Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные алгебраические многообразия без вещественных точек, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 4, 131–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/im257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:38:11

УДК 513.6

В. А. Краснов

Вещественные алгебраические многообразия без вещественных точек

Изучаются вещественные алгебраические многообразия без вещественных точек. В частности, вычисляются группа Пикара, группа Брауэра и группа Витта для таких многообразий.

Библиография: 21 наименование.

Введение

Вещественные алгебраические многообразия без вещественных точек занимают особое место среди всех вещественных алгебраических многообразий. Для этого имеется несколько причин. Одна из них состоит в том, что для таких многообразий по особому устроены группы Пикара, Брауэра и Витта. Перейдем к более точным формулировкам. Итак, пусть X – неособое вещественное проективное многообразие, $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$, $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа. Тогда определен канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Pic} X \rightarrow (\mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}})^G, \quad (0.1)$$

который всегда мономорфен. Если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то гомоморфизм (0.1) также эпиморфен, но если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, то он может иметь коядро, равное $\mathbb{Z}/2$ (см. [13]). Далее предполагаем, что X не имеет вещественных точек. Будем называть X *многообразием первого типа*, если гомоморфизм (0.1) эпиморфен, в противном случае X называем *многообразием второго типа*.

Имеется несколько критериев для принадлежности X второму типу (см. § 2). Пусть t – образующая группы $H_{\mathrm{et}}^1(\mathrm{Spec} \mathbb{R}, \mathbb{F}_2) = H^1(G, \mathbb{F}_2)$; тогда структурный морфизм $X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{R}$ переводит элемент $t \in H_{\mathrm{et}}^1(\mathrm{Spec} \mathbb{R}, \mathbb{F}_2)$ в элемент $t_X \in H_{\mathrm{et}}^1(X, \mathbb{F}_2)$. Нетрудно установить, что справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Многообразие X принадлежит второму типу тогда и только тогда, когда элемент $t_X^2 \in H_{\mathrm{et}}^2(X, \mathbb{F}_2)$ алгебраический.*

Так как $H_{\mathrm{et}}^n(X, \mathbb{F}_2) = H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ (см. [17]), то этот критерий переводится на язык эквивариантных когомологий: *многообразие X принадлежит второму типу тогда и только тогда, когда элемент $t_X^2 \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ алгебраический.*

Элемент $t_X \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ определяется аналогично элементу $t_X \in H_{\mathrm{et}}^1(X, \mathbb{F}_2)$. А именно, пусть t – образующая группы $H^1(\mathrm{pt}; G, \mathbb{F}_2) = H^1(G, \mathbb{F}_2)$,

где pt – одноточечное G -пространство; тогда отображение $X(\mathbb{C}) \rightarrow \text{pt}$ переводит элемент $t \in H^1(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2)$ в элемент $t_X \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$.

Из сформулированного критерия вытекает достаточное условие: *если $t_X^2 = 0$, то X принадлежит второму типу*, а также необходимое условие: *если X принадлежит второму типу, то $t_X^3 = 0$* .

Равенства $t_X^2 = 0$, $t_X^3 = 0$ являются топологическими условиями, поэтому для их проверки лучше использовать эквивариантные когомологии. С помощью них мы доказываем, что для абелева многообразия A без вещественных точек $t_A^2 = 0$, поэтому оно принадлежит второму типу (см. теорему 1.7). Заметим, что вещественное проективное многообразие A называется *абелевым*, если $A_{\mathbb{C}} = A \otimes \mathbb{C}$ – групповое комплексное многообразие, а само A может не быть групповым многообразием, в частности может не иметь вещественных точек. Условие $t_X^2 = 0$ имеет следующую топологическую интерпретацию.

Пусть Γ – кривая в $X(\mathbb{C})$, соединяющая точку $x_0 \in X(\mathbb{C})$ с точкой $g(x_0)$, где $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения. Тогда цикл $\Gamma + g(\Gamma)$ определяет класс гомологий $[\Gamma + g(\Gamma)] \in H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Равенство $t_X^2 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда класс $[\Gamma + g(\Gamma)]$ не принадлежит подгруппе $(1 + g_*)H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Для кривых равенство $t_X^2 = 0$ имеет место, если и только если ряд кривой нечетный (см. предложение 1.1). Равенство $t_X^3 = 0$ для кривых всегда выполняется. Автор не смог привести пример поверхности, для которой $t_X^3 \neq 0$, но для многообразий размерности больше двух такой пример привести нетрудно. Рассмотрим, например, квадрику

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Множество S точек на ней, удовлетворяющих условиям: $x_0 \in i\mathbb{R}$, $x_k \in \mathbb{R}$ при $1 \leq k \leq 4$, является трехмерной сферой, инвариантной относительно инволюции $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Инволюция $g: S \rightarrow S$ является антиподальной. Так как

$$H^q(S; G, \mathbb{F}_2) = H^q(S/G, \mathbb{F}_2) = H^q(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

то t_S^3 – образующая группы $H^3(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. При гомоморфизме ограничения

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(S; G, \mathbb{F}_2)$$

t_X^3 переходит в t_S^3 , поэтому $t_X^3 \neq 0$. Аналогичный результат и аналогичное доказательство имеют место для многообразия Ферма:

$$x_0^{2m} + x_1^{2m} + x_2^{2m} + x_3^{2m} + x_4^{2m} = 0, \quad m = 2l + 1.$$

Что касается поверхностей, то нетрудно показать, что для поверхности с $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ выполняется неравенство $t_X^2 \neq 0$ и равенство $t_X^3 = 0$ (см. предложение 1.4). Аналогичный результат имеет место для поверхности Энрикеса (см. теорему 1.6). Если для многообразия X выполняются условия $t_X^2 \neq 0$, $t_X^3 = 0$,

то для определения типа X требуется дополнительное исследование. Для этого полезно использовать эквивариантные когомологии с целыми коэффициентами.

Рассмотрим эквивариантные когомологии $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(q))$, где $\mathbb{Z}(q)$ – G -модуль $\mathbb{Z}$, на котором инволюция $g \in G$ действует умножением на $(-1)^q$. Тогда определен канонический элемент $\mathbf{t}_X \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1))$ как образ образующей $\mathbf{t} \in H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}(1)) = H^1(G, \mathbb{Z}(1))$ при гомоморфизме $H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1))$. Степень $\mathbf{t}_X^n$ принадлежит группе $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(n))$, при гомоморфизме редукции

$$H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

степень $\mathbf{t}_X^n$ переходит в t_X^n . Рассмотрим также следующие гомоморфизмы:

$$R: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

где R – гомоморфизм редукции, а α – гомоморфизм забывания вещественной структуры. Тогда справедлив критерий: *многообразие X принадлежит второму типу тогда и только тогда, когда во множестве $\alpha(R^{-1}(t_X^2))$ существует алгебраический элемент* (см. теорему 2.2).

Преимущество данного критерия перед критерием, сформулированным выше, состоит в том, что для проверки алгебраичности элемента из множества $\alpha(R^{-1}(t_X^2))$ можно использовать теорему Лефшеца об $(1, 1)$ -классах. В частности, если $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, то каждый элемент из $\alpha(R^{-1}(t_X^2))$ алгебраический, а поэтому X будет принадлежать второму типу тогда и только тогда, когда множество $R^{-1}(t_X^2)$ непустое. Последнее условие равносильно тому, что $\mathbf{t}_X^3 = 0$ (см. предложение 1.13). Таким образом получаем необходимое условие: *если многообразие X принадлежит второму типу, то $\mathbf{t}_X^3 = 0$.*

Заметим, что это условие будет достаточным, если $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$. Из равенства $\mathbf{t}_X^3 = 0$ следует равенство $t_X^3 = 0$, а если группа $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ не имеет элементов второго порядка, то верно обратное.

