Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Долбилин, Ю. М. Зиновьев, А. С. Мищенко, М. А. Штанько, М. И. Штогрин,
Двумерная модель Изинга и детерминант Каца–Уорда, *Изв. РАН. Сер. матем.*,
1999, том 63, выпуск 4, 79–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/im251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:40:30

УДК 514.8+515.162

Н. П. Долбилин, Ю. М. Зиновьев,
А. С. Мищенко, М. А. Штанько, М. И. Штогрин

Двумерная модель Изинга и детерминант Каца–Уорда

В работе получено доказательство формулы, выражающей квадрат статистической суммы двумерной модели Изинга для произвольной плоской решетки через детерминант матрицы, аналогичной матрице Каца–Уорда.

Библиография: 11 наименований.

§ 1. Введение

Онзагер и Кауфман вычислили статистическую сумму для двумерной модели Изинга [1]–[3]. Через несколько лет совершенно иной, комбинаторный способ вывода статистической суммы двумерной модели Изинга на квадратной решетке без магнитного поля предложили Кац и Уорд в работе [4]. По словам самих авторов, работа [4] носила эвристический характер. Их оригинальная идея состояла в построении специальной матрицы A , через детерминант которой можно было бы выразить статистическую сумму двумерной модели Изинга. В работе Каца и Уорда обсуждались сразу две формулы: детерминант матрицы A пропорционален статистической сумме модели Изинга и он же пропорционален квадрату статистической суммы. При доказательстве первой формулы использовалось одно топологическое утверждение, к которому Шерман построил контрпример [5]. В этой же работе Шерман привел рассуждения в пользу справедливости второй формулы $Z^2(\beta) \sim \det A$. Для этого Шерман рассмотрел гипотезу Фейнмана, согласно которой некоторое бесконечное формальное произведение полиномов пропорционально статистической сумме. Он возводил это бесконечное формальное произведение в квадрат и доказывал, что после перегруппировки бесконечного числа сомножителей полученное формальное произведение при разложении в бесконечный формальный ряд дает детерминант матрицы A . Однако эти соображения, основанные на рассмотрении бесконечных формальных произведений, не являются математически полными. Это же замечание относится также и к уточнениям этой работы, сделанными Шерманом [6] и Бургойном [7]. Идеи Каца–Уорда–Шермана–Бургойна были использованы Вдовиченко [8] (см. также [9]) для доказательства формулы Онзагера. Вдовиченко выводила формулу для статистической суммы, используя предположение о том, что пути с повторяющимися связями, взятые со знаками, при суммировании взаимно сокращаются. На ошибочность этого предположения указано в работе [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00167).

Главный результат данной работы заключается в доказательстве формулы $\det A \sim Z^2(\beta)$ (теорема 1). Преимущество нашего подхода состоит в том, что для конечной решетки сравниваются два многочлена, а не многочлен с бесконечным произведением, как в указанных выше работах. Формула Каца–Уорда–Шермана вытекает из совпадения соответствующих коэффициентов у двух многочленов, имеющих разное происхождение. Нам удалось не только доказать совпадение этих коэффициентов, но и вычислить их.

Все доказательства в этой работе проводятся только конечными комбинаторными методами.

Другим результатом нашей работы является то, что формула $\det A \sim Z^2(\beta)$ доказана для произвольной плоской решетки, а не только для квадратной. Но при этом матрица A слегка отличается от матрицы, введенной Кацем и Уордом [4]. Это отличие несущественно, если мы рассматриваем стандартную квадратную решетку. Однако если в решетке имеются замкнутые контуры, состоящие из нечетного числа ребер, то эта формула перестает быть верной для матрицы, введенной Кацем и Уордом, но верна для измененной матрицы.

Авторы выражают свою признательность С. П. Новикову за инициативу в постановке задачи и полезные обсуждения в ходе работы.

§ 2. Основной результат

Пусть G – некоторый граф на плоскости, и пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ – множество всех его ребер, которые суть прямолинейные отрезки. На вершинах графа G задана функция σ со значениями ± 1 . Энергия взаимодействия $H(\sigma)$ модели Изинга с нулевым магнитным полем может быть представлена в виде

$$H(\sigma) = - \sum_{j=1}^N E_j \sigma(p_j) \sigma(q_j),$$

где E_j – значение энергии, соответствующее ребру e_j , а p_j, q_j – концы ребра e_j .

Статистическая сумма модели Изинга с нулевым магнитным полем определяется следующим образом:

$$Z(\beta) = \sum_{\sigma} \exp\{-\beta H(\sigma)\}.$$

Каждому ребру $e_j \in G$ поставим в соответствие переменную $d(e_j) = \text{th}(\beta E_j)$. Согласно [11] статистическая сумма модели Изинга имеет вид

$$Z(\beta) = 2^{\#V} \prod_{j=1}^N \text{ch}(\beta E_j) \sum_{\xi \in Z_1(G, \mathbf{Z}_2)} \prod_{e \in |\xi|} d(e),$$

где $\#V$ – количество вершин графа G . Здесь через $Z_1(G, \mathbf{Z}_2)$ обозначена группа одномерных циклов ξ на графе G с коэффициентами из группы вычетов по mod 2. Носитель $|\xi|$ цикла ξ – это подграф, состоящий из всех ребер $e \in G$, входящих в ξ с коэффициентом 1. Легко видеть, что подграф является носителем некоторого цикла $\xi \in Z_1(G, \mathbf{Z}_2)$ тогда и только тогда, когда он четен, т.е. все вершины имеют четную (положительную) степень.

Для произвольного подграфа $G_0 \subset G$ определим моном

$$d(G_0) = \prod_{e \in G_0} d(e).$$

Взяв теперь в качестве подграфа G_0 носитель $|\xi|$ цикла $\xi \in Z_1(G, \mathbf{Z}_2)$, запишем производящую функцию в виде

$$F = \sum_{\xi \in Z_1(G, \mathbf{Z}_2)} d(|\xi|). \quad (1)$$

Для того чтобы определить матрицу Каца–Уорда, введем на каждом ребре графа G оба возможных направления. Пусть $\mathbf{E}$ – множество всех ребер из $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$, взятых с обоими направлениями,

$$\mathbf{E} := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_{N+1}, \dots, \mathbf{e}_{2N}\}. \quad (2)$$

Будем предполагать, что в (2) направленные ребра из $\mathbf{E}$ проиндексированы так, что $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_{j+N}$ противоположно направлены.

Поставим в соответствие каждому направленному ребру $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ некоторую переменную $d = d(\mathbf{e})$, причем каждым двум противоположно направленным ребрам будет соответствовать одна переменная:

$$\mathbf{e}_j \rightarrow d_j, \text{ если } 1 \leq j \leq N; \quad \mathbf{e}_j \rightarrow d_{j-N}, \text{ если } N < j \leq 2N.$$

Обозначим через $b(\mathbf{e})$ начало, через $f(\mathbf{e})$ конец направленного ребра $\mathbf{e}$ и через $\widehat{(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)}$ угол между направленными ребрами $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица Каца–Уорда есть $(2N \times 2N)$ -матрица $A = (A_{\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k})$, элементы которой, индексруемые парами направленных ребер $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$, $1 \leq j, k \leq 2N$, графа G , задаются следующей формулой:

$$A_{\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k, \\ -d_j \cdot \exp\left\{\frac{i}{2}\widehat{(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)}\right\}, & \text{если } f(\mathbf{e}_j) = b(\mathbf{e}_k), \quad f(\mathbf{e}_k) \neq b(\mathbf{e}_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Данное определение матрицы несколько отличается от того, как оно дано в оригинальной работе Каца–Уорда [4]. Нетрудно проверить, что получается та же самая матрица с точностью до знака у недиагональных элементов $A_{\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k}$. Введение знака “минус” у d_j несущественно для стандартной квадратной решетки и становится решающим при рассмотрении произвольной решетки на плоскости.

ТЕОРЕМА 1. Детерминант матрицы Каца–Уорда равен квадрату производящей функции:

$$\det A = F^2. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Элементы матрицы Каца–Уорда A зависят от способа вложения графа G в плоскость, однако $\det A$ в силу (4) не зависит от вложения.

Далее левая и правая части из (4) преобразуются к такому виду, что доказательство теоремы 1 сводится к теоремам, изложенным в следующих параграфах.

Для преобразования квадрата производящей функции и детерминанта нам понадобится несколько определений и обозначений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для заданной пары подграфов $X_1, X_2 \subset G$, не имеющих общих ребер, пара циклов (ξ_1, ξ_2) называется *разбиением*, если выполнены следующие два условия: $|\xi_1| \cup |\xi_2| = X_1 \cup X_2$; $|\xi_1| \cap |\xi_2| = X_2$. Здесь через $|\xi_j|$, $j = 1, 2$, обозначен носитель цикла $\xi_j \in Z_1(G, \mathbb{Z}_2)$, т.е. множество всех ребер графа G , которые входят в цепь ξ_j с коэффициентом 1 по mod 2.

Количество всех разбиений для данной пары (X_1, X_2) будем обозначать через $P(X_1, X_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под *допустимым путем* γ в графе G понимается ориентированный реберный, замкнутый, вообще говоря, многокомпонентный путь, который:

- 1) если проходит через ребро, то не более двух раз;
- 2) если проходит через ребро дважды, то в противоположных направлениях;
- 3) не допускает точек возврата, т.е. γ не содержит идущих подряд ребер e и e^{-1} .

