Общероссийский математический портал

В. В. Горбачев, Геометрии Терстона на базах расслоений однородных пространств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 4, 37–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/im254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 11:34:02

УДК 519.4

В. В. Горбачевич

Геометрии Терстона на базах расслоений однородных пространств

Рассматриваются натуральные расслоения Зейферта для псевдокомпактных (в частности, для компактных) однородных пространств M . Даны условия реализуемости компактных форм геометрий Терстона размерности ≤ 4 на базах M_a^* этих расслоений. Подробно описано строение таких M_a^* .

Библиография: 29 наименований.

Введение

Пусть $M = G/H$ – псевдокомпактное однородное пространство; здесь G – почти связная группа Ли (это значит, что группа $\pi_0(G)$ ее связных компонент конечна), H – замкнутая подгруппа в G , причем существует такая замкнутая подгруппа P в G , что $P \supset H$, подгруппа P равномерна в G (т.е. факторпространство G/P компактно), а на P/H существует конечная инвариантная мера. Например, псевдокомпактно любое компактное однородное пространство, а также однородные пространства вида G/Γ , где Γ – решетка в G (т.е. дискретная подгруппа, для которой объем факторпространства G/Γ конечен). Более подробно о псевдокомпактных однородных пространствах и их свойствах см. работы [1]–[3].

Для компактных однородных пространств M группа G обычно предполагается связной. В [4] было построено натуральное расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_a$, это гладкое локально тривиальное расслоение некоторого компактного однородного пространства M' , конечнолистно покрывающего M , база этого расслоения M_a асферична (т.е. все гомотопические группы $\pi_i(M_a)$ равны нулю, $i \geq 2$), а слой M_c – компактное однородное пространство с конечной фундаментальной группой $\pi_1(M_c)$. Если M имеет вид G/H , где G – односвязная, связная группа Ли, то $M' = G/H'$ для подходящей подгруппы $H' \subset H$ конечного индекса. Пусть K – максимальная компактная подгруппа в G (в силу односвязности G эта подгруппа односвязна и полупроста); тогда $M_c = K/K \cap H'$, а $M_a = K \backslash G/H'$ – пространство орбит естественного действия компактной группы Ли K на M' . Для исходного однородного пространства $M = G/H$ пространство орбит естественного действия группы K на G/H в общем случае не является многообразием, так как имеет особые точки, которые соответствуют неглавным (точнее, исключительным)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-01263).

орбитам этого действия. Поэтому переход к подходящему M' , конечнолистно накрывающему M , в общем случае необходим. При этом канонического выбора для M' не существует, однако группа $\pi_1(M_a)$ (а с нею и гомотопический тип асферичного многообразия M_a) определяется по многообразию M (и даже по группе $\pi_1(M)$) однозначно с точностью до перехода к подгруппе конечного индекса.

Универсальное накрывающее многообразие $\widetilde{M}_a$ для M_a диффеоморфно $\mathbf{R}^n$ (где $n = \dim M$), откуда видно, что далеко не каждое компактное асферичное многообразие N диффеоморфно M_a для какого-либо компактного однородного M . Может оказаться, что $\widetilde{N}$ хотя и стягиваемо, но не диффеоморфно евклидову пространству (примеры такого рода приведены в [5]).

Для базы M_a натурального расслоения (или для многообразия M'_a , соответствующего некоторому подходящему однородному пространству M'' , конечнолистно накрывающему M') в [2] построено структурное расслоение $M_r \rightarrow M_a \rightarrow M_s$. Это гладкое локально тривиальное расслоение, слой которого имеет вид $M_r = R/D$ (где D – равномерная решетка в некоторой односвязной разрешимой группе Ли R), а база M_s имеет вид $L \setminus S/\Pi$, где S – полупростая связная группа Ли с конечным центром, L – максимальная компактная подгруппа в S , а Π – решетка в S (равномерная, ибо M_a компактно). При этом $L \setminus S$ является симметрическим пространством отрицательной кривизны, а $L \setminus S/\Pi$ – локально симметрическое пространство, являющееся компактной геометрической формой для симметрического пространства $L \setminus S$.

Для плезиокомпактных однородных пространств также можно построить натуральное и структурное расслоения (см. [1], [2]). Натуральное расслоение $M_a \rightarrow M' \rightarrow M_s$ тоже будет гладким, локально тривиальным, слой M_c компактен и $\pi_1(M_c)$ конечна, но база – асферичное многообразие M_a – не обязательно компактна, хотя всегда может быть представлена в виде $M_a = K' \setminus G'/\Gamma'$, где G' – почти связная группа Ли (которую можно считать обладающей некоторыми полезными дополнительными свойствами; см. [2]), K' – максимальная компактная подгруппа в G' , а Γ' – решетка в G' (дискретная подгруппа, факторпространство по которой имеет конечный объем), причем не обязательно равномерная. Далее, для M_a строится структурное расслоение $M_r \rightarrow M_a \rightarrow M_s$, слой которого $M_r = R/D$ компактен, а база $M_s = L \setminus S/\Pi$ – локально симметрическое пространство отрицательной кривизны и конечного объема.

Однако кроме натурального расслоения, гладкого и локально тривиального, для произвольного плезиокомпактного однородного пространства $M = G/H$ можно построить еще одно расслоение, причем без перехода к подходящему M' , это расслоение Зейферта $M_c \rightarrow M \rightarrow M_a^*$, где $M_c = K/K \cap H$, $M_a^* = K \setminus G/H$ – пространство орбит естественного действия на G/H максимальной компактной подгруппы $K \subset G$, которое в общем случае не является многообразием, но имеет естественную структуру орбиобразия (в смысле Терстона). Напомним вкратце определения орбиобразия [6].

Орбиобразие – это топологическое пространство, которое локально устроено как факторпространство какой-либо области в $\mathbf{R}^n$ по действию некоторой конечной группы (которую заранее не фиксируют, ее можно расширять и сокращать,

при этом обычно ограничиваются случаем, когда эта группа является подгруппой в $O(n)$, т.е. состоит из ортогональных преобразований). Более точно, топологическое пространство X (хаусдорфово, со счетной базой) называется *орбиобразием* (иногда – *орбифолдом*) класса C^k (обычно $k = \infty$), если для него существуют открытое покрытие $\{U_i\}$, замкнутое относительно конечных пересечений, и гомеоморфизмы $\phi_i: \tilde{U}_i/\Phi_i \rightarrow U_i$, где $\tilde{U}_i$ – области в $\mathbf{R}^n$, а Φ_i – некоторые конечные подгруппы в $O(n)$. При этом предполагается, что любому вложению $\iota_{ij}: U_i \rightarrow U_j$ (если таковое имеется) соответствует некоторое эквивариантное отображение класса C^k $\tilde{\iota}_{i,j}: \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$ (под эквивариантностью понимается перестановочность с действиями групп Φ_i и Φ_j на $\tilde{U}_i$ и $\tilde{U}_j$ соответственно, связанных некоторыми гомоморфизмами $f_{ij}: \Phi_i \rightarrow \Phi_j$). Более подробно обсуждение понятия орбиобразия можно найти в [6], где также вводятся понятия изоморфизма орбиобразий, накрытия, универсального накрытия. Любое орбиобразие размерности ≤ 2 оказывается гомеоморфным некоторому многообразию (возможно, с краем). Однако в общем случае может оказаться, что орбиобразие не гомеоморфно никакому многообразию (даже с краем). Например, таково факторпространство $\mathbf{R}^3$ по антиподальному действию группы $\mathbf{Z}_2$.

Далее мы будем использовать понятие расслоения Зейферта (см. [6]) – это аналог гладкого локально тривиального расслоения для категории орбиобразий.

В [3] построено расслоение Зейферта $M_c \rightarrow M \rightarrow M_a^*$ для произвольного плезиокомпактного однородного пространства $M = G/H$, база M_a^* этого расслоения является асферичным орбиобразием. Мы будем называть M_a^* *базовым орбиобразием* для M . О строении этого орбиобразия и его топологической связи с исходным однородным пространством M в настоящее время известно не так много (в основном это аналоги результатов о M_a – см. [2], [3]). Важную роль в изучении M_a^* могла бы сыграть справедливость следующего утверждения.

ГИПОТЕЗА. *Базовое орбиобразие M_a^* определяется плезиокомпактным однородным многообразием M (независимо от группы Ли, транзитивной на нем) однозначно с точностью до гомеоморфизма.*

Это утверждение пока удастся проверить только в нескольких частных случаях (например, если M_a^* не имеет особых точек и размерность его ≤ 2 – см. § 4 ниже).