Из вышесказанного, в частности, вытекает следующее утверждение: *если для поверхности X группа $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ конечная и не имеет элементов второго порядка, а также $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, то X принадлежит второму типу.*

Например, рациональная поверхность без вещественных точек удовлетворяет предыдущим условиям и поэтому принадлежит второму типу (ср. с результатом из [18]). Для поверхности Энриквеса $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, но оказывается, что $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(3)) = \mathbb{Z}/2$, поэтому из равенства $t_X^3 = 0$ следует равенство $\mathbf{t}_X^3 = 0$. Тогда из равенства $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$ вытекает, что поверхность Энриквеса принадлежит второму типу. В случае, когда выполняется необходимое условие $\mathbf{t}_X^3 = 0$, но $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) \neq 0$, может оказаться, что при малой вариации многообразия X получаются многообразия первого и второго типов. Так происходит с поверхностями типа КЗ (см. теорему 3.8). В случае, когда $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \neq 0$, можно рассмотреть отображение Альбанезе $\mu: X \rightarrow A$. В п. 3.3 показано, что $\mathbf{t}_X^2 = 0$ тогда и

только тогда, когда многообразие Альбанезе A не имеет вещественных точек (см. теорему 3.12).

Перейдем к рассмотрению когомологической группы Брауэра многообразия без вещественных точек. Но сначала введем некоторые обозначения. Через $\rho_0(X)$ обозначается число Лефшеца, оно равно размерности коядра отображения цикла:

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}: (\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-,$$

где $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-$ – антиинвариантное относительно g подпространство $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ (см. подробности в [10]). Пусть $Y = X(\mathbb{C})/G$ и $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ – проекция; тогда положим $\mathbb{Z}' = f_*^G(\mathbb{Z}(1))$. В работе [10] показано, что для многообразия без вещественных точек имеет место равенство

$$\mathrm{Br}'(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(Y, \mathbb{Z}')_{\mathrm{tors}}.$$

Если $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, то $\rho_0(X) = 0$, в противном случае может оказаться, что при вариации многообразия число $\rho_0(X)$ меняется. Так происходит с поверхностями типа К3 (см. теорему 3.5). Для поверхности имеют место оценки

$$h^{2,0} \leq \rho_0(X) \leq h^{2,0} + \frac{1}{2}h^{1,1},$$

где $h^{p,q}$ – числа Ходжа многообразия $X(\mathbb{C})$ (см. предложение 2.8). Мы вычисляли группу $H^3(Y, \mathbb{Z}')_{\mathrm{tors}}$ для поверхности. В частности, было доказано, что если группа $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная или 2-периодическая, то

$$H^3(Y, \mathbb{Z}')_{\mathrm{tors}} = (\mathbb{Z}/2)^m,$$

где $m = h^1(Y) - q(X) - 1$, $h^1(Y) = \dim H^1(Y, \mathbb{F}_2)$, $q(X)$ – иррегулярность, поэтому

$$\mathrm{Br}'(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus (\mathbb{Z}/2)^m$$

(см. предложение 2.7). Заметим, что для поверхности когомологическая группа Брауэра совпадает с обычной группой Брауэра $\mathrm{Br}(X)$, определенной через алгебры Адзумаи (см. подробности в [2], [14]).

Перейдем к группе Витта $W(X)$ вещественной алгебраической поверхности. В работе [20] была найдена структура этой группы, причем оказалось, что для поверхности без вещественных точек эта структура зависит от типа поверхности. В статье [11] разрабатывались методы вычисления группы $W(X)$ с помощью эквивариантных когомологий; сформулируем полученный там результат для поверхности без вещественных точек. Пусть $k^1(X)$ – размерность ядра гомоморфизма

$$\smile t_X: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)/H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

где $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ – подпространство, полученное из алгебраических циклов; тогда для поверхности первого типа выполняется равенство

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n \oplus \mathbb{Z}/8,$$

где $m = 2k^1(X) + \rho_0(X) - q(X) - 1$, $n = h^1(Y) - k^1(X) - 1$, а для поверхности второго типа

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n,$$

где $m = 2k^1(X) + \rho_0(X) - q(X) - 2$, $n = h^1(Y) - k^1(X) + 1$.

Вычисление инварианта $k^1(X)$ является трудной задачей. Он легко вычисляется в следующих крайних случаях. Если $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$, то для поверхности первого типа $k^1(X) = 0$, а для поверхности второго типа $k^1(X) = 1$. Если подгруппа ${}_2\text{Br}(X)$ группы $\text{Br}(X)$, состоящая из элементов второго порядка, нулевая, то $k^1(X) = h^1(Y)$. Это вытекает из равенства

$${}_2\text{Br}(X) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) / H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Например, для геометрически линейчатой поверхности с базой без вещественных точек $\text{Br}(X) = 0$, поэтому для нее имеем равенство

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^{q(X)} \oplus \mathbb{Z}/4$$

(см. предложение 3.16). Вычислить в [11] число $k^1(X)$ для поверхности Энриквеса до конца не удалось. Здесь мы получаем окончательный результат, а именно $k^1(X) = 2$, поэтому для нее имеем равенство

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/4.$$

Для удобства читателя мы даем почти независимое доказательство этого результата от исследований в [11] (см. теорему 2.12).

§ 1. Эквивариантные когомологии

Пусть X – неособое вещественное проективное алгебраическое многообразие; тогда определены эквивариантные когомологии $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, где $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа. В группе $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ имеется канонический элемент t_X , который равен образу образующей t группы $H^1(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2)$ при гомоморфизме

$$H^1(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

где pt – одноточечное G -пространство и верхний гомоморфизм индуцирован структурным отображением $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{R}$. Заметим также, что элемент t_X – это образующая ядра гомоморфизма забывания вещественной структуры:

$$\alpha: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Это утверждение вытекает из рассмотрения спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

относительно которой гомоморфизм α является краевым гомоморфизмом. При любом $n \in \mathbb{N}$ степень $t^n \in H^n(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2)$ не равна нулю. Если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то, выбрав вещественную точку, мы получим сечение $\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$ для структурного морфизма $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{R}$, а поэтому степень $t_X^n \in H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ также не равна нулю. Но если многообразие X не имеет вещественных точек, то при $n > 2 \dim X$ степень t_X^n обязательно равна нулю. Действительно, из спектральной последовательности

$$I_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

где $Y = X(\mathbb{C})/G$; тогда получается равенство

$$H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^n(Y, \mathbb{F}_2), \quad (1.1)$$

следовательно, $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = 0$ при $n > 2 \dim X$.

Обозначим через t_Y элемент из $H^1(Y, \mathbb{F}_2)$, соответствующий t_X в равенстве

$$H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^1(Y, \mathbb{F}_2).$$

Тогда t_Y является характеристическим классом двухлистного накрытия $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$, где f – проекция. Это утверждение вытекает из того факта, что гомоморфизм

$$f^*: H^n(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

совпадает с гомоморфизмом забывания вещественной структуры

$$\alpha: H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

если использовать равенство (1.1). Для конкретного многообразия без вещественных точек X желательно знать, при каком максимальном n выполняется неравенство $t_X^n \neq 0$?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть X – кривая без вещественных точек; тогда неравенство $t_X^2 \neq 0$ выполняется, если и только если род $g(X(\mathbb{C}))$ четный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ является ориентирующим накрытием, поэтому $t_Y = w_1(Y)$. Так как $t_Y^2 = w_1^2(Y) = w_2(Y)$, то $t_Y^2 \neq 0$, если и только если эйлерова характеристика $\chi(Y)$ нечетная. Осталось использовать равенство $2 - 2g(X(\mathbb{C})) = 2\chi(Y)$. Предложение доказано.

