Общероссийский математический портал

В. В. Федорчук, О топологической полноте пространств мер, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 4, 207–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/im253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:06:27

УДК 515.12

В. В. Федорчук

О топологической полноте пространств мер

Доказывается, что функторы P_R и P_τ радоновых и τ -аддитивных вероятностных мер соответственно не сохраняют ни вещественную полноту, ни полноту по Дьедонне тихоновских пространств. Находятся условия, при которых в предположении аксиомы Мартина функтор P_τ сохраняет вещественно полные пространства, абсолютные экстензоры и тихоновские расслоения. Вторая группа результатов не может быть получена без дополнительных теоретико-множественных предположений.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Введение

Изучаются некоторые топологические свойства пространств радоновых и τ -аддитивных вероятностных мер на борелевских множествах тихоновских пространств. Исследования в этом направлении были начаты еще В.С. Варадарайном [5]. Он, в частности, доказал, что для всякого (топологически полного) метризуемого пространства X пространство $P_\tau(X)$ всех τ -аддитивных вероятностных мер метризуемо (и топологически полно). Этому предшествовало следующее. В 1957 г. Ле Кам [6] ввел понятия τ -аддитивной меры (под названием τ -гладкой) и слабо радоновой меры (под названием плотной). А годом ранее Ю.В. Прохоров [7] среди других результатов получил два, которые сейчас могут быть сформулированы так:

- 1) всякая регулярная борелевская мера на польском пространстве является радоновой (знаменитая теорема Прохорова);
- 2) функторы P_R и P_τ переводят польские пространства в польские (метрика Прохорова порождает слабую топологию и сохраняет полноту сепарабельных метрических пространств).

Недавно Т. О. Банах [1], [2] предпринял попытку детального исследования функторов P_τ и P_R соответственно τ -аддитивных и радоновых вероятностных мер в категории Tych тихоновских пространств. Он изучил категорные свойства этих функторов и поднял их на категории Metr_b и Unif метрических ограниченных и равномерных пространств соответственно. Т. О. Банах доказал также, что функторы P_τ и P_R сохраняют полноту по Чеху и полноту ограниченных метрических пространств. Он заметил, что функтор P_R не сохраняет полноту равномерных пространств, и поставил ряд вопросов, которые можно разбить на две группы: равномерную и общетопологическую. Первая группа состоит из одного вопроса: сохраняет ли функтор P_τ полноту равномерных пространств? Ответ на этот вопрос дан в [16], где показано, что $P_\tau(\mathbb{R}^c)$ не полно, в то время как (в предположении аксиомы Мартина) $P_\tau(X)$ полно для всякого полного равномерного пространства X .

Работа написана при поддержке РФФИ и ИНТАС (гранты № 97-01-357 и 94-3763).

равномерного веса $< c$. В частности, вопрос о полноте $P_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ не разрешим в рамках ZFC.

Вторая группа состоит из четырех вопросов: сохраняют ли функторы P_R и P_τ вещественную полноту и полноту по Дьедонне тихоновских пространств? Каждый из этих вопросов имеет отрицательный ответ в ZFC. А именно, теоремы 4.3, 4.4 и следствие 4.5 показывают, что пространства $P_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ и $P_\tau(\mathbb{R}^c)$ не являются ни вещественно полными, ни полными по Дьедонне. В частности, следствие 4.5 усиливает теорему 3.1 из [16] о том, что равномерное пространство $P_\tau(\mathbb{R}^c)$ не полно.

В то время как теорема 4.3 дает достаточно исчерпывающие ответы для радоновых мер, в случае τ -аддитивных мер остается зазор в виде несчетных мощностей $< c$. Здесь, как и в равномерном случае, помогает аксиома Мартина. Оказывается (теорема 5.7), что в предположении МА пространство $P_\tau(X)$ вещественно полно для всякого вещественно полного пространства X Q -веса $< c$. В частности (следствие 5.8, МА(ω_1)), $P_\tau(X)$ вещественно полно для всякого замкнутого подмножества $X \subset \mathbb{R}^{\omega_1}$. Более того (следствие 5.5, МА(ω_1)), $P_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{\omega_1}$. Последнее утверждение допускает параметрическую версию (следствие 5.6, МА(ω_1)): функтор P_τ сохраняет класс $\mathbb{R}^{\omega_1}$ -расслоений над сепарабельной метризуемой базой.

Сравнивая следствие 5.5 со следствием 4.6 ($P_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ не вещественно полно при СН), видим, что вопрос о вещественной полноте $P_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ не разрешим в ZFC.

Исследуется также вопрос о сохранении функтором P_τ свойства быть АЕ(n)-пространством (см. [11]). Класс АЕ(0)-пространств (абсолютных экстензоров в размерности нуль) является собственным подклассом класса вещественно полных пространств, причем класс АЕ(0)-пространств счетного веса совпадает с классом вещественно полных пространств счетного Q -веса, который в свою очередь совпадает с классом польских пространств. Доказывается (теорема 5.11, МА(ω_1)), что P_τ переводит АЕ(0)-пространства веса $\leq \omega_1$ в АЕ-пространства, или, что то же самое, в абсолютные ретракты. Эта теорема является следствием своей параметрической версии (теорема 5.10, МА(ω_1)) о том, что если f — 0-мягкое отображение пространства X веса $\leq \omega_1$ на польское пространство Y , то отображение $P_\tau(f)$ мягко. Ни теорема 5.10, ни теорема 5.11 не распространяются на больший чем ω_1 вес (замечание 5.12). Они не могут быть также доказаны в ZFC (следствие 4.6).

§ 2, 3 носят предварительный характер. В них приводятся необходимые для дальнейшего понятия и факты, касающиеся мер, вещественно полных пространств и абсолютных экстензоров. Дополнительную информацию можно найти как в статьях и монографиях, цитируемых в тексте, так и в учебнике [13]. Основные результаты доказываются в § 4, 5. Часть результатов объявлена в заметке [9].

Все пространства предполагаются тихоновскими, все отображения — непрерывными. Бикомпактные пространства называются *компактными* или *компактами*. Через $|A|$ обозначается мощность множества A . Порядковое число отождествляется с множеством меньших порядковых чисел, кардинальное число — с наименьшим порядковым числом данной мощности.

§ 2. О радоновых и τ -аддитивных мерах

Пусть $B(X)$ — σ -алгебра всех борелевских подмножеств пространства X , т.е. наименьшая σ -алгебра в X , содержащая семейство всех открытых подмножеств X .

Борелевской мерой в X называется счетно-аддитивная функция $\mu: B(X) \rightarrow [0, +\infty)$. Множество всех борелевских мер в X обозначаем $M(X)$. Для $\mu \in M(X)$ полагаем $\|\mu\| = \mu(X)$. Борелевская мера μ в X называется:

- 1) *вероятностной*, если $\|\mu\| = 1$;
- 2) *регулярной*, если для любого $B \in B(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое в X множество $F \subset B$, что $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$;
- 3) *радоновой*, если для любого $B \in B(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$;
- 4) *τ -аддитивной*, если

$$\mu(G_0) = \sup\{\mu(G): G \in \mathcal{G}_0\}$$

для произвольного открытого множества $G_0 \subset X$ и произвольного направленного вверх семейства $\mathcal{G}_0$ открытых подмножеств X такого, что $G_0 = \bigcup G_0$.