Пусть $M = G/H$ – произвольное плезиокомпактное однородное пространство. Из конструкции натурального расслоения следует, что имеется конечнолистное накрытие (разветвленное, т.е. понимаемое в категории орбиобразий) $M_a \rightarrow M_a^*$ (см. [3]). Орбиобразие называется *хорошим*, если оно имеет разветвленное накрытие некоторым многообразием, или, говоря другими словами, если все его особые точки допускают одновременное глобальное “разрешение”. В силу существования указанного выше накрытия для M_a^* любое базовое орбиобразие M_a^* является хорошим. Кроме того, существует и накрытие M_a^* евклидовым пространством $\mathbf{R}^n$, ибо это верно для M_a . Другими словами, M_a^* можно рассматривать как факторпространство $\mathbf{R}^n$ по действию некоторой разрывной группы диффеоморфизмов. Это можно показать и непосредственно. Для $M_a^* = K \setminus G/H$ имеем диффеоморфизмы $K \setminus G/H = (K \setminus (G/H_0))/(H/H_0)$. Так как K – максимальная компактная под-

группа в почти связной группе Ли G , то, как хорошо известно, факторпространство $K \setminus G$ диффеоморфно евклидову пространству. Как доказано в [1], все орбиты естественного действия K на G/H_0 изоморфны. Отсюда и из сказанного выше без труда следует, что пространство $K \setminus G/H_0$ является многообразием, диффеоморфным некоторому евклидову пространству $\mathbf{R}^n$. Но тогда получаем, что M_a^* диффеоморфно $\mathbf{R}^n/\Gamma$, где $\Gamma = H/H_0$ – дискретная группа (изоморфная $\pi_1(M)$, если группа Ли G односвязна), разрывно действующая на $\mathbf{R}^n$.

Оказывается, что на базовых орбиобразиях M_a^* имеется дополнительная структура, а именно геометрия Терстона (геометрическая структура, которую изучал У. Терстон в связи со своей гипотезой о геометризации трехмерных многообразий – см., например, [6]). В связи с этим выявляется связь между произвольными плезикокомпактными однородными пространствами $M = G/H$ и геометриями Терстона на некоторых орбиобразиях. Данная работа посвящена изучению строения базовых орбиобразий M_a^* при $\dim M_a^* \leq 4$, геометрий Терстона на них и возможности реализации произвольных геометрий Терстона (в малых размерностях) на орбиобразиях вида M_a^* .

Напомним определение геометрии Терстона. Под геометрией (еще со времен Клейна) понимается пара (X, G) , где X – гладкое многообразие, а G – транзитивная на X группа Ли, причем стационарные подгруппы всех точек из X компактны (это последнее условие эквивалентно существованию на X G -инвариантной римановой метрики). Естественным образом определяется понятие изоморфизма геометрий. Геометрия (X, G) называется *геометрией Терстона*, если она допускает компактную (или хотя бы имеющую конечный объем) факторгеометрию, т.е. существует такая дискретная подгруппа $\Gamma \subset G$, что X/Γ компактно (или имеет конечную меру). При этом риманово пространство X называется *моделью* для X/Γ . Другое по форме определение звучит так: геометрия Терстона – это полная локально однородная риманова структура на компактном многообразии (см. [6]). В двумерном случае существует только три (с точностью до изоморфизма) геометрии, они моделируются на трех поверхностях постоянной кривизны: евклидовой плоскости E^2 , сфере S^2 и плоскости Лобачевского Λ^2 . В трехмерном случае все эти геометрии фактически были известны еще Э. Картану (потом их переоткрыл Терстон для своих целей), в четырехмерном случае все геометрии перечислил Исихара (см. [7], а также более поздние работы [8], [9]).

Пусть $M = G/H$ – произвольное плезикокомпактное однородное пространство. Тогда базовое орбиобразие для него можно представить в виде $M_a^* = K' \setminus G'/\Gamma'$ (см. выше). Положив $X = K' \setminus G'$, получим в силу определения геометрии Терстона следующее утверждение (сформулированное без изложения подробностей в [3] и являющееся простым следствием основного, довольно сложно доказываемого, результата этой работы).

ТЕОРЕМА 0.1. *На базовом орбиобразии M_a^* произвольного плезикокомпактного однородного пространства всегда можно ввести геометрию Терстона.*

Естественным образом возникает вопрос, какие именно геометрии Терстона могут быть реализованы на базовых орбиобразиях плезикокомпактных однородных

пространств? Основным результатом данной работы является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 0.2. *Пусть N – компактное асферичное локально однородное орбиобразия (другими словами, $N = K \backslash G/\Gamma$ в вышеприведенных обозначениях). Тогда если $\dim N \leq 4$, то N всегда изоморфно базовому орбиобразию M_a^* для некоторого компактного однородного пространства $M = G/H$.*

Отметим, что условие на размерность N в теореме 0.2 существенно, соответствующий пример будет приведен в § 5. На самом деле в работе доказаны чуть более общие утверждения, касающиеся и плезиокомпактного случая, но для простоты формулировки мы в теореме 0.2 ограничились только компактным случаем.

Более подробно базовые орбиобразия M_a^* можно изучать с помощью структурного расслоения Зейферта, имеющего вид $M_r^* \rightarrow M_a^* \rightarrow M_s^*$, и исследования свойств его базы и слоя, являющихся орбиобразиями весьма специального вида. С помощью информации о строении базовых орбиобразий можно достаточно подробно описывать строение соответствующих плезиокомпактных однородных пространств. Для этого можно, в частности, использовать утверждение теоремы 0.2.

В § 1–4 рассматриваются базовые орбиобразия размерностей 1–4 соответственно (в частности, доказывается теорема 0.2), а также получены некоторые результаты о строении соответствующих однородных пространств. В § 5 рассмотрены некоторые контрпримеры, касающиеся возможности реализации орбиобразий и геометрий на них.

Группы Ли в этой работе будут обозначаться заглавными латинскими буквами. Для группы Ли G через $L(G)$ будет обозначаться ее алгебра Ли. Через G_0 обозначается связная компонента единицы группы Ли G . Если H – некоторая подгруппа в группе G , то через $N_G(H)$ обозначается нормализатор этой подгруппы.

§ 1. Одномерные базовые орбиобразия

Пусть M_a^* – базовое орбиобразие для некоторого плезиокомпактного однородного пространства $M = G/H$. Если $\dim M_a^* = 0$, то $M = M_c^*$ – однородное пространство компактной полупростой группы Ли (тут группа $\pi_1(M)$ всегда конечна), строение таких M в последние десятилетия интенсивно изучалось (см. [10], [11]). Первый же интересующий нас здесь случай – это когда $\dim M_a^* = 1$, т.е. когда базой натурального расслоения Зейферта является одномерное орбиобразие. Имеется всего четыре (с точностью до изоморфизма) одномерных связных орбиобразия: окружность S^1 и отрезки $(0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1]$. Если орбиобразие компактно, то оно изоморфно окружности или замкнутому отрезку $[0, 1]$. Ясно, что осевая симметрия окружности имеет факторпространством отрезок $[0, 1]$, т.е. этот отрезок имеет двулистное накрытие одномерным многообразием – окружностью.

В этом параграфе мы опишем плезиокомпактные однородные пространства, базовое орбиобразие которых одномерно. Для этого нам понадобится следующая конструкция.

Пусть $M_c = K/L$ – однородное пространство произвольной компактной односвязной (а потому полупростой) группы Ли K , а L – некоторая ее замкнутая под-

группа. Положим $Q = N_K(L)/L$ – это компактная группа Ли, которую можно рассматривать как группу всех автоморфизмов однородного пространства K/L (см. [12]). Пусть $\Phi = Q/Q_0$ – конечная группа. Далее, выберем и зафиксируем некоторый элемент $\alpha \in \Phi$; пусть $m \in \mathbf{N}$ – порядок этого элемента. Пусть $\bar{\alpha}$ – некоторый представитель элемента α (= класса смежности по подгруппе Q_0) в Q .

Положим $G = K \times S^1$, где окружность S^1 рассматривается как группа, изоморфная $SO(2)$. Рассмотрим в G подгруппу H , порожденную подгруппой $L \subset K$ и элементом (α, c) , где $c \in S^1$ – некоторый элемент порядка m . Ясно, что G – компактная группа Ли, а H – ее замкнутая подгруппа. Однородное пространство $M = G/H$ компактно, оно зависит от выбора K , L и элемента α (но с точностью до диффеоморфизма не зависит, как нетрудно убедиться, от выбора элемента c), обозначим его через $M(K/L, \alpha)$.

Положим $F = H \cdot K$. Ясно, что F – замкнутая подгруппа в G . Рассмотрим расслоение $F/H \rightarrow G/H \rightarrow G/F$. Очевидно, что база G/F этого расслоения диффеоморфна S^1 , а слой диффеоморфен $M_c = K/L$. Поэтому это расслоение можно записать в виде $M_c \rightarrow M \rightarrow S^1$. Структурной группой этого расслоения будет, как нетрудно проверить (см., например, [12]), группа Q . Расслоение над окружностью S^1 определяется, как известно, некоторым диффеоморфизмом слоя M_c , в нашем случае этим диффеоморфизмом является, как легко показать, элемент $\bar{\alpha} \in Q$.

