Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ф. Красичков-Терновский, Спектральный синтез и локальное описание для многих переменных, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 4, 101–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:11:51

УДК 517.5

И. Ф. Красичков-Терновский

Спектральный синтез и локальное описание для многих переменных

Задача спектрального синтеза для подпространств аналитических функций, инвариантных относительно системы операторов частного дифференцирования, сводится к задаче локального описания замкнутых подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа над кольцом многочленов.

Библиография: 39 наименований.

§ 1. Введение

Пусть H – отделимое локально выпуклое пространство, в котором действует система операторов $D_1, \dots, D_n$. Элемент $e \in H$ называется *корневым элементом* системы операторов $D_1, \dots, D_n$, отвечающим вектору собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, если при некотором целом положительном m имеют место соотношения

$$(D_1 - \lambda_1 E)^m e = 0, \quad \dots, \quad (D_n - \lambda_n E)^m e = 0,$$

где E – тождественный оператор.

Подпространство $W \subset H$ называется *инвариантным* относительно системы операторов $D_1, \dots, D_n$, если выполняется импликация

$$f \in W \Rightarrow D_i f \in W, \quad i = 1, \dots, n.$$

Подпространство W допускает *спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием линейной оболочки корневых элементов системы $D_1, \dots, D_n$, содержащихся в W .

Задача спектрального синтеза – выяснить, при каких условиях заданное инвариантное подпространство W допускает спектральный синтез. Задача спектрального синтеза возникает естественным образом в связи с однородными уравнениями свертки в комплексной области.

Пусть

$$H = H(G_1) \times \dots \times H(G_q) \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код 96-01-00095).

Впервые задача спектрального синтеза была поставлена в явной форме Л. Шварцем в 1947 г. [1]; Л. Шварц доказал, что каждое инвариантное подпространство $W \subset H(\mathbb{C})$ допускает спектральный синтез. Спектральный синтез в пространстве $H(G)$, где G – выпуклая область в $\mathbb{C}$, был исследован в работах [2]–[4]. В частности, было установлено, что если G – неограниченная выпуклая область, то спектральный синтез имеет место для любого инвариантного подпространства $W \subset H(G)$; если G – ограниченная выпуклая область, то существуют нетривиальные инвариантные подпространства $W \subset H(G)$, не только не допускающие спектрального синтеза, но даже не содержащие экспоненциальных многочленов [3]. Однако при том же условии на область G подпространство W решений однородного уравнения свертки $S * f = 0$ всегда допускает спектральный синтез. Спектральный синтез в топологических произведениях $H = H(G_1) \times \dots \times H(G_q)$ пространств функций, голоморфных в областях $G_1, \dots, G_q \subset \mathbb{C}$, исследовался в статьях [5]–[9]. В [10]–[13] исследовалась задача спектрального синтеза для оператора кратного дифференцирования, а в [14]–[17] – для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Для многих переменных известные результаты связаны с аппроксимационными теоремами для однородных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами [18] и для однородных уравнений свертки [19]–[22]. В ряде ситуаций спектральный синтез получается как следствие фундаментального принципа Эренпрайса–Паламодова [23], [24] и его обобщений [25], [26]. Следует, однако, отметить, что для многих переменных спектральный синтез – более редкое явление, чем в случае одной переменной. В частности, контрастом к цитированному выше результату Л. Шварца [1] является существование инвариантного подпространства $W \subset H(\mathbb{C}^n)$, $n > 1$, не допускающего спектральный синтез [27].

Известным приемом, восходящим к работе [23] Л. Эренпрайса, каждому инвариантному подпространству можно сопоставить его аннуляторный подмодуль в модуле (над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_q]$) целых q -функций экспоненциального типа – преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на H . В случае $n = 1$ аннуляторные подмодули инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, обладают специальным свойством: они допускают локальное описание, т.е. полностью определяются порождаемыми ими локальными подмодулями. Это утверждение составляет содержание теоремы двойственности, в разных вариантах доказанной в [2], [5], [14].

В настоящей статье теорема двойственности распространяется на многие переменные: для того чтобы инвариантное подпространство W в топологическом произведении (1.1) допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы аннуляторный подмодуль I этого подпространства допускал локальное описание. Это утверждение сводит задачу спектрального синтеза к задаче алгебраического характера, относящейся к модулям целых q -функций. В случае одной переменной последняя задача решалась путем ее разделения на аналитическую часть (насыщенность) и алгебраическую часть (устойчивость) [5]. Мы выражаем надежду, что некоторая модификация этого подхода может привести к успеху и в случае многих переменных.

§ 2. Обозначения и формулировка основного результата

1. Терминология. Пусть G – открытое множество в $\mathbb{C}^n$, $H = H(G)$ – пространство функций, голоморфных в G , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах; H является пространством типа (M^*) [28] и как таковое является бочечным, борнологическим и рефлексивным [29, гл. IV, V]. В дальнейшем будем называть $H(G)$ *пространством, ассоциированным с G* . Пусть H^* – сильное сопряженное к H пространство. Каждому функционалу $S \in H^*$ сопоставим его характеристическую функцию

$$\varphi(\lambda) = \langle S, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle,$$

где

$$\langle \lambda, z \rangle := \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i.$$

Когда S пробегает H^* , тогда φ пробегает класс целых функций экспоненциального типа $P = P(G)$. Этот класс обладает структурой модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\lambda] := \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ и наделяется локально выпуклой топологией, индуцированной из H^* отображением

$$T: S \rightarrow \varphi(\lambda) = \langle S, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle.$$

P называется *модулем, ассоциированным с областью G* , а отображение $T: H^* \rightarrow P$ – *каноническим*. Как гомоморфный образ пространства, сопряженного к пространству типа (M^*) , P есть пространство типа (LN^*) (см. § 6, п. 1) и как таковое является бочечным, борнологическим и рефлексивным [30, гл. II, гл. IV]. Отображение T будет взаимно однозначным тогда и только тогда, когда множество всех экспонент $\exp\langle \lambda, z \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$, полно в $H(G)$, или, что то же самое, множество многочленов плотно в $H(G)$. Открытое множество G в $\mathbb{C}^n$, для которого это имеет место, называется *множеством Рунге*. Например, звездные [31] и полиномиально выпуклые [32] области являются множествами Рунге. Из способа введения топологии в P следует, что если G – множество Рунге, то каноническое отображение $T: H^* \rightarrow P$ – топологический изоморфизм; в общем случае отображение T непрерывно и открыто. В дальнейшем мы будем иметь дело с топологическим произведением

$$H = H(G_1) \times \dots \times H(G_q), \quad (2.1)$$

где $G_1, \dots, G_q$ – множества Рунге в $\mathbb{C}^n$.

Для сокращения формулировок введем следующую терминологию. Упорядоченную систему $K = (K_1, \dots, K_n)$ множеств $K_1, \dots, K_q \subset \mathbb{C}^n$ будем называть *q -множеством*. Далее, K – открытое q -множество, если все компоненты K_i – открытые множества; K – q -множество Рунге, если все K_i – множества Рунге; K – (выпуклая) q -область, если все K_i – (выпуклые) q -области; наконец, K – выпуклый q -компакт, если все K_i – выпуклые компакты. По отношению к q -множествам

теоретико-множественное отношение включения, операции объединения и пересечения имеют покомпонентный смысл. Таким образом, отношение включения $K \subset K'$ для q -множеств $K = (K_1, \dots, K_q)$, $K' = (K'_1, \dots, K'_q)$ означает, что $K_i \subset K'_i$, $i = 1, \dots, q$. Аналогично, соотношения

$$K = \cup K^{(\alpha)}, \quad K' = \cap K^{(\alpha)}$$

означают подобные же соотношения для компонент:

$$K_i = \cup K_i^{(\alpha)}, \quad K'_i = \cap K_i^{(\alpha)}.$$

Пусть $G = (G_1, \dots, G_q)$ – открытое q -множество. Топологическое произведение (2.1) будем называть *пространством, ассоциированным с q -множеством G* . Как топологическое произведение пространств $H(G_1), \dots, H(G_q)$ пространство H наследует свойства последних: H является монтелевским пространством Фреше, бочечным, борнологическим и рефлексивным. Элементами H являются векторы $f = (f_1, \dots, f_q)$ с компонентами $f_i \in H(G_i)$.

Опишем сходимость в топологии H . Пусть $K = (K_1, \dots, K_q)$ – q -компакт в G . Последовательность элементов

$$f^{(k)} = (f_1^{(k)}, \dots, f_q^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

сходится к элементу $f = (f_1, \dots, f_q)$ равномерно на K , если $f_i^{(k)} \rightarrow f_i$ равномерно на K_i для $i = 1, \dots, q$. Сходимость последовательности (2.2) к элементу f в топологии H равносильна сходимости этой последовательности к элементу f равномерно внутри G , т.е. равномерно на каждом q -компакте $K \subset G$. Чтобы указать зависимость компонент элемента $f = (f_1, \dots, f_q)$ от соответствующих переменных, правильно было бы использовать запись $(f_1(z_1), \dots, f_q(z_q))$, где переменные $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}), \dots, z^{(q)} = (z_1^{(q)}, \dots, z_n^{(q)})$ изменяются соответственно в множествах $G_1, \dots, G_q$. Однако более удобна символическая запись

$$f(z) = (f_1(z), \dots, f_q(z)),$$

где неявно предполагается, что в i -й компоненте переменная $z = (z_1, \dots, z_n)$ меняется независимо от изменения той же переменной в других компонентах.