Приведем допустимый путь γ при помощи регулярной гомотопии в общее положение γ_ε и обозначим через $t(\gamma_\varepsilon)$ число трансверсальных самопересечений пути γ_ε . Тогда число $(-1)^{t(\gamma_\varepsilon)}$ не зависит от выбора пути γ_ε в общем положении, но зависит от γ (см. [12]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Знак пути* γ зададим следующим образом: $\text{sgn } \gamma = (-1)^{t(\gamma_\varepsilon)}$.

Ансамбль всех допустимых путей в графе G обозначим через $\Gamma(G)$.

Обозначим через $X_1(\gamma)$ и $X_2(\gamma)$ множества всех ребер, через которые ориентированный допустимый путь γ проходит один и два раза соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для произвольной пары подграфов $X_1, X_2 \subset G$, не имеющих общих ребер, обозначим *ансамбль* всех допустимых путей, соответствующих паре (X_1, X_2) , через

$$\Gamma(X_1, X_2) := \{\gamma \mid X_1(\gamma) = X_1, X_2(\gamma) = X_2\},$$

а *сигнатуру* пары (X_1, X_2) обозначим через

$$S(X_1, X_2) := \sum_{\gamma \in \Gamma(X_1, X_2)} \text{sgn } \gamma.$$

Для реберного пути γ определен следующий моном:

$$\chi(\gamma) := \prod_{e_j \in X_1} d(e_j) \prod_{e_j \in X_2} d^2(e_j) = d(X_1) d^2(X_2). \quad (5)$$

Сведем теорему 1 к комбинаторным теоремам. С учетом обозначения $Z_1 := Z_1(G, \mathbf{Z}_2)$ преобразуем квадрат производящей функции следующим образом:

$$\begin{aligned} F^2 &= \left\{ \sum_{\xi_1 \in Z_1} d(|\xi_1|) \right\} \left\{ \sum_{\xi_2 \in Z_1} d(|\xi_2|) \right\} = \sum_{\xi_1, \xi_2 \in Z_1} d(|\xi_1|)d(|\xi_2|) \\ &= \sum_{(X_1, X_2)} \sum_{(\xi_1, \xi_2)} d(X_1)d^2(X_2) = \sum_{(X_1, X_2)} P(X_1, X_2)d(X_1)d^2(X_2) \\ &= 1 + \sum_{(X_1, X_2) \neq (\emptyset, \emptyset)} P(X_1, X_2)d(X_1)d^2(X_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что паре пустых графов $(\emptyset, \emptyset)$ соответствует выделенное слагаемое, равное 1.

Вычислим детерминант матрицы A . Через $S(\mathbf{E})$ обозначим группу всех подстановок σ множества $\mathbf{E}$ направленных ребер. Тогда имеем

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(\mathbf{E})} (-1)^{\nu(\sigma)} A_{\mathbf{e}_1 \sigma(\mathbf{e}_1)} A_{\mathbf{e}_2 \sigma(\mathbf{e}_2)} \cdots A_{\mathbf{e}_{2N} \sigma(\mathbf{e}_{2N})}. \quad (7)$$

Для каждой подстановки $\sigma \in S(\mathbf{E})$ множество направленных ребер $\mathbf{E}$ распадается в некоторое число $r(\sigma)$ попарно не пересекающихся орбит относительно циклической группы, порожденной подстановкой σ . Обозначим эти орбиты через $\mathbf{E}_j(\sigma)$, $1 \leq j \leq r(\sigma)$, а через $l_j(\sigma)$ – количество ребер в орбите $\mathbf{E}_j(\sigma)$. Тогда для каждой подстановки σ слагаемое в (7) можно записать так:

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu(\sigma)} \prod_{\mathbf{e} \in \mathbf{E}} A_{\mathbf{e} \sigma(\mathbf{e})} &= \prod_{j=1}^{r(\sigma)} (-1)^{1+l_j(\sigma)} \prod_{\mathbf{e} \in \mathbf{E}_j(\sigma)} A_{\mathbf{e} \sigma(\mathbf{e})} \\ &= (-1)^{r(\sigma) + \sum_{j=1}^{r(\sigma)} l_j(\sigma)} \prod_{j=1}^{r(\sigma)} \prod_{\mathbf{e} \in \mathbf{E}_j(\sigma)} A_{\mathbf{e} \sigma(\mathbf{e})}. \end{aligned} \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если подстановка тождественна, т.е. $\sigma = \text{id}$, то каждая орбита $\mathbf{E}_j(\text{id})$ состоит из единственного ребра $\mathbf{e}$, т.е. $l_j(\text{id}) = 1$ и $r(\text{id}) = 2N$. Тогда согласно определению матрицы Каца–Уорда (3) слагаемое равно 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\sigma \neq \text{id}$. Тогда существуют нетривиальные орбиты $\mathbf{E}_j(\sigma)$ с $l_j(\sigma) > 1$. Если $l_j(\sigma) = 2$, т.е. $\mathbf{E}_j(\sigma) = \{\mathbf{e}, \sigma(\mathbf{e})\}$, то легко проверить, что хоть один сомножитель произведения $A_{\mathbf{e} \sigma(\mathbf{e})} A_{\sigma(\mathbf{e}) \mathbf{e}}$ по формуле (3) всегда равен нулю. Поэтому слагаемое в (8), соответствующее нетождественной подстановке σ , не равно нулю тогда и только тогда, когда для каждой орбиты $\mathbf{E}_j(\sigma)$ с $l_j(\sigma) > 1$ имеем $l_j(\sigma) \geq 3$ и для любого $\mathbf{e} \in \mathbf{E}_j(\sigma)$ выполняется

$$b(\sigma(\mathbf{e})) = f(\mathbf{e}), \quad f(\sigma(\mathbf{e})) \neq b(\mathbf{e}). \quad (9)$$

Обозначим через $S'(\mathbf{E})$ подмножество всех подстановок σ , для каждой из которых все $l_j(\sigma) \neq 2$ и для всех ребер орбит $\mathbf{E}_j(\sigma)$ с $l_j(\sigma) \geq 3$ выполняются условия (9).

Именно, для каждого $\sigma \in S'(\mathbf{E})$ направленные ребра каждой орбиты $\mathbf{E}_j(\sigma)$ с $l_j(\sigma) > 1$ образуют допустимый (однокомпонентный) путь $\gamma_j(\sigma)$ длины $l_j(\sigma)$. Их объединение $\gamma(\sigma) := \{\gamma_1(\sigma), \dots, \gamma_{m(\sigma)}(\sigma)\}$ является также допустимым (многокомпонентным) путем, где $m(\sigma) \leq r(\sigma)$.

Таким образом, для $\sigma \in S'(\mathbf{E})$ слагаемое (8) можно переписать так:

$$\begin{aligned} & (-1)^{m(\sigma) + \sum_{j=1}^{m(\sigma)} l_j(\sigma)} \prod_{j=1}^{m(\sigma)} (-1)^{l_j(\sigma)} \prod_{\mathbf{e} \in \gamma_j(\sigma)} d(\mathbf{e}) \exp \left\{ \frac{i}{2} (\widehat{\mathbf{e}, \sigma(\mathbf{e})}) \right\} \\ & = (-1)^{m(\sigma)} \prod_{j=1}^{m(\sigma)} \left(\prod_{\mathbf{e} \in \gamma_j(\sigma)} d(\mathbf{e}) \right) \left(\prod_{\mathbf{e} \in \gamma_j(\sigma)} \exp \left\{ \frac{i}{2} (\widehat{\mathbf{e}, \sigma(\mathbf{e})}) \right\} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь мы использовали определение (3) для матрицы, которое отличается от первоначального определения матрицы Каца–Уорда знаком. Это отличие несущественно для стандартной квадратной решетки, так как в этом случае $l_j(\sigma)$ всегда четно.

По формуле Уитни [12] для замкнутых (однокомпонентных) контуров на плоскости имеем

$$\prod_{\mathbf{e} \in \gamma_j(\sigma)} \exp \left\{ \frac{i}{2} (\widehat{\mathbf{e}, \sigma(\mathbf{e})}) \right\} = (-1)^{t(\gamma_j(\sigma)) + 1}, \quad 1 \leq j \leq m(\sigma).$$

Подставляя последнее выражение в (10), получаем

$$(-1)^{m(\sigma)} \prod_{j=1}^{m(\sigma)} \prod_{\mathbf{e} \in \gamma_j(\sigma)} d(\mathbf{e}) (-1)^{t(\gamma_j(\sigma)) + 1} = \prod_{j=1}^{m(\sigma)} (-1)^{t(\gamma_j(\sigma))} \chi(\gamma_j(\sigma)).$$

Таким образом, используя формулу $\sum_{j=1}^r t(\gamma_j) = t(\cup \gamma_j) \pmod{2}$, верную для плоскости, имеем

$$\det A = 1 + \sum_{\sigma \in S'(\mathbf{E})} (-1)^{t(\gamma(\sigma))} \chi(\gamma(\sigma)). \quad (11)$$

Обратно, каждому допустимому пути $\gamma \in \Gamma(G)$ соответствует некоторая подстановка σ из $S'(\mathbf{E})$. Поэтому суммирование в (11) можно вести по всему ансамблю $\Gamma(G)$ допустимых путей γ :

$$\det A = 1 + \sum_{\gamma \in \Gamma(G)} (-1)^{t(\gamma)} \chi(\gamma). \quad (12)$$

Каждый путь $\gamma \in \Gamma(G)$ входит в ансамбль $\Gamma(X_1, X_2)$ для некоторой пары $(X_1, X_2) \neq (\emptyset, \emptyset)$. Согласно (5) пути $\gamma \in \Gamma(X_1, X_2)$, состоящему из m компонент, соответствует моном $\chi(\gamma) = \prod_{j=1}^m \chi(\gamma_j) = d(X_1) d^2(X_2)$ от переменных $d(\mathbf{e})$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \det A &= 1 + \sum_{(X_1, X_2) \neq (\emptyset, \emptyset)} \sum_{\gamma \in \Gamma(X_1, X_2)} (-1)^{t(\gamma)} d(X_1) d^2(X_2) \\ &= 1 + \sum_{(X_1, X_2) \neq (\emptyset, \emptyset)} S(X_1, X_2) d(X_1) d^2(X_2). \end{aligned} \quad (13)$$

В следующих параграфах мы вычислим коэффициенты $P(X_1, X_2)$ и $S(X_1, X_2)$. Как показано в теоремах 2 и 4, они оказываются равными. Поэтому многочлены (6) и (13) совпадают, откуда следует теорема 1.