Всякая радонова мера, очевидно, τ -аддитивна, а из того, что регулярность борелевской меры совпадает с открытой регулярностью, вытекает

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [18]. *Всякая τ -аддитивная мера в X регулярна.*

В компактном пространстве X понятия регулярности, радоновости и τ -аддитивности совпадают. Мера $\mu \in M(X)$ называется *слабо радоновой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$. Следующее утверждение достаточно очевидно.

2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякая регулярная слабо радонова мера является радоновой.*

Далее в этом параграфе Y является подпространством X . Пусть $\mu \in M(X)$ и $B \in B(Y)$. Положим

$$r_Y^X(\mu)(B) = \inf\{\mu(C): C \in B(X), C \cap Y = B\}. \quad (2.1)$$

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [18]. $r_Y^X(\mu)$ есть борелевская мера в Y .

Будем называть $r_Y^X(\mu)$ *ограничением* меры μ , а отображение $r_Y^X: M(X) \rightarrow M(Y)$ – *оператором ограничения*. Теперь пусть $\mu \in M(Y)$ и $B \in B(X)$. Положим

$$e_X^Y(\mu)(B) = \mu(B \cap Y). \quad (2.2)$$

2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [18]. $e_X^Y(\mu)$ есть борелевская мера в X и $\|e_X^Y(\mu)\| = \|\mu\|$.

Меру $e_X^Y(\mu)$ назовем *продолжением* меры μ , а отображение $e_X^Y: M(Y) \rightarrow M(X)$ – *оператором продолжения*. Следующее утверждение очевидно.

2.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $r_Y^X \circ e_X^Y = \text{id}_{M(Y)}$.

2.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [18]. *Ограничение регулярной меры регулярно.*

2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [18]. *Мера $\mu \in M(X)$ τ -аддитивна тогда и только тогда, когда τ -аддитивна мера $e_X^Y(\mu)$.*

Множество всех вероятностных радоновых (соответственно τ -аддитивных) мер в X обозначим через $P_R(X)$ (соответственно $P_\tau(X)$). Пространство X назовем *абсолютным борелевским множеством*, если оно является борелевским подмножеством любого (какого-нибудь) своего компактного расширения. Следующее утверждение вытекает из предложений 2.1, 2.2 и 2.4.

2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если X – абсолютно борелевское множество, то $P_R(X) = P_\tau(X)$.

Положим

$$P_Y^*(X) = \{\mu \in P_\tau(X) : \mu(B) = 0 \text{ для любого } B \in B(X), B \cap Y = \emptyset\}.$$

2.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $e_X^Y \circ r_Y^X \mid P_Y^*(X) = \text{id}$.

Для доказательства достаточно заметить, что $e_X^Y(r_Y^X(\mu)) \leq \mu$ для $\mu \in M(X)$ и $\|r_Y^X(\mu)\| = \|\mu\|$ для $\mu \in P_Y^*(X)$. Из предложений 2.5, 2.7 и 2.9 легко извлекается, что

$$e_X^Y(P_\tau(Y)) = P_Y^*(X), \quad (2.3)$$

$$r_Y^X(P_Y^*(X)) = P_\tau(Y). \quad (2.4)$$

Для компактного пространства K через $P(K)$ обозначаем множество всех регулярных вероятностных мер в K . Как было отмечено выше, $P(K) = P_\tau(K)$. С основными понятиями и фактами, относящимися к топологии вероятностных мер в компактах, читатель может познакомиться в [8] и [10]. Напомним здесь лишь то, что $\star$ -слабая топология на $P(K)$ определяется вложением $P(K) \rightarrow \mathbb{R}^{C(K)}$, отождествляющим меру μ с интегралом $\int_\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$.

Из предложения 2.7 вытекает, что $e_{\beta X}^X(P_\tau(X)) \subset P(\beta X)$. Отображение $e_{\beta X}^X : P_\tau(X) \rightarrow P(\beta X)$ является теоретико-множественным вложением согласно предложению 2.5. Определяем $\star$ -слабую топологию на $P_\tau(X)$, считая $e_{\beta X}^X$ топологическим вложением. При этом равенства (2.3) и (2.4) становятся топологическими. Нам, впрочем, это понадобится лишь в частном случае. А именно, имеет место

2.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [16]. Для произвольного компактного расширения bX отображения

$$e_{bX}^X : P_\tau(X) \rightarrow P_X^*(bX)$$

и

$$r_X^{bX} : P_X^*(bX) \rightarrow P_\tau(X)$$

являются взаимно обратными гомеоморфизмами.

Пусть $f : X \rightarrow Z$ – непрерывное отображение. Определим отображение $M(f) : M(X) \rightarrow M(Z)$, полагая

$$M(f)(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)). \quad (2.5)$$

Легко видеть, что $M(f)(P_\tau(X)) \subset P_\tau(Z)$ и $M(f)(P_R(X)) \subset P_R(Z)$. Следовательно, равенство (2.5) определяет отображения

$$P_\tau(f) : P_\tau(X) \rightarrow P_\tau(Z), \quad P_R(f) : P_R(X) \rightarrow P_R(Z).$$

2.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [1]. Если f – непрерывное отображение, то отображения $P_\tau(f)$ и $P_R(f)$ непрерывны.

2.12. ТЕОРЕМА [1]. P_τ и P_R являются ковариантными функторами, действующими в категории $\mathbf{Tych}$ и продолжающими функтор $P : \mathbf{Comp} \rightarrow \mathbf{Comp}$.

Приведем некоторые свойства функторов P_R и P_τ .

2.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Функторы P_R и P_τ сохраняют сепарабельность пространств.*

2.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [1]. *Функторы P_R и P_τ сохраняют (замкнутые) вложения.*

2.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [16]. *Пусть $f: X \rightarrow Z$ – отображение, $X_0 \subset X$, $Z_0 \subset Z$ – такие подпространства, что $f(X_0) \subset Z_0$. Тогда, положив $f_0 = f|_{X_0}$, имеем*

$$e_{Z_0}^{Z_0} \circ P_\tau(f_0) = P_\tau(f) \circ e_{X_0}^{X_0}.$$

2.16. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [16]. *Пусть $f: X \rightarrow Z$ – отображение и $bf: bX \rightarrow bZ$ – его продолжение на какие-нибудь компактификации. Тогда*

$$P_\tau(f) = r_Z^{bZ} \circ P(bf) \circ e_{bX}^X.$$

2.17. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [1]. *Функтор P_τ сохраняет прообразы, т.е. $P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(A)) = P_\tau(F^{-1}(A))$ для любого отображения $f: X \rightarrow Z$ и любого подпространства $A \subset Z$.*

Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ – обратный спектр, X – его предел, а $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ – предельные проекции. В силу теоремы 2.12 семейства $P_\tau(S) = \{P_\tau(X_\alpha), P_\tau(\pi_\beta^\alpha), A\}$ и $P_R(S) = \{P_R(X_\alpha), P_R(\pi_\beta^\alpha), A\}$ являются обратными спектрами. Обозначим через $R_S: P_\tau(X) \rightarrow \lim P_\tau(S)$ (соответственно $R'_S: P_R(X) \rightarrow \lim P_R(S)$) предел отображений $P_\tau(\pi_\alpha)$ (соответственно $P_R(\pi_\alpha)$), $\alpha \in A$.