С помощью кривых мы можем построить многообразие X произвольной размерности, для которого выполняется равенство $t_X^2 = 0$. Например, положим $X = C \times Z$, где C – эллиптическая кривая без вещественных точек, а Z – произвольное многообразие; тогда при проекции $X \rightarrow C$ класс t_C^2 переходит в класс t_X^2 , поэтому из равенства $t_C^2 = 0$ получаем равенство $t_X^2 = 0$. Приведем теперь несколько предложений, в которых X – поверхность без вещественных точек.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Если X – поверхность без вещественных точек, то $t_X^4 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить равенство $t_Y^4 = 0$. Заметим, что элемент $t_Y^2 \in H^2(Y, \mathbb{F}_2)$ происходит из целочисленного элемента второго порядка $\delta(t_Y) \in H^2(Y, \mathbb{Z})$, где δ – гомоморфизм Бокштейна, возникающий из точной последовательности редукции по 2:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0.$$

Следовательно, $t_Y^4 = t_Y^2 \cdot t_Y^2 = 0$. Предложение доказано.

ЛЕММА 1.3. Пусть X – многообразие без вещественных точек; тогда выполняются равенства:

- 1) $\dim H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ при $t_X^2 = 0$;
- 2) $\dim H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G + 1$ при $t_X^2 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

вытекают равенства

$$\begin{aligned} \dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) &= \dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G && \text{при } t_X^2 = 0; \\ \dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) &= \dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G + 1 && \text{при } t_X^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Осталось использовать равенство $\dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(Y, \mathbb{F}_2)$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть X – поверхность без вещественных точек и $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$; тогда $t_X^2 \neq 0$, $t_X^3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как всегда $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \neq 0$, то неравенство $t_X^2 \neq 0$ вытекает из леммы 1.3. Заметим теперь, что из леммы 1.3 также вытекает, что t_Y – образующая группы $H^1(Y, \mathbb{F}_2)$. Поэтому, если бы выполнялось неравенство $t_Y^3 \neq 0$, мы имели бы неравенство $t_Y^4 \neq 0$, что противоречит предложению 1.2. Итак, $t_X^3 = t_Y^3 = 0$. Предложение доказано.

Для поверхности Энрикеса $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$, но оказывается, что для нее справедливо утверждение, аналогичное предложению 1.4. Прежде чем это установить, мы приведем лемму о группе Пикара. Напомним, что канонический гомоморфизм

$$\alpha: \text{Pic } X \rightarrow (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G$$

всегда мономорфен, но может иметь коядро, равное $\mathbb{Z}/2$, если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ (см. § 2). Рассмотрим гомоморфизм подгрупп из элементов второго порядка

$$\alpha: {}_2\text{Pic } X \rightarrow {}_2(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G; \quad (1.2)$$

тогда справедлива

ЛЕММА 1.5. Гомоморфизм (1.2) тогда и только тогда эпиморфен, когда $t_X^2 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность Куммера G -пучков на $X(\mathbb{C})$:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{(\cdot)^2} \mathcal{O}^* \rightarrow 1,$$

где $\mathcal{O}^*$ – G -пучок голоморфных обратимых функций. Так как

$$\mathrm{Pic} X = H^1(X(\mathbb{C}); G, \mu_2), \quad \mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}} = H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*),$$

то из последовательности Куммера получаем следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{C}); G, \mu_2) & \longrightarrow & {}_2\mathrm{Pic} X \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{C}), \mu_2)^G & \longrightarrow & {}_2(\mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}})^G & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Таким образом, гомоморфизм (1.2) эпиморфен тогда и только тогда, когда эпиморфен гомоморфизм

$$\alpha: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mu_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mu_2)^G,$$

что эквивалентно неравенству $t_X^2 \neq 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть X – поверхность Энриквеса без вещественных точек; тогда $t_X^2 \neq 0$, $t_X^3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для поверхности Энриквеса группы ${}_2\mathrm{Pic} X$, ${}_2\mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}}$ порождены каноническим классом, поэтому гомоморфизм (1.2) эпиморфен. Тогда по лемме 1.5 получаем неравенство $t_X^2 \neq 0$. Из этого неравенства и леммы 1.3 следует, что

$$H^1(Y, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^2. \quad (1.3)$$

Так как $\pi_1(X(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/2$, то из (1.3) вытекает равенство

$$\pi_1(Y) = (\mathbb{Z}/2)^2. \quad (1.4)$$

Пусть $\pi: W \rightarrow X(\mathbb{C})$ – универсальное накрытие; тогда из равенства (1.4) следует, что на W существуют две вещественные структуры $g: W \rightarrow W$, $g': W \rightarrow W$, накрывающие вещественную структуру $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$, причем $g' = g \circ \tau$,

где $\tau: W \rightarrow W$ – инволюция накрытия $\pi: W \rightarrow X(\mathbb{C})$. Чтобы установить равенство $t_X^3 = 0$, рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & p \swarrow & \downarrow \pi & \searrow p' & \\ Z & & X(\mathbb{C}) & & Z' \\ & q \swarrow & \downarrow f & \searrow q' & \\ & & Y & & \end{array}$$

где $Z = W/g$, $Z' = W/g'$ – факторпространства, p, p', q, q' – соответствующие проекции (они являются неразветвленными двухлиственными накрытиями). Обозначим через $\theta, \omega, \omega', u, u'$ характеристические классы накрытий π, p, p', q, q' соответственно; тогда выполняются равенства

$$\begin{aligned} t_Y &= u + u', & f^*(u) &= f^*(u') = \theta, \\ q^*(t_Y) &= q^*(u') = \omega, & q'^*(t_Y) &= q'^*(u) = \omega'. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Известно, что $\theta^2 = w_2(X(\mathbb{C}))$; покажем, что $\omega^2 = w_2(Z)$, $\omega'^2 = w_2(Z')$. Проверим только первое равенство, так как второе равенство проверяется аналогично. Из точной последовательности Смита–Гизина для накрытия $p: W \rightarrow Z$

$$\cdots \rightarrow H^1(Z, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\omega} H^2(Z, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{p^*} H^2(W, \mathbb{F}_2) \rightarrow \cdots$$

вытекает, что элемент ω^2 порождает ядро гомоморфизма

$$p^*: H^2(Z, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(W, \mathbb{F}_2).$$

Так как $p^*(w_2(Z)) = w_2(W) = 0$, то $w_2(Z)$ равно нулю или ω^2 . Если $w_2(Z) = 0$, то по теореме Рохлина о сигнатуре имеем сравнение $\sigma(Z) \equiv 0 \pmod{16}$. Следовательно, $\sigma(W) = 2\sigma(Z) \equiv 0 \pmod{32}$, но на самом деле $\sigma(W) = -16$. Итак, $w_2(Z) = \omega^2$, аналогично $w_2(Z') = \omega'^2$. Из равенств

$$\begin{aligned} q^*(w_2(Y)) &= w_2(Z) = \omega^2, & q'^*(w_2(Y)) &= w_2(Z') = \omega'^2, \\ f^*(w_2(Y)) &= w_2(X(\mathbb{C})) = \theta^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