§ 3. Разбиения графа в пары циклов

Пусть G – конечный граф. Задача этого параграфа – для каждой пары подграфов X_1, X_2 , не имеющих общих ребер, вычислить коэффициенты $P(X_1, X_2)$ многочлена в (6). Вычисления этих коэффициентов будем проводить для общего графа, не предполагая его планарности.

Если пара подграфов X_1, X_2 не допускает ни одного разбиения в пары циклов, то для нее $P(X_1, X_2) = 0$. Будем рассматривать теперь такие пары подграфов, что $P(X_1, X_2) \neq 0$. Другими словами, мы предполагаем, что существует хотя бы одна пара циклов $\xi_1, \xi_2 \in Z_1(G, \mathbf{Z}_2)$ такая, что $|\xi_1 + \xi_2| = X_1$ и $|\xi_1| \cap |\xi_2| = X_2$.

При этом мы полагаем, что две допустимые пары (ξ_1, ξ_2) и (ξ'_1, ξ'_2) совпадают тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \xi'_1$ и $\xi_2 = \xi'_2$. В частности, если $\xi_2 \neq \xi_1$, то пара (ξ_2, ξ_1) не совпадает с парой (ξ_1, ξ_2) .

Обозначим через $x_i \in C_1(G, \mathbf{Z}_2)$ цепь такую, что ее носитель $|x_i| = X_i$, $i = 1, 2$. Здесь через $C_1(G, \mathbf{Z}_2)$ обозначена группа одномерных цепей на графе G с коэффициентами из группы вычетов по mod 2. Все ниже следующие равенства в этих группах означают равенства по mod 2.

ЛЕММА 1. Если $P(X_1, X_2) \neq 0$, то для цепей x_1 и x_2 имеем:

- 1) $\partial x_1 = 0$, т.е. x_1 – цикл по mod 2;
- 2) существует такая цепь $\chi_0 \in C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$, что $\partial x_2 = \partial \chi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $x_1 = \xi_1 + \xi_2$. Поэтому $\partial x_1 = \partial(\xi_1 + \xi_2) = \partial \xi_1 + \partial \xi_2 = 0$.

Пусть $\chi_0 = \xi_1 + x_2$. Тогда $\partial \chi_0 = \partial \xi_1 + \partial x_2 = \partial x_2$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Дана пара графов X_1, X_2 , не имеющих общих ребер.

1. Пусть $X_1 = \emptyset$. Если X_2 – цикл по mod 2, то $P(X_1, X_2) = 1$. Если X_2 не есть цикл по mod 2, то $P(X_1, X_2) = 0$.

2. Пусть $X_1 \neq \emptyset$. Если пара X_1, X_2 удовлетворяет условиям:

- 1) $\partial x_1 = 0$;
- 2) существует такая цепь $\chi_0 \in C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$, что $\partial x_2 = \partial \chi_0$;

то число разбиений равно

$$P(X_1, X_2) = 2^{q + \sum_{v \in X_1} (k(v) - 1)},$$

где $2k(v)$ – число ребер графа X_1 , которые сходятся в вершине v графа X_1 , и q – число компонент связности графа X_1 .

Если хотя бы одно из условий 1) или 2) не выполняется, то $P(X_1, X_2) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай 1, когда $X_1 = \emptyset$. Тогда для любого разбиения (ξ_1, ξ_2) , если оно существует, имеем $\xi_1 = x_2$ и $\xi_2 = x_2$. Отсюда следует, что если x_2 – цикл, то пара (x_2, x_2) – действительно единственная пара циклов для $(\emptyset, X_2)$. Если же x_2 не цикл, то разбиений нет вовсе.

Рассмотрим случай 2. Пусть $X_1 \neq \emptyset$. Тогда для любого разбиения (ξ_1, ξ_2) , если оно существует, имеем $\xi_1 = x_2 + \chi$, где $\chi \in C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$. Поэтому $0 = \partial \xi_1 = \partial x_2 + \partial \chi$. Другими словами, χ удовлетворяет уравнению $\partial \chi = \partial x_2$.

Обратно: пусть $\chi \in C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$ удовлетворяет уравнению $\partial \chi = \partial x_2$. Тогда обе цепи $\xi_1 = x_2 + \chi$ и $\xi_2 = x_1 + \chi$ являются циклами, так как $\partial \xi_1 = \partial x_2 + \partial \chi = 0$ и $\partial \xi_2 = \partial x_1 + \partial \xi_1 = 0$, и эта пара циклов есть разбиение.

Таким образом, каждое разбиение (ξ_1, ξ_2) взаимно однозначно соответствует решению уравнения $\partial\chi = \partial x_2$, где $\chi \in C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$.

Пусть выполняются условия 1) и 2). Наша цель – найти число указанных решений. По условию 2) хотя бы одно решение (именно χ_0) существует.

Так как ядро $\text{Ker } \partial$ граничного оператора $\partial: C_1(X_1, \mathbf{Z}_2) \rightarrow C_0(X_1, \mathbf{Z}_2)$ есть группа циклов $Z_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$, то каждое решение χ можно представить в виде $\chi = \chi_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i z_i$, где χ_0 – решение из условия 2), и циклы $z_1, \dots, z_d$ составляют базис группы $Z_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$, а каждый коэффициент λ_i равен 0 или 1. Поэтому число решений уравнения равно 2^d .

Представим это число иначе. Так как X_1 является графом (не содержит двумерных клеток), то $Z_1(X_1, \mathbf{Z}_2) = H_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$. Число компонент графа X_1 равно $q = \dim H_0(X_1, \mathbf{Z}_2)$. Здесь через $H_j(X_1, \mathbf{Z}_2)$ обозначена j -мерная группа гомологий графа $X_1 \subset G$ с коэффициентами 0 и 1 из группы $\mathbf{Z}_2$. Поэтому, пользуясь эйлеровой характеристикой, получаем

$$\begin{aligned} d = \dim H_1(X_1, \mathbf{Z}_2) &= \dim H_1(X_1, \mathbf{Z}_2) - \dim H_0(X_1, \mathbf{Z}_2) + q \\ &= \#(\{e|e \in X_1\}) - \#(\{v|v \in X_1\}) + q = \sum_{v \in X_1} (k(v) - 1) + q, \end{aligned} \quad (14)$$

так как $\sum_{v \in X_1} 2k(v) = 2\#(\{e\})$ и $\sum_{v \in X_1} 1 = \#(\{v\})$, где, напомним, в каждой вершине v цикла X_1 сходится ровно $2k(v)$ его ребер (X_1 есть цикл по mod 2, и поэтому в каждой его вершине сходится четное число ребер). Следовательно, число решений уравнения $\partial\chi = \partial x_2$ при условии $\chi \in C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$ равно $2^{q + \sum_{v \in X_1} (k(v) - 1)}$.

Если хотя бы одно из условий 1) или 2) не выполняется, то $P(X_1, X_2) = 0$ по лемме 1. Теорема доказана.

Выразим теперь условия 1) и 2) из теоремы 2 геометрически.

ЛЕММА 2. *Пара условий 1) и 2) эквивалентна тройке условий:*

- (i) *в каждой вершине графа X_1 сходится четное число ребер графа X_1 ;*
- (ii) *в каждой вершине, в которой сходятся только ребра из графа X_2 , сходится лишь четное число ребер;*
- (iii) *на каждой компоненте графа X_1 имеется лишь четное число концов ребер из графа X_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие 1) равносильно тому, что для любой вершины $v \in X_1$ число ребер из графа X_1 , сходящихся в v , четно.

Выведем из условий 1) и 2) условия (ii) и (iii).

Выведем условие (ii). Действительно, пусть к вершине $v \in X_2$ не подходят ребра из X_1 . Так как в цепь $\chi_0 \in C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$ входят лишь ребра из X_1 , то из уравнения $\partial x_2 = \partial \chi_0$ следует, что граница ∂x_2 цепи x_2 не содержит вершину v . Таким образом, к вершине v подходит лишь четное число ребер из X_2 .