2.18. ТЕОРЕМА [1]. *Отображения R_S и R'_S являются вложениями. Если при этом проекции π_α плотны (т.е. $\pi_\alpha(X)$ плотно в X_α), то $R_S(P_\tau(X))$ плотно в $\lim P_\tau(S)$, а $R'_S(P_R(X))$ плотно в $\lim P_R(S)$. Если кроме того спектр S счетен, то R'_S – гомеоморфизм.*

Напомним, что носителем меры $\mu \in M(X)$ называется множество

$$\text{supp } \mu = \{x \in X: \mu(Ox) > 0 \text{ для всякой окрестности } Ox\}.$$

2.19. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [12]. *Функтор P сохраняет носители, т.е.*

$$\text{supp } P(f)(\mu) = f(\text{supp } \mu)$$

для отображения $f: K \rightarrow L$ компактов и всякой меры $\mu \in P(K)$.

2.20. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если все конечные степени пространства X обладают свойством Суслина, то $P_\tau(X)$ также обладает свойством Суслина.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X^n обладает свойством Суслина, то пространство $P_n(X)$ мер с не более чем n -точечными носителями также обладает свойством Суслина, будучи непрерывным образом произведения X^n на $(n-1)$ -симплекс. Но тогда свойством Суслина обладает и $P_\omega(X) = \cup P_n(X)$. А это пространство всюду плотно в $P_\tau(X)$, что и завершает доказательство.

2.21. ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 2.20 можно вывести и из значительно более сильной теоремы о том, что $c(P(X)) = \sup\{c(X^n): n \in \omega\}$ для компакта X (см. [17]).

§ 3. О вещественно полных пространствах и абсолютных экстензорах в категории Tych

Напомним, что пространство называется *полным по Дьедонне*, если оно полно в некоторой совместимой равномерности. Частным случаем полных по Дьедонне пространств является *вещественно полные* (или *вещественно компактные*, или $\mathbb{R}$ -*компактные*) пространства, т.е. замкнутые подмножества $\mathbb{R}^\kappa$. Очевидно, что полнота по Дьедонне и вещественная полнота сохраняются при переходе к замкнутым подпространствам. Из того, что во всякое равномерное покрытие можно вписать открытое локально конечное покрытие, вытекает следующее хорошо известное

3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякое счетно компактное полное по Дьедонне пространство компактно.*

3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [19]. *Всякое удовлетворяющее условию Суслина, в частности сепарабельное, полное по Дьедонне пространство вещественно полно.*

Для отображения $f: X \rightarrow Y$ положим $f^*(C(Y)) = \{\varphi \circ f: \varphi \in C(Y)\}$. Если $X \subset Y$, то $C(X) \mid X_0 \equiv \{\varphi \mid X_0: \varphi \in C(X)\}$. Подпространство $X_0 \subset X$ называется *C-вложенным* в X , если $C(X) \mid X_0 = C(X_0)$. *Размерностью* мы называем лебегову размерность, определенную посредством конечных конуль-покрытий, т.е. $\dim X \equiv \dim \beta X$.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: X \rightarrow Y$ назовем *n-мягким* (в категории Tych), $n = 0, 1, \dots$, если для любого пространства Z размерности $\leq n$, любых двух его подпространств $Z_0 \subset Z_1$ и любых отображений $g: Z_0 \rightarrow X$ и $h: Z_1 \rightarrow Y$ таких, что $g^*(C(X)) \subset C(Z) \mid Z_0$, $h^*(C(Y)) \subset C(Z) \mid Z_1$ и $fg = h \mid Z_0$, существует такое отображение $k: Z_1 \rightarrow X$, что $fk = h$, $g = k \mid Z_0$ и $k^*(C(X)) \subset C(Z) \mid Z_1$. *Мягким* будем называть ∞ -мягкое отображение.

3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X назовем *АЕ(n)-пространством* (в категории Tych), $X \in \text{АЕ}(n)$, если его постоянное отображение n -мягко. $\text{АЕ}(\infty)$ -пространства будем называть *АЕ-пространствами* или *абсолютными экстензорами*.

3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [11]. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ между польскими пространствами n-мягко в том и только том случае, когда для любого польского пространства Z размерности $\leq n$, любого его замкнутого подпространства Z_0 и любых двух отображений $g: Z_0 \rightarrow X$ и $h: Z \rightarrow Y$, удовлетворяющих условию $fg = h \mid Z_0$, существует такое отображение $k: Z \rightarrow X$, что $k \mid Z_0 = g$ и $fk = h$.*

Это утверждение, являющееся определением n -мягкого отображения для польских пространств, имеет нетривиальное доказательство, поскольку условия определения 3.3, необходимые в случае тихоновских пространств, слишком обременительны для польских пространств. Но оно позволяет нам воспользоваться результатами о мягких отображениях польских пространств.

3.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [11]. *Сепарабельное метризуемое пространство X является $\text{АЕ}(0)$ -пространством тогда и только тогда, когда X – польское пространство.*

3.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [11]. *Отображение между польскими пространствами 0-мягко тогда и только тогда, когда оно сюръективно и открыто.*

3.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [11]. *Всякое $\text{AE}(0)$ -пространство вещественно полно.*

Напомним, что R -весом пространства X (обозначение $R-w(X)$) называется такое наименьшее бесконечное кардинальное число κ , что X допускает C -вложение в $\mathbb{R}^\kappa$. Отметим, что R -вес определен для любого пространства X , так как отображение вычисления $X \rightarrow \mathbb{R}^{C(X)}$ является C -вложением.

3.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [11]. *Если $X \in \text{AE}(0)$, то $wX = R - w(X)$.*

3.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [11]. *Если $f: X \rightarrow Y$ — n -мягкое отображение, то $X \in \text{AE}(n)$ тогда и только тогда, когда $Y \in \text{AE}(n)$.*

3.11. ТЕОРЕМА [4]. *Если f — 0-мягкое отображение между польскими пространствами, то отображение $P_\tau(f)$ мягко.*

Из предложения 3.10 и теоремы 3.11 непосредственно вытекает

3.12. ТЕОРЕМА [3]. *Если X — польское пространство, то $P_\tau(X) \in \text{AE}$.*

Из предложений 3.6, 3.8 и теоремы 3.12 вытекает

3.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если X — польское пространство, то $P_\tau(X) = P_R(X)$ вещественно полно.*

3.14. ТЕОРЕМА [15]. $P_\tau(\mathbb{R}^\omega)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^\omega$.

3.15. ТЕОРЕМА [4]. *Пусть X и Y — метризуемые сепарабельные пространства, причем X — бесконечное абсолютно борелевское множество, и пусть $f: X \times Y \rightarrow Y$ — проектирование. Тогда $P_R(f)$ является тривиальным $P_R(X)$ -расслоением.*

Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \theta\}$ — вполне упорядоченный обратный спектр и $\gamma < \theta$ — предельное число. Положим $S \mid \gamma = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha < \gamma\}$. Пусть $\pi_{\alpha, \gamma}: \lim S \mid \gamma \rightarrow X_\alpha$ — предельные проекции спектра $S \mid \gamma$. Существует единственное отображение $\pi^\gamma: X_\gamma \rightarrow \lim S \mid \gamma$ такое, что

$$\pi_{\alpha, \gamma} \circ \pi^\gamma = \pi_\alpha^\gamma, \quad \alpha < \gamma.$$

Спектр S называется *непрерывным*, если отображение π^γ является гомеоморфизмом для всякого предельного $\gamma < \theta$.