и равенств (1.5) вытекает равенство

$$w_2(Y) = u^2 + u'^2 + u \cdot u'. \quad (1.7)$$

Действительно, из равенств (1.5), (1.7) следуют равенства (1.6), а пересечение ядер гомоморфизмов

$$\begin{aligned} q^*: H^2(Y, \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^2(Z, \mathbb{F}_2), & q'^*: H^2(Y, \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^2(Z', \mathbb{F}_2), \\ f^*: H^2(Y, \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \end{aligned}$$

равно нулю, что вытекает из рассмотрения точных последовательностей Смирнова-Гизина для накрытий $q: Z \rightarrow Y$, $q': Z' \rightarrow Y$, $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$. Перейдем к непосредственной проверке равенства $t_Y^3 = 0$. Так как u, u' – базис пространства $H^1(Y, \mathbb{F}_2)$, то достаточно установить равенства

$$t_Y^3 \cdot u = 0, \quad t_Y^3 \cdot u' = 0. \quad (1.8)$$

Так как $t_Y = u + u'$, то $t_Y^3 = u^3 + u^2 \cdot u' + u \cdot u'^2 + u'^3$, поэтому

$$t_Y^3 \cdot u = u^4 + u^3 \cdot u' + u^2 \cdot u'^2 + u \cdot u'^3.$$

Произведения u^4 , $u^2 \cdot u'^2$ равны нулю, так как $u^2 = \delta(u) \pmod{2}$, $u'^2 = \delta(u') \pmod{2}$, где $\delta: H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(Y, \mathbb{F}_2)$ – гомоморфизм Бокштейна. С другой стороны, в силу равенства (1.7) имеем равенства

$$u^3 \cdot u' + u \cdot u'^3 = u \cdot u' \cdot w_2(Y) = (u \cdot u')^2 = 0.$$

Следовательно, $t_Y^3 \cdot u = 0$. Аналогично проверяется равенство $t_Y^3 \cdot u' = 0$. Итак, равенства (1.8) установлены. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь пример многообразия произвольной размерности.

ТЕОРЕМА 1.7. *Если X – абелево многообразие без вещественных точек, то $t_X^2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Комплексное абелево многообразие $X(\mathbb{C})$ изоморфно комплексному тору V/U , где V – комплексное векторное пространство, а U – решетка в нем. Антиголоморфная инволюция $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ переходит при этом изоморфизме в инволюцию $g: V/U \rightarrow V/U$, которая получается из отображения $g(v) = A(v) + b$, где $A(v)$ – антилинейная инволюция, $b \in V$. В [6] показано, что существуют образующие решетки $u_1, u'_1, \dots, u_n, u'_n$ такие, что

$$\begin{aligned} A(u_i) &= u'_i, & A(u'_i) &= u_i & \text{при } 1 \leq i \leq k, \\ A(u_i) &= u_i, & A(u'_i) &= -u'_i & \text{при } k < i \leq n. \end{aligned}$$

Пусть $V_i = \mathbb{R}u_i \oplus \mathbb{R}u'_i$, $U_i = \mathbb{Z}u_i \oplus \mathbb{Z}u'_i$, $1 \leq i \leq n$; тогда V_i/U_i – вещественный тор, и получаем разложение в сумму вещественных торов:

$$V/U = \bigoplus_{i=1}^n V_i/U_i,$$

а инволюция $g: V/U \rightarrow V/U$ разлагается в прямую сумму инволюций $g_i: V_i/U_i \rightarrow V_i/U_i$, $1 \leq i \leq n$, где $g_i(v) = A(v) + b_i$, $b_i \in V_i$.

Хотя бы одна из инволюций $g_i: V_i/U_i \rightarrow V_i/U_i$ не имеет неподвижных точек. Пусть инволюция g_n обладает этим свойством. Тогда элемент $t_n^2 \in H^2(V_n/U_n; G, \mathbb{F}_2)$ равен нулю, где $t_n \in H^1(V_n/U_n; G, \mathbb{F}_2)$ – канонический элемент. Это утверждение доказывается так же, как предложение 1.1, так как инволюция g_n изменяет ориентацию тора V_n/U_n . Проекция $\pi: V/U \rightarrow V_n/U_n$ является эквивариантным отображением, при котором элемент t_n^2 переходит в элемент $t_X^2 \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^2(V/U; G, \mathbb{F}_2)$. Следовательно, $t_X^2 = 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь эквивариантные когомологии $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(q))$, где $\mathbb{Z}(q)$ – G -модуль $\mathbb{Z}$, на котором инволюция g действует умножением на $(-1)^q$. Тогда определен канонический элемент $t_X \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1))$ как образ образующей $t \in H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}(1))$ при гомоморфизме $H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1))$.

При гомоморфизме редукции по $\text{mod } 2$ элемент t_X переходит в t_X , а степень $t_X^n \in H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(n))$ переходит в степень $t_X^n \in H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Следовательно, если $t_X^n = 0$, то и $t_X^n = 0$. Элемент t_X имеет второй порядок, поэтому если 2-примарная подгруппа $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(n))(2)$ совпадает с 2-периодической подгруппой ${}_2H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(n))$, то из равенства $t_X^n = 0$ следует равенство $t_X^n = 0$. Так происходит, например, когда группа $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, так как ядро гомоморфизма

$$\alpha: H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(n))$$

является 2-периодической группой (см. [10]). В общем случае из равенства $t_X^n = 0$ следует равенство $t_X^{n+1} = 0$. Действительно, если $t_X^n = 0$, то элемент t_X^n делится на 2 в $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(n))$, а так как элемент t_X имеет второй порядок, то получаем равенство $t_X^n \cdot t_X = 0$. Отметим еще, что если X – многообразие четной размерности m , то степень t_X^{2m} равна нулю. Действительно, элемент $t_X^m \in H^m(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(m))$ имеет второй порядок, а группа

$$H^{2m}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(2m)) = H^{2m}(Y, f_*^G(\mathbb{Z}(2m))) = H^{2m}(Y, \mathbb{Z})$$

равна $\mathbb{Z}$ при m четном, поэтому $(t_X^m)^2 = 0$. Заметим, что из этого утверждения следует предложение 1.2.

Далее G -пучок $\mathbb{Z}(q)$ при q нечетном будем обозначать через $\mathbb{Z}_-$, а пучок $f_*^G(\mathbb{Z}_-)$ на Y обозначим через $\mathbb{Z}'$. Группа $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^3(Y, \mathbb{Z}')$ будет играть важную роль в дальнейших исследованиях; в частности, для нас важно будет знать, когда элемент t_X^3 равен нулю. Если X – кривая, то $H^3(Y, \mathbb{Z}') = 0$. Мы будем вычислять эту группу для поверхности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть X – поверхность без вещественных точек; тогда

$$\dim {}_2H^3(Y, \mathbb{Z}') = h^1(Y) - q(X) - 1, \quad (1.9)$$

где $h^1(Y) = \dim H^1(Y, \mathbb{F}_2)$, $q(X)$ – иррегулярность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что

$$\dim {}_2H^3(Y, \mathbb{Z}') = \dim H^3(Y, \mathbb{Z}') \otimes \mathbb{F}_2 - \operatorname{rk} H^3(Y, \mathbb{Z}'). \quad (1.10)$$

Из точной последовательности редукции по $\bmod 2$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}' \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}' \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