Выведем условие (iii). Так как граница всякой одномерной цепи состоит из четного числа вершин, то ограничение цепи на каждой компоненте графа X_1 имеет четное число вершин. Но так как $\partial \chi_0 = \partial x_2$, то граница ∂x_2 содержит четное число вершин на каждой компоненте графа X_1 .

Докажем, что из (i)–(iii) вытекают условия 1) и 2). Мы уже отметили, что из (i) следует 1). Выведем условие 2). Если $\partial x_2 = 0$, то $\chi_0 = 0$ является решением уравнения $\partial\chi = \partial x_2$.

Пусть теперь $\partial x_2 \neq 0$. Граф X_1 , вообще говоря, состоит из нескольких компонент $X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^q$. В силу условия (ii) имеем $\partial x_2 \subset X_1$. В силу условия (iii) ограничение $\partial x_2|_{X_1^i}$ состоит из четного числа вершин для любого $1 \leq i \leq q$. В силу связности X_1^i существует цепь $c_i \in C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$ такая, что $\partial c_i = \partial x_2|_{X_1^i}$. Пусть $\chi_0 = \sum_i c_i$. Ясно, что χ_0 принадлежит $C_1(X_1, \mathbf{Z}_2)$ и является решением уравнения $\partial \chi = \partial x_2$. Лемма доказана.

§ 4. Параметризации конфигураций

Дальнейшая наша задача – вычислить коэффициенты $S(X_1, X_2) = \sum \text{sgn } \gamma$ у многочлена (13). Знак ориентированного пути γ выражается через число трансверсальных самопересечений пути γ , взятого в общем положении. Все самопересечения пути γ можно сосредоточить в окрестностях вершин графа $X_1 \cup X_2$. Поэтому, как будет показано дальше, вычисление сигнатуры $S(X_1, X_2)$ сводится к вычислению сигнатур так называемых конфигураций в каждой отдельной вершине, которые изучаются в этом параграфе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть множество M состоит из $2k + 2n$ точек, расположенных на окружности. Пусть k точек из множества $2k$ точек называются *нулями* и k точек – *единицами*. Пусть также среди других $2n$ точек одна половина из n точек называется *нулями*, а другая – *единицами*, причем эти $2n$ точек организованы в n пар так, что точки из каждой пары являются соседними (на одной из дуг $\widehat{0, 1}$ с концами в этих точках нет других точек из M), и одна из этих точек есть нуль, а другая – единица. В этом случае множество M называется *конфигурацией*.

Итак, конфигурация содержит k “одиноких” нулей и k “одиноких” единиц, а также n пар, каждая из которых состоит из нуля и единицы. Таким образом, в конфигурации число нулей равно числу единиц и равно $k + n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дана конфигурация M . Множество g , состоящее из хорд, соединяющих точки из M , назовем *параметризацией конфигурации M* , если в множестве g для каждого нуля имеется хорда, соединяющая его с некоторой единицей из M и, наоборот, каждая единица соединяется с некоторым нулем. При этом никакие 0 и 1 из одной пары не соединяются между собой хордой из параметризации g .

Таким образом, каждая параметризация g конфигурации из $2k + 2n$ точек содержит $k + n$ хорд, и мы будем предполагать, что они находятся в общем положении, т.е. никакие три хорды из g не пересекаются в одной точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Знаком параметризации g* называется $\text{sgn } g := (-1)^{t(g)}$, где $t(g)$ – число точек попарного пересечения хорд в параметризации g .

Обозначим через Γ_M ансамбль всех возможных параметризаций конфигурации M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Сигнатурой конфигурации M* назовем

$$\text{Sign } M := \sum_{g \in \Gamma_M} \text{sgn } g.$$

Введем обозначения. Для фиксированной хорды δ из некоторой параметризации g обозначим через $\Gamma_M^\delta \subset \Gamma_M$ подансамбль всех параметризаций, которые содержат данную хорду δ , т.е. $\Gamma_M^\delta = \{g \in \Gamma_M \mid g \ni \delta\}$.

Нам также понадобится конфигурация M^δ , которая состоит из всех нулей и единиц конфигурации M , за исключением нуля и единицы, соединенных хордой δ .

Ясно, что конфигурация M^δ состоит из:

а) $k - 1$ одинокого нуля, $k - 1$ одинокой единицы и n пар $(0, 1)$, если хорда δ в M соединяет одинокие нуль и единицу;

б) k одиноких нулей, k одиноких единиц и $n - 1$ пары $(0, 1)$, если хорда δ в M соединяет одинокий нуль с единицей из некоторой пары или, наоборот, нуль из некоторой пары с одинокой единицей;

с) $k + 1$ одинокого нуля, $k + 1$ одинокой единицы и $n - 2$ пар $(0, 1)$, если хорда δ соединяет в M нуль из одной пары с единицей из другой пары.

При любой фиксированной хорде $\delta \in g \in \Gamma_M$ подансамбль параметризаций Γ_M^δ конфигурации M находится во взаимно однозначном соответствии с ансамблем параметризаций Γ_{M^δ} подконфигурации M^δ .

ЛЕММА 3. Пусть δ — одна из хорд параметризации g , и пусть δ разделяет оставшиеся $2(n + k - 1)$ нулей и единиц на два подмножества A и B , состоящих из m и $2(n + k - 1) - m$ элементов соответственно. Тогда имеет место следующая формула:

$$\sum_{g \in \Gamma_M^\delta} \operatorname{sgn} g = (-1)^m \sum_{\beta \in \Gamma_{M^\delta}} \operatorname{sgn} \beta. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в параметризации g имеется всего s хорд, которые соединяют между собой нули и единицы во множестве A . Тогда оставшиеся $m - 2s$ нулей и единиц из A в параметризации g соединяются с единицами и нулями из множества B . Следовательно, ровно $m - 2s$ хорд из параметризации g пересекают хорду δ .

Выбросив из параметризации g хорду δ , получим параметризацию β подконфигурации M^δ , принадлежащую ансамблю Γ_{M^δ} , т.е. $\beta = g \setminus \{\delta\}$. Для β имеем

$$\operatorname{sgn} g = (-1)^{m-2s} \operatorname{sgn} \beta = (-1)^m \operatorname{sgn} \beta.$$

Так как это равенство верно при всех $g \in \Gamma_M^\delta$, то получаем формулу (15). Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дана конфигурация M с $k \neq 0$. Обойдем окружность, принимая во внимание только одинокие нули и единицы из M . Будем называть конфигурацию M *регулярной*, если при обходе одинокие нули и единицы чередуются между собой, и *нерегулярной*, если встречаются хотя бы два одиноких нуля (а следовательно, и две одиноких единицы) подряд.

ТЕОРЕМА 3А. Если конфигурация M нерегулярна, то $\operatorname{Sign} M = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в нерегулярной конфигурации число k одиноких нулей (или же единиц) не меньше 2.

Сначала рассмотрим следующий частный случай: пусть при $k \geq 2$ и любом $n \geq 0$ среди одиноких единиц имеются две единицы подряд, скажем 1_1 и 1_2 , между которыми (т.е. на одной из дуг) нет никаких нулей и единиц вообще, ни одиноких, ни парных. В каждой параметризации g эти две единицы соединяются хордами с некоторыми двумя нулями. Пусть в параметризации g это хорды $[1_1, 0']$ и $[1_2, 0'']$. Построим параметризацию g' , в которой вместо этих двух хорд взяты хорды $[1_1, 0'']$ и $[1_2, 0']$, а остальные хорды те же, что и в g . Так как в рассматриваемом частном случае точки $0'$ и $0''$ на окружности не разделяют точек 1_1 и 1_2 , то параметризации g и g' имеют противоположные знаки. Следовательно, весь ансамбль параметризаций Γ_M состоит из попарно сокращающих друг друга параметризаций, т.е. в этом частном случае $\text{Sign } M = 0$.

Докажем теперь теорему 3А индукцией по числу n пар нулей и единиц, входящих в конфигурацию M . В силу только что доказанного утверждение теоремы верно для $n = 0$ при любом $k \geq 2$. Докажем это утверждение для любого числа n пар, предполагая, что оно верно для числа пар, не превышающего $n - 1$.

В силу нерегулярности конфигурации M среди одиноких нулей и единиц имеются две рядом стоящие единицы. Обозначим их через 1_1 и 1_2 . Отметим, что единицы 1_1 и 1_2 являются соседними среди одиноких элементов, но не обязательно соседними среди всех $2k + 2n$ нулей и единиц.

Если дуга $\widehat{1_1, 1_2}$ пуста от пар, то $\text{Sign } M = 0$ по доказанному выше. Пусть теперь дуга $\widehat{1_1, 1_2}$ содержит хотя бы одну пару, скажем $(0', 1')$. В параметризации $g \in \Gamma_M$ точка $0'$ из этой пары $(0', 1')$ соединяется хордой δ с некоторой единицей 1 из M , причем $1 \neq 1'$. Выбросим хорду $\delta = [0', 1]$. В конфигурации M^δ остается хотя бы одна из двух единиц 1_1 или 1_2 , причем сохраняется в M^δ одинокой. Парная в M единица $1'$ остается в конфигурации M^δ , но становится одинокой. Таким образом, хотя бы одна из двух дуг $\widehat{1_1, 1'}$ или $\widehat{1', 1_2}$ имеет своими концами одинокие единицы из M^δ . Более того, эта дуга не содержит одиноких нулей и единиц из M^δ .