3.16. ТЕОРЕМА. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ является тривиальным $\mathbb{R}^{\omega_1}$ -расслоением тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно предельной проекции π_0 непрерывного обратного спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \omega_1\}$, все короткие проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ которого являются $\mathbb{R}^\omega$ -расслоениями.*

Это утверждение общеизвестно, достаточно очевидно и допускает разнообразные обобщения.

3.17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обратный спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ называется *факторизующим*, если всякая функция $\varphi \in C(\lim S)$ представляется в виде композиции $\psi \circ \pi_\alpha$ для некоторого $\alpha \in A$.

3.18. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [12]. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \omega_1\}$ – такой непрерывный спектр с сюръективными и открытыми предельными проекциями, что все X_α обладают свойством Суслина. Тогда S является факторизующим.

Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ имеет польское ядро, если существует такое вложение $i: X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^\omega$, что $f = p_Y \circ f$, где $p_Y: Y \times \mathbb{R}^\omega \rightarrow Y$ – проектирование. Следующая теорема характеризует n -мягкие отображения на $\text{AE}(n)$ -пространства со счетной базой.

3.19. ТЕОРЕМА. Отображение $f: X \rightarrow Y$ на $\text{AE}(n)$ -пространство со счетной базой n -мягко в том и только том случае, когда существует такой факторизующий непрерывный спектр $S_f = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \kappa\}$, где $\kappa \leq R - w(X)$, что:

- 1) $f = \pi_0$;
- 2) $X_\alpha \in \text{AE}(n)$;
- 3) $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ n -мягко и имеет польское ядро.

Более того, необходимо существуют такая вполне упорядоченная по включению непрерывная направленность A_α , $\alpha \in \kappa$, собственных подмножеств κ и такие замкнутые вложения $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow J^{A_\alpha} \times Y$, что:

- 4) $\pi_\beta^\alpha = i_\beta^{-1} \circ (q_{A_\beta}^{A_\alpha} \times \text{id}_Y) \circ i_\alpha$;
- 5) $A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$ счетно.

Эта теорема извлекается из леммы 3.4.6 [11] и доказательства теоремы 3.5.1 [11].

3.20. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [11]. Всякое $\text{AE}(0)$ -пространство обладает свойством Суслина.

§ 4. Функторы P_R и P_τ не сохраняют вещественную полноту

Введем некоторые обозначения: $J = (0, 1) \subset [0, 1] = I \subset \mathbb{R}$. Пусть θ – несчетное порядковое число и $B \subset A \subset \theta$. Через $p_B^A: I^A \rightarrow I^B$ и $q_B^A: J^A \rightarrow J^B$ обозначим проектирования произведений на сомножители. Отображения p_B^θ и q_B^θ будем обозначать символами p_B и q_B соответственно.

Зафиксируем теперь точку $x \in I^\theta$. Пусть $\lambda \in P(I^\theta)$ и $A \subset \theta$. Положим $\lambda_A = P(p_A)(\lambda)$, $x_A = p_A(x)$. Далее, пусть $\lambda^A = \lambda_A \otimes \delta(x_{\theta \setminus A})$ для собственного подмножества $A \subset \theta$ и $\lambda^A = \lambda$ при $A = \theta$.

4.1. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{B}$ – линейно упорядоченная по включению направленность собственных подмножеств θ , и пусть $A = \cup \mathcal{B}$. Тогда направленность $l = \{\lambda^B: B \in \mathcal{B}\}$ сходится к λ^A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $A = \theta$. Пусть O – произвольная окрестность меры λ в $P(I^\theta)$. Нам надо найти такое $B \in \mathcal{B}$, что $\lambda^{B'} \in O$ для всех $B' \in \mathcal{B}$, больших B . Поскольку функтор P непрерывен (теорема 2.18), существуют такое конечное множество $C \subset \theta$ и такая окрестность U меры λ_C , что $P(p_C)^{-1}(U) \subset O$. Из линейной упорядоченности множества $\mathcal{B}$ и равенства $\cup \mathcal{B} = A$ вытекает существование множества $B \in \mathcal{B}$, содержащего C . Мы утверждаем, что это B искомое. В самом деле, пусть $B \subset B'$. Тогда

$$P(p_C)(\lambda^{B'}) = P(p_C^{B'})(P(p_{B'})(\lambda^{B'})) = P(p_C^{B'})(\lambda_{B'}) = \lambda_C = P(p_C)(\lambda) \in U.$$

Следовательно, $\lambda^{B'} \in P(p_C)^{-1}(U) \subset O$.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. Положим $\mu = \lambda_A$ и $\mu^B = \lambda_B \otimes \delta(x_{A \setminus B})$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы получаем сходимость в $P(I^A)$ направленности $m = \{\mu^B : B \in \mathcal{B}\}$ к мере $\mu = \lambda_A$. Рассмотрим вложение $f_A : P(I^A) \rightarrow P(I^\theta)$, задаваемое равенством $f_A(\nu) = \nu \otimes \delta(x_{\theta \setminus A})$. Легко видеть, что f_A переводит направленность m в l , а меру μ в λ . Поэтому из непрерывности f_A вытекает сходимость l к λ . Лемма доказана.

4.2. ТЕОРЕМА. *Пространство $P_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ не является вещественно полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку вещественная полнота является топологическим инвариантом, прямую $\mathbb{R}$ можно заменить на интервал J . Согласно предложению 3.1 достаточно показать, что $P_R(J^{\omega_1})$ содержит топологическую копию ω_1 в качестве замкнутого подпространства. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех начальных счетных интервалов $[0, \beta)$ множества ω_1 . Пусть $\lambda = \otimes \{\lambda_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \in P(I^{\omega_1})$, где λ_α – мера Лебега на экземпляре I_α отрезка I . Пусть $x \in J^{\omega_1}$ – точка, все координаты которой равны $1/2$. Воспользовавшись обозначениями, предшествующими лемме 4.1, положим

$$l = \{\lambda^B : B \in \mathcal{B}\}.$$

Обозначим через $r : P(I^{\omega_1}) \rightarrow M(J^{\omega_1})$ и $r_B : P(I^B) \rightarrow M(J^B)$ операторы ограничения и положим $\mu^B = r(\lambda^B)$, $\mu_B = r_B(\lambda_B)$. Ясно, что

$$\mu^B = \mu_B \otimes \delta(x_{\omega_1 \setminus B}). \quad (4.1)$$

Далее, поскольку $\lambda_B = \otimes \{\lambda_\beta : \beta \in B\}$, а множество B счетно, мера μ_B является, очевидно, слабо радоновой, причем $\|\mu_B\| = 1$. Следовательно, μ_B – радонова мера согласно предложениям 2.2 и 2.6. Но тогда в силу (4.1) мера μ^B также является радоновой. Поэтому, положив $m = \{\mu^B : B \in \mathcal{B}\}$, получаем

$$r(l) = m \subset P_R(J^{\omega_1}).$$

Но из радоновости мер μ^B вытекает, что $\lambda^B \in P_{J^{\omega_1}}^*(I^{\omega_1})$. Поэтому из предложения 2.10 вытекает

4.2.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Отображение $r \upharpoonright l : l \rightarrow m$ является гомеоморфизмом.*

Следующим шагом в доказательстве теоремы 4.2 является

4.2.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Множество $l \subset P(I^{\omega_1})$ гомеоморфно пространству трансфинитов ω_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $g : \omega_1 \rightarrow l$, полагая $g(\beta) = \lambda^{[0, \beta)}$ ($g(0) = \lambda^\emptyset = \delta(x)$). Оно, очевидно, биективно. Далее, g непрерывно согласно лемме 4.1. Теперь продолжим отображение g до отображения g' компакта $\omega_1 + 1$, полагая $g'(\omega_1) = \lambda^{[0, \omega_1)} = \lambda$. Отображение g' непрерывно в силу той же леммы 4.1. Инъективность его очевидна. Следовательно,

$$g' : \omega_1 + 1 \rightarrow P(I^{\omega_1})$$

является топологическим вложением, а g – гомеоморфизмом. Утверждение доказано.