Продemonстрируем удобство такого соглашения. q -одночлен, т.е. элемент вида

$$(a_1(z^{(1)})^\alpha, \dots, a_q(z^{(q)})^\alpha),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс,

$$(z^{(i)})^\alpha = (z_1^{(i)})^{\alpha_1} \times \dots \times (z_n^{(i)})^{\alpha_n},$$

записывается (символически) в виде az^α , где $a = (a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{C}^q$, а умножение монома $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ на вектор a производится покомпонентно. q -многочлен степени m , т.е. элемент вида

$$(p_1(z^{(1)}), \dots, p_q(z^{(q)})),$$

где $p_i(z^{(i)})$ – многочлен от переменных

$$z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}, \quad \max_{i=1, \dots, q} \deg p_i = m,$$

допускает запись в виде суммы q -одночленов $\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha z^\alpha$, где, как обычно, $|\alpha|$ обозначает длину $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ мультииндекса α . Наконец, *элементарный* $\exp$ - q -многочлен степени m , т.е. элемент вида

$$(p_1(z^{(1)}) \exp\langle \lambda, z^{(1)} \rangle, \dots, p_q(z^{(q)}) \exp\langle \lambda, z^{(q)} \rangle),$$

где p_i – многочлены, $\max_{i=1, \dots, q} \deg p_i = m$, допускает символическую запись $p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle$, где $p(z)$ – q -многочлен степени m и экспонента $\exp\langle \lambda, z \rangle$ умножается на q -многочлен $p(z)$ покомпонентно. Конечную сумму элементарных $\exp$ - q -многочленов будем называть просто $\exp$ - q -многочленом.

2. Анализ. В пространстве H действуют n операторов частного дифференцирования

$$D_i: (f_1, \dots, f_q) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z_i} f_1, \dots, \frac{\partial}{\partial z_i} f_q \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Элемент $e \in H$ называется *корневым элементом* системы операторов $D_1, \dots, D_n$, отвечающим вектору собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, если для некоторого положительного числа m элемент e удовлетворяет системе уравнений

$$(D_1 - \lambda_1 E)^m e = 0, \dots, (D_n - \lambda_n E)^m e = 0, \quad (2.3)$$

где E – тождественный оператор. Из теории дифференциальных уравнений в частных производных известно, что решения системы (2.3) представляют собой элементарные $\exp$ - q -многочлены степени, меньшей m , с “показателем” λ .

Пусть W – инвариантное подпространство в H . Описание запаса элементарных $\exp$ - q -многочленов, содержащихся в W , составляет предмет задачи спектрального анализа. Описание этого запаса осуществляется с помощью *спектра инвариантного подпространства*. Обозначим $\mathbb{C}^q[\xi] = \mathbb{C}^q[\xi_1, \dots, \xi_n]$ множество q -многочленов переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Легко видеть, что $\mathbb{C}^q[\xi]$ выдерживает умножение на многочлены $p(\xi)$; поэтому можем рассматривать $\mathbb{C}^q[\xi]$ как модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\xi]$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}^n$. *Локальный спектр* W в точке λ определяется как множество

$$\text{Sp}_\lambda W := \{p \in \mathbb{C}^q[\xi]: p(z) \exp\langle \lambda, \xi \rangle \in W\}.$$

Локальный спектр обладает следующими свойствами.

1°. Если $p_1, p_2 \in \text{Sp}_\lambda W$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, то

$$c_1 p_1 + c_2 p_2 \in \text{Sp}_\lambda W.$$

2°. Если $W \subset W'$, то $\text{Sp}_\lambda W \subset \text{Sp}_\lambda W'$.

3°. Если $p \in \text{Sp}_\lambda W$, то $p^{(\alpha)} \in \text{Sp}_\lambda W$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс и

$$p^{(\alpha)}(z) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial^{\alpha_1} z_1 \dots \partial^{\alpha_n} z_n} p(z).$$

Доказательство основано на инвариантности W . Пусть $p \in \text{Sp}_\lambda W$, т.е. $p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W$. Тогда элемент

$$\frac{\partial}{\partial z_i} p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial z_i} p(z) \right) \exp\langle \lambda, z \rangle + p(z) \lambda_i \exp\langle \lambda, z \rangle$$

принадлежит W в силу инвариантности. Отсюда следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_i} p(z) \right) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W.$$

Таким образом, если $p \in \text{Sp}_\lambda W$, то $\partial p / \partial z_i \in \text{Sp}_\lambda W$. Последовательно применяя эту импликацию, придем к включению $p^{(\alpha)} \in W$ для любого мультииндекса α .

Спектр W определяется как дизъюнктное объединение локальных спектров

$$\text{Sp } W := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \text{Sp}_\lambda W.$$

Спектр можно представить как совокупность пар (λ, p) , $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}^q[\xi]$, для которых $p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W$.

3. Синтез. Согласно общему определению, данному во введении, инвариантное подпространство $W \subset H$ допускает спектральный синтез, если W совпадает с замыканием линейной оболочки элементарных $\exp$ - q -многочленов, содержащихся в W . Задача спектрального синтеза на выпуклых областях в $\mathbb{C}$ была исследована в работах [2]–[7]. В основе этого исследования лежит схема двойственности, входящая к работе [19] Л. Эренпрайса.

Пространство, сопряженное к H , представляется в виде топологического произведения $H^* = H_1^* \times \dots \times H_q^*$, где H_i^* – пространство, сопряженное к $H(G_i)$.

Линейный непрерывный функционал $S \in H^*$ представляется в виде вектора $S = (S_1, \dots, S_q)$, где $S_i \in H_i^*$. Действие функционала S на элемент $f = (f_1, \dots, f_q)$ осуществляется по формуле

$$\langle S, f \rangle = \sum_{i=1}^q \langle S_i, f_i \rangle.$$

Сопоставим функционалу $S = (S_1, \dots, S_q)$ его характеристический элемент $\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_q(\lambda))$, где $\varphi_i(\lambda) = \langle S_i, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle$. Когда S пробегает H^* , его характеристический элемент $\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_q(\lambda))$ пробегает класс P целых q -функций экспоненциального типа. Класс P обладает структурой линейного пространства над полем $\mathbb{C}$ и выдерживает покомпонентное умножение на многочлены. Обозначим через T операцию перехода от функционала S к его характеристическому элементу; T является линейным отображением H^* на P . Наделим P локально выпуклой топологией, индуцированной из H^* отображением T . Легко видеть, что P представляется в виде топологического произведения $P = P(G_1) \times \dots \times P(G_q)$, где $P(G_i)$ – модуль, ассоциированный с G_i (см. § 1). Пространство P наследует свойства пространств $P(G_i)$. Оно является бочечным, борнологическим и рефлексивным. Операция покомпонентного умножения на многочлен непрерывна в

топологии P . Это значит, что P обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbb{C}[\lambda]$. P назовем *модулем, ассоциированным с q -областью G* , а отображение $T: H^* \rightarrow P$ – *каноническим*. Из способа введения топологии в P следует, что отображение T непрерывно и открыто. Если G – q -множество Рунге, то T – топологический изоморфизм. Это следует из того, что в этом случае частные канонические отображения

$$T_i: H_i^* \rightarrow P(G_i), \quad i = 1, \dots, q,$$

– топологические изоморфизмы.

Подмодулем $\mathbb{C}[\lambda]$ -модуля P называется подмножество $I \subset P$, обладающее свойствами:

- 1) $\varphi_1, \varphi_2 \in I \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \in I$;
- 2) $\varphi \in I, p \in \mathbb{C}[\lambda] \Rightarrow p\varphi \in I$.

Существует связь между замкнутыми подмодулями $I \subset P$ и инвариантными подпространствами $W \subset H$. Эта связь устанавливается следующим образом (см., например, [2]).

Рассмотрим подпространство W^0 в H^* , “ортогональное” W :

$$W^0 = \{S \in H^*: \langle S, f \rangle = 0 \quad \forall f \in W\}.$$

В силу рефлексивности H подпространство W^0 замкнуто в H^* . Стандартным образом (см. [2]) показывается, что образ $I = T(W^0)$ обладает структурой замкнутого подмодуля в P . Обратно, в силу того, что в рассматриваемой ситуации каноническое отображение $T: H^* \rightarrow P$ – топологический изоморфизм, каждому замкнутому подмодулю $I \subset P$ соответствует инвариантное подпространство $W \subset H$, связанное с I соотношением $I = T(W^0)$. I называется *аннуляторным подмодулем* инвариантного подпространства W и обозначается $\text{An } W$. Соотношение $I = \text{An } W$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью $\{W\}$ всех инвариантных подпространств в H и совокупностью $\{I\}$ всех замкнутых подмодулей в P . Инвариантным подпространством, допускающим спектральный синтез, соответствуют замкнутые подмодули, обладающие специальным свойством. Чтобы описать это свойство, введем понятие локального подмодуля $I(\lambda)$, порождаемого I в точке λ .

Обозначим $O(\lambda)$ кольцо ростков функций, аналитических в точке λ , $O^q(\lambda)$ – совокупность ростков q -функций, аналитических в λ . $O^q(\lambda)$ обладает структурой модуля над кольцом $O(\lambda)$. Фиксированный подмодуль $I \subset P$ порождает в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ *локальный подмодуль* $I(\lambda)$; последний состоит из всевозможных конечных линейных комбинаций элементов из I с коэффициентами из $O(\lambda)$:

$$\sum c_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad c_i \in O(\lambda).$$

Элемент f из P *принадлежит I локально* (это записывается $f \in_{\text{loc}} I$), если $f \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n$. Подмодуль I *обильный*, если справедлива импликация

$$f \in P, \quad f \in_{\text{loc}} I \Rightarrow f \in I.$$

Термин “обильный подмодуль” проистекает из того обстоятельства, что среди подмодулей с одинаковым локальным поведением обильные подмодули имеют наибольший запас элементов; иными словами, если I – обильный подмодуль в P , а I' – другой подмодуль в P с тем же набором локальных подмодулей: $I'(\lambda) = I(\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{C}^n$, то $I' \subset I$.

Очевидно, что обильные подмодули и только они допускают локальное описание, т.е. полностью восстанавливаются по набору $\{I(\lambda)\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, своих локальных подмодулей.

Цель настоящей статьи – доказать следующий результат: *для того чтобы инвариантное подпространство W допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы его аннуляторный подмодуль $I = \text{An } W$ был обильным.*

§ 3. Дивизор

Вводимое ниже понятие дивизора более полно отражает локальное поведение функций, чем понятия того же наименования, известные в литературе (см., например, [33], [34]).