Следовательно, мы получаем нерегулярную конфигурацию M^δ , у которой число пар равно $n - 1$ в том случае, когда второй конец хорды δ есть одинокая единица из M , или равно $n - 2$ в том случае, когда этот конец есть парная единица. По предположению индукции имеем $\sum_{\beta \in \Gamma_{M^\delta}} \text{sgn } \beta = 0$. По лемме 3 имеем $\sum_{g \in \Gamma_M^\delta} \text{sgn } g = 0$. Так как последнее равенство верно для любой хорды δ , связывающей выбранный нуль $0'$ с 1 в M , и $1 \neq 1'$, получаем

$$\sum_{g \in \Gamma_M} \text{sgn } g = 0.$$

Теорема 3А доказана.

ТЕОРЕМА 3В. Пусть $k \neq 0$ и конфигурация M регулярна. Зададим одно из двух направлений обхода окружности. При этом k одиноких нулей и k одиноких единиц разбивают окружность на k направленных дуг вида $\widehat{0, 1}$ и k направленных дуг вида $\widehat{1, 0}$. Тогда

$$\text{Sign } M = (-1)^l 2^{k-1}, \quad (16)$$

где l – общее число всех пар $(0, 1)$ (т.е. таких пар, в которых при обходе в заданном направлении сначала встречается нуль пары, а затем единица пары) на дугах вида $\widehat{0, 1}$ и пар $(1, 0)$ на дугах вида $\widehat{1, 0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярность конфигурации M означает, что все $2k$, $k \geq 1$, одиноких нулей и единиц (без учета имеющихся между ними n пар нулей и единиц, $n \geq 0$) строго чередуются между собой.

Сначала предположим, что ВСЕ (одинокие и парные) нули и единицы чередуются между собой (т.е. $l = 0$). Докажем (16) по индукции для всех k сначала при $n = 0$. Для $k = 1$ формула верна, так как в параметризации имеется всего одна хорда и, следовательно, $\text{Sign } M = 1$.

Предположим, что при $n = 0$ формула (16) верна для всех значений числа одиноких нулей (или же единиц), не превосходящих $k - 1$. Докажем ее для значения k . Занулируем при выбранном направлении обхода все единицы (в данном частном случае они лишь одинокие) индексом i , $1 \leq i \leq k$. На пустой от единиц дуге $\widehat{1_k, 1_1}$ имеется лишь один одинокий нуль, обозначим его через $0'$. Соединим $0'$ с единицей 1_i хордой $\delta_i := [0', 1_i]$, $i = 1, \dots, k$, и представим ансамбль параметризаций в виде $\Gamma_M = \bigcup_i \Gamma_M^{\delta_i}$, где, напомним, $\Gamma_M^{\delta_i} := \{g \in \Gamma_M | g \ni \delta_i\}$. Наряду с конфигурацией M рассмотрим конфигурацию M^{δ_i} , которая, напомним, получается из M выбрасыванием концов хорды δ_i , $i = 1, \dots, k$. Среди этих k конфигураций только две – M^{δ_1} и M^{δ_k} – являются регулярными. В обеих этих конфигурациях число одиноких нулей (или единиц) равно $k - 1$. Для них по предположению индукции имеем $\text{Sign } \Gamma_{M^{\delta_1}} = \text{Sign } \Gamma_{M^{\delta_k}} = 2^{k-2}$. Так как хорда δ_1 не пересекает никакие другие хорды параметризации из подансамбля $\Gamma_M^{\delta_1}$, то по лемме 3 получаем $\text{Sign } \Gamma_M^{\delta_1} = \text{Sign } \Gamma_{M^{\delta_1}} = 2^{k-2}$. Аналогично, поскольку хорда δ_k не пересекает никакие другие хорды параметризации из подансамбля $\Gamma_M^{\delta_k}$, то $\text{Sign } \Gamma_M^{\delta_k} = \text{Sign } \Gamma_{M^{\delta_k}} = 2^{k-2}$.

Остальные конфигурации M^{δ_i} , $1 < i < k$, не регулярные. Действительно, при $1 < i < k$ в конфигурациях M^{δ_i} присутствуют одинокие единицы 1_1 и 1_k , в то же время дуга $\widehat{1_k, 1_1}$ не содержит никакие элементы из M^{δ_i} : точка $0'$ не принадлежит M^{δ_i} , так как она является концом выброшенной хорды δ_i . Из теоремы 3А следует, что $\text{Sign } M^{\delta_i} = 0$ при $1 < i < k$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \text{Sign } M &= \sum_{g \in \Gamma_M} \text{sgn } g = \sum_{g \in \Gamma_M^{\delta_1}} \text{sgn } g + \sum_{i=2}^{k-1} \sum_{g \in \Gamma_M^{\delta_i}} \text{sgn } g + \sum_{g \in \Gamma_M^{\delta_k}} \text{sgn } g \\ &= 2^{k-2} + 0 + 2^{k-2} = 2^{k-1}. \end{aligned}$$

Итак, в случае $n = 0$ при любом $k \geq 1$ формула (16) при условии $l = 0$ доказана.

Пусть теперь $n \geq 1$ и $k \geq 1$ и ВСЕ (включая парные) нули и единицы чередуются между собой. Будем доказывать теорему 3В индукцией по n . Для $n = 0$ это уже доказано. Полагая формулу (16) верной для числа пар, не превышающего $n - 1$, докажем ее для n . Так как можно считать, что $n \neq 0$ и $k \neq 0$, то существует хотя бы одна пара $(1, 0)$, которая лежит на некоторой дуге, скажем $\widehat{0_1, 1_1}$, с концами в одиноком нуле (он обозначен через 0_1) и одинокой единице (она обозначена через 1_1). В силу предположения о тотальном чередовании нулей и единиц эти четыре элемента стоят на окружности в следующем порядке: $0_1, 1, 0, 1_1$. Можно считать, что

дуга $\widehat{0_1, 1_1}$ не содержит одиноких нулей и единиц. Однако дуга $\widehat{0_1, 1_1}$ может содержать, помимо $(1, 0)$, и другие так же расположенные пары. Обозначим через $(1', 0')$ ближайшую из них к концу 1_1 дуги $\widehat{0_1, 1_1}$. Тогда на дуге $\widehat{1', 1_1}$ лежит лишь один элемент $0'$ из M . В любой параметризации g нуль $0'$ соединяется с некоторой единицей 1_i хордой $\delta_i = [0', 1_i]$. Ясно, что эта единица 1_i не совпадает с $1'$.

Рассмотрим случай $i = 1$, т.е. когда конец хорды δ_1 лежит в единице 1_1 . После удаления хорды δ_1 в конфигурации M^{δ_1} все нули и единицы, как одинокие, так и парные, чередуются. Так как в M^{δ_1} число пар равно $n - 1$, а число одиноких нулей (а также единиц) равно k , то по предположению индукции имеем $\text{Sign } M^{\delta_1} = 2^{k-1}$.

Пусть $i \neq 1$; тогда удаление концов хорды $\delta_i = [0', 1_i]$ приводит к нерегулярной конфигурации M^{δ_i} . По теореме 3А имеем $\text{Sign } M^{\delta_i} = 0$ при $1_i \neq 1_1$. Поэтому $\text{Sign } M = 2^{k-1}$. Доказательство теоремы в случае тотального чередования нулей и единиц завершено.

Рассмотрим, наконец, общий случай ($l \neq 0$) регулярной конфигурации M при $k \neq 0$. Пару $(0, 1)$ назовем *нечетной*, если одинокие нули и единицы регулярной конфигурации не чередуются с нулем и единицей из этой пары. В противном случае пара *четна*. Пусть в M имеется всего l нечетных пар. По лемме 4 (см. ниже) перестановка местами 0 и 1 в нечетной паре изменяет знак $\text{Sign } M$. При такой перестановке нечетная пара переходит в разряд четных пар. После l перестановок приходим к конфигурации M' , у которой все пары четные. По доказанному выше $\text{Sign } M' = 2^{k-1}$. Поэтому для конфигурации M с l нечетными парами имеем

$$\text{Sign } M = (-1)^l 2^{k-1}.$$

Теорема полностью доказана.

ЛЕММА 4. Пусть в конфигурации M имеется n ($\neq 0$) пар, а другая конфигурация M' отличается от M только тем, что в одной из пар элементы 0, 1 переставлены местами. Тогда

$$\text{Sign } M = -\text{Sign } M'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как нуль и единица из одной пары не соединяются между собой хордой, то рассматриваемые элементы 0 и 1 принадлежат разным хордам. Поэтому каждой параметризации $g \in \Gamma_M$ соответствует параметризация $g' \in \Gamma_{M'}$, отличающаяся от g тем, что концы 0 и 1 этих двух хорд переставлены местами. После такой перестановки эти хорды пересекаются друг с другом, если они до перестановки не пересекались, и не будут пересекаться, если они пересекались прежде. Все остальные пересечения этих и других хорд при такой перестановке сохраняются. В итоге имеем $\text{Sign } M = -\text{Sign } M'$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3С. Пусть $k = 0$. Тогда:

- 1) $\text{Sign } M = 0$, если n нечетно;
- 2) $\text{Sign } M = (-1)^l = (-1)^{n-l}$, если n четно, где l – число таких пар, в которых при фиксированном обходе окружности встречается сначала нуль, а затем единица этой же пары, и $n-l$ – число таких пар, в которых при том же направлении обхода встречается сначала единица, а затем нуль той же пары.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на окружности находится n пар нулей и единиц, $n \geq 2$ и $k = 0$ (т.е. одинокие нули и единицы отсутствуют).