В результате при заданных K, L, α получаем компактное однородное пространство $M(K/L, \alpha)$. Отметим, что если два элемента $\alpha, \alpha' \in \Phi$ сопряжены в Φ , то соответствующие им однородные пространства $M(K/L, \alpha)$ и $M(K/L, \alpha')$ диффеоморфны.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $M = G/H$ – связное псевдокомпактное однородное пространство группы Ли G (которую можно считать связной), причем $\dim M_a^* = 1$. Тогда базовое орбиобразие M_a^* компактно и изоморфно S^1 или $I = [0, 1]$, причем:*

- i) *если $M_a^* = S^1$, то M диффеоморфно многообразию вида $M(K/L, \alpha)$ при некоторых K, L, α , описанных выше;*
- ii) *если $M_a^* = I$, то существует двулистное разветвленное накрытие $M' \rightarrow M$ над M такое, что M' диффеоморфно некоторому $M(K/L, \alpha)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем предполагать группу G односвязной (переходя в случае необходимости к универсальной накрывающей группе). Тогда имеем представление $M_a^* = K \setminus G/H$, где K – максимальная компактная подгруппа в G . Рассмотрим некоторое гладкое многообразие M_a , которое конечнолистно покрывает базовое орбиобразие (см. введение) и структурное расслоение для него $M_r \rightarrow M_a \rightarrow M_s$. Так как $\dim M_s = 0$ или ≥ 2 [2], то из одномерности M_a следует, что $M_a = M_r$ является солвмногообразием (однородным пространством разрешимой группы Ли). Солвмногообразие, имеющее конечный объем, обязательно компактно (см., например, [13]), поэтому база натурального расслоения для M , а с ней и само M будут компактны. Следовательно, M и M_a^* компактны, откуда, в частности, следует, что M_a^* изоморфно S^1 или $[0, 1]$.

Если $K \setminus M = S^1$, то все орбиты действия K на M одного орбитного типа (т.е. они изоморфны между собой) и потому проекция $M \rightarrow K \setminus M$ будет гладким локально тривиальным расслоением над S^1 со слоем $M_c = K/L$ (где $L = H \cap K$) и структурной группой $Q = N_K(L)/L$ (см. [12]). Расслоение над S^1 задается, как известно, некоторым диффеоморфизмом $\alpha \in Q$. Если непрерывно деформировать элемент α в Q , то соответствующие расслоения над S^1 будут изоморфны (если расширить структурную группу расслоения до группы всех диффеоморфизмов слоя). Поэтому элемент α можно рассматривать по модулю Q_0 , т.е. как элемент из конечной группы $Q/Q_0 = \Phi$. Получаем, что указанное расслоение для M изоморфно расслоению вида $M(K/L, \alpha)$, описанному выше, а потому M диффеоморфно $M(K/L, \alpha)$.

Пусть теперь $K \setminus M = [0, 1]$. Граничным точкам 0 и 1 соответствуют исключительные орбиты действия группы K (эти орбиты имеют ту же размерность, что и главные (см. [1], [4]), но им не изоморфны), внутренним же точкам соответствуют главные орбиты. Исключительные орбиты в рассматриваемом случае имеют вид K/L_i ($i = 0, 1$), где L_i – подгруппы в K , содержащие L как нормальный делитель и такие, что L_i/L изоморфны $\mathbf{Z}_2$ (см. [12, гл. 4]). Отсюда следует, что существует такое K -многообразие M' , что все орбиты действия K на M' имеют одинаковый орбитный тип, и еще на M' гладко действует группа $\mathbf{Z}_2$ так, что факторпространство по этому действию диффеоморфно M . Ясно, что имеем гладкое локально тривиальное расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow K \setminus M' = S^1$, откуда без труда вытекает, что M' диффеоморфно однородному пространству вида $M(K/L, \alpha)$ при некотором α . Этим доказательство теоремы 1.1 завершено.

Отметим, что в теореме 1.1 можно также утверждать, что для любого плезиокомпактного однородного пространства с одномерным базовым орбиобразим существует некоторое конечнолистно накрывающее его однородное пространство, диффеоморфное $M_c \times S^1$. Это вытекает из теоремы 1.1 и результатов работ [1], [4] о натуральном локально тривиальном расслоении.

Если однородное пространство $M_c = K/L$ фиксировано, то число недиффеоморфных многообразий вида $M(K/L, \alpha)$ будет, очевидно, конечным (ибо конечна группа Φ). Иногда может оказаться, что с точностью до диффеоморфизма такое $M(K/L, \alpha)$ при заданном K/L единственно (и диффеоморфно $K/L \times S^1$ – однородному пространству компактной группы Ли $K \times S^1$). Например, если группа $N_K(L)$ связна, то $\Phi = \{e\}$ и $M = K/L \times S^1$. С другой стороны, покажем, что для некоторых K/L среди многообразий вида $M(K/L, \alpha)$ могут существовать и недиффеоморфные.

Для расслоения $M_c \rightarrow M \rightarrow S^1$ рассмотрим отрезок точной гомотопической последовательности

$$\{e\} \rightarrow \pi_1(M_c) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(S^1) = \mathbf{Z} \rightarrow \{e\}.$$

Ясно, что группа $\pi_1(M)$ изоморфна полупрямому произведению $\mathbf{Z} \cdot \pi_1(M_c)$, задаваемому некоторым гомоморфизмом $\mathbf{Z} \rightarrow \text{Aut } \pi_1(M_c)$, соответствующим действию группы $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$ на $\pi_1(M_c)$. Имеется также гомоморфизм $\mathbf{Z} \rightarrow \text{Out } \pi_1(M_c)$ в

группу внешних автоморфизмов. Этот последний гомоморфизм однозначно определяется исходной группой $\pi_1(M)$. Поэтому если при заданном $M_c = K/L$ мы возьмем различные гомоморфизмы $\mathbf{Z} \rightarrow \text{Out } \pi_1(M_c)$, то им будут соответствовать неизоморфные группы $\pi_1(M)$, а потому и не диффеоморфные многообразия $M(K/L, \alpha)$. Простейшим примером здесь будет $M_c = \mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R}P^2$, $\pi_1(M_c) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$, $\text{Out } \pi_1(M_c) = \mathbf{Z}_3$: если взять два гомоморфизма $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_3$: один нетривиальный, а другой тривиальный, мы получим два не диффеоморфных однородных пространства с одним и тем же M_c – это $\mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R}P^2 \times S^1$ и $M(K/L, \alpha)$ при $\alpha \neq 0$.

Покажем теперь на примере, что отрезок $I = [0, 1]$ действительно может быть реализован в виде базового орбиобразия для некоторого компактного однородного пространства.

Пусть $G' = E(1) = O(1) \cdot \mathbf{R}^1$ – группа изометрий евклидовой прямой E^1 . Эта группа разлагается в полупрямое произведение $G' = \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{R}^1$. Тут максимальной компактной подгруппой будет $K' = \mathbf{Z}_2$. В качестве решетки $\Gamma' \subset G'$ возьмем целочисленную подгруппу $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. Как легко убедиться, $K' \setminus G'/\Gamma' = \mathbf{Z}_2 \setminus S^1 = I$. Для реализации I в виде базисного орбиобразия возьмем группу $G = E_0(3) = \text{SO}(3) \cdot \mathbf{R}^3$ – группу движений (т.е. изометрий, сохраняющих ориентацию) евклидова пространства E^3 . В G максимальной компактной подгруппой является $K = \text{SO}(3)$. В G рассмотрим подгруппу $H = \mathbf{Z}_2 \cdot (\mathbf{Z} \oplus \mathbf{R}^2)$, где подгруппа $\mathbf{Z}_2 \subset \text{SO}(3)$ порождена элементом $\text{diag}(-1, -1, 1)$, $\mathbf{Z}$ порождена базисным элементом $e_1 \in E^3$, а подпространство $\mathbf{R}^2$ натянуто на базисные векторы e_2, e_3 пространства E^3 . Как легко убедиться, $K \setminus G/H = K' \setminus G'/\Gamma' = I$, т.е. мы получили представление для I в виде базового орбиобразия для построенного компактного однородного пространства G/H .

В развитие этого примера покажем, что в виде базового орбиобразия можно реализовать любое плоское компактное орбиобразие. Напомним, что риманово многообразие называется *плоским*, если его тензор кривизны тождественно равен нулю (см. [14]). Любое компактное плоское риманово многообразие можно представить в виде факторпространства E^n/Γ , где Γ – дискретная группа изометрий евклидова пространства E^n , действующая свободно (такие Γ – это всевозможные решетки в группе изометрий $E(n)$, свободные от кручения). Если Γ – произвольная решетка в $E(n)$, то пространство E^n/Γ будет компактным орбиобразием, такие орбиобразия и называются плоскими (можно дать и более прямое определение плоского орбиобразия).

Пусть $X = E^n/\Gamma$ – произвольное плоское компактное орбиобразие. Возьмем группу $G' = E(n) = O_n \cdot \mathbf{R}^n$, $K' = O(n)$; тогда $X = K' \setminus G'/\Gamma$. Для реализации X в виде базового орбиобразия возьмем $G = E_0(n+1)$ (при $n \geq 2$, случай $n = 1$ уже разобран выше). Здесь $K = \text{SO}(n+1)$ – максимальная компактная подгруппа в G . Рассмотрим вложение $O(n) \hookrightarrow \text{SO}(n+1)$, при котором матрица A переходит в матрицу $\text{diag}(A, \det A^{-1})$. Используя это вложение и естественное вложение $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^{n+1}$, получаем вложение Γ в G . Положим $H = \Gamma \cdot (\mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ натянуто на базисный вектор e_{n+1} , получим замкнутую подгруппу в G . Ясно, что $K \setminus G/H = K' \setminus G'/\Gamma$, т.е. X представлено в виде базового орбиобразия для компактного однородного пространства G/H .