Остается доказать, что m замкнуто в $P_R(J^{\omega_1})$. Предположим, что существует мера $\nu \in P_R(J^{\omega_1}) \setminus m$, являющаяся точкой прикосновения множества m . Обозначим через $e: P_\tau(J^{\omega_1}) \rightarrow P(I^{\omega_1})$ оператор продолжения. Тогда согласно предложению 2.10 $e(\nu)$ является точкой прикосновения множества l , не принадлежащей l . Из доказательства утверждения 4.2.2 следует, что $e(\nu) = \lambda$. Поэтому

$$\nu(K) = \lambda(K) \quad (4.2)$$

для любого компакта $K \subset I^{\omega_1}$. Но, очевидно, $\lambda(K) = 0$. Значит, равенство (4.2) противоречит условию $\nu \in P_R(J^{\omega_1})$. Теорема 4.2 доказана.

Теорему 4.2 можно усилить следующим образом.

4.3. ТЕОРЕМА. *Для кардинального числа θ следующие условия равносильны:*

- 1) $\theta \leq \omega$;
- 2) $P_R(\mathbb{R}^\theta)$ вещественно полно;
- 3) $P_R(\mathbb{R}^\theta)$ полно по Дьедонне.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\rightarrow$ 2) вытекает из предложения 3.13. Импликация 2) $\rightarrow$ 3) тривиальна. Предположим теперь, что $P_R(\mathbb{R}^\theta)$ полно по Дьедонне для некоторого несчетного θ . Поскольку функтор P_R сохраняет замкнутые вложения (предложение 2.14), $P_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $P_R(\mathbb{R}^\theta)$. Но полнота по Дьедонне наследуется замкнутыми подпространствами. Следовательно, $P_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ полно по Дьедонне. Но $P_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ сепарабельно в силу предложения 2.13, а сепарабельное полное по Дьедонне пространство вещественно полно (предложение 3.2). Поэтому $P_R(\mathbb{R}^{\omega_1})$ вещественно полно, что противоречит теореме 4.2. Теорема 4.3 доказана.

4.4. ТЕОРЕМА. *Пространство $P_\tau(\mathbb{R}^c)$ не является вещественно полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 4.2, мы покажем, что $P_\tau(J^c)$ содержит в качестве замкнутого подпространства некоторое счетно компактное некомпактное пространство, а именно пространство c порядковых чисел $< c$. Начнем с построения вложения $h: I \rightarrow I^c$. Для этого отождествим c с I так, чтобы $0 \in c$ совпадал с $0 \in I$, и определим координатную функцию $h_\alpha: I \rightarrow I_\alpha$, $\alpha \in I = c$, следующим образом:

$$h_\alpha(t) = \frac{1}{2}|\alpha - t|.$$

Теперь положим $h = \Delta\{h_\alpha: \alpha \in c\}$. Для произвольного множества $A \subset c$ положим $h_A = \Delta\{h_\alpha: \alpha \in A\}$. Ясно, что

$$h_A = p_A \circ h. \quad (4.3)$$

Поскольку функция h_0 является вложением,

$$\text{отображение } h_A \text{ является вложением для всякого } A \ni 0. \quad (4.4)$$

В частности, h является вложением. Из определения координатных функций h_α вытекает $h_A(I) \subset [0, 1/2]^A$. Далее, если $t \notin A$, то $h_A(t) \in (0, 1/2]^A$. Таким образом, имеет место равенство

$$h_A(I) \setminus J^A = h_A(A). \quad (4.5)$$

Через λ обозначим h -образ меры Лебега на I . Положим $\lambda_A = P(p_A)(\lambda)$ и $\mu_A = r_A(\lambda)$, где $r_A: P(I^A) \rightarrow M(J^A)$ – оператор ограничения.

4.4.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $|A| < c$, то $\mu_A \in P_\tau(J^A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.4) достаточно показать, что

$$\lambda_A(K) = 0 \text{ для всякого компакта } K \subset I^A \setminus J^A. \quad (4.6)$$

Поскольку $\lambda_A(K) = \lambda_A(K \cap \text{supp } \lambda_A)$, можно считать, что

$$K \subset \text{supp } \lambda_A \setminus J^A. \quad (4.7)$$

Но функтор P сохраняет носители (предложение 2.19). Следовательно, из (4.3) получаем

$$\text{supp } \lambda_A = h_A(I). \quad (4.8)$$

Из (4.5), (4.7) и (4.8) вытекает

$$K \subset h_A(I) \setminus J^A = h_A(A). \quad (4.9)$$

Таким образом, K является метризуемым компактом мощности $< c$. Следовательно, компакт K счетен. В то же время отображение h_A не более чем двукратно, поскольку этим свойством обладает каждая координатная функция h_α . Поэтому $\lambda_A(K) = 0$. Итак, равенство (4.6), а вместе с ним и утверждение 4.4.1 доказаны.

Теперь доказательство проходит по схеме доказательства теоремы 4.2 с заменой ω_1 на c и радоновых мер на τ -аддитивные. Через B обозначается множество всех начальных интервалов $[0, \beta)$, $\beta \in c$. Далее, пусть $\lambda^B = \lambda_B \otimes \delta(x_c \setminus B)$, $\mu^B = r(\lambda^B)$. Мера μ^B является τ -аддитивной, поскольку она есть образ τ -аддитивной согласно утверждению 4.4.1 меры μ_B при отображении $P_\tau(i_B)$, где вложение $i_B: J^B \rightarrow J^c = J^B \times J^c$ определяется равенством $i_B(y) = (y, x_c \setminus B)$. Теперь полагаем $l = \{\lambda_B: B \in \mathcal{B}\}$, $m = \{\mu_B: B \in \mathcal{B}\}$. Как и при доказательстве теоремы 4.2, имеем:

- 1) отображение $r \mid l: l \rightarrow m$, где $r: P(I^c) \rightarrow P_\tau(J^c)$ – оператор ограничения, является гомеоморфизмом;
- 2) множество $l \subset P(I^c)$ гомеоморфно вполне упорядоченному пространству c ;
- 3) единственной точкой прикосновения множества l , не принадлежащей l , является мера λ .

Следовательно, множество m , гомеоморфное c , счетно компактно. Остается проверить замкнутость m в $P_\tau(J^c)$. Если существует мера $\nu \in P_\tau(J^c) \setminus m$, являющаяся точкой прикосновения множества m , то согласно 3) получаем $e(\nu) = \lambda$. Но тогда

$$\lambda \in P_{J^c}^*(I^c) \quad (4.10)$$

согласно (2.3). В то же время из (4.5) при $A = c$ получаем

$$\text{supp } \lambda = h(I) \subset I^c \setminus J^c,$$

что противоречит (4.10). Теорема 4.4 доказана.

Из предложения 3.2 и теоремы 4.4 вытекает

4.5. СЛЕДСТВИЕ. Пространство $P_\tau(\mathbb{R}^c)$ не полно по Дьедонне.