1. Локальный дивизор. Рассмотрим q -многочлен $p(\xi) = (p_1(\xi), \dots, p_q(\xi)) \in \mathbb{C}^q[\xi]$. Этому q -многочлену соответствует дифференциальный q -оператор $p(D) = (p_1(D), \dots, p_q(D))$, который q -функцию $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$, голоморфную в области $U \subset \mathbb{C}^n$, переводит в скалярную функцию ψ , голоморфную в той же области, по правилу

$$\psi = \sum_{i=1}^q p_i(D) \varphi_i.$$

Стандартным образом действие оператора $p(D)$ распространяется на ростки q -функций, аналитических в точке λ . Рассмотрим подмодуль $I \subset O^q(\lambda)$.

Дивизор подмодуля I ($\text{Div } I$) – это множество q -многочленов:

$$\text{Div } I := \{p \in \mathbb{C}^q[\xi]: p(D)u|_{\lambda} = 0 \quad \forall u \in I\}.$$

2. Глобальный дивизор. Пусть I – подмодуль в P . *Локальный дивизор* подмодуля I в точке λ ($\text{Div}_{\lambda} I$) определяется как дивизор локального подмодуля $I(\lambda)$, порожденного I в точке λ :

$$\text{Div}_{\lambda} I := \text{Div } I(\lambda).$$

Дивизор I есть дизъюнктивное объединение локальных дивизоров:

$$\text{Div } I := \prod_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{Div}_{\lambda} I.$$

Дивизор I можно отождествить с множеством пар (λ, p) , где $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $p \in \text{Div}_{\lambda} I$.

3. Формула Лейбница. Обозначим $O(\Omega)$ совокупность функций, голоморфных в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$; $O^q(\Omega)$ – совокупность q -функций, голоморфных в Ω .

Для исследования дивизора будем использовать следующее обобщение формулы Лейбница.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $p(D)$ – дифференциальный q -оператор, соответствующий q -многочлену $p(\xi)$, $u \in O^q(\Omega)$, $\varphi \in O(\Omega)$. Тогда

$$p(D)\varphi u = \sum_{\alpha} \frac{\varphi^{(\alpha)} p^{(\alpha)}(D)u}{\alpha!}, \quad (3.1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

В формуле (3.1) сумма справа конечна, ибо для мультиномеров α достаточно большой длины $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ частная производная

$$p^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}} p(\xi)$$

тождественно равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим соотношение (3.1) в случае $q = 1$. Пусть $p(\xi)$ – многочлен, $p(D)$ – соответствующий дифференциальный оператор, $u, \varphi \in O(\Omega)$. Из классической формулы Лейбница следует

$$\frac{(\varphi u)^{(\gamma)}}{\gamma!} = \sum_{\alpha + \beta = \gamma} \frac{\varphi^{(\alpha)}}{\alpha!} \frac{u^{(\beta)}}{\beta!}. \quad (3.2)$$

Запишем многочлен $p(\xi)$ в виде

$$p(\xi) = \sum_{|\gamma|=0}^m \frac{c_{\gamma}}{\gamma!} \xi^{\gamma}.$$

Используя (3.2), имеем

$$\begin{aligned} p(D)\varphi u &= \sum_{|\gamma|=0}^m \frac{c_{\gamma}}{\gamma!} (\varphi u)^{(\gamma)} = \sum_{|\gamma|=0}^m c_{\gamma} \sum_{\alpha + \beta = \gamma} \frac{\varphi^{(\alpha)}}{\alpha!} \frac{u^{(\beta)}}{\beta!} \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\varphi^{(\alpha)}}{\alpha!} \sum_{\gamma} c_{\gamma} \frac{u^{(\gamma - \alpha)}}{(\gamma - \alpha)!}, \end{aligned}$$

где суммирование по γ идет в пределах $\gamma \geq \alpha$, $|\gamma| \leq m$. Теперь заметим, что

$$p^{(\alpha)}(\xi) = \sum_{\gamma} c_{\gamma} \frac{\xi^{\gamma - \alpha}}{(\gamma - \alpha)!},$$

так что $\sum_{\gamma} c_{\gamma} u^{(\gamma - \alpha)} / (\gamma - \alpha)!$ – результат действия оператора $p^{(\alpha)}(D)$ на u . Таким образом,

$$p(D)\varphi u = \sum_{\alpha} \frac{\varphi^{(\alpha)}}{\alpha!} p^{(\alpha)}(D)u. \quad (3.3)$$

В случае $q = 1$ формула (3.1) доказана.

Теперь рассмотрим случай $q > 1$. Пусть

$$\begin{aligned} p(\xi) &= (p_1(\xi), \dots, p_q(\xi)), & p(D) &= (p_1(D), \dots, p_q(D)), \\ u &= (u_1, \dots, u_q) \in O^q(\Omega), & \varphi &\in O(\Omega). \end{aligned}$$

Применяя формулу (3.3) к каждому из операторов $p_1(D), \dots, p_q(D)$, имеем

$$\begin{aligned} p(D)\varphi u &= \sum_{i=1}^q p_i(D)\varphi u_i = \sum_{i=1}^q \sum_{\alpha} \frac{\varphi^{(\alpha)} p_i^{(\alpha)}(D) u_i}{\alpha!} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\varphi^{(\alpha)}}{\alpha!} \sum_{i=1}^q p_i^{(\alpha)}(D) u_i = \sum_{\alpha} \frac{\varphi^{(\alpha)} p^{(\alpha)}(D) u}{\alpha!}. \end{aligned}$$

Стандартным образом формула Лейбница (3.1) распространяется на ростки $u \in O^q(\lambda)$, $\varphi \in O(\lambda)$. При $q = 1$ эта формула известна. Без доказательства она приведена в [35, лекция 1] и в [24, введение].

4. Сравнение спектра и дивизора. Следующее утверждение решает задачу спектрального анализа – описание запаса $\exp$ - q -многочленов, содержащихся в инвариантном подпространстве W в терминах его аннуляторного подмодуля I .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть W – инвариантное подпространство в H , $I = \text{An } W$. Тогда

$$\text{Sp } W = \text{Div } I. \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. По смыслу определения спектра и дивизора соотношение (3.4) равносильно совпадению локальных спектров и дивизоров:

$$\text{Sp}_{\lambda} W = \text{Div}_{\lambda} I. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = (p_1, \dots, p_q)$ – q -многочлен. Фиксируем $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Для линейного непрерывного функционала $S = (S_1, \dots, S_q)$ на H и его характеристического элемента $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in P$ справедливо соотношение

$$p(D)\varphi|_{\lambda} = \langle S, p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle. \quad (3.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} p(D)\varphi|_{\lambda} &= \sum_{i=1}^q p_i(D)\varphi_i|_{\lambda} = \sum_{i=1}^q p_i(D) \langle S_i, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle \\ &= \sum_{i=1}^q \langle S_i, p_i(D) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = \sum_{i=1}^q \langle S_i, p_i(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = \langle S, p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Приступим к доказательству соотношения (3.5). Пусть $p \in \text{Sp}_{\lambda} W$, т.е. $p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W$. Рассмотрим элемент $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in I = \text{An } W$. Соответствующий функционал $S = (S_1, \dots, S_q)$ принадлежит W^0 . Следовательно,

$$\langle S, p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = 0$$

и в силу (3.6) $p(D)\varphi|_\lambda = 0$. Таким образом, $p(D)\varphi|_\lambda = 0 \quad \forall \varphi \in I$. Однако этого еще не достаточно для заключения $p \in \text{Div}_\lambda I$. Для этого нужно показать, что

$$p(D)v|_\lambda = 0 \quad \forall v \in I(\lambda).$$

Пусть $u \in I$, $c \in O(\lambda)$. Используя формулу (3.1), имеем

$$p(D)cu|_\lambda = \sum_\alpha \frac{c^{(\alpha)} p^{(\alpha)}(D)u}{\alpha!} \Big|_\lambda. \quad (3.7)$$

Далее, по свойству 3° локальный спектр $\text{Sp}_\lambda W$ вместе с q -многочленом p содержит все его производные $p^{(\alpha)}$. Применяя те же рассуждения к $p^{(\alpha)}$, которые были применены к p , получим

$$p^{(\alpha)}(D)u|_\lambda = 0 \quad \forall u \in I.$$

Из (3.7) теперь следует, что

$$p(D)cu|_\lambda = 0 \quad \forall u \in I, \quad \forall c \in O(\lambda). \quad (3.8)$$

Пусть $v \in I(\lambda)$. Тогда v представляется в виде конечной линейной комбинации:

$$v = \sum_i c_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad c_i \in O(\lambda).$$

Отсюда и из (3.8) следует

$$p(D)v|_\lambda = \sum_i p(D)c_i u^{(i)}|_\lambda = 0.$$

Таким образом,

$$p(D)v|_\lambda = 0 \quad \forall v \in I(\lambda).$$

Это означает, что $p \in \text{Div } I(\lambda)$. Тем самым установлено включение $\text{Sp}_\lambda W \subset \text{Div}_\lambda I$.

Докажем обратное включение. Пусть $p \in \text{Div}_\lambda I$, т.е. $p(D)u|_\lambda = 0 \quad \forall u \in I(\lambda)$. Фиксируем элемент $u \in I$. Пусть S – функционал, соответствующий u . В силу (3.6) соотношение $p(D)u|_\lambda = 0$ равносильно соотношению $\langle S, p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = 0$.

Когда u пробегает I , соответствующий функционал S пробегает W^0 . Таким образом,

$$\langle S, p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = 0 \quad \forall S \in W^0.$$

По теореме Хана–Банаха $p(z) \exp\langle \lambda, z \rangle \in W$, т.е. $p \in \text{Sp}_\lambda W$. Тем самым установлено, что $\text{Div}_\lambda I \subset \text{Sp}_\lambda W$. Из вышеизложенного следует соотношение (3.5); при этом оно верно для любого $\lambda \in \mathbb{C}^n$.

5. Свойства локальных дивизоров. Первые два свойства столь очевидны, что не требуют доказательств. Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$.

СВОЙСТВО 1. Если $p_1, p_2 \in \text{Div } I$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, то

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 \in \text{Div } I.$$

СВОЙСТВО 2. Если I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$ и $I \subset J$, то $\text{Div } I \supset \text{Div } J$.