получаем равенство

$$\dim H^3(Y, \mathbb{Z}') \otimes \mathbb{F}_2 = \dim H^3(Y, \mathbb{F}_2) - \dim {}_2H^4(Y, \mathbb{Z}').$$

Из точной последовательности пучков на Y

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_Y \rightarrow f_*(\mathbb{Z}_-) \xrightarrow{1+g^*} \mathbb{Z}' \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

следует равенство $H^4(Y, \mathbb{Z}') = \mathbb{Z}/2$, поэтому

$$\dim H^3(Y, \mathbb{Z}') \otimes \mathbb{F}_2 = h^1(Y) - 1. \quad (1.12)$$

Так как

$$\operatorname{rk} H^3(Y, \mathbb{Z}') = \dim H^3(Y, \mathbb{Z}') \otimes \mathbb{Q} = \dim H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-,$$

где $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-$ — антиинвариантное относительно g подпространство $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, то

$$\operatorname{rk} H^3(Y, \mathbb{Z}') = h^{2,1}(X(\mathbb{C})) = q(X). \quad (1.13)$$

Осталось заметить, что из равенств (1.10), (1.12), (1.13) следует равенство (1.9). Предложение доказано.

Если $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$, то из равенства (1.9) получаем равенство ${}_2H^3(Y, \mathbb{Z}') = 0$, поэтому $\mathbf{t}_X^3 = 0$. Это равенство вытекает также из предложения 1.4. Для поверхности Энрикеса предложение 1.9 дает равенство ${}_2H^3(Y, \mathbb{Z}') = \mathbb{Z}/2$, поэтому из точной последовательности (1.11) получаем равенство $H^3(Y, \mathbb{Z}') = \mathbb{Z}/2$, а тогда из теоремы 1.6 следует, что элемент $\mathbf{t}_X^3$ обращается в нуль.

Перейдем к вычислению всей группы $H^3(Y, \mathbb{Z}')$ для общей поверхности без вещественных точек. Прежде всего заметим, что из точной последовательности (1.11) вытекает равенство

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / f^* H^3(Y, \mathbb{Z}). \quad (1.14)$$

Таким образом, нужно вычислить подгруппу $f^* H^3(Y, \mathbb{Z})$ группы $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$.

ЛЕММА 1.9. *Имеет место вложение*

$$(1 + g^*)H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \hookrightarrow f^*H^3(Y, \mathbb{Z}),$$

ядро которого равно нулю или $\mathbb{Z}/2$, причем оно нулевое тогда и только тогда, когда равен нулю дифференциал

$$d_2^{0,4}: H^0(G, H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \quad (1.15)$$

из спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) = H^3(Y, \mathbb{Z})$, то

$$f^*H^3(Y, \mathbb{Z}) = \text{Im}[\alpha: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})],$$

т.е. $f^*H^3(Y, \mathbb{Z}) = \Pi_\infty^{0,3}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$.

Рассмотрим гомоморфизм

$$\smile \mathbf{t}_X^2: \Pi_r^{0,3} \rightarrow \Pi_r^{2,3}.$$

Обозначим его ядро через $K_r^{0,3}$; тогда $K_2^{0,3} = (1 + g^*)H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, так как

$$\Pi_2^{0,3} = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G, \quad \Pi_2^{2,3} = H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

Также выполняется включение $K_2^{0,3} \subset K_3^{0,3}$, которое будет равенством тогда и только тогда, когда дифференциал $d_2^{0,4}$ равен нулю. При любом $r \geq 3$ имеем равенство $K_r^{0,3} = K_{r+1}^{0,3}$, следовательно, имеем включение

$$(1 + g^*)H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \subset K_\infty^{0,3},$$

которое будет равенством тогда и только тогда, когда дифференциал $d_2^{0,4}$ равен нулю, в противном случае факторгруппа

$$K_\infty^{0,3}/(1 + g^*)H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

равна $\mathbb{Z}/2$. Осталось заметить, что $H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) = 0$, поэтому $\Pi_\infty^{2,3} = 0$ и, следовательно, $K_\infty^{0,3} = \Pi_\infty^{0,3}$. Лемма доказана.

Теперь мы построим элемент $\varepsilon_X \in f^*H^3(Y, \mathbb{Z})$ следующим образом. Возьмем точку $x_0 \in X(\mathbb{C})$ и соединим ее кривой Γ с точкой $g(x_0)$; тогда одномерный цикл $\Gamma + g(\Gamma)$ определяет по двойственности класс когомологий ε_X . Заметим, что класс когомологий ε_X определен неоднозначно, но любые два таких элемента отличаются друг от друга на элемент из $(1 + g^*)H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Выполняется равенство*

$$f^* H^3(Y, \mathbb{Z}) = (1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) + \mathbb{Z} \varepsilon_X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно только показать, что $\varepsilon_X \in (1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда дифференциал $d_2^{0,4}$ равен нулю. Выберем кривую Γ так, чтобы замкнутая кривая $C = \Gamma + g(\Gamma)$ была гладкой, после этого возьмем замкнутую трубчатую окрестность U кривой C относительно g -инвариантной римановой метрики. Тогда группы когомологий $H^q(U, \partial U; \mathbb{Z})$ равны $\mathbb{Z}$ при $q = 3, 4$, а при остальных q они нулевые. Так как

$$H^5(U, \partial U; G, \mathbb{Z}) = H^5(U/G, (\partial U)/G; \mathbb{Z}) = 0,$$

то дифференциал

$$d_2^{0,4}: H^0(G, H^4(U, \partial U; \mathbb{Z})) \rightarrow H^2(G, H^3(U, \partial U; \mathbb{Z}))$$

ненулевой, т.е. образ образующей группы $H^0(G, H^4(U, \partial U; \mathbb{Z}))$ равен классу $[\varepsilon_X^0]$, полученному с помощью двойственности из кривой C . Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H^4(U, \partial U; \mathbb{Z})) & \xrightarrow{d_2^{0,4}} & H^2(G, H^3(U, \partial U; \mathbb{Z})) \ni [\varepsilon_X^0] \\ \downarrow \cong & & \downarrow \quad \downarrow \\ H^0(G, H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) & \xrightarrow{d_2^{0,4}} & H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \ni [\varepsilon_X] \end{array}$$

вытекает сформулированное вначале утверждение. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. *Если $t_X^2 = 0$, то имеет место точная последовательность*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/(1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (1.14) и леммы 1.9 нужно только показать, что дифференциал (1.15) ненулевой. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) & \xrightarrow{d_2^{0,4}} & H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(G, H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) & \xrightarrow{d_2^{0,4}} & H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \end{array} \quad (1.16)$$

видно, что это условие выполняется, если нижний дифференциал $d_2^{0,4}$ не равен нулю. С помощью двойственности Пуанкаре проверяется (см. [3]), что нетривиальность дифференциала $d_2^{0,4}$ для коэффициентов $\mathbb{F}_2$ равносильна нетривиальности дифференциала

$$d_2^{0,1}: H^0(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^2(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)).$$

А это условие равносильно равенству $t_X^2 = 0$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. Пусть $t_X^2 \neq 0$; тогда справедливы утверждения:

1) если группа $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ конечная и 2-примарная подгруппа $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2)$ является 2-периодической, то выполняется равенство

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g^*)H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}); \quad (1.17)$$

2) если 2-примарная подгруппа $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2)$ нулевая, то выполняется равенство (1.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $t_X^2 \neq 0$ означает, что нижний дифференциал $d_2^{0,4}$ в диаграмме (1.16) равен нулю, а дополнительные условия утверждений обеспечивают мономорфность правого гомоморфизма в диаграмме (1.16). Следовательно, верхний дифференциал $d_2^{0,4}$ в этой диаграмме также равен нулю. Осталось применить равенство (1.14) и лемму 1.9. Предложение доказано.