§ 2. Двумерные базовые орбиобразия и двумерные геометрии

Пусть $M = G/H$ – такое плезиокомпактное однородное пространство, что $\dim M_a^* = 2$. Предположим сначала, что базовое орбиобразие M_a^* не имеет особых точек, т.е. является гладким многообразием. Тогда если M компактно, то M_a^* диффеоморфно тору T^2 , бутылке Клейна K^2 или замкнутой поверхности F_g некоторого рода $g \geq 2$, причем все перечисленные поверхности действительно могут быть реализованы в виде M_a^* (см. [4]). Если же M некомпактно (хотя и плезиокомпактно), то в качестве M_a^* могут появиться и некоторые некомпактные поверхности, но далеко не произвольные (см. ниже). Если же M_a^* имеет особые точки, то оно всегда гомеоморфно (но не обязательно изоморфно как орбиобразие) некоторой поверхности с краем, который образован точками отражения (см. [6], [12]). Орбиобразие M_a^* конечнолистно покрывается асферичным многообразием M_a – базой натурального расслоения. Поэтому всегда M_a^* является хорошим орбиобразием, а в силу асферичности M_a мы и M_a^* будем называть *асферичным* (хотя как топологическое пространство оно не обязательно асферично).

Следующее утверждение представляет собой еще один шаг в доказательстве теоремы 0.2.

ТЕОРЕМА 2.1. *Произвольное асферичное компактное хорошее орбиобразие N изоморфно базовому орбиобразию M_a^* для некоторого компактного однородного пространства $M = G/H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства будем использовать следующий фундаментальный результат: каждое хорошее двумерное орбиобразие без края N имеет геометрию, моделируемую на $X = E^2, S^2, \Lambda^2$ (см. [6]). Это означает, что любое такое N можно представить в виде $N = K \setminus \text{Iso } X / \Gamma$, где $\text{Iso } X$ – группа изометрий риманова многообразия X , K – максимальная компактная подгруппа в $\text{Iso } X$, а Γ – некоторая дискретная подгруппа (фактически равномерная решетка) в $\text{Iso } X$.

Исходя из этого результата, рассмотрим последовательно все возможные случаи. Так как сфера S^2 не асферична, то нам этот случай рассматривать не нужно. Предположим сначала, что геометрия на заданном орбиобразии N моделируется евклидовой плоскостью E^2 . В этом случае N – плоское орбиобразие и его реализация в виде базового орбиобразия была построена в конце предыдущего параграфа (там $G = E_0(3)$).

Остается рассмотреть случай, когда геометрия на N моделируется плоскостью Лобачевского Λ^2 . Группа $\text{Iso } \Lambda^2$ изоморфна проективизированной линейной группе $\text{PGL}(2, \mathbf{R})$. Положим $G = \text{SL}(3, \mathbf{R})$; тогда $K = \text{SO}(3)$ – максимальная компактная подгруппа в G . Для дальнейших построений удобно заменить $\text{PGL}(2, \mathbf{R})$ на двулистно ее покрывающую группу S , которая, как нетрудно понять, изоморфна подгруппе Ли в $\text{GL}(2, \mathbf{R})$, порожденной $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ и элементом $\varepsilon = \text{diag}(-1, 1)$. При этом решетку Γ нужно заменить на ее прообраз при этом накрытии.

Рассмотрим такое вложение указанной группы Ли S в $\text{SL}(3, \mathbf{R})$, при котором $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ располагается в левом верхнем углу матриц третьего порядка, а элемент ε

переходит в матрицу $\text{diag}(-1, 1, 1)$. Положим также

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

и $H = \Gamma \cdot R$. Легко проверить, что H – замкнутая подгруппа в G и $K \setminus G/H = \text{SO}(2) \setminus \text{Iso } \Lambda^2/\Gamma = N$, т.е. получили искомую реализацию для N .

Если для компактного однородного M на базовом орбиобразии M_a^* имеется плоская геометрия (моделируемая на E^2), то оно будет изоморфно (см. [6]) одному из следующих орбиобразий:

- (i) T^2, K^2 , если M_a^* не имеет особых точек;
- (ii) $S^1 \times I, D^2$ (замкнутый двумерный диск), Mb (замкнутый лист Мёбиуса), если имеются особые точки.

Если же M плезиокомпактно, то плоское базовое орбиобразие все равно в рассматриваемом случае обязательно будет компактным (иначе его мера будет бесконечна – см. [13]), и потому оно тоже будет изоморфно одному из перечисленных выше. Тем самым имеется полное описание двумерных плоских базовых орбиобразий.

Описание же гиперболических двумерных базовых орбиобразий M_a^* (т.е. таких, геометрия которых моделируется плоскостью Лобачевского) эквивалентно описанию всех решеток в $\text{SL}(2, \mathbf{R})$. Эти решетки достаточно хорошо изучены, они – это в точности все конечнопорожденные фуксовы группы первого рода, которым посвящена обширнейшая литература.

Если двумерное базовое орбиобразие M_a^* гладкое, то оно с точностью до диффеоморфизма однозначно определяется своей фундаментальной группой, а в [4] доказано, что с точностью до конечнолистного накрытия и фундаментальной группой $\pi_1(M)$ компактного однородного пространства M . Если же M_a^* имеет особые точки, то своей фундаментальной группой оно с точностью до диффеоморфизма определяется не всегда. Например, обе фундаментальные группы $\pi_1(S^1 \times I)$ и $\pi_1(Mb)$ изоморфны $\mathbf{Z}$, но сами орбиобразия не диффеоморфны (хотя имеют одинаковый гомотопический тип). Отметим, что фундаментальную группу $\pi_1(M_a^*)$ (мы рассматриваем здесь обычную топологическую фундаментальную группу, а не фундаментальную группу в категории орбиобразий, отличную, вообще говоря, от топологической – см., например, [6]) можно вычислить, исходя из фундаментальной группы исходного плезиокомпактного однородного пространства M . Это видно из следующего общего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть M – плезиокомпактное однородное пространство. Пусть $\text{Tors } \pi_1(M)$ – множество всех элементов конечного порядка в фундаментальной группе $\pi_1(M)$, а N – наименьший нормальный делитель в $\pi_1(M)$, содержащий это множество (другими словами, N – это нормальный делитель, порожденный всеми элементами конечного порядка в группе $\pi_1(M)$). Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M_a^*)$ базового орбиобразия для M изоморфна $\pi_1(M)/N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = G/H$, где G – односвязная, почти связная группа Ли. Если K – максимальная компактная подгруппа в G , то $M_a^* = K \setminus G/H$. Очевиден диффеоморфизм $K \setminus G/H = (K \setminus (G/H_0))/(H/H_0)$. Группа $H/H_0 = \Gamma$ дискретна и, так как G односвязна, изоморфна $\pi_1(M)$. Положим $X = K \setminus G/H_0$; тогда X диффеоморфно $\mathbf{R}^n$ (см. рассуждение, приведенное выше во введении). Группа Γ дискретно действует на X . Так как X стягиваемо, то действие любого элемента $\gamma \in \Gamma$ на X имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда γ имеет конечный порядок [15] (здесь используется также и дискретность действия). Но тогда в силу [16] имеем изоморфизм $\pi_1(M_a^*) = \Gamma/N(\text{Tors } \Gamma)$, где $N(\text{Tors } \Gamma)$ – нормальный делитель в Γ , порожденный всеми элементами конечного порядка. В сочетании с изоморфизмом $\Gamma \simeq \pi_1(M_a^*)$ это завершает доказательство теоремы.

Следующее утверждение является очевидным следствием теоремы 2.2 и данного выше описания двумерных базовых орбиобразий.

СЛЕДСТВИЕ. *Если двумерное базовое орбиобразие плезикокомпактного однородного пространства не имеет особых точек, то оно определяется этим пространством (и даже только одной его фундаментальной группой) однозначно с точностью до диффеоморфизма.*

Отметим, что критерий отсутствия особых точек у M_a^* , тесно связанный с теоремой 2.2, был фактически доказан в [17]: базовое орбиобразие M_a^* не имеет особых точек тогда и только тогда, когда в фундаментальной группе $\pi_1(M)$ плезикокомпактного однородного пространства M множество элементов конечного порядка образует подгруппу (а потому, что эквивалентно, и нормальный делитель). Например, конечнопорожденная нильпотентная группа всегда удовлетворяет указанному условию.

Из утверждения теоремы 2.2 видно, что $\pi_1(M_a^*)$ однозначно определяется фундаментальной группой $\pi_1(M)$. Однако при этом вполне может оказаться, что плезикокомпактные однородные пространства с изоморфными фундаментальными группами имеют недиффеоморфные базовые орбиобразия (хотя те имеют изоморфные фундаментальные группы – см. выше). Орбиобразия $S^1 \times I$ и Mb нельзя различить с помощью фундаментальной группы, но если рассмотреть у них особые точки (которые составляют их край), то для первого из указанных орбиобразий их множество несвязно, а у второго связно. Пока неясно, как можно различить два эти орбиобразия в топологических терминах, касающихся самих однородных пространств (а именно такое различие необходимо для доказательства в рассматриваемом несложном частном случае гипотезы, сформулированной во введении).