СВОЙСТВО 3. Если $p \in \text{Div } I$, то

$$p^{(\alpha)} \in \text{Div } I, \quad (3.9)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс,

$$p^{(\alpha)} = \frac{\partial^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}} p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u \in I$, то $(z_i - \lambda_i)u \in I$; поэтому если $p \in \text{Div } I$, то $p(D)(z_i - \lambda_i)u|_\lambda = 0$. Используя формулу Лейбница (3.1) при $\varphi(z) = z - \lambda_i$, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} p \right) (D)u|_\lambda = (z_i - \lambda_i)p(D)u|_\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} p \right) (D)u|_\lambda = p(D)(z_i - \lambda_i)u|_\lambda = 0.$$

Таким образом, если $p \in \text{Div } I$, то $\partial p / \partial \xi_i \in \text{Div } I$. Последовательное применение этой импликации при $i = 1, \dots, n$ приводит к включению (3.9).

СВОЙСТВО 4. Пусть I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$. Справедливо включение

$$\text{Div}(I \cap J) \supset \text{Div } I \cup \text{Div } J. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $I \cap J \subset I, J$. По свойству 2 $\text{Div } I \cap J \supset \text{Div } I, \text{Div } J$; значит, имеет место включение (3.10).

Для подмодулей $I, J \subset O^q(\lambda)$ символом $I \vee J$ обозначим подмодуль в $O^q(\lambda)$, порожденный I и J .

СВОЙСТВО 5. Справедливо соотношение $\text{Div } I \vee J = \text{Div } I \cap \text{Div } J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из включений $I \vee J \supset I, J$ следует

$$\text{Div } I \vee J \subset \text{Div } I, \text{Div } J,$$

откуда

$$\text{Div } I \vee J \subset \text{Div } I \cap \text{Div } J.$$

Обратное включение доказывается следующим образом. Пусть $p \in \text{Div } I \cap \text{Div } J$, т.е. $p(D)u|_\lambda = 0 \quad \forall u \in I$ и $p(D)v|_\lambda = 0 \quad \forall v \in J$. Элемент $w \in I \vee J$ представляется в виде суммы: $w = u + v$, $u \in I$, $v \in J$. Поэтому

$$p(D)w|_\lambda = p(D)(u + v)|_\lambda = p(D)u|_\lambda + p(D)v|_\lambda = 0.$$

Таким образом, $p(D)w|_\lambda = 0 \quad \forall w \in I \vee J$. Это значит, что $p \in \text{Div } I \vee J$. Тем самым установлено, что

$$\text{Div } I \cap \text{Div } J \subset \text{Div } I \vee J.$$

Следующее свойство доказывается в § 4 в форме локальной теоремы. Оно является ключевым при доказательстве теоремы двойственности.

Свойство 6. Пусть I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$. Если $\text{Div } I = \text{Div } J$, то $I = J$.

Свойство 7. Пусть I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$. Если $\text{Div } J \supset \text{Div } I$, то $J \subset I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойству 5 $\text{Div } I \vee J = \text{Div } I \cap \text{Div } J$, откуда, учитывая включение $\text{Div } J \supset \text{Div } I$, получим $\text{Div } I \vee J = \text{Div } I$. По свойству 6 $I = I \vee J$, откуда и следует требуемое включение $I \supset J$.

Для произвольного множества $I \subset O^q(\lambda)$ дивизор I определяется как дивизор подмодуля, порождаемого I в $O^q(\lambda)$; в частности, дивизор элемента $u \in O^q(\lambda)$ (в обозначении $\text{Div } u$) есть дивизор главного подмодуля, порождаемого u в $O^q(\lambda)$.

Свойство 8. Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$ и $u \in O^q(\lambda)$. Если $\text{Div } u \supset \text{Div } I$, то $u \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J – подмодуль в $O^q(\lambda)$, порожденный u . Имеем

$$\text{Div } J = \text{Div } u \supset \text{Div } I.$$

По свойству 7 $J \subset I$, откуда $u \in J \subset I$.

Пусть I, J – множества в $O^q(\lambda)$. Множество J зависит от множества I (над кольцом $O(\lambda)$), если каждый элемент $v \in J$ представляется в виде конечной линейной комбинации:

$$v = \sum c_i u^{(i)}, \quad u^{(i)} \in I, \quad c_i \in O(\lambda). \quad (3.11)$$

Свойство 9. Для того чтобы множество J зависело от множества I , необходимо и достаточно, чтобы $\text{Div } J \supset \text{Div } I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть J зависит от I . Тогда подмодуль $\tilde{J}$, порожденный J , принадлежит подмодулю $\tilde{I}$, порожденному I . Поэтому согласно свойству 2

$$\text{Div } J = \text{Div } \tilde{J} \supset \text{Div } \tilde{I} = \text{Div } I.$$

Достаточность. Включение $\text{Div } J \supset \text{Div } I$ равносильно включению $\text{Div } \tilde{J} \supset \text{Div } \tilde{I}$. По свойству 7 $\tilde{J} \subset \tilde{I}$ и тем более $J \subset \tilde{I}$. Это включение равносильно тому, что каждый элемент $v \in J$ представляется в виде (3.11).

§ 4. Локальная теорема

В этом параграфе мы доказываем, что локальный подмодуль полностью определяется своим дивизором.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$. Тогда если $\text{Div } I = \text{Div } J$, то $I = J$.

Доказательство локальной теоремы разбито на отдельные части, соответствующие пп. 1–6 этого параграфа.

1. Доказательство локальной теоремы в случае $n = 1$. Рассмотрим билинейные формы на $O^q(\lambda)$:

$$(u, v)^{(m)} := \sum_{i=1}^q \frac{d^m}{dz^m} (u_i(z)v_i(z)) \Big|_{\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Множество

$$I^{[m]} := \{u \in O^q(\lambda) : (u, v)^{[m]} = 0 \quad \forall v \in I\}$$

обладает структурой подмодуля в $O^q(\lambda)$ и называется *m -ым дуальным подмодулем, ассоциированным с I* [14, § 3]. Мы покажем, что если дивизоры I и J совпадают, то совпадают и их дуальные подмодули:

$$I^{[m]} = J^{[m]}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим отображение $\Theta_m : O^q(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}^q[\xi]$ по правилу

$$\varphi \rightarrow \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \varphi^{(m-k)}(\lambda) \xi^k.$$

Покажем, что если $p = \Theta_m(\varphi)$, то

$$p(D)u|_{\lambda} = (\varphi, u)^{(m)} \quad \forall u \in O^q(\lambda). \quad (4.1)$$

Учитывая, что i -я компонента q -многочлена $p(\xi)$ вычисляется по формуле

$$p_i(\xi) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \varphi_i^{(m-k)}(\lambda) \xi^k,$$

имеем

$$\begin{aligned} p(D)u|_{\lambda} &= \sum_{i=1}^q p_i(D)u_i|_{\lambda} = \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \varphi_i^{(m-k)}(\lambda) u_i^{(k)} \Big|_{\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^q \frac{d^m}{dz^m} (\varphi_i(z)u_i(z)) \Big|_{\lambda} = (\varphi, u)^{(m)}. \end{aligned}$$

Тем самым соотношение (4.1) установлено.

Обозначим

$$(\operatorname{Div} I)^{[m]} := \{p \in \operatorname{Div} I : \deg p \leq m\}.$$

Утверждаем, что

$$I^{[m]} = \Theta_m^{-1}((\operatorname{Div} I)^{[m]}). \quad (4.2)$$

Пусть $\varphi \in I^{[m]}$. Покажем, что q -многочлен $p = \Theta_m(\varphi)$ принадлежит $(\operatorname{Div} I)^{[m]}$. Поскольку заведомо $\deg p \leq m$, достаточно установить, что $p \in \operatorname{Div} I$. Включение

$\varphi \in I^{[m]}$ равносильно тому, что $(\varphi, u)^{(m)} = 0 \quad \forall u \in I$. В силу (4.1) это равносильно $p(D)u|_{\lambda} = 0 \quad \forall u \in I$ или $p \in \text{Div } I$. Тем самым установлено, что

$$\Theta_m(I^{[m]}) \subset (\text{Div } I)^{[m]}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим q -многочлен $p(\xi) = a_0 + a_1\xi + \dots + a_m\xi^m$. Всегда можно найти элемент $\varphi \in O^q(\lambda)$, для которого

$$\binom{m}{k} \varphi^{(m-k)}(\lambda) = a_k, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Это означает, что $p = \Theta_m(\varphi)$ и, следовательно, прообраз $\Theta_m^{-1}(p)$ q -многочлена p не пуст.

Пусть теперь $p \in (\text{Div } I)^{[m]}$ и $\varphi \in \Theta_m^{-1}(p)$. Первое включение означает, что $p(D)u|_{\lambda} = 0 \quad \forall u \in I$. Второе включение равносильно соотношению $p = \Theta_m(\varphi)$. Из вышеизложенного в силу (4.1) следует, что $(\varphi, u)^{(m)} = 0 \quad \forall u \in I$, т.е. $\varphi \in I^{[m]}$. Тем самым установлено включение

$$\Theta_m^{-1}((\text{Div } I)^{[m]}) \subset I^{[m]}.$$

Это включение и включение (4.3) влекут соотношение (4.2).

Продолжим доказательство. Пусть I, J – подмодули в $O^q(\lambda)$ с одинаковыми дивизорами: $\text{Div } I = \text{Div } J$. Очевидно, что тогда $(\text{Div } I)^{[m]} = (\text{Div } J)^{[m]}$, $m = 0, 1, \dots$. В силу соотношения (4.2) имеем $I^{[m]} = J^{[m]}$, $m = 0, 1, \dots$. В статье [14, § 3] доказано, что подмодуль в $O^q(\lambda)$ полностью определяется семейством своих дуальных подмодулей. Поэтому $I = J$.