Сначала докажем формулу для альтернированной конфигурации, т.е. когда $l = 0$ или $l = n$. Заномеруем пары нулей и единиц индексом $i = 1, 2, \dots, n$ в порядке обхода. Обозначим через δ_i хорду, соединяющую нуль 0_1 первой пары с единицей 1_i из i -й пары, $i = 2, \dots, n$. Здесь $i \neq 1$, так как 0_1 и 1_1 , принадлежащие одной паре, не соединяются хордой.

Ансамбль Γ_M распадается в объединение попарно непересекающихся подансамблей $\Gamma_M = \bigcup_{i=2}^n \Gamma_M^{\delta_i}$, где в каждом подансамбле $\Gamma_M^{\delta_i}$ любая параметризация, напомним, содержит хорду δ_i , соединяющую фиксированный нуль 0_1 с 1_i , $i \neq 1$.

Рассмотрим наряду с подансамблем $\Gamma_M^{\delta_i}$ соответствующий ансамбль $\Gamma_{M^{\delta_i}}$ параметризаций конфигурации M^{δ_i} . Последняя конфигурация состоит из $n - 2$ пар, а также из одинокого нуля 0_i и одинокой единицы 1_1 . Здесь число одиноких нулей, а соответственно и число одиноких единиц равно 1, причем на дуге $\widehat{1_1, 0_i}$ находятся $i - 2$ пары, а на дополнительной дуге $\widehat{0_i, 1_1}$ находятся $n - i$ пар. Так как для $\Gamma_{M^{\delta_i}}$ мы имеем $k = 1$, то по теореме 3В получаем

$$\text{Sign } M^{\delta_i} = \sum_{\beta \in \Gamma_{M^{\delta_i}}} \text{sgn } \beta = (-1)^{n-i}.$$

По лемме 3 имеем

$$\text{Sign } M = \sum_{i=2}^n \sum_{g \in \Gamma_M^{\delta_i}} \text{sgn } g = \sum_{i=2}^n \sum_{\beta \in \Gamma_{M^{\delta_i}}} \text{sgn } \beta = \sum_{i=2}^n (-1)^{n-i}.$$

Отсюда следует, что $\text{Sign } M = 0$ при нечетном n и $\text{Sign } M = 1$ при четном n .

Конфигурацию M с $l \neq 0$ можно привести к конфигурации M' с тотальным чередованием нулей и единиц посредством перестановок 0 и 1 в l парах. По лемме 4 каждая такая перестановка меняет знак сигнатуры на обратный. Поэтому $\text{Sign } M = (-1)^l \text{Sign } M'$. Для конфигурации M' по доказанному выше $\text{Sign } M' = 0$ для нечетного n и $\text{Sign } M' = 1$ для четного n . Теорема доказана.

§ 5. Теорема об ориентированных параметризациях

Цель этого параграфа – доказать теорему, которая заключается в следующем: если граф G вложен в ориентированную поверхность $\mathcal{P}$ и подграфы $X_1, X_2 \subseteq G$ не имеют общих ребер, причем цикл X_1 гомологичен нулю по mod 2, то $S(X_1, X_2) = P(X_1, X_2)$ (см. ниже теорему 4). Заметим, что условие гомологичности цикла нулю в случае плоскости или сферы выполняется автоматически.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 4, введем несколько понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ребра графа X_1 будем называть *одинарными* ребрами, а ребра графа X_2 будем называть *двойными* ребрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расстановку O направлений на всех ребрах графа X_1 назовем *допустимой ориентацией* графа X_1 , если для каждой вершины графа X_1 количество *входящих* в нее ребер равно числу *выходящих* из нее ребер.

Пусть $\{O_1, \dots, O_m\}$ – множество всех допустимых¹ ориентаций графа X_1 .

Для каждой ориентации O графа X_1 можно построить ансамбль $\Gamma_O(X_1, X_2)$ ориентированных параметризаций графа $X_1 \cup X_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под *ориентированной параметризацией* γ графа $X_1 \cup X_2$, соответствующей данной ориентации O графа X_1 , понимается допустимый путь, проходящий по всем ребрам графа $X_1 \cup X_2$ так, что:

- 1) γ проходит все ребра из X_1 только по одному разу и в направлении, указанном ориентацией;
- 2) γ проходит все ребра из X_2 дважды (как допустимый в противоположных направлениях, но не допускает точек возврата).

Таким образом, параметризация γ , соответствующая ориентации O графа X_1 , есть один из допустимых путей из ансамбля $\Gamma(X_1, X_2)$, определенного выше, направление обхода которого на ребрах из X_1 совпадает с ориентацией O . Обозначим через $\Gamma_O(X_1, X_2)$ ансамбль всех параметризаций графа $X_1 \cup X_2$, соответствующих ориентации O . Тогда $\Gamma(X_1, X_2)$ есть объединение всех ансамблей $\Gamma_O(X_1, X_2)$ по всем ориентациям O графа X_1 .

Как мы знаем, чтобы вычислить знак параметризации γ , нужно привести ее в общее положение. Сейчас мы определим процедуру приведения в общее положение.

На ПЕРВОМ этапе мы *разводим* каждое двойное ребро $e \in X_2$. Для этого каждое двойное ребро e мы представляем как два ребра, каждое из которых является краем достаточно малой окрестности ребра e .

После разведения двойного ребра в два параллельных одинарных ребра на одном из них выбирается произвольно одно из двух направлений, а на другом параллельном ребре – направление, противоположное выбранному на первом ребре. Для каждой пары разведенных ребер выбор этих направлений можно осуществить независимо от выбора направлений на других парах разведенных ребер.

Впредь мы фиксируем некоторую расстановку направлений на разведенных ребрах, которая будет одной и той же для всех параметризаций из ансамбля $\Gamma(X_1, X_2)$.

На ВТОРОМ этапе приведения в общее положение параметризации γ вокруг каждой вершины v графа $X_1 \cup X_2$, лежащего на поверхности $\mathcal{P}$, описываем некоторую достаточно малую окружность так, что все окружности около разных вершин между собой не пересекаются, каждая окружность содержит внутри лишь одну вершину v графа $X_1 \cup X_2$ и не пересекает никаких других ребер, кроме тех ребер, которые сходятся к этой вершине v .

Каждое (одинарное) ребро графа X_1 , сходящееся в вершине v , пересекает соответствующую окружность в одинокой точке. Напомним, что в соответствии с данной ориентированной параметризацией γ одинарное ребро имеет вполне определенное направление. Если это направленное ребро *входит* в вершину v , то одинокой точке приписываем число 1, если *выходит* из v , то число 0.

¹Ниже мы будем рассматривать лишь допустимые ориентации на графе X_1 , опуская при этом слово “допустимый”.

Разведенные ребра, сходящиеся в v , пересекают окружность в паре точек. Одно из этих ребер обязательно входит в вершину, и мы приписываем соответствующей точке из этой пары число 1, в то время как другое разведенное ребро выходит из v , и мы приписываем другой точке из этой же пары число 0. Тем самым каждой разведенной паре ребер соответствует пара чисел $(0, 1)$.

Пусть задана ориентация O графа X_1 . Тогда для каждой вершины v ориентация O и фиксированная выше расстановка направлений на разведенных ребрах индуцирует на окружности, описанной вокруг v , конфигурацию, которую мы будем обозначать через $M(v, O)$.

Заметим, что и параметризация конфигурации с помощью хорд, и ее знак определены в начале § 4.

Ориентированная параметризация γ из ансамбля $\Gamma_O(X_1, X_2)$ может быть приведена в общее положение посредством замены ее путем, который вне окружностей на поверхности $\mathcal{P}$ состоит из отрезков ориентированных ребер, как одинарных, так и разведенных двойных, а внутри каждой окружности состоит из хорд, индуцированных параметризацией γ . Эту параметризацию в точке v мы будем обозначать $g(v, \gamma)$ и называть *параметризацией конфигурации* $M(v, \gamma)$.

Теперь мы будем рассматривать лишь ориентированные параметризации в общем положении, сохранив их прежние обозначения.

Из определения параметризации γ в общем положении следует, что все ее точки самопересечения трансверсальны, их конечное число, лежат они лишь внутри окружностей и являются точками пересечения хорд параметризаций соответствующих конфигураций $M(v, \gamma)$, $v \in X_1 \cup X_2$.

Согласно этому мы можем заметить, что конфигурации $M(v, O)$ и $M(v, \gamma)$ совпадают, если параметризация γ строилась в соответствии с ориентацией O .

Пусть $\Gamma_{M(v, O)}$ есть ансамбль всех параметризаций конфигурации $M(v, O)$, соответствующих ориентации O .

Для заданной параметризации $g(v, \gamma)$ конфигурации $M(v, \gamma)$ мы будем обозначать через $\text{sgn } g(v, \gamma)$ число $(-1)^{t(g)}$, где $t(g)$ – число точек попарного пересечения всех хорд, индуцированных параметризацией $g(v, \gamma)$.