§ 3. Трехмерные базовые орбиобразия и геометрии Терстона

В этом параграфе рассматривается случай, когда $\dim M_a^* = 3$. Напомним, что орбиобразие M_a^* является хорошим, асферично и всегда имеет геометрическую структуру. Все трехмерные геометрические структуры были известны еще Э. Картану, однако интерес к ним резко возрос в последние 15 лет благодаря работам У. Терстона (касающимся проблемы геометризации произвольных трехмер-

ных многообразий после подходящего их разложения в связную сумму), в связи с чем их ныне называют *геометриями Терстона*. Всего имеется восемь геометрий, они моделируются следующими односвязными римановыми многообразиями (с естественными метриками): S^3 , $S^2 \times E^1$, E^3 , Λ^3 , $\Lambda^2 \times E^1$, $\mathcal{A}$ (это универсальная накрывающая группа для $SL(2, \mathbf{R})$ с левоинвариантной метрикой), Nil, Sol (последние две – это левоинвариантные геометрии на двух группах Ли, нильпотентной и разрешимой соответственно). Так как M_a^* асферично, то геометрии, моделируемые на S^3 и $S^2 \times E^1$, на них реализоваться не могут. Что же касается шести остальных геометрических структур, то оказывается, что все они могут быть реализованы на базовых орбиобразиях плезиокомпактных (и даже просто компактных) однородных пространств. Можно доказать даже более общее утверждение. Известно, что произвольное полное локально однородное риманово многообразие X представляется в виде $K' \setminus G' / \Gamma'$, где G' – некоторая группа Ли (обычно берется группа изометрий универсального накрывающего для исходного риманова многообразия), K' – компактная подгруппа в G' , а Γ' – некоторая дискретная подгруппа в G' (см. [14]). Такое локально однородное X естественно назвать *асферичным*, если асферично однородное риманово многообразие $K' \setminus G'$ (это условие эквивалентно тому, что K' содержит максимальную полупростую компактную подгруппу в G'). Далее, это X назовем *плезиокомпактным*, если дискретная подгруппа Γ' является решеткой в G' , в этом случае легко показать, что группу G' можно считать почти связной. Ясно, что компактное X будет и плезиокомпактным, при этом полнота X легко выводится из компактности. Следующая теорема – это еще один шаг на пути доказательства теоремы 0.2, дающий при этом более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Любое трехмерное асферичное плезиокомпактное локально однородное полное орбиобразие N изоморфно базовому орбиобразию M_a^* для некоторого плезиокомпактного однородного пространства $M = G/H$.*

В частности, любое компактное орбиобразие, допускающее геометрию, моделированную на E^3 , Λ^3 , $\Lambda^2 \times E^1$, $\mathcal{A}$, Nil, Sol, изоморфно базовому орбиобразию для некоторого компактного однородного пространства M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было сказано выше, на орбиобразии N может быть введена одна из шести геометрических структур. Рассмотрим их по отдельности.

Предположим вначале, что геометрия на N моделируется пространством Лобачевского Λ^3 . Группа изометрий здесь будет изоморфна $G' = O(1, 3)$, максимальной компактной группой будет $K' = S(O(1) \times O(3))$. Положим $G = SO(2, 3)$ и рассмотрим естественное вложение группы $O(1, 3)$ в $SO(2, 3)$, которое матрицу A переводит в $\text{diag}(\det A^{-1}, A)$. Положим $H = \Gamma' \cdot R$, где Γ' – решетка в группе Ли G' (вложенной в G), факторизацией по которой из пространства Лобачевского получается N , а R – разрешимая подгруппа Ли в $SO(2, 3)$, матрицы которой имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что H – замкнутая подгруппа в G и что $K \backslash G/H = K' \backslash G'/\Gamma'$. Следовательно, исходное орбиобразие N реализовано как базовое для компактного однородного пространства $M = G/H$. Заметим, что приведенная здесь конструкция применима для пространства Лобачевского любой размерности, в частности, это дает еще один способ рассуждений для плоскости Лобачевского при доказательстве теоремы 2.1.

Рассмотрим теперь случай геометрии, моделируемой на $\Lambda^2 \times E^1$. Здесь группой изометрий будет $G' = \text{Iso}(\Lambda^2) \times \text{Iso}(E^1)$. Возьмем $G = \text{SO}(2, 3) \times E(1)$ и далее рассуждаем так же, как в § 2.

Если геометрия моделируется на $\mathcal{A}$, то группа изометрий этого риманова многообразия локально изоморфна $\text{SO}(1, 2) \times \mathbf{R}$ (см., например, [6], [8]), сама группа изометрий имеет две связные компоненты, а связная компонента единицы получается из универсальной накрывающей для указанной выше группы Ли факторизацией по “диагональной” центральной подгруппе, изоморфной $\mathbf{Z}$. В качестве G мы возьмем группу Ли, которая локально изоморфна $\text{SO}(2, 3) \times \mathbf{R}$ и получается из универсальной накрывающей для этой группы Ли тоже факторизацией по “диагональной” центральной подгруппе. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и выше.

Для плоской римановой геометрии (моделируемой на E^3) требуемое утверждение уже было доказано в § 1. Остается рассмотреть случаи двух геометрий, моделируемых левоинвариантными римановыми структурами на разрешимых группах Ли Nil и Sol. В этих случаях утверждение теоремы 3.1 будет выведено из следующего более общего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть G' – почти связная разрешимая группа Ли, связная компонента которой линейна (т.е. изоморфна некоторой линейной группе Ли), K' – максимальная компактная подгруппа в G' , Γ' – решетка в G' (она обязательно будет равномерной). Тогда орбиобразии $N = K' \backslash G'/\Gamma'$ (геометрия которого моделируется левоинвариантной геометрией на группе Ли G'_0) изоморфно базовому орбиобразию M_a^* для некоторого компактного однородного пространства $M = G/H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию группа Ли G'_0 линейна. Так как G' почти связна (т.е. группа $\Phi = G'/G'_0$ конечна), то и вся группа G' будет линейной. Из условия теоремы следует, что группа Ли G' аменабельна, а потому $K' \cdot G'_0 = G'$ (см., например, [18]). А так как G' еще и линейна, то она разлагается в полупрямое произведение $G' = K' \cdot F$, где F – некоторый замкнутый, односвязный нормальный делитель в G' .

Рассмотрим действие компактной группы K' сопряжениями на F . Можно считать, что это действие эффективно, ибо иначе мы можем профакторизовать G' по ядру этого действия, не повлияв на орбиобразие N . Но тогда можно рассматривать K' как подгруппу в $\text{Aut } F$. Группа Ли F односвязна, поэтому группа $\text{Aut } F$ естественно изоморфна $\text{Aut } L(F)$ – группе автоморфизмов алгебры Ли $L(F)$ группы Ли F . В частности, можно рассматривать K' как подгруппу в $\text{Aut } L(F)$.

Так как группа K' компактна, то можно считать, выбрав подходящий базис

в $L(F)$, что $K' \subset O(n)$, где $n = \dim L(F)$. Рассмотрим алгебру Ли $\bar{L} = L(G) \oplus \mathbf{R}$. Вложим $O(n)$ в $O(n+1)$ стандартным образом; тогда можно считать, что $K' \subset O(n+1)$. Из теории инвариантов известно, что существует такое линейное конечномерное представление $\rho: O(n+1) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, что для некоторого вектора $v_0 \in V$ его стабилизатор совпадает с K' (см. [19]). Положим $L^* = \bar{L} \otimes V$. Рассматривая V как абелеву алгебру Ли, стандартным образом введем на L^* структуру алгебры Ли, при этом получится, что L^* изоморфна прямой сумме $\bar{L}_1 \oplus \dots \oplus \bar{L}_n$, где алгебры Ли $\bar{L}_i$ изоморфны $\bar{L}$. Рассмотрим теперь подалгебру $\bar{L} \otimes \{v_0\}$ (которая диагонально вложена в прямую сумму соответственно координатам вектора v_0), она изоморфна $\bar{L}$ и ее стационарная подгруппа для естественного действия группы $O(n+1)$ на L^* совпадает, как нетрудно видеть, с K' .

Пусть G^* – односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $L(G^*)$. Имеется гомоморфизм группы $O(n+1)$ в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut} G^* \simeq \mathrm{Aut} L^*$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = \mathrm{SO}(n+1) \cdot G^*$, соответствующее этому гомоморфизму.

Группа Ли G связна. Построим в ней подгруппу H . Алгебру Ли этой подгруппы (однозначно определяющую связную компоненту H_0) возьмем равной $W_1 \oplus (\bar{L}_2 \oplus \dots \oplus \bar{L}_n)$, где W_1 – одномерное прямое слагаемое в $\bar{L}_1 = L(G') \oplus \mathbf{R}$. Далее, решетка Γ' содержится в $G' = K' \cdot F$, поэтому она естественно вкладывается в $K' \cdot G^*$, а потому и в группу Ли G . Положим $H = \Gamma' \cdot H_0$. Легко проверить, что H – замкнутая подгруппа в G , причем $K' \setminus G'/\Gamma' = K \setminus G/H$, где $K = \mathrm{SO}(n+1)$ – максимальная компактная подгруппа в связной группе Ли G . Далее, ясно, что однородное пространство $M = G/H$ компактно, а как мы только что видели, соответствующее ему базовое орбиобразие M_a^* изоморфно исходному орбиобразию N .

Выведем теперь из этой теоремы доказательство теоремы 3.1 для оставшихся пока неразобранными случаев геометрий Nil и Sol.