2. Отображение модулей ростков. В доказательство локальной теоремы входит индукция по числу переменных. Переход к большему числу переменных осуществляется с помощью специального отображения локальных модулей.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $'\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Каждый элемент $f \in O^q(\lambda)$ будем записывать в виде вектор-столбца: $f = (f_1, \dots, f_q)$, где $f_i \in O(\lambda)$. Разлагая компоненты f_i в ряд по степеням $z_n - \lambda_n$:

$$f_i = \sum_p f_{ip}('z)(z_n - \lambda_n)^p,$$

где $'z = (z_1, \dots, z_{n-1})$, получим разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_p('z)(z_n - \lambda_n)^k, \quad (4.4)$$

где вектор-столбец $f_p = (f_{1p}, \dots, f_{qp})$ – элемент $O^q(' \lambda)$. Фиксируем целое $N \geq 0$. Модуль $O^{q(N+1)}(' \lambda)$ можем представить в виде произведения $N + 1$ копий $O^q(' \lambda)$:

$$O^{q(N+1)} = \underbrace{O^q(' \lambda) \times \dots \times O^q(' \lambda)}_{N+1 \text{ раз}}.$$

Используя это представление, построим отображение

$$\chi^{(N)}: O^q(\lambda) \rightarrow O^{q(N+1)}(' \lambda)$$

по правилу: каждому элементу $f \in O^q(\lambda)$ ставится в соответствие элемент

$$\hat{f} = (f_0, f_1, \dots, f_N) \in O^{q(N+1)}(' \lambda),$$

где f_p – коэффициенты в представлении (4.4). Легко проверить, что для любого элемента $\varphi \in O(' \lambda)$ будет $\chi^{(N)}(\varphi f) = \varphi \chi^{(N)}(f)$, т.е. если рассматривать $O^q(\lambda)$ как $O(' \lambda)$ -модуль, то отображение $\chi^{(N)}$ – модульный гомоморфизм. Более того, $\chi^{(N)}$ – эпиморфизм, ибо в качестве прообраза любого элемента $\hat{f} = (f_0, \dots, f_N)$ можно взять конечную сумму

$$f = \sum_{p=0}^N f_p(' z)(z_n - \lambda_n)^p.$$

Ядро $\chi^{(N)}$ состоит из множества элементов из $O^q(\lambda)$, в разложениях которых по степеням $z_n - \lambda_n$ отсутствуют первые $N + 1$ членов.

3. Отображение модулей многочленов. Каждый q -многочлен $p(\xi) \in \mathbb{C}^q[\xi]$ можно представить единственным образом в виде

$$p(\xi) = \sum_k p_k(' \xi) \frac{\xi_n^k}{k!}, \quad (4.5)$$

где $' \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $p_k \in \mathbb{C}^q[' \xi]$.

Обозначим $\varkappa^{(N)}$ отображение $\mathbb{C}^q[\xi]$ в $\mathbb{C}^{q(N+1)}[' \xi]$, которое q -многочлен $p(\xi)$ переводит в $q(N + 1)$ -многочлен $\hat{p}(' \xi) = (p_0(' \xi), \dots, p_N(' \xi))$, где $p_k(' \xi)$ – коэффициент в разложении (4.5).

Отображение $\varkappa^{(N)}$ перестановочно с операцией умножения на многочлен из $\mathbb{C}[' \xi]$; поэтому, если рассматривать $\mathbb{C}^q[\xi]$ как $\mathbb{C}[' \xi]$ -модуль, отображение

$$\varkappa^{(N)}: \mathbb{C}^q[\xi] \rightarrow \mathbb{C}^{q(N+1)}[' \xi]$$

– модульный гомоморфизм. В действительности это отображение эпиморфно, ибо для каждого $q(N + 1)$ -многочлена $\hat{p}(' \xi) = (p_0(' \xi), \dots, p_N(' \xi))$ многочлен $p(\xi)$, определенный по формуле (4.5), где суммирование идет от 0 до N , является прообразом $\hat{p}$ относительно $\varkappa^{(N)}$. Ядро отображения $\varkappa^{(N)}$ состоит из всех q -многочленов, в разложении которых по степеням ξ_n отсутствуют первые $N + 1$ членов. Из вышеизложенного следует, что сужение $\varkappa^{(N)}$ на пространство q -многочленов, степени которых по ξ_n не превосходят N , есть изоморфизм на $\mathbb{C}^{q(N+1)}[' \xi]$.

Напомним, что для q -многочлена $p(\xi) \in \mathbb{C}^q[\xi]$ символ $p(D)$ обозначает q -оператор (см. § 3, п. 1), полученный из $p(\xi)$ заменой переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ символами дифференцирования $\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n$. Аналогично, для $q(N + 1)$ -многочлена $\hat{p}(' \xi) = (p_0(' \xi), \dots, p_N(' \xi))$ определяется $q(N + 1)$ -оператор

$$\hat{p}(' D) = (p_0(' D), \dots, p_N(' D)).$$

ЛЕММА 4.1. Пусть p – q -многочлен степени не выше N , $\hat{p} = \varkappa^{(N)}(p)$, $f \in O^q(\lambda)$, $\hat{f} = \chi^{(N)}(f)$. Тогда

$$\hat{p}({}'D)\hat{f}|_{\lambda} = p(D)f|_{\lambda}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлены $p(\xi)$ и $\hat{p}({}'\xi) = (p_0({}'\xi), \dots, p_N({}'\xi))$ связаны соотношением (4.5). Поэтому

$$p(D) = \sum_{k=0}^N p_k({}'D) \frac{D_n^k}{k!}, \quad (4.7)$$

где $D_n = \partial/\partial z_n$.

Далее, компоненты вектора $\hat{f} = (f_0, \dots, f_N)$ суть коэффициенты разложения (4.4). Учитывая, что

$$\left. \frac{D_n^k (z_n - \lambda_n)^p}{k!} \right|_{\lambda_n} = \delta_{kp},$$

где δ_{kp} – символ Кронекера, имеем из (4.4) и (4.7)

$$\begin{aligned} p(D)f|_{\lambda} &= \sum_{k=0}^N p_k({}'D) \frac{D_n^k}{k!} f \Big|_{\lambda} = \sum_{k=0}^N p_k({}'D) \frac{D_n^k}{k!} \left(\sum_p f_p({}'z) (z_n - \lambda_n)^p \right) \Big|_{\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^N p_k({}'D) f_k({}'z) \Big|_{\lambda} = \hat{p}({}'D)\hat{f}|_{\lambda}. \end{aligned}$$

Соотношение (4.6) доказано.

4. Коэффициентная топология. Каждый элемент $f \in O^q(\lambda)$ можно разложить в степенной ряд

$$f = \sum f_{\alpha} (z - \lambda)^{\alpha}, \quad (4.8)$$

где $f_{\alpha} \in \mathbb{C}^q$, $(z - \lambda)^{\alpha} = (z_1 - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (z_n - \lambda_n)^{\alpha_n}$.

Используя это разложение, введем в $O^q(\lambda)$ топологию коэффициентной сходимости с помощью счетного набора полунорм $\|f\|_{\alpha} = |f_{\alpha}|$. В этой топологии сходимость $f_N \rightarrow f$ означает, что коэффициент при $(z - \lambda)^{\alpha}$ в разложении (4.8) для f_N сходится к соответствующему коэффициенту в разложении для f для любого мультииндекса α . Наделенное этой топологией пространство $O^q(\lambda)$ не является полным. Однако имеет место следующий замечательный результат [36, гл. VI]: каждый подмодуль в $O^q(\lambda)$ замкнут в топологии коэффициентной сходимости. Этот факт играет существенную роль в дальнейшем изложении.

5. Ассоциированные подмодули. Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$. Из изложенного в п. 2 следует, что $I^{(N)} := \chi^{(N)}(I)$ обладает структурой подмодуля $O({}'\lambda)$ -модуля $O^{q(N+1)}({}'\lambda)$. Удобно $I^{(N)}$ называть подмодулем, ассоциированным с I .

ЛЕММА 4.2. *Подмодуль $I \subset O^q(\lambda)$ полностью определяется последовательностью $I^{(N)}$, $N = 0, 1, \dots$, своих ассоциированных подмодулей; иными словами, если J – еще один подмодуль в $O^q(\lambda)$ и $I^{(N)} = J^{(N)}$, $N = 0, 1, \dots$, то $I = J$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать импликацию

$$F \in O^q(\lambda), \quad \chi^{(N)}(F) \in I^{(N)}, \quad N = 0, 1, \dots \Rightarrow F \in I. \quad (4.9)$$

Итак, пусть элемент F удовлетворяетсылке импликации (4.9). Тогда для любого $N = 0, 1, \dots$ существует элемент $F^{(N)} \in I$ такой, что $\chi^{(N)}(F) = \chi^{(N)}(F^{(N)})$, или, что то же самое, $\chi^{(N)}(F - F^{(N)}) = 0$. Согласно п. 2 отсюда следует, что в разложениях

$$F(z) = \sum_k F_k('z)(z_n - \lambda_n)^k, \\ F_N(z) = \sum_k F_k^N('z)(z_n - \lambda_n)^k$$

коэффициенты F_k и F_k^N совпадают при $k = 0, \dots, N$. Это равносильно тому, что в степенных разложениях для F и F_N соответствующие коэффициенты для мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ с $\alpha_n \leq N$ совпадают. Последнее влечет, что при $N \rightarrow \infty$ последовательность $F^{(N)}$ сходится к F в коэффициентной топологии. Поскольку при этом $F^{(N)} \in I$, на основании цитированного в п. 4 результата заключаем, что $F \in I$. Тем самым лемма доказана.

6. Доказательство локальной теоремы для многих переменных.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $O^q(\lambda)$ – модуль ростков q -функций, аналитических в λ . Напомним, что дивизор элемента $f \in O^q(\lambda)$ определяется как дивизор главного подмодуля, порождаемого f в $O^q(\lambda)$. Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$. Следующее утверждение равносильно локальной теореме.