Сделаем еще несколько общих замечаний о структуре группы $H^3(Y, \mathbb{Z}')$. Так как $\text{rk } H^3(Y, \mathbb{Z}') = q(X)$, то существует разложение

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = \left(\bigoplus_p H^3(Y, \mathbb{Z}')(p) \right) \oplus \mathbb{Z}^{q(X)}.$$

При $p \neq 2$ выполняется равенство

$$H^3(Y, \mathbb{Z}')(p) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(p)_-,$$

где знак “ $-$ ” означает антиинвариантную относительно g подгруппу (см. [10]). Таким образом, требуется вычислить только 2-примарную подгруппу $H^3(Y, \mathbb{Z}')(2)$. Если известно, что она является 2-периодической, то можно использовать предложение 1.8. При выполнении условий утверждений из предложения 1.12 как раз группа $H^3(Y, \mathbb{Z}')(2)$ будет 2-периодической. Заметим также, что в этом случае из равенства $t_X^3 = 0$ следует равенство $\mathbf{t}_X^3 = 0$. Сформулируем еще одно утверждение об условии $\mathbf{t}_X^3 = 0$ для произвольного многообразия без вещественных точек.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. Пусть X – многообразие без вещественных точек; тогда равенство $\mathbf{t}_X^3 = 0$ выполняется в том и только том случае, если $t_X^2 \in R(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-))$, где $R: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ – гомоморфизм редукции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности G -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

получается следующая коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{R} & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\delta_-} & H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{\times 2} & H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H^2(\text{pt}; G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{R} & H^2(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\delta_-} & H^3(\text{pt}; G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{\times 2} & H^3(\text{pt}; G, \mathbb{Z}_-) \\ \parallel & & \Psi & & \Psi & & \\ 0 & & t^2 & & \mathbf{t}^3 & & \end{array}$$

Так как $H^2(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) = (\mathbb{Z}/2) \cdot t^2$, $H^3(\text{pt}; G, \mathbb{Z}_-) = (\mathbb{Z}/2) \cdot \mathbf{t}^3$, то из нижней точной строки получаем равенство $\delta_-(t^2) = \mathbf{t}^3$. Следовательно, $\delta_-(t_X^2) = \mathbf{t}_X^3$, поэтому утверждение предложения следует из верхней точной строки диаграммы. Предложение доказано.

§ 2. Группы Пикара, Брауэра и Витта

В этом параграфе мы изучаем канонический гомоморфизм

$$\alpha: \text{Pic } X \rightarrow (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G, \quad (2.1)$$

где $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$. Если X имеет вещественные точки, то α является изоморфизмом, а если X без вещественных точек, то α – мономорфизм, коядро которого равно нулю или $\mathbb{Z}/2$ (см. [13]). Эти факты сразу следуют из равенств

$$\text{Pic } X_{\mathbb{C}} = H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*), \quad \text{Pic } X = H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)$$

и спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*). \quad (2.2)$$

Далее, X – многообразие без вещественных точек, и мы сформулируем сначала необходимые и достаточные условия для того, чтобы гомоморфизм (2.1) имел ненулевое коядро (ср. с результатами из [13]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) гомоморфизм $\alpha: \text{Pic } X \rightarrow (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G$ имеет ненулевое коядро;
- 2) гомоморфизм $\text{Br}(\text{Spec } \mathbb{R}) \rightarrow \text{Br}(X)$ нулевой;
- 3) существуют функции $f, g \in \mathbb{R}(X)$ такие, что $f^2 + g^2 = -1$;
- 4) элемент $t_X^2 \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ алгебраический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала эквивалентность первых двух условий. Первое условие означает, что дифференциал

$$\begin{array}{c} d_2^{0,1}: H^0(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \longrightarrow H^2(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \\ \parallel \\ H^2(G, \mathbb{C}^*) \\ \parallel \\ \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

из спектральной последовательности (2.2) не равен нулю. Так как $\text{Br}(X) \subset H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)$ (см. [10]), то из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} H^0(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & H^2(G, \mathbb{C}^*) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \\ & & \parallel & & \cup \\ & & \text{Br}(\text{Spec } \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Br}(X) \end{array}$$

в которой верхняя строка точная, вытекает эквивалентность условий 1), 2). Чтобы доказать эквивалентность условий 2), 3), рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(\mathrm{Spec} \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(X) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Br}(\mathbb{R}(X)) \\ & & \uparrow \\ H^2(G, \mathbb{C}^*) & \longrightarrow & H^2(G, \mathbb{C}(X)^*) \end{array}$$

где $\mathbb{C}(X) = \mathbb{R}(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Из нее следует, что условие 2) эквивалентно обращению в нуль гомоморфизма

$$H^2(G, \mathbb{C}^*) \rightarrow H^2(G, \mathbb{C}(X)^*). \quad (2.3)$$

Так как

$$\begin{aligned} H^2(G, \mathbb{C}^*) &= (\mathbb{C}^*)^G / \{z \cdot g^*(z)\} = \mathbb{R}^* / (\mathbb{R}^*)^2, \\ H^2(G, \mathbb{C}(X)^*) &= (\mathbb{C}(X)^*)^G / \{h \cdot g^*(h)\} = \mathbb{R}(X)^* / \{h \cdot g^*(h)\}, \end{aligned}$$

то равенство нулю гомоморфизма (2.3) означает, что существует функция $h \in \mathbb{C}(X)^*$ такая, что $h \cdot g^*(h) = -1$. Так как $h = f + ig$, где $f, g \in \mathbb{R}(X)$, $g^*(h) = f - ig$, то это условие совпадает с условием 3).

Покажем, наконец, что условие 4) эквивалентно условию 1). Для этого рассмотрим точную последовательность Куммера G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{(\cdot)^2} \mathcal{O}^* \rightarrow 1.$$

Из нее получаем длинную точную последовательность эквивариантных когомологий

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \mathrm{Pic} X & \xrightarrow{\times 2} & \mathrm{Pic} X & \xrightarrow{\delta} & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_2) \xrightarrow{i^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \rightarrow \dots \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \end{array} \quad (2.4)$$

Элемент $t_X^2 \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ называется *алгебраическим*, если он принадлежит образу гомоморфизма

$$\delta: \mathrm{Pic} X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (2.5)$$

Из точной последовательности (2.4) видно, что t_X^2 – алгебраический элемент тогда и только тогда, когда $i^*(t_X^2) = 0$.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_2) & \xrightarrow{i^*} & H^2(X(\mathbb{C}); G, \theta^*) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H^2(\text{pt}; G, \mu_2) & \xrightarrow{i^*} & H^2(\text{pt}; G, \mathbb{C}^*) \\
 \parallel & & \parallel \\
 H^2(G, \mu_2) & \xrightarrow{i^*} & H^2(G, \mathbb{C}^*)
 \end{array}$$

Из нее следует, что $i^*(t_X^2) = 0$ тогда и только тогда, когда гомоморфизм

$$H^2(G, \mathbb{C}^*) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \theta^*)$$

нулевой, т.е. когда равен нулю краевой гомоморфизм

$$H^2(G, H^0(X(\mathbb{C}), \theta^*)) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \theta^*)$$

в спектральной последовательности (2.2), что эквивалентно условию 1). Теорема доказана.