Группа Ли Nil – трехмерная нильпотентная группа Ли, изоморфная группе унипотентных вещественных матриц третьего порядка, ее иногда называют *группой Гейзенберга*. Если ввести на Nil левоинвариантную метрику, то группа изометрий получившегося риманова многообразия изоморфна полупрямому произведению групп $O(2)$ и Nil (это утверждение фактически доказано в [6], хотя и не сформулировано в такой форме). Легко понять, что эта группа изоморфна линейной, поэтому в силу теоремы 3.2 любое компактное орбиобразие с геометрией Nil может быть реализовано в виде базового орбиобразия некоторого компактного однородного пространства.

Группа Sol – трехмерная разрешимая группа Ли (описание ее можно найти в [6], [8]). Если ввести на ней левоинвариантную метрику, то группа изометрий получившегося риманова многообразия будет изоморфна полупрямому произведению диэдральной группы D_4 и самой группы Sol. Группа Sol линейна, поэтому и для геометрий, моделируемых на Sol, в силу теоремы 3.2 справедливо утверждение теоремы 3.1. Тем самым доказательство теоремы 3.1 завершено, а с ним и относящаяся к трехмерному случаю часть теоремы 0.2.

Интересно отметить, что тип геометрической структуры на трехмерном хорошем орбиобразии единствен (см. [6]), то же верно, конечно, и для орбиобразий меньшей размерности, хотя сама геометрическая структура может и меняться. Например, на трехмерном торе существует много различных плоских структур. Отсюда следует, что при $\dim M_a^* \leq 3$ на M_a^* возможна геометрическая структура только одного типа. Для базовых орбиобразий большей размерности вопрос о единственности типа геометрии остается открытым.

В заключении параграфа сделаем несколько замечаний о топологическом строении маломерных базовых орбиобразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть M – такое компактное однородное пространство, что $\dim M \leq 3$. Тогда его базовое орбиобразие изоморфно самому M или же S^1 , точке или отрезку I (только в этом последнем случае базовое орбиобразие имеет особые точки).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\dim M_a^* \leq 3$. Если $\dim M_a^* = 3$, то $M_a^* = M$ (M_a^* тут будет гладким асферичным однородным многообразием). Если $\dim M_a^* \leq 2$, то используем классификацию трехмерных компактных однородных пространств, полученную в [20]. Из перебора всех возможных однородных пространств без труда получается, что случай $\dim M_a^* = 2$ возможен, только если $M = M_a^*$. Если же $\dim M_a^* \leq 1$, то ясно, что орбиобразие M_a^* может быть изоморфно только окружности, отрезку или точке.

Для описания строения M_a^* в более сложных случаях можно использовать структурное расслоение (аналогичное построенному в [2] для базы натурального расслоения). Структурное расслоение для M_a^* – это расслоение Зейферта $M_r^* \rightarrow M_a^* \rightarrow M_s^*$, где M_r^* – орбиобразие с геометрией, моделируемое геометрией с разрешимой транзитивной подгруппой в группе изометрий, а M_s^* моделируется геометрией, некоторая транзитивная подгруппа группы изометрий которой локально изоморфна группе Ли $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – универсальная накрывающая для $SL(2, \mathbf{R})$. Если орбиобразие M_r^* одномерно, то оно изоморфно окружности, и мы получаем классическое расслоение Зейферта. Более явно расслоения Зейферта для орбиобразий малой размерности описаны в [6]. Результаты о топологии плоских орбиобразий малой размерности приведены также в [21], имеются некоторые другие результаты того же автора (в частности, о строении орбиобразий, связанных с разрешимыми группами Ли).

§ 4. О четырехмерных базовых орбиобразиях

Здесь рассматриваются геометрии на четырехмерных базовых орбиобразиях. На каждом из них, как нам уже известно, имеется геометрическая структура. Всего существует 19 четырехмерных геометрий (точнее, 18 и одна счетная серия – см. [8] и изложение в [9]). Интересно отметить, что односвязные модели этих геометрий либо являются симметрическими пространствами, либо группами Ли с левоинвариантной метрикой [8]. Так как орбиобразие M_a^* асферично, то некоторые из указанных геометрий на них не реализуются. А именно невозможны геомет-

рии, моделируемые следующими римановыми многообразиями (с естественными метриками): S^4 , $\mathbf{C}P^2$, $S^2 \times S^2$, $S^3 \times E^1$, $S^2 \times E^2$, $S^2 \times \Lambda^2$, остаются 12 геометрий и серия $\text{Sol}_4^{m,n}$ (включающая, в частности, $\text{Sol}_3 \times E^1$). Следующее утверждение является четырехмерным аналогом теоремы 3.1 и с его помощью завершается доказательство теоремы 0.2, сформулированной во введении.

ТЕОРЕМА 4.1. *Любое четырехмерное асферичное плезикокомпактное локально однородное полное орбиобразие N изоморфно базовому орбиобразию M_a^* для некоторого плезикокомпактного однородного пространства $M = G/H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство по своей схеме то же, что и в теореме 3.1. Из условия следует, что N представляется в виде $N = K' \setminus G'/\Gamma'$, где G' – некоторая почти связная группа Ли, K' – максимальная компактная подгруппа в G' , а Γ' – решетка в G' .

Для геометрий, моделируемых на Nil_4 , $\text{Nil}_3 \times \mathbf{E}^1$, Sol_4^0 , Sol_4^1 и серии $\text{Sol}_4^{m,n}$, группа автоморфизмов (указанная в [9]) удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Поэтому в указанных случаях утверждение теоремы 4.1 вытекает из теоремы 3.2. Далее, для геометрий-произведений, моделируемых на $\Lambda^3 \times E^1$, $\Lambda^2 \times E^2$, $\Lambda^2 \times \Lambda^2$, $\mathcal{A} \times E^1$, группы изометрий представляют собой прямые произведения групп изометрий прямых множителей. В этом случае доказательство теоремы 4.1 проводится по аналогии с рассуждениями из § 2, 3, примененными к прямым множителям. Например, для геометрии $\Lambda^2 \times \Lambda^2$ имеем $\text{Iso}(\Lambda^2 \times \Lambda^2) = \text{Iso} \Lambda^2 \times \text{Iso} \Lambda^2$, и поэтому группу Ли, транзитивную на требуемом однородном пространстве, можно взять изоморфной $\text{SL}(3, \mathbf{R}) \times \text{SL}(3, \mathbf{R})$.

Если группа изометрий G' имеет конечную фундаментальную группу, то ее стационарная подгруппа K' полупроста. Тут в качестве требуемого однородного пространства можно взять $M = G'/\Gamma'$. Это рассуждение применимо к геометриям, моделируемым на Λ^4 , $\Lambda^3 \times E^1$ (для последней другое рассуждение было уже приведено выше).

Остались нерассмотренными лишь две геометрии: моделируемая на комплексной гиперболической плоскости $\Lambda^2(\mathbf{C})$ и геометрия F_4 , для которой группа изометрий изоморфна $\text{SL}(2, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^2$ (это полупрямое произведение, соответствующее естественному действию группы $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ на $\mathbf{R}^2$), а кривизна знакопеременна.

Для геометрии $\Lambda^2(\mathbf{C})$ группа изометрий изоморфна $U(1, 2)$. Здесь можно комплексифицировать рассуждение, примененное в § 2 для Λ^2 . А именно, используем вложение $U(1, 2)$ в $\text{SL}(3, \mathbf{C})$ так же, как использовали вложение $O(1, 2)$ в $\text{SL}(3, \mathbf{R})$ в § 2. В результате получим реализацию орбиобразия N в виде базового орбиобразия компактного однородного пространства группы Ли $\text{GL}(3, \mathbf{C})$.

Геометрия F_4 не имеет компактных факторгеометрий (это эквивалентно отсутствию у ее группы изометрий равномерных решеток), но имеет факторгеометрии конечной меры (т.е. плезикокомпактные), они соответствуют неравномерным решеткам (см. [6]). Здесь для доказательства теоремы используется естественное вложение группы $\text{SL}(2, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^2$ в группу Ли $G = \text{SL}(3, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^3$ (которая отличается от исходной тем, что максимальная компактная подгруппа в ней полупроста). Дальнейшие рассуждения (те же, что и примененные уже несколько раз выше)

дают реализацию N в виде базового орбиобразия плезикокомпактного (хотя и некомпактного) однородного пространства группы Ли G .

Доказав теорему 4.1, мы, в частности, завершили доказательство теоремы 0.2. Укажем теперь явно основную идею, которая использовалась неоднократно в § 1–4 на отдельных этапах доказательства: большинство конструкций сводились к вложению исходной группы изометрий в некоторую связную группу Ли G в качестве подгруппы некоторой равномерной t -подгруппы (см. ниже) группы G .

Так же, как в трехмерном случае, здесь тоже можно перечислить базовые орбиобразия компактных однородных пространств малой размерности. Имеется классификация компактных однородных пространств размерности 4 (с перечислением групп Ли, минимальных среди транзитивных на них) и размерностей 5, 6 с точностью до конечнолистного накрытия (см. [22]–[24]). Для наших целей достаточная информация имеется только в размерностях ≤ 4 , в размерностях 5 и 6 из-за отсутствия описания транзитивных групп можно было бы дать только гипотетическое (но очень правдоподобное, особенно если поверить в справедливость гипотезы, сформулированной во введении) описание соответствующих базовых орбиобразий. Из [22] в результате получаем такое утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть M_a^* – базовое орбиобразие компактного однородного пространства M размерности ≤ 4 . Тогда либо $M_a^* = M$ (и тогда M_a^* будет гладким однородным асферичным многообразием), либо изоморфно гладким многообразиям T^2 , K^2 , S^1 или орбиобразиям с особыми точками I , $S^1 \times I$.