ЛЕММА 4.3. *Пусть*

$$\text{Div } I \subset \text{Div } f. \quad (4.10)$$

Тогда $f \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по числу переменных n . При $n = 1$ утверждение доказано в п. 1. Предполагается, что утверждение уже доказано для $n - 1$ переменных; докажем его для n переменных. Пусть f – элемент из $O^q(\lambda)$, для которого выполняется включение (4.10), $I^{(N)} = \chi^{(N)}(I)$ – подмодуль в $O^{q(N+1)}(' \lambda)$, ассоциированный с I , $f^{(N)} = \chi(f)$. Покажем, что включение (4.10) влечет включение

$$\text{Div } I^{(N)} \subset \text{Div } f^{(N)}. \quad (4.11)$$

Пусть $q(N + 1)$ -многочлен $\hat{p}(' \xi)$ принадлежит $\text{Div } I^{(N)}$. Согласно п. 3 существует многочлен $p(\xi)$ степени по ξ_n , не превосходящей N , который является прообразом $\hat{p}$ относительно $\varkappa^{(N)}$. По лемме 4.1

$$p(D)u|_\lambda = \hat{p}('D)\hat{u}|_{' \lambda}. \quad (4.12)$$

Это соотношение верно для любого элемента $u \in O^q(\lambda)$ и его образа $\hat{u}$ относительно $\chi^{(N)}$; в частности, оно верно и для элемента $u \in I$. Но если $u \in I$, то $\hat{u} \in I^{(N)}$, и поскольку предполагается, что $\hat{p} \in \text{Div } I^{(N)}$, правая часть (4.12) обращается в нуль. Следовательно, $p(D)u|_\lambda = 0$ для любого $u \in I$. Это значит, что $p \in \text{Div } I$. В силу включения (4.10) $p \in \text{Div } f$; иными словами $p(D)(cf)|_\lambda = 0 \quad \forall c \in O(\lambda)$ (см. § 3, п. 5). Полагая в соотношении (4.12) $u = cf$ и замечая, что $\hat{u} = cf^{(N)}$, получим

$$\hat{p}'(D)(cf^{(N)})|_\lambda = 0 \quad \forall c \in O'(\lambda).$$

Значит, $\hat{p} \in \text{Div } f^{(N)}$. Тем самым включение (4.11) установлено.

Теперь воспользуемся предположением индукции: для $n-1$ переменных утверждение верно. По этой причине включение (4.11) влечет $f^{(N)} \in I^{(N)}$. Это верно для любого $N = 0, 1, \dots$. По лемме 4.2 будет $f \in I$.

Локальная теорема следует из леммы 4.3 тривиальным образом. Пусть $\text{Div } I = \text{Div } J$ и $f \in I$. Тогда $\text{Div } f \supset \text{Div } I = \text{Div } J$. По лемме 4.3 $f \in J$. Тем самым установлено, что $I \subset J$. Обратное включение доказывается аналогично.

§ 5. Теорема двойственности

В этом параграфе доказывается основной результат этой статьи.

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ 1. *Для того чтобы инвариантное подпространство $W \subset H$ допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы аннуляторный подмодуль $I = \text{An } W$ этого подпространства был обильным.*

1. Дивизориальное описание. Рассмотрим подмодуль I в P . Подмодуль I допускает дивизориальное описание, если справедлива импликация

$$f \in P, \quad \text{Div } f \supset \text{Div } I \Rightarrow f \in I.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для того чтобы подмодуль I был обильным, необходимо и достаточно, чтобы I допускал дивизориальное описание.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть I – обильный подмодуль, $f \in P$,

$$\text{Div}_\lambda f \supset \text{Div}_\lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Нужно показать, что $f \in I$. Для этого в силу обильности достаточно показать, что $f \in_{\text{loc}} I$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}^n$. По условию $\text{Div}_\lambda f \supset \text{Div}_\lambda I = \text{Div } I(\lambda)$. По свойству 8 дивизора $f \in I(\lambda)$. Поскольку это верно для любой $\lambda \in \mathbb{C}^n$, заключаем, что $f \in_{\text{loc}} I$. Необходимая часть доказана.

Достаточность. Пусть I допускает дивизориальное описание. Покажем, что I – обильный подмодуль. Пусть $f \in P$, $f \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n$. По свойству 2 дивизора включение $f \in I(\lambda)$ влечет включение $\text{Div}_\lambda f \supset \text{Div}_\lambda I$, причем это верно для любой точки $\lambda \in \mathbb{C}^n$; иными словами, $\text{Div } f \supset \text{Div } I$. Так как по условию I допускает дивизориальное описание, то $f \in I$. Значит, I – обильный подмодуль.

Рассмотрим инвариантное подпространство $W \subset H$. Пусть $\mathcal{W} = \{W'\}$ – семейство всех инвариантных подпространств в H с тем же спектром, что и W : $\text{Sp } W' = \text{Sp } W$. Если подпространство W допускает спектральный синтез, то оно выделяется среди подпространств семейства $\{W'\}$ *свойством минимальности*: $W \subset W'$ для любого $W' \in \mathcal{W}$. Более того, это свойство характеризует инвариантные подпространства, допускающие спектральный синтез: если W обладает свойством минимальности, то W допускает спектральный синтез.

Подмодуль $I \subset P$, допускающий дивизориальное описание, выделяется среди подмодулей с тем же дивизором *свойством максимальности*: если I' – подмодуль в P и $\text{Div } I' = \text{Div } I$, то $I' \subset I$. Легко видеть, что свойство максимальности характеризует подмодули, допускающие дивизориальное описание: если подмодуль I обладает свойством максимальности, то он допускает дивизориальное описание.

2. Доказательство теоремы двойственности 1. Необходимость. Пусть инвариантное подпространство W допускает спектральный синтез. Нужно показать, что подмодуль $I = \text{An } W$ является обильным. Рассмотрим замкнутый подмодуль I' в P , имеющий тот же дивизор, что и I . Пусть W' – соответствующее I' инвариантное подпространство, т.е. $I' = \text{An } W'$. В силу предложения 3.2

$$\text{Sp } W' = \text{Div } I' = \text{Div } I = \text{Sp } W.$$

В силу свойства минимальности подпространства W будет $W' \supset W$. Для соответствующих аннуляторных подмодулей будет выполняться включение $I' \subset I$. Это верно для любого замкнутого подмодуля I' с тем же дивизором, что и I . Значит, I обладает свойством максимальности. Согласно предложению 5.1 I – обильный подмодуль.

Достаточность. Пусть подмодуль I является обильным. По предложению 5.1 I обладает свойством максимальности. Пусть W' – инвариантное подпространство в H с тем же спектром, что и W , $I' = \text{An } W'$. Согласно предложению 3.2

$$\text{Div } I' = \text{Sp } W' = \text{Sp } W = \text{Div } I.$$

Поскольку I обладает свойством максимальности, будет $I' \subset I$. Отсюда для подпространств W и W' имеем $W \subset W'$. Это верно для любого инвариантного подпространства W' , спектр которого совпадает со спектром W . Значит, W обладает свойством минимальности и, следовательно, допускает спектральный синтез.

§ 6. Развитие теоремы двойственности

Цель настоящего параграфа – распространить теорему двойственности на случай произвольного открытого q -множества.

1. Топология P . Пусть G – открытое q -множество, $H = H(G)$, $P = P(G)$; P наделяется локально выпуклой топологией, индуцируемой из H^* отображением T (§ 2, п. 1): множество в P открыто тогда и только тогда, когда его прообраз открыт в H^* . Наделенное такой топологией P становится изоморфным факторпространству $H^*/\text{Ker } T$, наделенному фактортопологией топологии H^* по ядру

$\text{Ker } T$ отображения T . В § 1, п. 1 утверждалось, что P является пространством типа (LN^*) . Ниже приводится обоснование этого факта. Обозначим через H_0 подпространство в H , состоящее из всех элементов, аппроксимируемых q -многочленами (§ 2, п. 1) в топологии H . Наделим H_0 топологией, индуцируемой из H . Легко проверить, что H_0 , как и H , будет пространством типа (M^*) , следовательно, сопряженное к нему пространство H_0^* будет пространством типа (LN^*) ; оба пространства рефлексивны [28]. Пусть H_0^0 – подпространство в H^* , ортогональное H_0 :

$$H_0^0 := \{S \in H^*: \langle S, f \rangle = 0 \quad \forall f \in H_0\}.$$

В силу рефлексивности H_0^0 будет замкнутым в H^* . Рассмотрим факторпространство H^*/H_0^0 , наделенное фактортопологией топологии H^* по H_0^0 . Существует алгебраический изоморфизм τ пространства H_0^* , сопряженного к H_0 , на факторпространство H^*/H_0^0 , который каждому линейному непрерывному функционалу S на H_0 ставит в соответствие класс смежности, состоящий из всех линейных непрерывных продолжений этого функционала на все H . В силу рефлексивности этот изоморфизм является топологическим [37, предложение 11]. Таким образом, H^*/H_0^0 , как и H_0^* , является пространством типа (LN^*) .

Покажем, что $\text{Ker } T = H_0^0$. С этой целью заметим, что H_0 представляется в виде топологического произведения

$$H_0 = H_0(G_1) \times \dots \times H_0(G_q),$$

где $H_0(G_i)$ – пространство функций, голоморфных в G_i и аппроксимируемых равномерно внутри G_i многочленами; $H_0(G_i)$ наделяется топологией, индуцируемой из $H(G_i)$. По этой причине каждый линейный непрерывный функционал на H_0 представляется в виде вектора $S = (S_1, \dots, S_q)$, где S_i – линейный непрерывный функционал на $H_0(G_i)$.

Пусть функционал $S = (S_1, \dots, S_q)$ принадлежит $\text{Ker } T$. Тогда каждая компонента S_i этого функционала обращается в нуль на множестве экспонент $\{\exp\langle \lambda, z \rangle\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Применяя теорему Хана–Банаха, легко показать, что замкнутая (в топологии $H(G_i)$) линейная оболочка множества всех экспонент совпадает с замыканием (в топологии $H(G_i)$) множества всех многочленов. Поэтому S_i обращается в нуль на $H_0(G_i)$, $i = 1, \dots, q$. Следовательно, S обращается в нуль на H_0 , т.е. $S \in H_0^0$. Тем самым установлено включение $\text{Ker } T \subset H_0^0$.

Обратно, если $S = (S_1, \dots, S_q) \in H_0^0$, то все S_i обращаются в нуль на всех многочленах и, следовательно, на всех экспонентах; следовательно, S принадлежит $\text{Ker } T$. Включение $H_0^0 \subset \text{Ker } T$ установлено.