Мы будем называть многообразие без вещественных точек X *многообразием первого типа*, если гомоморфизм (2.1) является изоморфизмом, в противном случае X называется *многообразием второго типа*. Из теоремы 2.1 следует, что если существует рациональное отображение X в многообразие второго типа, то X также является многообразием второго типа. Условие 3) теоремы 2.1 означает, что существует рациональный морфизм $X \rightarrow Q$, где Q – коника, заданная уравнением $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Эта коника, конечно, принадлежит второму типу. Следующая теорема дает рабочий инструмент для проверки принадлежности многообразия второму типу.

ТЕОРЕМА 2.2. *Многообразие без вещественных точек X принадлежит второму типу тогда и только тогда, когда во множестве $\alpha(R^{-1}(t_X^2)) \subset H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ существует алгебраический элемент, где*

$$R: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

– гомоморфизм редукции,

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

– гомоморфизм забывания вещественной структуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что условие данной теоремы эквивалентно условию 4) теоремы 2.1. Это вытекает из следующих фактов. Гомоморфизм (2.5) можно разложить в композицию (см. [10]):

$$\mathrm{Pic} X \xrightarrow{\mathrm{cl}} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{R} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

где cl – отображение цикла. Обозначим подгруппу $\mathrm{cl}(\mathrm{Pic} X) \subset H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ через $H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$. Тогда условие 4) теоремы 2.1 равносильно тому, что множество

$$R^{-1}(t_X^2) \cap H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$$

непустое. Из точной экспоненциальной последовательности G -пучков

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 1$$

вытекает (см. [7]), что группа $H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ равна $\alpha^{-1}(H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$, где $H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – образ отображения цикла

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}: \mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

т.е. множество алгебраических элементов в $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если многообразие X принадлежит второму типу, то $\mathfrak{t}_X^3 = 0$;*
- 2) *если $\mathfrak{t}_X^3 = 0$ и $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, то многообразие X принадлежит второму типу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти утверждения вытекают из предложения 1.13, теоремы 2.2 и выполнения равенства $H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ для многообразия с нулевой группой $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Следующие многообразия без вещественных точек принадлежат второму типу:*

- 1) *кривые;*
- 2) *поверхности с $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$, $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$; в частности, рациональные поверхности;*
- 3) *поверхности Энриквеса;*
- 4) *абелевы многообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для многообразий вида 1)–3) выполняется равенство $\mathfrak{t}_X^3 = 0$ (см. предложение 1.4, теорему 1.6 и замечания в конце § 1), а также равенство $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, поэтому они принадлежат второму типу в силу следствия 2.3. Для абелева многообразия $\mathfrak{t}_X^2 = 0$ (см. теорему 1.7), поэтому элемент t_X^2 алгебраический, следовательно, абелевы многообразия принадлежат второму типу. Следствие доказано.

Равенство $t_X^3 = 0$ является топологическим условием. Выполнение его гарантирует, что множество $\alpha(R^{-1}(t_X^2))$ непусто. Если $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) \neq 0$ и множество $\alpha(R^{-1}(t_X^2))$ не содержат элементов конечного порядка, то существование в $\alpha(R^{-1}(t_X^2))$ алгебраического элемента является алгебро-геометрическим условием. В частности, если мы будем рассматривать семейство многообразий без вещественных точек X_λ , параметризованное переменной точкой λ в полидиске, которое топологически тривиальное, и $t_{X_0}^3 = 0$, то в этом семействе могут быть многообразия первого и второго типов.

Опишем более подробно эту ситуацию. Пространство $H^2(X_\lambda(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ можно рассматривать как неподвижное векторное пространство V . Образ множества $\alpha(R^{-1}(t_{X_\lambda}^2))$ в V обозначим через U , оно также неподвижно и состоит из счетного числа точек. Подпространство $H^{1,1}(X_\lambda(\mathbb{C}))$ меняется при изменении λ . Тогда многообразие X_λ принадлежит второму типу, если пересечение $U \cap H^{1,1}(X_\lambda(\mathbb{C}))$ непусто. Более конкретно мы рассмотрим эту ситуацию для КЗ-поверхностей в § 3, а сейчас перейдем к вычислению группы Брауэра.

Имеются две группы Брауэра многообразия X . Первая из них $\text{Br}(X)$ – группа классов подобия алгебр Адзумаи на X , а вторая $\text{Br}'(X) = H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ – когомологическая группа Брауэра. Определено каноническое вложение $\text{Br}(X) \subset \text{Br}'(X)$, которое для кривых и поверхностей является равенством, причем вполне возможно, что для наших многообразий оно всегда является равенством (см. подробности в [2], [14]). В работе [10] доказаны равенства

$$\text{Br}'(X) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)_{\text{tors}} = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}},$$

где $\rho_0(X)$ – число Лефшеца, которое равно размерности коядра отображения цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: (\text{Pic } X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-.$$

Заметим, что если $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, то $\rho_0(X) = 0$ (см. [10]). Если X – многообразие без вещественных точек, то $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^3(Y, \mathbb{Z}')$, поэтому тогда выполняется равенство

$$\text{Br}'(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(Y, \mathbb{Z}')_{\text{tors}}. \quad (2.6)$$

Для кривой имеем $\rho_0(X) = 0$ и $H^3(Y, \mathbb{Z}') = 0$, поэтому для кривой без вещественных точек $\text{Br}(X) = 0$. Для поверхностей из равенства (2.6) и из предложения 1.9 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Пусть X – поверхность без вещественных точек; тогда имеет место равенство*

$$\dim_2 \text{Br}(X) = \rho_0(X) + h^1(Y) - q(X) - 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть X – поверхность без вещественных точек; тогда имеет место равенство

$$\dim(\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{F}_2 = h^2(Y) - \rho_0(X) + q(X) - h^1(Y) + 1,$$

где $h^2(Y) = \dim H^2(Y, \mathbb{F}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности Куммера G -пучков на $X(\mathbb{C})$ получаем точную последовательность

$$\cdots \rightarrow \mathrm{Pic} X \xrightarrow{\times 2} \mathrm{Pic} X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow {}_2\mathrm{Br}(X) \rightarrow 0.$$

Так как $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^2(Y, \mathbb{F}_2)$, то

$$\dim(\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{F}_2 = h^2(Y) - \dim {}_2\mathrm{Br}(X).$$

Осталось применить предложение 2.5. Следствие доказано.

В разложении (2.6) группа $H^3(Y, \mathbb{Z}')_{\mathrm{tors}}$ является топологической составляющей. Для поверхности имеем равенство (см. § 1)

$$H^3(Y, \mathbb{Z}')_{\mathrm{tors}} = (H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/f^*H^3(Y, \mathbb{Z}))_{\mathrm{tors}}.$$

Если группа $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ 2-периодическая или свободная, то из этого равенства следует, что $H^3(Y, \mathbb{Z}')_{\mathrm{tors}}$ будет 2-периодической группой. Применим предложение 1.9; тогда получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть X – поверхность без вещественных точек и группа $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ или 2-периодическая, или свободная; тогда имеет место равенство

$$\mathrm{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus (\mathbb{Z}/2)^m,$$

где $m = h^1(Y) - q(X) - 1$.