4.6. СЛЕДСТВИЕ (СН). Пространство $P_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ не вещественно полно.

§ 5. Аксиома Мартина и сохранение функтором P_τ вещественно полных пространств и абсолютных экстензоров

Напомним некоторые понятия и факты, относящиеся к аксиоме Мартина. Пусть $(P, \leq)$ – частично упорядоченное множество. Элементы $p, q \in P$ называются *сравнимыми*, если существует такое $r \in P$, что $p \leq r$, $q \leq r$. Множество $Q \subset P$, элементы которого попарно не сравнимы, называется *цепью* в P . Говорят, что P удовлетворяет *условию счетности цепей* (*ссс*), если всякая цепь в P счетна. Множество $Q \subset P$ называется *плотным* в P , если для любого $p \in P$ существует такой элемент $q \in Q$, что $p \leq q$.

Пусть Φ – некоторое семейство плотных в P множеств. Множество $G \subset P$ называется Φ -генерическим, если:

- 1) G пересекается со всяким $F \in \Phi$;
- 2) любые два элемента из G сравнимы.

Аксиома Мартина состоит в следующем.

МА. Пусть P – частично упорядоченное множество, удовлетворяющее *ссс*. Пусть Φ – семейство плотных в P множеств и $|\Phi| < c$. Тогда в P существует Φ -генерическое множество.

Легко видеть, что МА вытекает из СН. В то же время Соловей и Тенненбаум доказали [20], что из непротиворечивости ZFC вытекает непротиворечивость $ZFC + MA + \neg CH$, т.е. существуют ZFC-модели теории множеств, в которых одновременно выполняются и аксиома Мартина и отрицание континуум-гипотезы. Отсюда, в частности, вытекает непротиворечивость $ZFC + MA(\omega_1)$, где $MA(\omega_1)$ – аксиома, формулировка которой получается из формулировки МА заменой неравенства $|\Phi| < c$ на $|\Phi| \leq \omega_1$.

Нам понадобится следующее хорошо известное утверждение.

5.1. ТЕОРЕМА (МА). Пусть (X, K) – компактная пара, $\mu \in P(X)$, $K = \bigcup \{F_\alpha : \alpha \in \kappa < c\}$, где F_α замкнуты и $\mu(F_\alpha) = 0$, $\alpha \in \kappa$. Тогда $\mu(K) = 0$.

Будем говорить, что обратный спектр S τ -непрерывен, если отображение

$$R_S: P_\tau(\lim S) \rightarrow \lim P_\tau(S)$$

является гомеоморфизмом.

5.2. ЛЕММА (МА). Пусть $S = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha, \theta\}$ – вполне упорядоченный непрерывный спектр из компактов, где $\theta < c$ – предельное порядковое число. Пусть $X = \lim S$, $Y \subset X$, $Y_\alpha = p_\alpha(Y)$, $q_\beta^\alpha = p_\beta^\alpha \upharpoonright Y_\alpha$. Тогда если каждое Y_α есть $G_{|\theta|}$ -множество в X_α и $Y = \bigcap \{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in \theta\}$, то спектр $T = \{Y_\alpha, q_\beta^\alpha, \theta\}$ τ -непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $Y = \lim T$ и предельные проекции $q_\alpha = p_\alpha \upharpoonright Y$ спектра T сюръективны. Следовательно, по теореме 2.18 R_T есть вложение всюду плотным образом. Поэтому достаточно проверить, что R_T сюръективно. Пусть $m = \{\mu_\alpha : \alpha \in \theta\}$ – нить спектра $P_\tau(T)$. Положим $\lambda_\alpha = e_\alpha(\mu_\alpha)$, где $e_\alpha: P_\tau(Y_\alpha) \rightarrow P(X_\alpha)$ – оператор продолжения. В силу (2.3) имеем

$$\lambda_\alpha \in P_{Y_\alpha}^*(X_\alpha). \quad (5.1)$$

Из предложения 2.15 вытекает, что $l = \{\lambda_\alpha : \alpha \in \theta\}$ есть нить спектра S . С другой стороны, отображение $R_S : P(X) \rightarrow \lim P(S)$ является гомеоморфизмом в силу непрерывности функтора P . Значит, существует такая мера $\lambda \in P(X)$, что $R_S(\lambda) = l$. А это по определению отображения R_S означает, что

$$P(p_\alpha)(\lambda) = \lambda_\alpha, \quad \alpha \in \theta. \quad (5.2)$$

5.2.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. $\lambda \in P_Y^*(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что $\lambda(K) = 0$ для любого компакта $K \subset X \setminus Y$. Условие $Y = \bigcap \{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in \theta\}$ равносильно условию

$$X \setminus Y = \bigcap \{p_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus Y_\alpha) : \alpha \in \theta\}.$$

Но Y_α есть $G_{|\theta|}$ -множество в X_α . Следовательно, $X_\alpha \setminus Y_\alpha$ есть сумма компактов L_α^β , $\beta \in \theta$. Значит,

$$X \setminus Y = \bigcup \{L_\alpha^\beta : \alpha, \beta \in \theta\}. \quad (5.3)$$

Поэтому в силу (5.1) $\lambda_\alpha(L_\alpha^\beta) = 0$, $\beta \in \theta$. Следовательно, из (5.2) вытекает

$$\lambda(p_\alpha^{-1}(L_\alpha^\beta)) = P(p_\alpha(\lambda)(L_\alpha^\beta)) = 0. \quad (5.4)$$

Положим $F_\alpha^\beta = K \cap p_\alpha^{-1}(L_\alpha^\beta)$. Тогда согласно (5.3) $K = \bigcup \{F_\alpha^\beta : \alpha, \beta \in \theta\}$. Но в силу (5.4) $\lambda(F_\alpha^\beta) = 0$. Значит, $\mu(K) = 0$ по теореме 5.1. Утверждение доказано.

Положим $\mu = r(\lambda)$, где $r : P(X) \rightarrow M(Y)$ – оператор ограничения. Из (2.4) и утверждения 5.2.1 вытекает, что $\mu \in P_\tau(Y)$. Для завершения доказательства леммы 5.2 остается проверить, что $R_T(\mu) = m$, или, что то же самое согласно определению отображения R ,

$$P_\tau(q_\alpha)(\mu) = \mu_\alpha, \quad \alpha \in \theta. \quad (5.5)$$

Обозначим через $e : P_\tau(Y) \rightarrow P(X)$ оператор продолжения. Имеем $P_\tau(q_\alpha)(\mu) =$ (согласно предложению 2.16) $= r_\alpha(P(p_\alpha)(e(\mu))) = r_\alpha(P(p_\alpha)(e(r(\lambda)))) =$ (в силу утверждения 5.2.1 и предложения 2.9) $= r_\alpha(P(p_\alpha)(\lambda)) = r_\alpha(\lambda_\alpha) = r_\alpha(e_\alpha(\mu_\alpha)) =$ (согласно предложению 2.5) $= \mu_\alpha$. Равенство (5.5) и лемма 5.2 доказаны.

5.3. СЛЕДСТВИЕ (МА(ω_1)). Утверждение леммы 5.2 имеет место для $\theta = \omega_1$.