Итак, $\text{Ker } T = H_0^0$. Из вышеизложенного следует, что P изоморфно $H^*/\text{Ker } T = H^*/H_0^0$; поскольку пространство H^*/H_0^0 является пространством типа (LN^*) , то же верно и для пространства P .

Итак, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Для каждого открытого q -множества G пространство $P = P(G)$ является пространством типа (LN^*) .*

2. О продолжении линейных функционалов. Дальнейшее изложение использует одну разновидность теоремы Хана–Банаха.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть H – локально выпуклое пространство, H_0, W – подпространства в H , $W_0 = H_0 \cap W$. Тогда каждый линейный непрерывный функционал S_0 на H_0 , удовлетворяющий условию

$$\langle S_0, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W_0, \quad (6.1)$$

можно продолжить до линейного непрерывного функционала S на всем H такого, что $\langle S, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W$.

Это предложение мы получим как следствие более общего утверждения, относящегося к вещественным линейным пространствам, т.е. пространствам над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть H – вещественное линейное пространство, H_0, W – подпространства в H , $W_0 = H_0 \cap W$. Предположим, что в H задан положительно-однородный полуаддитивный функционал p , а в H_0 – линейный функционал S_0 , причем

$$\langle S_0, x \rangle \leq p(x) \quad \forall x \in H_0, \quad (6.2)$$

$$\langle S_0, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W_0. \quad (6.3)$$

Тогда существует линейное продолжение S функционала S_0 на все H такое, что

$$\langle S, x \rangle \leq p(x) \quad \forall x \in H, \quad (6.4)$$

$$\langle S, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W. \quad (6.5)$$

Нам понадобится одно свойство положительно-однородных полуаддитивных функционалов.

ЛЕММА 6.4. Пусть p – положительно-однородный полуаддитивный функционал в вещественном линейном пространстве H , а K – подпространство этого пространства. Тогда функционал $\hat{p}$, определенный на факторпространстве H/K по формуле

$$\hat{p}(\Phi) = \inf_{x \in \Phi} p(x), \quad \Phi \in H/K,$$

также является положительно-однородным и полуаддитивным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda > 0$, $\Phi \in H/K$ и $x_0 \in \Phi$. Имеем

$$\begin{aligned} p(\lambda\Phi) &= \inf_{x \in \lambda\Phi} p(x) = \inf_{x \in K} p(\lambda x_0 + x) \\ &= \lambda \inf_{x \in K} p\left(x_0 + \frac{x}{\lambda}\right) = \lambda \inf_{x \in K} p(x_0 + x) = \lambda \hat{p}(\Phi). \end{aligned}$$

Однородность $\hat{p}$ установлена. Полуаддитивность обосновывается следующим образом. Пусть Φ', Φ'' – классы смежности по K . Имеем

$$\begin{aligned} \hat{p}(\Phi' + \Phi'') &= \inf_{x \in \Phi' + \Phi''} p(x) = \inf_{\substack{x' \in \Phi' \\ x'' \in \Phi''}} p(x' + x'') \\ &\leq \inf_{x' \in \Phi'} p(x') + \inf_{x'' \in \Phi''} p(x'') = \hat{p}(\Phi') + \hat{p}(\Phi''). \end{aligned}$$

Лемма 6.3 доказана.

3. Доказательство предложения 6.3. Рассмотрим факторпространства H/W_0 и H/W . Так как $W_0 \subset W$, то существует канонический гомоморфизм $\theta: H/W_0 \rightarrow H/W$, который класс смежности по W_0 переводит в содержащий его класс смежности по W . Утверждаем, что сужение θ на H_0/W_0 есть изоморфизм H_0/W_0 на H_0/W . С этой целью покажем, что образ H_0/W_0 совпадает с H_0/W . То, что этот образ лежит в H_0/W , очевидно. Нужно установить, что каждый класс $\Psi \in H_0/W$ есть образ некоторого класса $\Phi \in H_0/W_0$. Но это очевидно из следующего рассуждения: если $\Psi \in H_0/W$, то Ψ содержит элемент, скажем ψ , принадлежащий H_0 ; тогда в силу включения $W_0 \subset W$ класс $\Phi = \psi + W_0$ принадлежит H_0/W_0 и содержится в Ψ ; по определению θ будет $\theta(\Phi) = \Psi$.

Теперь покажем, что отображение $\theta: H_0/W_0 \rightarrow H_0/W$ является взаимно однозначным. В силу линейности достаточно показать, что ядро отображения $\theta: H_0/W_0 \rightarrow H/W$ тривиально. Пусть Φ – класс смежности по W_0 , принадлежащий H_0 , и $\theta(\Phi) = 0$. Имеем $\Phi \subset H_0$ и $\Phi \subset W$; значит, $\Phi \subset H_0 \cap W = W_0$ и, следовательно, Φ есть нулевой элемент в H_0/W_0 . Взаимная однозначность отображения $\theta: H_0/W_0 \rightarrow H_0/W$ установлена.

Теперь рассмотрим линейный функционал S_0 на H_0 , удовлетворяющий условиям (6.2), (6.3). В силу условия (6.3) S_0 принимает одинаковые значения в любом классе смежности по W_0 . Это позволяет определить линейный функционал $\hat{S}_0$ на H_0/W_0 соотношением

$$\langle \hat{S}_0, \Phi \rangle = \langle S_0, x \rangle,$$

где Φ – класс смежности по W , содержащий x . Легко проверить, что этот функционал удовлетворяет неравенству

$$\langle \hat{S}_0, \Phi \rangle \leq \hat{p}(\Phi), \quad \hat{p}(\Phi) = \inf_{x \in \Phi} p(x).$$

По лемме 6.4 $\hat{p}$ – положительно-однородный полуаддитивный функционал. Пользуясь тем, что отображение $\theta: H_0/W_0 \rightarrow H_0/W$ – изоморфизм, можем функционал $\hat{S}_0$ “поднять” до линейного функционала $\tilde{S}_0$ на H_0/W по правилу

$$\langle \tilde{S}_0, \tilde{\Phi} \rangle = \langle \hat{S}_0, \Phi \rangle,$$

где классы $\tilde{\Phi} \in H_0/W$ и $\Phi \in H_0/W_0$ связаны соотношением $\tilde{\Phi} = \theta(\Phi)$. Этот функционал будет удовлетворять неравенству

$$\langle \tilde{S}_0, \tilde{\Phi} \rangle \leq \tilde{p}(\tilde{\Phi}) \quad \forall \tilde{\Phi} \in H_0/W, \quad (6.6)$$

где

$$\tilde{p}(\tilde{\Phi}) = \inf_{\Phi \subset \tilde{\Phi}} \hat{p}(\Phi) = \inf_{\Phi \subset \tilde{\Phi}} \inf_{x \in \Phi} p(x) = \inf_{x \in \tilde{\Phi}} p(x).$$

По лемме 6.4 функционал $\tilde{p}(\tilde{\Phi})$ является положительно-однородным и полуаддитивным. Неравенство (6.6) выполняется на подпространстве H_0/W пространства H/W . По теореме Хана–Банаха [38, § 2, теорема 7] функционал $\tilde{S}_0$ допускает

расширение на все H/W с сохранением неравенства (6.6), т.е. существует линейный функционал $\tilde{S}$ на H/W со свойствами

$$\begin{aligned}\langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle &= \langle \tilde{S}_0, \tilde{\Phi} \rangle & \forall \tilde{\Phi} \in H_0/W, \\ \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle &\leq \tilde{p}(\tilde{\Phi}) & \forall \tilde{\Phi} \in H/W.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Теперь рассмотрим линейный функционал S на H , определяемый соотношением

$$\langle S, x \rangle = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle,$$

где $\tilde{\Phi}$ – класс смежности по W , содержащий x . Покажем, что S есть расширение S_0 .

Пусть $x_0 \in H_0$. Классы смежности $\Phi \in H/W_0$ и $\tilde{\Phi} \in H/W$, содержащие x_0 , связаны соотношением $\tilde{\Phi} = \theta(\Phi)$; кроме того $\Phi \in H_0/W_0$, $\tilde{\Phi} \in H_0/W$. Поэтому $\langle \tilde{S}_0, \tilde{\Phi} \rangle = \langle \tilde{S}_0, \Phi \rangle$; следовательно,

$$\langle S, x_0 \rangle = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle = \langle \tilde{S}_0, \tilde{\Phi} \rangle = \langle \tilde{S}_0, \Phi \rangle = \langle S_0, x_0 \rangle.$$

Это верно для любого $x_0 \in H_0$. Значит, действительно, S – расширение S_0 . Покажем, что S удовлетворяет неравенству (6.4). Пусть $x \in H$ и $\tilde{\Phi}$ – класс смежности по W , содержащий x . Учитывая неравенство (6.7), имеем

$$\langle S, x \rangle = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle \leq \tilde{p}(\tilde{\Phi}) = \inf_{y \in \tilde{\Phi}} p(y) \leq p(x).$$

Наконец, остается установить соотношение (6.5). Оно следует из того, что класс W представляет нулевой элемент в H/W и, следовательно, для любого $x \in W$ имеем

$$\langle S, x \rangle = \langle \tilde{S}, W \rangle = 0.$$

Стандартным образом предложение переносится на случай комплексных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. Пусть H – комплексное линейное пространство, H_0, W – подпространства в H , $W_0 = H_0 \cap W$. Предположим, что в H задана полунорма p , а в H_0 – линейный функционал S_0 , удовлетворяющий условиям

$$|\langle S_0, x \rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in H_0, \tag{6.8}$$

$$\langle S_0, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W_0. \tag{6.9}$$

Тогда существует линейное продолжение S на все H такое, что

$$|\langle S, x \rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in H,$$

$$\langle S, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вещественную часть $\tilde{S}_0 = \operatorname{Re} S_0$ функционала S_0 . Это будет вещественный линейный функционал, при этом S_0 выражается через свою вещественную часть по формуле

$$\langle S_0, x \rangle = \langle \tilde{S}_0, x \rangle - i \langle \tilde{S}_0, ix \rangle, \quad x \in H_0. \quad (6.10)$$

