ и $c_{k,n} > c_{k+1,n}$ при $n \geq k+1$. Таким образом, $\{c_0, c_1, \dots\}$ – бесконечная цепь из $\text{lt}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Лемма доказана.

Следствие 1.2 непосредственно вытекает из леммы 5.5 и основной теоремы.

Список литературы

1. Мазуров В. Д., Хухро Е. И. (сост.) Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Изд. 13-е, доп. Новосибирск: Изд-во НИИ математико-информационных основ обучения НГУ, 1995.
2. Клейман Ю. Г. О некоторых вопросах теории многообразий групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 37–74.
3. Storozhev A. On abelian subgroups of relatively free groups // Commun. Algebra. 1994. V. 22. № 7. P. 2677–2701.
4. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
5. Vaughan-Lee M. R. Uncountably many varieties of groups // Bull. London Math. Soc. 1970. V. 2. Pt. 3. № 6. P. 280–286.
6. Клейман Ю. Г. О тождествах в группах // Тр. Моск. матем. об-ва. 1982. Т. 44. С. 62–108.
7. Хейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
8. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
9. Айвазян С. В. О некоторых бесконечных цепях многообразий групп // Докл. АН Арм. ССР. 1983. Т. LXXVI. № 5. С. 198–200.
10. Schützenberger M.-P. Sur certains axiomes de la théorie des structures // C. R. Acad. Sci. Paris. 1945. Т. 221 № 8. P. 218–220.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
9.VI.1997