Напомним, что *знаком* ориентированной параметризации γ называется $\text{sgn } \gamma = (-1)^{t(\gamma)}$, где $t(\gamma)$ – число трансверсальных самопересечений параметризации γ .

Из вышесказанного следует, что все точки самопересечения ориентированной параметризации γ сосредоточены в локальных параметризациях $g(v, \gamma)$ конфигураций $M(v, \gamma)$. Поэтому верна следующая формула для знака $\text{sgn } \gamma$:

$$\text{sgn } \gamma = \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \text{sgn } g(v, \gamma). \quad (17)$$

ЛЕММА 5. *При данной ориентации O ансамбль параметризаций $\Gamma_O(X_1, X_2)$ есть прямое произведение ансамблей параметризаций $\Gamma_{M(v, O)}$ конфигураций $M(v, O)$ по всем вершинам v графа $X_1 \cup X_2$:*

$$\Gamma_O(X_1, X_2) = \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \Gamma_{M(v, O)}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что расстановка направлений на всех разведенных ребрах из подграфа X_2 фиксирована. Она вместе с ориентацией O на ребрах из X_1 однозначно определяет конфигурацию $M(v, O)$ в каждой вершине $v \in X_1 \cup X_2$. При этом произвольно выбранная в каждой вершине v параметризация конфигурации $M(v, O)$ индуцирует некоторую ориентированную параметризацию графа $X_1 \cup X_2$ из ансамбля $\Gamma_O(X_1, X_2)$. И обратно: любая ориентированная параметризация γ из ансамбля $\Gamma_O(X_1, X_2)$ порождает в каждой вершине v параметризацию конфигурации $M(v, O)$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Сигнатурой ансамбля $\Gamma_O(X_1, X_2)$ называется*

$$S_O(X_1, X_2) := \sum_{\gamma \in \Gamma_O(X_1, X_2)} \text{sgn } \gamma.$$

Сигнатурой конфигурации $M(v, O)$ называется

$$\text{Sign } M(v, O) := \sum_{g \in \Gamma_{M(v, O)}} \text{sgn } g.$$

Из леммы 5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Сигнатура ансамбля $\Gamma_O(X_1, X_2)$ равна произведению сигнатур конфигураций $M(v, O)$ по всем вершинам $v \in X_1 \cup X_2$ при фиксированной ориентации O :*

$$S_O(X_1, X_2) = \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \text{Sign } M(v, O). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} S_O(X_1, X_2) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_O(X_1, X_2)} \text{sgn } \gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma_O(X_1, X_2)} \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \text{sgn } g(v, \gamma) \\ &= \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \sum_{g(v, \gamma) \in \Gamma_{M(v, O)}} \text{sgn } g(v, \gamma) = \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \text{Sign } M(v, O). \end{aligned}$$

Перестановочность суммы и произведения вытекает из леммы 5. Равенство (19) доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ориентация O графа X_1 называется *регулярной*, если в каждой вершине $v \in X_1$ индуцируемая ею конфигурация $M(v, O)$ является регулярной, т.е. в вершине v входящие и исходящие ориентированные ребра графа X_1 строго чередуются между собой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть граф X_1 допускает регулярную ориентацию. Тогда:*

- 1) *каждая компонента связности графа X_1 допускает две и только две ориентации, которые регулярны в каждой вершине и взаимно противоположны на каждом ребре компоненты;*
- 2) *число всех регулярных ориентаций на X_1 равно 2^q , где q – число компонент графа X_1 .*

Из теоремы 3А и леммы 5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Если ориентация O не является регулярной, то $S_O(X_1, X_2) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дан граф $X_1 \cup X_2$, и пусть ребра графа X_2 разведены. Расстановка направлений на всех ребрах из $X_1 \cup X_2$ называется *главной ориентацией*, если в каждой вершине $v \in X_1 \cup X_2$ все входящие и исходящие ребра (как одинарные, так и разведенные) чередуются между собой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть граф $X_1 \cup X_2$ лежит на ориентированной поверхности $\mathcal{P}$ и X_1 гомологичен нулю по mod 2. Тогда граф $X_1 \cup X_2$ имеет главную ориентацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $X_1 \sim 0 \pmod{2}$ на ориентированной поверхности $\mathcal{P}$, то граф X_1 является границей некоторой области $\Omega \subset \mathcal{P}$: $X_1 = \partial\Omega \pmod{2}$.

Зафиксируем ориентацию области Ω (например, против часовой стрелки). Поскольку все ребра графа X_1 лежат на границе области Ω , то ориентация области однозначно индуцирует направления на этих ребрах. Возьмем на дополнении $\Omega' := \mathcal{P} \setminus \Omega$ противоположную ориентацию (по часовой стрелке). Противоположно выбранные ориентации на области Ω и ее дополнении Ω' индуцируют одно и то же направление на каждом одинарном ребре из X_1 .

Каждое двойное ребро e из графа X_2 лежит внутри одной из областей: в области Ω или в Ω' . Поэтому ориентация этой области, подходящей к ребру e с обеих сторон, индуцирует на нем противоположные друг другу направления. Разведем двойное ребро. Каждому из разведенных ребер припишем то направление, которое индуцируется ориентацией области с соответствующей стороны. Таким образом, на каждом ребре, одинарном или разведенном, вводится направление. При этом на каждой паре разведенных ребер направления будут противоположны друг другу.

Проверим, что полученная ориентация является главной. Рассмотрим два последовательных ребра при обходе вершины $v \in X_1 \cup X_2$.

Пусть оба ребра одинарные. Принадлежат границе одной области, они получают такие направления, при которых одно ребро входит в вершину, а другое, соседнее, выходит из нее.

Пусть, далее, одно из двух соседних ребер одинарное, а другое двойное. После разведения двойного ребра и на одинарном ребре, и на “ближайшем” к нему разведенном ребре направления индуцируются ориентацией одной и той же области: Ω или Ω' . Поэтому из этих двух ребер – одинарное и ближайшее разведенное – одно входит в вершину v , а другое выходит.

Пусть, наконец, оба соседних ребра двойные. После их разведения выделим два “ближайших” друг к другу разведенных ребра. Они ограничивают сектор с вершиной в v , принадлежащий одной ориентированной области. Ориентация этой области индуцирует на разведенных ребрах-сторонах сектора направления так, что одно из этих ребер входит в вершину v , а другое выходит из нее.

Следовательно, при обходе вокруг произвольной вершины $v \in X_1 \cup X_2$ входящие и выходящие как одинарные, так и разведенные ребра чередуются между собой. Таким образом, мы расставили на одинарных и разведенных ребрах направления так, что они составляют главную ориентацию O графа $X_1 \cup X_2$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что наряду с каждой главной ориентацией существует и другая главная ориентация, противоположная первой на всех ребрах как из X_1 , так и на разведенных ребрах из X_2 .

Возьмем одну из возможных главных ориентаций графа $X_1 \cup X_2$. С этого момента мы фиксируем расстановку направлений на разведенных ребрах из X_2 , которая есть ограничение данной главной ориентации, и назовем ее *канонической*.

При канонической расстановке направлений на разведенных ребрах графа X_2 граф X_1 допускает регулярную ориентацию. В силу предложения 1 число всех таких регулярных ориентаций на X_1 равно 2^q , где q – число компонент графа X_1 .

ТЕОРЕМА 4. Пусть граф G вложен в ориентированную поверхность $\mathcal{P}$, и пусть подграфы $X_1, X_2 \subseteq G$ не имеют общих ребер.

1. Пусть $X_1 = \emptyset$. Если X_2 есть цикл по mod 2, то $S(X_1, X_2) = 1$. Если X_2 не есть цикл по mod 2, то $S(X_1, X_2) = 0$.

2. Пусть $X_1 \neq \emptyset$ есть цикл, гомологичный нулю по mod 2. Если пара X_1, X_2 не удовлетворяет хотя бы одному из трех условий (см. лемму 2):

- (i) в каждой вершине графа X_1 сходится четное число ребер графа X_1 ;
- (ii) в каждой вершине, в которой сходятся только ребра из графа X_2 , сходится лишь четное число ребер;
- (iii) на каждой компоненте графа X_1 имеется лишь четное число концов ребер из X_2 ;

то $S(X_1, X_2) = 0$.

Если же пара X_1, X_2 удовлетворяет всем трем условиям (i)–(iii), то

$$S(X_1, X_2) = 2^{q + \sum_{v \in X_1} (k(v) - 1)},$$

где $2k(v)$ – число ребер графа X_1 , которые сходятся в вершине v , и q – число компонент связности графа X_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай 1. Пусть $X_1 = \emptyset$ и X_2 есть цикл по mod 2. Тогда в каждой вершине выполняются условия теоремы 3С, 2): $k = 0$, n четно и $l = n$ или $l = 0$. Следовательно, в каждой вершине графа X_2 имеем $\text{Sign } M(v, O) = 1$. Отсюда по формуле (19) имеем $S(\emptyset, X_2) = 1$.

Если же X_2 не есть цикл по mod 2, то найдется вершина $v \in X_2$, которая удовлетворяет теореме 3С, 1): $k = 0$, n нечетно. Для нее $\text{Sign } M(v, O) = 0$. Следовательно, по формуле (19) выполняется $S(\emptyset, X_2) = 0$.

Рассмотрим случай 2. Пусть теперь $X_1 \neq \emptyset$. Прежде всего заметим, что если бы X_1 не был циклом, т.е. не выполнялось бы условие (i), то ансамбль ориентированных параметризаций был бы пуст и $S(X_1, X_2) = 0$.