5.4. ТЕОРЕМА (МА(ω_1)). Если $p : \mathbb{R}^{\omega_1} \times \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ – проектирование, то отображение $P_\tau(p)$ является тривиальным $\mathbb{R}^{\omega_1}$ -расслоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать p проектированием $J^{\omega_1} \rightarrow J^{A_0}$, где $A_0 = [0, \omega)$. Обозначим через A множество всех начальных интервалов $[0, \alpha)$, где $\alpha < \omega_1$ – предельное число. Тогда p является предельной проекцией непрерывного вполне упорядоченного спектра $T = \{J^A, q_{A'}^A, A\}$. В качестве объемлющего компактного спектра возьмем спектр $S = \{I^A, p_{A'}^A, A\}$. Применив к паре спектров (S, T) следствие 5.3, получаем, что отображение $P_\tau(p)$ гомеоморфно предельной проекции спектра $P_\tau(T)$. В силу предложения 2.8 и теоремы 2.18

$$\text{спектр } P_\tau(T) \text{ непрерывен.} \quad (5.6)$$

Поскольку любые два элемента семейства A отличаются на бесконечное множество, все проекции спектра T являются $\mathbb{R}^\omega$ -расслоениями. Поэтому из теорем 3.14 и 3.15 вытекает:

$$\text{все проекции спектра } P_\tau(T) \text{ являются } \mathbb{R}^\omega\text{-расслоениями.} \quad (5.7)$$

Утверждение теоремы 5.4 вытекает из (5.6), (5.7) и теоремы 3.16.

5.5. СЛЕДСТВИЕ $(MA(\omega_1))$. $P_\tau(\mathbb{R}^{\omega_1})$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{\omega_1}$.

5.6. СЛЕДСТВИЕ $(MA(\omega_1))$. Если $f: \mathbb{R}^{\omega_1} \times X \rightarrow X$ – проектирование на сепарабельное метризуемое пространство, то отображение $P_\tau(f)$ является тривиальным $\mathbb{R}^{\omega_1}$ -расслоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проектирование f является ограничением проектирования p из теоремы 5.4 на полный прообраз. В то же время функтор P_τ сохраняет прообразы согласно предложению 2.17. Поэтому $P_\tau(f)$ также является ограничением проектирования $P_\tau(p)$ на полный прообраз, откуда наше утверждение и вытекает.

Напомним, что Q -весом вещественно полного пространства X называется такое наименьшее кардинальное число κ , что X замкнуто вкладывается в $\mathbb{R}^\kappa$.

5.7. ТЕОРЕМА (MA) . Если X – вещественно полное пространство Q -веса $\kappa < c$, то $P_\tau(X)$ вещественно полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.14 достаточно показать, что $P_\tau(J^\kappa)$ вещественно полно. Представим J^κ в виде предела спектра

$$T(\kappa) = \{J^A, q_{A'}^A, A\},$$

где A – множество всех начальных интервалов $[0, \alpha)$ при предельном $\alpha < \kappa$. В силу леммы 5.2 $P_\tau(J^\kappa)$ гомеоморфно пределу спектра $P_\tau(T(\kappa))$. Поэтому достаточно проверить, что элементы $P_\tau(J^A)$ спектра $P_\tau(T(\kappa))$ вещественно полны. Это делается трансфинитной индукцией по мощности множества A . При этом используется непрерывность спектра $P_\tau(T(\kappa))$, которая имеет место в силу леммы 5.2.

Как из теоремы 5.7, так и из следствия 5.5 вытекает

5.8. СЛЕДСТВИЕ $(MA(\omega_1))$. Если X замкнуто в $\mathbb{R}^{\omega_1}$, то $P_\tau(X)$ вещественно полно.

Обратный спектр $S' = \{X'_\alpha, p'_\beta, A\}$ называется (замкнутым) подспектром спектра $S = \{X_\alpha, p_\beta, A\}$, если существует такой морфизм $\Phi = \{\varphi_\alpha: \alpha \in A\}: S' \rightarrow S$, что каждое отображение $\varphi_\alpha: X'_\alpha \rightarrow X_\alpha$ является (замкнутым) вложением. При этом автоматически отображение

$$f: \lim \Phi: \lim S' \rightarrow \lim S \quad (5.8)$$

является (замкнутым) вложением.

5.9. ЛЕММА. Пусть спектр S' является подспектром спектра S . Тогда:

- 1) отображение $R_{S'}$ является ограничением отображения R_S на $P_\tau(\lim S')$; если, кроме того, S' замкнуто в S , а R_S есть гомеоморфизм, то:
- 2) $R_{S'}$ является замкнутым вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись предыдущими обозначениями, положим $f: \lim P_\tau(S') \rightarrow \lim P_\tau(S)$ равным пределу морфизма $P_\tau(\Phi): P_\tau(S') \rightarrow P_\tau(S)$. Поскольку функтор P_τ сохраняет (замкнутые) вложения (предложение 2.14), морфизм $P_\tau(\Phi)$ является (замкнутым) вложением. Следовательно, отображение f является (замкнутым) вложением согласно (5.8). Условие 1) в наших обозначениях равносильно условию

$$f \circ R_{S'} = R_S \circ P_\tau(\varphi). \quad (5.9)$$

Обозначим через π_α и π'_α предельные проекции спектров $P_\tau(S)$ и $P_\tau(S')$. По определению отображений R_S и $R_{S'}$ имеем

$$P_\tau(p_\alpha) = \pi_\alpha \circ R_S, \quad (5.10)$$

$$P_\tau(p'_\alpha) = \pi'_\alpha \circ R_{S'}, \quad (5.11)$$

где p_α и p'_α – предельные проекции спектров S и S' . Далее, согласно определению отображения $\varphi = \lim \Phi$ имеет место равенство $\varphi_\alpha \circ p'_\alpha = p_\alpha \circ \varphi$, откуда следует

$$P_\tau(\varphi_\alpha) \circ P_\tau(p'_\alpha) = P_\tau(p_\alpha) \circ P_\tau(\varphi). \quad (5.12)$$

Наконец,

$$P_\tau(\varphi_\alpha) \circ \pi'_\alpha = \pi_\alpha \circ f, \quad (5.13)$$

поскольку $f = \lim P_\tau(\Phi)$. Легко видеть, что, применяя последовательно равенства (5.13), (5.11), (5.12) и (5.10), получаем

$$\pi_\alpha \circ f \circ R_{S'} = \pi_\alpha \circ R_S \circ P_\tau(\varphi). \quad (5.14)$$

Но проекции π_α , $a \in A$, разделяют точки пространства $\lim P_\tau(S)$. Следовательно, из (5.14) вытекает требуемое условие (5.9).

Теперь пусть Φ – замкнутое вложение, а R_S – гомеоморфизм. Тогда, как отмечено выше, $P_\tau(\varphi)$ является замкнутым вложением. Следовательно, правое отображение из равенства (5.9) является замкнутым вложением. Но тогда и $R_{S'}$ – замкнутое вложение, поскольку f – вложение согласно (5.8). Лемма доказана.