В размерностях 5, 6 и более наряду с M и асферичными однородными многообразиями меньшей размерности (а это в точности T^2 , K^2 , S^1) будет появляться все больше орбиобразий с особенностями.

Интересно отметить, что на некоторых четырехмерных M_a^* можно ввести комплексную структуру. В [9] доказано, что это возможно для геометрий, моделируемых на E^4 , $\Lambda^2 \times E^2$, $\Lambda^2 \times \Lambda^2$, $\Lambda^2(\mathbf{C})$, F_4 , $\text{Nil}_3 \times E^1$, $\mathcal{A} \times E^1$, Sol_4^0 , Sol_4^1 и только на них. Нет комплексной структуры на геометриях Λ^4 , Nil_4 , $\text{Sol}_4^{m,n}$.

§ 5. Об однородной униформизации компактных многообразий

Пусть M – некоторое компактное многообразие. Оно не обязательно будет однородным, т.е. на нем не всегда существует транзитивное действие некоторой конечномерной группы Ли. Например, на замкнутой ориентируемой поверхности F_g рода $g \in \mathbf{N}$ транзитивное действие существует, только если $g = 0$ (тут $M = S^2$) или $g = 1$ (тут $M = T^2$), а при $g \geq 2$ никакого транзитивного действия на M не существует. Однако может оказаться, что однородным будет некоторое многообразие, накрывающее M . Например, при $g \geq 2$ универсальное накрывающее F_g многообразие диффеоморфно $\mathbf{R}^2$ и потому, конечно, однородно. Более того, на $\mathbf{R}^2$ существует такое транзитивное действие группы Ли (фактически группы $\text{SL}(2, \mathbf{R})$),

что группа скользящих универсального накрытия (т.е. дискретная группа диффеоморфизмов, факторпространство по которой диффеоморфно исходному многообразию) является подгруппой этой транзитивной группы Ли. Многообразие M мы будем называть *однородно униформизируемым* (или *допускающим однородную униформизацию*), если оно диффеоморфно многообразию вида $H \setminus G/\Gamma$, где G – некая почти связная группа Ли, H – замкнутая подгруппа в G , а Γ – дискретная подгруппа в G . Многообразие $H \setminus G/\Gamma$ можно рассматривать как результат факторизации однородного пространства $H \setminus G$ (накрывающего исходное многообразие M) по действию дискретной подгруппы $\Gamma \subset G$. Например, для поверхности F_g при $g \geq 2$ имеем $F_g = \mathrm{SO}(2) \setminus \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$.

В этом параграфе мы будем рассматривать вопросы униформизации асферичных многообразий. Нас будут интересовать геометрические структуры на них, и потому в качестве униформизирующих однородных пространств будем брать только те, которые имеют инвариантную риманову метрику. Наличие инвариантной метрики на однородном пространстве $H \setminus G$ почти связной группы Ли G эквивалентно, как известно, компактности стационарной подгруппы H (ибо эта подгруппа должна быть замкнутой подгруппой в компактной группе изометрий касательного пространства в той точке, которую она оставляет неподвижной). Асферичность же многообразия M эквивалентна тому, что компактная стационарная подгруппа H должна содержать некоторую максимальную среди компактных полупростых подгрупп группы Ли G (см., например, [11]). В результате мы приходим к рассмотрению вопроса о возможности представления заданного компактного асферичного многообразия M в виде $K \setminus G/\Gamma$. Отметим, что при наличии такого представления на многообразии M всегда можно ввести геометрическую структуру, моделируемую римановым однородным многообразием $K \setminus G$.

Вначале мы рассмотрим вопрос о возможности представления любого компактного асферичного многообразия M в виде $K \setminus G/\Gamma$, где G – почти связная группа Ли, K – максимальная компактная подгруппа в G (случай, когда K не является максимальной компактной подгруппой, но содержит максимальную полупростую компактную подгруппу, легко сводится к этому частному случаю с помощью замены группы Ли G на локально изоморфную ей), Γ – равномерная решетка в G . Впервые, насколько мне известно, вопрос о существовании такого представления для любого асферичного компактного многообразия M был поставлен в [25]. Однако довольно скоро выяснилось, что в общем случае ответ на него отрицателен по довольно простой причине. Дело в том, что для асферичных многообразий вида $K \setminus G/\Gamma$ универсальное накрывающее многообразие диффеоморфно $\mathbf{R}^n$. Что же касается произвольных компактных асферичных многообразий, то для них универсальное накрывающее многообразие $\tilde{M}$ всегда будет стягиваемым, но далеко не всегда оно будет диффеоморфно $\mathbf{R}^n$ (первые примеры такого рода были построены в [5]). Поэтому в своей первоначальной форме гипотеза из [25] оказалась неверной. Однако эту гипотезу можно чуть подправить, ограничившись рассмотрением только тех асферичных многообразий M , для которых универсальное накрывающее многообразие $\tilde{M}$ диффеоморфно $\mathbf{R}^n$ (и тогда M получается как факторпространство $\mathbf{R}^n/\Gamma$). Но и такое, более слабое предположение, оказалось неверным.

Соответствующий пример был анонсирован в [26], здесь мы приведем полное доказательство.

Пусть D_g – такая решетка в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, что $\mathrm{SO}(2) \setminus \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/D_g = F_g$ – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$ (существование таких решеток есть основной результат теории униформизации компактных комплексных римановых кривых). Известно, что факторгруппа группы D_g по ее коммутанту изоморфна $\mathbf{Z}^{2g}$ (см., например, [13]). Поэтому можно выбрать такой гомоморфизм $\phi: D_g \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}) = \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}^2)$, что $\mathrm{Im} \phi \simeq \mathbf{Z}$, причем подгруппа $\mathrm{Im} \phi$ подобна подгруппе матриц вида $\mathrm{diag}(e^{\alpha n}, e^{-\alpha n})$, $\alpha \in \mathbf{Z}$, где параметр α таков, что $e^\alpha + e^{-\alpha} = N$ – целое число ≥ 3 . Пусть $\Pi = D_g \cdot \mathbf{Z}^2$ – полупрямое произведение, соответствующее гомоморфизму ϕ . Для такой группы Π существует (см. [27]) компактное асферичное многообразие вида $\mathbf{R}^n/\Pi$ (фундаментальная группа которого изоморфна Π). Докажем, что ни M , ни даже какое-либо многообразие, его конечнолистно покрывающее, не могут быть представлены в виде $K \setminus G/\Gamma$, в частности не имеют геометрической структуры.

Пусть $M = K \setminus G/\Gamma$, решетка Γ тогда должна быть изоморфна группе Π . Переходя к конечнолистно покрывающему M многообразию, мы можем считать, что группа Ли G связна (хотя поначалу она предполагалась только почти связной). Рассмотрим теперь разложение Леви $G = S \cdot R$ (R – радикал, S – полупростая часть). Мы можем предполагать, что полупростая группа Ли S не имеет компактных факторов, поэтому $\Gamma \cap R$ – решетка в R , а $S/S \cap R$ – решетка в $S' = S/S \cap R$ (полупростой группе Ли, локально изоморфной S) – подробнее см. [28]. Так как D_g – решетка в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, то S должна быть локально изоморфна $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ (см. [28]), а группе $\Gamma \cap R$ тогда придется быть изоморфной $\mathbf{Z}^2$ (это видно из определения группы D_g). Группу Ли R можно считать односвязной (см. [2], [3]), а так как она имеет решетку $\Gamma \cap R$, изоморфную $\mathbf{Z}^2$, то она должна быть изоморфна $\mathbf{R}^2$ (ибо других односвязных разрешимых групп Ли, имеющих $\mathbf{Z}^2$ в качестве решетки, не существует – см., например, [13]). Пусть $\lambda: S \rightarrow \mathrm{Aut} R$ – гомоморфизм, отвечающий действию S на R внутренними автоморфизмами. Тогда из $\mathrm{Im} \phi \simeq \mathbf{Z}$ следует, что $\lambda(\Gamma/\Gamma \cap R) \simeq \mathbf{Z}$. Однако, с другой стороны, $\Gamma/\Gamma \cap R$ – решетка в простой некомпактной группе Ли S' , и потому ее алгебраическое замыкание в $\mathrm{Aut}(R)$ должно совпадать с $\lambda(S)$ [28]. Но $\lambda(S)$ полупроста, а $\lambda(\Gamma/\Gamma \cap R)$ абелева. Полученное противоречие показывает, что ни M , ни какое-либо конечнолистно покрывающее его многообразие (к которому тоже применимы все приведенные выше рассуждения) не могут иметь представления в виде $K \setminus G/\Gamma$. В частности, построенное многообразие не может быть представлено в виде $K \setminus G/H$, где G/H – компактное однородное пространство односвязной группы Ли, а K – максимальная компактная подгруппа в G (это следует из основного результата работы [3]).