Заметим теперь, что нам достаточно рассматривать только регулярные (на X_1) ориентации. Действительно,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \text{sgn } \gamma = \sum_{\{O\}} \sum_{\gamma \in \Gamma_O} \text{sgn } \gamma = \sum_{\{O_A\}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{O_A}} \text{sgn } \gamma + \sum_{\{O_N\}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{O_N}} \text{sgn } \gamma. \quad (20)$$

Здесь $\{O\}$ обозначает ансамбль всех ориентаций, $\{O_A\}$ – ансамбль всех регулярных ориентаций и $\{O_N\}$ – ансамбль всех нерегулярных ориентаций. По следствию 2 из леммы 5 в формуле (20) второе слагаемое (вклад со стороны нерегулярных ориентаций) равно нулю.

Пусть не выполняется условие (ii), т.е. для некоторой вершины v' число $k(v')$ равно нулю, а $n(v')$ нечетно. Так как в вершине v' сходятся лишь разведенные ребра, расстановка направлений на которых уже фиксирована, то при любой ориентации O графа X_1 ансамбль параметризаций конфигураций $M(v', O)$ также фиксирован. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} S(X_1, X_2) &= \sum_{\{O\}} S_O(X_1, X_2) = \sum_{\{O\}} \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \text{Sign } M(v, O) \\ &= \sum_{\{O\}} \text{Sign } M(v', O) \prod_{v \neq v'} \text{Sign } M(v, O) \\ &= \text{Sign } M(v', O) \sum_{\{O\}} \prod_{v \neq v'} \text{Sign } M(v, O). \end{aligned} \quad (21)$$

Так как $k(v') = 0$, то по теореме 3C, 1) $\text{Sign } M(v', O) = 0$. Поэтому из (21) следует, что $S(X_1, X_2) = 0$.

Пусть теперь условия (i) и (ii) выполняются, но не выполняется (iii), и пусть X_1^* – компонента графа X_1 , к которой подходит нечетное число концов ребер из X_2 . Разобьем ансамбль из 2^q ориентаций на 2^{q-1} пар так, что в каждую пару входят ориентации O и O' , которые совпадают на всех компонентах графа X_1 , за исключением компоненты X_1^* , на которой ориентации O и O' противоположны.

Пусть ориентация O такова, что она совпадает на компоненте X_1^* с главной ориентацией. В каждой вершине $v \in X_1$ сходятся некоторое число $2k(v)$ ($\neq 0$) ребер из X_1 и $n(v)$ концов двойных ребер. В силу выбора ориентации O конфигурация $M(v, O)$ является альтернирующей на всей совокупности нулей и единиц как одиноких, так и парных. Поэтому конфигурация $M(v, O)$ удовлетворяет условиям теоремы 3B при параметре $l(v) = 0$. Поэтому по формуле (19) имеем

$$\begin{aligned} S_O(X_1, X_2) &= \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \text{Sign } M(v, O) \\ &= \prod_{v \in X_1^*} \text{Sign } M(v, O) \prod_{v \in (X_1 \cup X_2) \setminus X_1^*} \text{Sign } M(v, O) \\ &= \prod_{v \in X_1^*} 2^{k(v)-1} \prod_{v \in (X_1 \cup X_2) \setminus X_1^*} \text{Sign } M(v, O) \\ &= 2^{\sum_{v \in X_1^*} (k(v)-1)} \prod_{v \in (X_1 \cup X_2) \setminus X_1^*} \text{Sign } M(v, O). \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим теперь ориентацию O' , которая на компоненте X_1^* противоположна ориентации O . Тогда для каждой вершины $v \in X_1^*$ конфигурация $M(v, O')$ будет по-прежнему регулярной, но параметр $l'(v)$ (так как расстановка направлений на разведенных ребрах из X_2 фиксирована) будет равен $n(v)$, где, напомним, $n(v)$ –

число концов двойных ребер (из X_2) в вершине v . Обозначим $N^* := \sum_{v \in X_1^*} n(v)$. По формуле (19) имеем

$$\begin{aligned}
 S_{O'}(X_1, X_2) &= \prod_{v \in X_1 \cup X_2} \text{Sign } M(v, O') \\
 &= \prod_{v \in X_1^*} \text{Sign } M(v, O') \prod_{v \in (X_1 \cup X_2) \setminus X_1^*} \text{Sign } M(v, O') \\
 &= \prod_{v \in X_1^*} (-1)^{n(v)} 2^{k(v)-1} \prod_{v \in (X_1 \cup X_2) \setminus X_1^*} \text{Sign } M(v, O') \\
 &= (-1)^{\sum_{v \in X_1^*} n(v)} 2^{\sum_{v \in X_1^*} (k(v)-1)} \prod_{v \in (X_1 \cup X_2) \setminus X_1^*} \text{Sign } M(v, O) \\
 &= (-1)^{N^*} 2^{\sum_{v \in X_1^*} (k(v)-1)} \prod_{v \in (X_1 \cup X_2) \setminus X_1^*} \text{Sign } M(v, O). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Так как при отрицании условия (iii) число N^* нечетно, то для каждой пары ориентаций O и O' , которые противоположны на компоненте X_1^* и совпадают на остальных компонентах графа X_1 , в силу (22) и (23) имеем

$$S_O(X_1, X_2) + S_{O'}(X_1, X_2) = 0.$$

Таким образом, если какая-то компонента графа X_1 содержит нечетное число концов ребер из графа X_2 , то $S(X_1, X_2) = 0$.

Пусть теперь для (X_1, X_2) выполняются все три условия (i)–(iii). Вычислим в этом случае произведение $\prod_{v \in X_1 \cup X_2} \text{Sign } M(v, O)$ для главной ориентации O . Ориентация O является регулярной на графе X_1 . Так как конфигурация $M(v, O)$ в вершине v регулярна, то применимы лишь теоремы 3В и 3С. Более того, так как ориентация O главная, то в конфигурации $M(v, O)$ все нули и единицы (как одинокие, так и парные) чередуются друг с другом. Поэтому если $k(v) \neq 0$, то $l(v) = 0$, и по теореме 3В получаем $\text{Sign } M(v, O) = 2^{k(v)-1}$. Если же $k(v) = 0$, то по условию (ii) число $n(v)$ четно, и по теореме 3С, 2) имеем $\text{Sign } M(v, O) = 1$. Следовательно, для главной ориентации O имеем

$$S_O(X_1, X_2) = 2^{\sum_{v \in X_1} (k(v)-1)}. \quad (24)$$

Рассмотрим произвольную регулярную на X_1 ориентацию O' . Она получается из главной на $X_1 \cup X_2$ ориентации O следующим образом. Берется некоторое число компонент графа X_1 , и на каждой из них ориентация O заменяется на противоположную. Так как в силу условия (iii) число N^* четно для любой компоненты графа X_1 , то при замене ориентации на отдельной компоненте на противоположную сигнатура любой регулярной ориентации O' в силу равенств (22) и (23) равняется сигнатуре главной ориентации O :

$$S_{O'}(X_1, X_2) = S_O(X_1, X_2). \quad (25)$$

Так как всех регулярных ориентаций 2^q , то из (24) и (25) следует

$$S(X_1, X_2) = \sum_{\{O'\}} S_{O'}(X_1, X_2) = 2^q 2^{\sum_{v \in X_1} (k(v)-1)} = 2^{q + \sum_{v \in X_1} (k(v)-1)}.$$

Теорема 4 доказана. Следовательно, доказана и теорема 1.

Список литературы

1. *Onsager L.* Crystal statistic. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition // *Phys. Rev.* 1944. V. 65. P. 117–149.
2. *Kaufman B.* Crystal statistic. II. Partition function evaluated by Spinor Analysis // *Phys. Rev.* 1949. V. 76. P. 1232–1243.
3. *Kaufman B., Onsager L.* Crystal statistic. III. Short-range order in a binary Ising lattice // *Phys. Rev.* 1949. V. 76. P. 1244–1252.
4. *Kac M., Ward J. C.* A combinatorial solution of the two-dimensional Ising model // *Phys. Rev.* 1952. V. 88. P. 1332–1337.
5. *Sherman S.* Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism. I. A conjecture of Feynman on paths and graphs // *J. Math. Phys.* 1960. V. 1. № 3. P. 202–217.
6. *Sherman S.* Addendum: Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism // *J. Math. Phys.* 1963. V. 4. № 9. P. 1212–1214.
7. *Burgoyne P. N.* Remarks on the combinatorial approach to the Ising problem // *J. Math. Phys.* 1963. V. 4. № 10. P. 1320–1326.
8. *Вдовиченко Н. В.* Вычисление статистической суммы плоской дипольной решетки // *ЖЭТФ.* 1964. Т. 47. № 8. С. 715–719.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
10. *Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И.* Комбинаторные вопросы двумерной модели Изинга // *Тр. МИАН.* 1991. Т. 196. С. 51–65.
11. *Van der Warden B. L.* Lange Reichweite der regelmässigen Atomanordnung in Mischkristallen // *Zeitschr. Phys.* 1941. Bd. 118. S. 473–488.
12. *Whitney H.* On regular closed curves in the plane // *Compos. Math.* 1937. V. 4. P. 276–284.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Поступило в редакцию
25.XII.1997