Условия (6.8), (6.9) влекут

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S}_0, x \rangle &\leq p(x) \quad \forall x \in H_0, \\ \langle \tilde{S}_0, x \rangle &= 0 \quad \forall x \in W_0. \end{aligned}$$

Согласно предложению 6.3 существует расширение $\tilde{S}$ функционала $\tilde{S}_0$ со свойствами

$$\langle \tilde{S}, x \rangle \leq p(x) \quad \forall x \in H, \quad (6.11)$$

$$\langle \tilde{S}, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W. \quad (6.12)$$

Построим комплексный линейный функционал S на H , вещественная часть которого совпадает с $\tilde{S}$. Такой функционал единственный и определяется по формуле

$$\langle S, x \rangle = \langle \tilde{S}, x \rangle - i \langle \tilde{S}, ix \rangle.$$

Функционал S является расширением S_0 . Действительно, при $x \in H_0$, учитывая формулу (6.10), имеем

$$\langle S, x \rangle = \langle \tilde{S}, x \rangle - i \langle \tilde{S}, ix \rangle = \langle \tilde{S}_0, x \rangle - i \langle \tilde{S}_0, ix \rangle = \langle S_0, x \rangle.$$

Далее, принимая во внимание (6.12), имеем

$$\langle S, x \rangle = \langle \tilde{S}, x \rangle - i \langle \tilde{S}, ix \rangle = 0 \quad \forall x \in W.$$

Наконец, заменяя в неравенстве (6.11) x на $e^{i\theta}x$, где $\theta = -\arg \langle S, x \rangle$, получим

$$|\langle S, x \rangle| \leq p(x).$$

Предложение доказано.

4. Доказательство предложения 6.2. Пусть S_0 – линейный непрерывный функционал, заданный на H_0 и удовлетворяющий условию (6.1). В силу непрерывности S_0 существует абсолютно выпуклая окрестность нуля $V \subset H$ такая, что

$$|\langle S_0, x \rangle| \leq 1 \quad \forall x \in V \cap H_0. \quad (6.13)$$

Пусть $p(x) = \inf\{\lambda > 0: x \in \lambda V\}$ – функционал Минковского множества V . В силу того, что V – абсолютно выпуклая окрестность нуля, p является полунормой. Условие (6.13) влечет

$$|\langle S_0, x \rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in H_0.$$

Кроме того, $\langle S_0, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W_0$. Согласно предложению 6.5 существует линейное продолжение S функционала S_0 со свойствами

$$\begin{aligned} |\langle S, x \rangle| &\leq p(x) \quad \forall x \in H_0, \\ \langle S, x \rangle &= 0 \quad \forall x \in W. \end{aligned}$$

Первое из этих свойств влечет $|\langle S, x \rangle| \leq 1$ при $x \in V$. Это означает, что функционал S является непрерывным.

5. Теорема двойственности. Теорема двойственности была доказана в предположении, что G является q -множеством Рунге. Это предположение обеспечивает взаимную однозначность канонического отображения $T: H^* \rightarrow P$ и в силу этого – принцип двойственности (§ 2, п. 3), играющий существенную роль в доказательстве (см. § 5, п. 2). При отказе от упомянутого предположения теорема двойственности сохраняется в ослабленной форме.

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ 2. Пусть G – открытое q -множество, $H = H(G)$, $P = P(G)$, $H_0 = H_0(G)$ – подпространство в H , состоящее из элементов, аппроксимируемых в топологии H q -многочленами. Далее, пусть W – инвариантное подпространство в H , $W_0 = H_0 \cap W$. Тогда для того, чтобы подпространство W_0 допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы аннуляторный подмодуль I подпространства W был обильным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому линейному непрерывному функционалу $S = (S_1, \dots, S_q)$ на H_0 можем поставить в соответствие его характеристический элемент

$$\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_q(\lambda)),$$

где

$$\varphi_i(\lambda) = \langle S_i, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle.$$

Совокупность получаемых при этом q -функций обозначим P_0 . Таким образом, возникает канонический гомоморфизм T_0 пространства H_0^* , сопряженного к H_0 , на это P_0 , обладающее структурой модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ и наделенное локально выпуклой топологией, индуцированной из H_0^* . В этой топологии операции умножения на многочлены непрерывны. Ядро отображения T_0 состоит из всех линейных непрерывных функционалов $S = (S_1, \dots, S_q)$, компоненты которых обращаются в нуль на всех экспонентах. Поскольку множество экспонент полно в каждом пространстве $H_0(G_i)$, функционал S является нулевым. Таким образом, отображение $T_0: H_0^* \rightarrow P_0$ является взаимно однозначным.

Дословное повторение определений и рассуждений § 1–5 позволяет перенести теорему двойственности на пространство H_0 и сформулировать следующий результат: *инвариантное подпространство $W_0 \subset H_0$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда аннуляторный подмодуль I_0 этого подпространства является обильным.*

Пусть теперь W – инвариантное подпространство в H и $W_0 = W \cap H_0$. Сравним аннуляторные подмодули $I = T(W^0)$, $I_0 = T_0(W_0^0)$. Здесь W^0, W_0^0 – ортогональные подпространства к W, W_0 соответственно в H^*, H_0^* . Утверждаем, что I, I_0 совпадают. Пусть $\varphi \in I$. Это значит, что существует линейный непрерывный функционал $S \in W^0$ такой, что $\varphi = T(S)$. Сужение S_0 этого функционала на H_0 определяет линейный непрерывный функционал на H_0 . Этот функционал обращается в нуль на W_0 и, значит, принадлежит W_0^0 . Следовательно, $\varphi_0 = T_0(S_0) \in I_0$. Но функционалы S и S_0 принимают одинаковые значения на элементах вида $(\exp\langle \lambda, z \rangle, \dots, \exp\langle \lambda, z \rangle)$ и, следовательно, $\varphi = \varphi_0$. Поэтому $\varphi \in I_0$. Тем самым доказано, что $I \subset I_0$.

Пусть теперь $\varphi_0 \in I_0$, т.е. $\varphi_0 = T_0(S_0)$, где S_0 – линейный непрерывный функционал на H_0 , обращающийся в нуль на W_0 . Согласно предложению 6.2 существует непрерывное линейное продолжение S функционала S_0 на все H такое, что $S \in W^0$. Характеристический элемент $\varphi = T(S)$ этого функционала принадлежит I . Но в силу того, что S есть продолжение S_0 , эти функционалы совпадают на элементах вида $(\exp\langle \lambda, z \rangle, \dots, \exp\langle \lambda, z \rangle)$, и, значит, $\varphi_0 = \varphi$. Следовательно, $\varphi_0 \in I$. Это верно для любого $\varphi_0 \in I_0$, и потому $I_0 \subset I$. Из вышеизложенного следует, что $I = I_0$.

Приступаем к последней стадии доказательства. Если подпространство W_0 допускает спектральный синтез, то подмодуль I_0 является обильным, и поскольку $I = I_0$, подмодуль I – также обильный. Обратно, если I – обильный подмодуль, то обильным будет и аннуляторный подмодуль I_0 подпространства W_0 , ибо $I_0 = I$. По теореме двойственности для H_0 подпространство W_0 допускает спектральный синтез. Теорема доказана.

Совершенно другим методом теорема двойственности доказана А. Б. Шишкиным [39].

Список литературы

1. Schwartz L. Theorie générale des fonctions moyenne – périodique // Ann. of Math. 1947. V. 48. P. 857–928.
2. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87. № 4. С. 459–489.
3. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 1. С. 3–30.
4. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 3. С. 331–352.
5. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез на системах выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111. № 1. С. 3–41.
6. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез на системах выпуклых областей. Распространение синтеза // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 1. С. 94–114.
7. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез на системах неограниченных выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111. № 3. С. 384–401.
8. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis on a system of unbounded domains starlike in a common direction // Analysis Mathematica. 1993. V. 19. № 3. P. 217–223.
9. Мерзляков С. Г. Спектральный синтез для оператора дифференцирования на системах криволинейных полос // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 5. С. 85–102.
10. Мерзляков С. Г. Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования // Матем. заметки. 1982. Т. 23. № 5. С. 701–713.
11. Мерзляков С. Г. О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 635–639.
12. Красичков-Терновский И. Ф., Шишкин А. Б. Спектральный синтез для оператора кратного дифференцирования // ДАН СССР. 1989. Т. 307. № 1. С. 24–27.
13. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для оператора, порожденного умножением на степень независимой переменной // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 6. С. 828–848.
14. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 11. С. 1559–1587.

15. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. II. Метод модулей // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 1. С. 3–19.
16. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. III. Обильные подмодули // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 6. С. 55–86.
17. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 8. С. 23–46.
18. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier. 1955–1956. V. 6. P. 271–355.
19. Ehrenpreis L. Mean periodic functions // American J. of Mathematics. 1955. V. 77. № 2. P. 293–328.
20. Напалков В. В. Об одной теореме единственности в теории функций многих комплексных переменных и однородных уравнениях типа свертки в трубчатых областях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 40. № 1. С. 115–132.
21. Юлмутаметов Р. С. Однородные уравнения свертки // ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 2. С. 312–315.
22. Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. № 6. С. 3–58.
23. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables. N. Y. – London: Wiley Interscience Publishers, 1970.
24. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
25. Berenstein C. A., Taylor B. A. Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis // J. D'analyse mathématique. 1980. V. 38. P. 188–254.
26. Struppa D. C. The fundamental principle for systems of convolution equations // Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1983. № 273.
27. Гуревич Д. И. Контрпримеры к проблеме Л. Шварца // Функц. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 2. С. 29–35.
28. Себастьян-и-Силва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–67.
29. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
30. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
31. Чирка Е. М. Приближение многочленами на звездных подмножествах $\mathbb{C}^n$ // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 1. С. 55–60.
32. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
33. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. II. М.: Наука, 1988.
34. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
35. Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965.
36. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
37. Дьедонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах (F) и (LF) // Математика. 1958. Т. 2. № 2. С. 77–102.
38. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959.
39. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 9.

С. 143–160.

Поступило в редакцию
20.I.1997