5.10. ТЕОРЕМА (МА(ω_1)). Если f – 0-мягкое отображение пространства X веса $\leq \omega_1$ на польское пространство Y , то $P_\tau(f)$ мягко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с того, что

$$X \in \text{AE}(0) \quad (5.15)$$

согласно предложениям 3.6 и 3.10. Из (5.17) и предложения 3.9 вытекает, что $R - w(X) \leq \omega_1$. Следовательно, можно применить теорему 3.19 и представить f в виде предельной проекции π_0 спектра

$$S_f = \{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha+1}, \omega_1\},$$

состоящего из 0-мягких пространств и 0-мягких проекций. Тогда спектр $P_\tau(S_f)$ непрерывен по предложению 2.8 и теореме 2.18. Его пространства являются абсолютными экстензорами, а короткие проекции мягки по теоремам 3.11 и 3.12. Поэтому для того, чтобы спектр $P_\tau(S_f)$ удовлетворял достаточным условиям теоремы 3.19 для $n = \infty$, остается проверить, что:

1°) $P_\tau(\pi_0)$ гомеоморфно предельной проекции $\psi_0: \lim P_\tau(S_f) \rightarrow P_\tau(Y)$;

2°) спектр $P_\tau(S_f)$ факторизующий.

По теореме 3.19 (для отображения f) существует замкнутое вложение $\Phi = \{\varphi_\alpha: \alpha \in \omega_1\}: S_f \rightarrow T$, где

$$T = \{J^{A_\alpha} \times Y, q_{A_\beta}^{A_\alpha} \times \text{id}_Y, \omega_1\}.$$

Положим

$$S = \{I^{A_\alpha} \times bY, p_{A_\beta}^{A_\alpha} \times \text{id}_{bY}, \omega_1\},$$

где bY – какое-нибудь компактное решение. Пара (S, T) , очевидно, удовлетворяет условиям следствия 5.3. Поэтому отображение R_T является гомеоморфизмом. Тогда R_{S_f} – замкнутое вложение по лемме 5.9. Но предельные проекции π_α спектра S_f сюръективны, будучи 0-мягкими отображениями согласно теореме 3.19. Значит, R_{S_f} является всюду плотным вложением в силу теоремы 2.18. Таким образом, R_{S_f} – гомеоморфизм.

Обозначим предельные проекции спектра $P_\tau(S_f)$ через ψ_α . Тогда равенство (5.11) превращается в равенство $P_\tau(\pi_\alpha) = \psi_\alpha \circ R_{S_f}$, откуда свойство 1°) и вытекает.

5.10.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Проекции ψ_α сюръективны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \equiv \mu_\alpha \in P_\tau(X_\alpha)$. Надо построить такую нить $m = \{\mu_\beta : \beta \in \omega_1\}$ спектра $P_\tau(S_f)$, что $\psi_\beta(m) = \mu_\beta$. Полагаем $\mu_\beta = P_\tau(\pi_\beta^\alpha)(\mu_\alpha)$ при $\alpha < \beta$. Элементы μ_β нити m при $\beta > \alpha$ строим трансфинитной рекурсией. Предположим, что они построены для всех $\beta < \gamma$. Если γ – изолированное число, т.е. $\gamma = (\gamma - 1) + 1$, то отображение $P_\tau(\pi_{\gamma-1}^\gamma)$ сюръективно, будучи мягким. Следовательно, существует такая мера $\mu \in P_\tau(X_\gamma)$, что $P_\tau(\pi_{\gamma-1}^\gamma)(\mu_\gamma) = \mu_{\gamma-1}$. Если же γ предельно, то для уже построенной нити $\{\mu_\beta : \beta < \gamma\}$ спектра $P_\tau(S_f) \mid \gamma$ согласно теореме 2.18 существует такая мера $\mu_\gamma \in P_\tau(X_\gamma)$, что $P_\tau(\pi_\beta^\gamma)(\mu_\gamma) = \mu_\beta$ для всех $\beta < \gamma$. Итак, искомая нить m построена. Утверждение доказано.

Далее, проекции ψ_α открыты как сюръективные предельные проекции спектра $P_\tau(S_f)$ с открытыми проекциями $P_\tau(\pi_\beta^\alpha)$.

5.10.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. *$P_\tau(X)$ обладает свойством Суслина.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (5.15) X есть АЕ(0)-пространство. Но тогда и всякая конечная степень X^n есть АЕ(0). Следовательно, X^n обладает свойством Суслина по предложению 3.20. Применение предложения 2.20 завершает доказательство утверждения.

Итак, предельные проекции ψ_α спектра $P_\tau(S_f)$ сюръективны и открыты, а его предел, гомеоморфный $P_\tau(X)$, обладает свойством Суслина. Тогда в силу предложения 3.18 $P_\tau(S_f)$ – факторизующий спектр. Итак, имеет место свойство 2°). Теорема 5.10 доказана.

Частным случаем теоремы 5.10 (для одноточечного Y) является

5.11. ТЕОРЕМА $(MA(\omega_1))$. *Если $X \in \text{АЕ}(0)$ и $wX \leq \omega_1$, то $P_\tau(X) \in \text{АЕ}$.*

5.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорему 5.11 нельзя распространить на пространства X веса $\geq \omega_2$ ни при каких теоретико-множественных предположениях. В качестве контрпримера в силу теоремы Дитора и Хэйдона [14] можно взять тихоновский куб I^{ω_2} .

Список литературы

1. *Банах Т. О.* Топология пространств вероятностных мер. I // Матем. студ. Праці Львівського матем. т-ва. 1995. № 5. С. 65–87.
2. *Банах Т. О.* Топология пространств вероятностных мер. II // Матем. студ. Праці Львівського матем. т-ва. 1995. № 5. С. 88–106.
3. *Банах Т. О., Радул Т. Н.* Топология пространств вероятностных мер // Матем. сб. 1977. Т. 188. № 7. С. 23–46.
4. *Банах Т. О., Радул Т. Н.* Геометрия отображений пространств вероятностных мер // Матем. студ. Праці Львівського матем. т-ва. 1999. Т. 11. № 1. С. 17–30.

5. *Варадарайн В. С.* Меры на топологических пространствах // Матем. сб. 1961. Т. 55. № 1. С. 35–100.
6. *Ле-Кам Л.* Сходимость по распределению случайных процессов // Математика. 1960. Т. 4. № 3. С. 107–142. (перевод статьи: Convergence in distribution of stochastic processes // Univ. Calif. Publs Statist. 1957. V. 2. № 11. P. 207–236).
7. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 138. № 1. С. 177–238.
8. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии // УМН. 1991. Т. 46. № 1. С. 41–80.
9. *Федорчук В. В.* О свойствах типа полноты пространств τ -аддитивных вероятностных мер // Вестн. МГУ. Сер. мат.-мех. 1998. № 1. С. 19–22.
10. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
11. *Федорчук В. В., Чигогидзе А. Ч.* Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М.: Наука, 1992.
12. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 3–62.
13. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
14. *Ditor S., Haydon R.* On absolute retracts, $P(S)$ and complemented subspaces of $C(D^{\omega_1})$ // Studia Math. 1976. V. 56. № 3. P. 243–251.
15. *Dobrowolski T., Sakai K.* Spaces of measures of metrizable spaces // Topology and Applic. 1996. V. 72. № 3. P. 215–258.
16. *Fedorchuk V. V.* On a preservation of completeness of uniform spaces by the functor P_τ // Topology and Applic. 1999. V. 91. P. 25–45.
17. *Fedorchuk V. V., Todorcevic S.* Cellularity of covariant functors // Topology and Applic. 1997. V. 76. P. 125–150.
18. *Gardner R. J., Pfeffer W. F.* Borel measures // Handbook of set-theoretic topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1984.
19. *Shirota T.* A class of topological spaces // Osaka Math. J. 1952. V. 4. P. 23–40.
20. *Solovay R., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Suslin's Problem // Annals of Math. 1971. V. 94. P. 201–245.

Поступило в редакцию
25.XII.1997