Предположим теперь, что M – такое компактное асферичное многообразие, на котором имеется некоторая геометрия, т.е. которое может быть представлено в виде $M = K' \setminus G'/\Gamma'$. В силу теоремы 0.2 если $\dim M \leq 4$, то M можно рассматривать как базовое орбиобразие некоторого компактного однородного пространства. Возникает вопрос о том, справедливо ли такое утверждение для M произвольной размерности? Если группа Ли G' односвязна, то ответ, конечно, положи-

тельный. Тут достаточно взять $G = G'$, $H = \Gamma'$. Но существуют и такие M , в представлении которых группа Ли G' неодносвязна, например для $M = F_g$ имеем $G' = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ (см. выше), хотя F_g , как было показано, все же может быть реализовано в виде базового орбиобразия. Оказывается, что существуют асферичные M достаточно большой размерности, допускающие геометрическую структуру, но не реализуемые в виде базового орбиобразия компактного однородного пространства. Примером такого рода, как мы покажем ниже, является многообразие N вида $K' \backslash G' / \Gamma'$, где $G' = E_6^* III$ – присоединенная группа вещественной формы простой исключительной группы Ли E_6 , $K' = \mathrm{SO}(10) \times \mathrm{SO}(2)$ – максимальная компактная подгруппа, а Γ' – произвольная равномерная решетка в $E_6^* III$ (такие решетки существуют – см. [13]). Докажем, что для указанного N не существует компактного однородного пространства M , базовое орбиобразие которого (без особых точек, ибо таково N , а потому оно должно быть и базой M_a натурального расслоения для M) изоморфно указанному выше N . Для этого нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 5.1. *Пусть D – равномерная решетка в группе Ли $E_3 III$, D' – соизмеримая с D решетка в полупростой группе Ли S' , не имеющей компактных факторов. Тогда S' локально изоморфна $E_6 III$ (и даже соизмерима с ней).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соизмеримость двух групп означает, что в них существуют подгруппы конечных индексов, которые после факторизации по подходящим конечным нормальным делителям становятся изоморфными; про соизмеримые группы говорят иногда, что они изоморфны с точностью до конечных групп. Вещественный ранг группы $E_6 III$ равен 2, а потому утверждение леммы вытекает из общего результата Мостова [28], в котором, правда, речь идет об изоморфных решетках, но это совершенно не меняет сути дела.

В следующей лемме используется понятие *t-подгрупп* в группе Ли – так называются подгруппы, которые содержат некоторую максимальную треугольную (т.е. триангулируемую) подгруппу. В [29] дано описание *t*-подгрупп в терминах схем Сатаке, составленных из простых корней соответствующей полупростой вещественной алгебры Ли. Любая *t*-подгруппа в полупростой группе Ли S имеет разложение Леви $S_\Gamma \cdot R_\Gamma$, где Γ – некоторая подсистема в системе простых корней Π_1 , S_Γ – полупростая часть, R_Γ – радикал (их явный вид указан в [29], здесь для нас он несуществен).

ЛЕММА 5.2. *Пусть G – связная группа Ли, полупростая часть которой не имеет компактных факторов, такая, что полупростая часть некоторой ее *t*-подгруппы P локально изоморфна $E_3 III$. Тогда S локально изоморфна $E_6 III$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение Леви $P = S_\Gamma \cdot R_\Gamma$, где $\Gamma \subset \Pi_1$ – некоторая система простых корней, S_Γ – полупростая часть, R – радикал. Система корней Γ по условию совпадает с системой всех простых корней алгебры

Ли $L(E_6 III)$ группы Ли $E_6 III$, поэтому в Π_1 должна оказаться подсистема, изоморфная системе простых корней алгебры Ли $L(E_6 III)$. Из классификации всех систем простых корней для простых алгебр Ли видно, что подсистема в системе простых корней классической алгебры Ли тоже классическая. Так как группа $E_6 III$ исключительная, то остается рассмотреть лишь исключительные простые группы Ли. Простым перебором убеждаемся в том, что и в исключительных системах простых корней нет собственных подсистем, изоморфных системе корней для $E_6 III$. Но это означает, что Π_1 должна совпадать с системой простых корней для $E_6 III$, а так как S не имеет компактных факторов, то отсюда следует, что полупростые части групп Ли P и G совпадают.

Предположим теперь, что для некоторого компактного однородного пространства $M = G/H$ односвязной группы Ли G база M_a натурального расслоения диффеоморфна многообразию $K \setminus E_6 III / D$, указанному выше. В [2] доказано, что M_a можно представить в виде $K^* \setminus G^* / \Gamma^*$, где группа Ли имеет вид $G^* = P/H_0$, а P – некоторая t -подгруппа в G , получающаяся деформацией из нормализатора $N_G(H_0)$, причем полупростые части групп Ли P и $N_G(H_0)$ локально изоморфны. Далее, группа Ли G^* содержит решетку Γ^* , которая соизмерима с D , ибо в разложении Леви $G^* = S^* \cdot R^*$ пересечение $S^* \cap R^*$ конечно.

В силу леммы 5.1 полупростая часть группы Ли P имеет нормальный делитель, соизмеримый с $E_6^* III$. Но тогда и в t -подгруппе Ли $N_G(H_0)$ тоже есть нормальный делитель, соизмеримый с $E_6 III$. В силу леммы 5.2 получаем, что полупростые части подгруппы $N_G(H_0)$ и самой группы G совпадают с точностью до компактных факторов. Но тогда максимальная компактная подгруппа в группе Ли G должна в виде нормального делителя содержать $SO(2)$ – нормальный делитель максимальной компактной подгруппы в $E_6^* III$. Однако группа Ли G по предположению односвязна, а потому максимальная компактная подгруппа в ней должна быть полупроста. Противоречие. Это доказывает, что наше предположение о возможности реализации многообразия $K \setminus E_6 III / D$ неверно.

Итак, мы установили, что не все компактные асферичные многообразия, имеющие геометрическую структуру, могут быть реализованы в виде базы натурального расслоения некоторого компактного однородного пространства.

Список литературы

1. Горбачевич В. В. О псевдокомпактных однородных пространствах // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. № 2. С. 61–72.
2. Горбачевич В. В. О псевдокомпактных однородных пространствах II // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. № 2. С. 13–25.
3. Горбачевич В. В. Расслоение Зейферта для псевдокомпактного однородного пространства // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. № 2. С. 301–313.
4. Горбачевич В. В. Об одном расслоении компактного однородного пространства // Тр. Моск. мат. об-ва. 1981. Т. 43. С. 116–141.
5. Davis M. Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space // Ann. Math. 1983. V. 117. № 2. P. 293–324.
6. Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. М.: Наука, 1986.

7. *Ishihara S.* Homogeneous spaces of four dimensions // J. Math. Soc. of Japan. 1955. V. 7. № 2. P. 151–168.
8. Четырехмерная риманова геометрия / Под ред. А. Бессе. М.: Мир, 1985.
9. *Wall C. T. C.* Geometries and geometric structures in real dimension 4 and complex dimension 2 // Lect. Notes in Math. №1167. Berlin et al.: Springer, 1985. P. 268–292.
10. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физ.-мат. л-ра, 1995.
11. *Горбачевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 20. М.: ВИНТИ, 1988.
12. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
13. *Рагунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
14. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
15. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966.
16. *Armstrong M. A.* The fundamental group of the orbit space of a discontinuous group // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968. V. 64. № 2. P. 299–301.
17. *Горбачевич В. В.* Критерий существования натурального расслоения для компактного однородного многообразия // Матем. заметки. 1984. Т. 35. №2. С. 277–285.
18. *Milnor J.* On the fundamental group of complete affinely flat manifolds // Adv. in Math. 1977. V. 25. № 1. P. 178–187.
19. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Наука, 1987.
20. *Горбачевич В. В.* О трехмерных однородных пространствах // Сиб. матем. журн. 1977. Т. 18. №2. С. 280–293.
21. *Dunbar W.* Fibered orbifold and crystallographic groups: Ph. D. Thesis. Princeton: Princeton University 1981. P. 73.
22. *Горбачевич В. В.* О классификации четырехмерных компактных однородных пространств // УМН. 1977. Т. 32. №2. С. 207–208.
23. *Горбачевич В. В.* О компактных однородных пространствах размерности 5 и выше // УМН. 1978. Т. 33. №3. С. 161–162.
24. *Горбачевич В. В.* О компактных однородных многообразиях малой размерности // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. Ярославль: ЯрГУ, 1980.
25. *Conner P., Raymond F.* Deforming homotopy equalences to homeomorphisms in aspherical manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. № 1. P. 36–85.
26. *Горбачевич В. В.* Некоторые гомотопические свойства натурального расслоения для компактных однородных многообразий // ДАН СССР. 1982. Т. 264. №3. С. 525–528.
27. *Lee K., Raymond F.* Geometric realisation of group extensions by Seifert construction // Contemp. Math. V. 33. Providence. R.I.: Amer. Math. Soc. 1984. P. 353–411.
28. *Mostow G. D.* On the topology of homogeneous spaces of finite measure // Symp. Math. V. 16. London – N.Y.: Acad. Press, 1975. P. 375–398.
29. *Онищик А. Л.* Разложение редуктивных групп Ли // Матем. сб. 1969. Т. 80. №4. С. 553–599.

Поступило в редакцию
18.XI.1997