Число Лефшеца $\rho_0(X)$ является алгебро-геометрическим инвариантом многообразия X , оно равно разности

$$\mathrm{rk} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) - \rho(X),$$

где $\rho(X)$ – число Пикара, т.е. $\rho(X) = \mathrm{rk} H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$. Число Пикара меняется при вариации многообразия X , поэтому число Лефшеца также меняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть X – поверхность без вещественных точек; тогда выполняются неравенства

$$h^{2,0} \leq \rho_0(X) \leq h^{2,0} + \frac{1}{2}h^{1,1},$$

где $h^{p,q}$ – числа Ходжа многообразия $X(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_-^{1,1}$ – размерность антиинвариантного относительно g подпространства $H^{1,1}(X(\mathbb{C}))$. Тогда имеем

$$1 \leq \rho(X) \leq h_-^{1,1},$$

$$\mathrm{rk} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = \dim H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_- = h^{2,0} + h_-^{1,1}.$$

Отсюда получаются неравенства

$$h^{2,0} \leq \rho_0(X) \leq h^{2,0} + h_-^{1,1} - 1.$$

С другой стороны, из формулы Лефшеца для инволюции g имеем равенства

$$0 = \chi(X(\mathbb{R})) = 2 + h^{1,1} - 2h_-^{1,1}.$$

Следовательно, $h_-^{1,1} = (1/2)h^{1,1} + 1$. Предложение доказано.

Перейдем, наконец, к рассмотрению группы Витта $W(X)$ поверхности без вещественных точек. Структура этой группы найдена в [20], а в [11] продолжено ее вычисление. Пусть $k^1(X)$ – размерность ядра гомоморфизма

$$\smile t_X: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)/H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть X – поверхность без вещественных точек; тогда справедливы утверждения:

1) если X – поверхность первого типа, то

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n \oplus \mathbb{Z}/8,$$

где $m = 2k^1(X) + \rho_0(X) - q(X) - 1$, $n = h^1(Y) - k^1(X) - 1$;

2) если X – поверхность второго типа, то

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n,$$

где $m = 2k^1(X) + \rho_0(X) - q(X) - 2$, $n = h^1(Y) - k^1(X) + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть X – поверхность без вещественных точек и $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$; тогда справедливы утверждения:

1) если X – поверхность первого типа, то

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus \mathbb{Z}/8,$$

где $m = \rho_0(X) - 1$;

2) если X – поверхность второго типа, то

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus \mathbb{Z}/4,$$

где $m = \rho_0(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ следует равенство $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \cdot t_X$. Если X – поверхность первого типа, то t_X^2 – не-алгебраический элемент, поэтому $k^1(X) = 0$, в противном случае $k^1(X) = 1$. Осталось заметить, что из равенства $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ следуют равенства $h^1(Y) = 1$, $q(X) = 0$. Следствие доказано.

Отметим, что рациональная поверхность без вещественных точек принадлежит второму типу, поэтому ее группа Витта равна $\mathbb{Z}/4$, так как для нее $\rho_0(X) = 0$.

Следствие 2.10 можно обобщить следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 2.11. Пусть X – поверхность без вещественных точек и $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) = 0$; тогда справедливы утверждения:

1) если X – поверхность первого типа, то

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus \mathbb{Z}/8,$$

где $m = 2h^1(Y) - q(X) + \rho_0(X) - 4$;

2) если X – поверхность второго типа, то

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus \mathbb{Z}/4,$$

где $m = 2h^1(Y) - q(X) + \rho_0(X) - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) = 0$ с помощью спектральной последовательности

$$H_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

получаем неравенство $t_X^2 \neq 0$ и равенство $t_X(H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)) = \mathbb{F}_2 \cdot t_X^2$. Отсюда следует, что если X – поверхность первого типа, то

$$k^1(X) = \dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) - 1 = h^1(Y) - 1,$$

в противном случае $k^1(X) = h^1(Y)$. Осталось применить теорему 2.9. Следствие доказано.

Заметим, что если группа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, то равенство $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) = 0$ равносильно равенству $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = 0$ (см. [5]), которое имеет следующий геометрический смысл. Группа $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$ нулевая тогда и только тогда, когда множество вещественных точек многообразия Пикара $\text{Pic}^0 X_{\mathbb{C}}$ состоит из одной компоненты связности (см. [4]).

Отметим наконец, что для поверхности Энриквеса имеет место

ТЕОРЕМА 2.12. Пусть X – поверхность Энриквеса без вещественных точек; тогда

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2.4 поверхность Энриквеса принадлежит второму типу, поэтому

$$W(X) = (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n,$$

где $m = 2k^1(X) - 2$, $n = 3 - k^1(X)$, так как $h^1(Y) = 2$, $q(X) = \rho_0(X) = 0$. Нам нужно показать, что $k^1(X) = 2$, т.е.

$$t_X(H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)) \subset H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (2.7)$$

Далее вычислим группу $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Так как $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, то $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, следовательно, $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = R(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-))$. Тогда из точной последовательности редукции по $\text{mod } 2$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

следует, что

$$H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \text{Ker} [\delta_-: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)].$$

Так как

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^3(Y, \mathbb{Z}') = \mathbb{Z}/2,$$

то

$$H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \text{Ker} [\delta_-: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)],$$

где δ_- – связывающий гомоморфизм, возникающий из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_-/2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_-/4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

В [11] показано, что для каждого элемента $a \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ выполняется равенство

$$\delta_-(t_X \cdot a) = t_X \cdot a^2.$$

Это равенство имеет место для произвольного топологического пространства с инволюцией.

Итак, соотношение (2.7) означает, что $t_X \cdot a^2 = 0$ для каждого элемента $a \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Если использовать обозначения из доказательства теоремы 1.6, то получим, что нужно проверить равенства $t_Y^3 = 0$, $t_Y \cdot u^2 = 0$. Первое равенство было установлено в доказательстве теоремы 1.6. Перейдем к доказательству второго равенства. Из равенства $u^4 = 0$ следует равенство $u^3 \cdot u' = 0$, так как

$$u^4 = u^2 \cdot w_2(Y) = u^2 \cdot (u^2 + u'^2 + u \cdot u') = u^3 \cdot u'.$$

Из равенств $u^3 \cdot u = 0$, $u^3 \cdot u' = 0$ получаем равенство $u^3 = 0$. Так как $t_Y = u + u'$, то $t_Y \cdot u^2 = u^2 \cdot u'$. Осталось заметить, что из равенств $u^3 \cdot u' = 0$, $u^2 \cdot u'^2 = 0$ следует равенство $u^2 \cdot u' = 0$. Теорема доказана.

§ 3. Примеры и замечания

3.1. “Общее” полное пересечение. Пусть X – поверхность без вещественных точек, которая является полным пересечением в $\mathbb{P}^N$. Если X – нерациональная и “общая” поверхность, то $\text{Pic } X_{\mathbb{C}}$ порождается гиперплоским сечением (см. [12], [15]), поэтому $\text{Pic } X = (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G$, $\rho(X) = 1$. Из первого равенства следует, что X принадлежит первому типу, а из второго следует, что число Лефшеца $\rho_0(X)$ будет максимальным, т.е.

$$\rho_0(X) = h^{2,0} + \frac{1}{2}h^{1,1}.$$

Эта формула вытекает из доказательства предложения 2.8. Тогда для такой поверхности имеем равенства

$$\mathrm{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)}, \quad W(X) = (\mathbb{Z}/2)^{\rho_0(X)-1} \oplus \mathbb{Z}/8,$$

где число $\rho_0(X)$ определяется верхней формулой. Первое равенство вытекает из предложения 2.7, а второе – из следствия 2.10.

Уточним теперь, что означает слово “общая”. Поверхность X задается системой однородных уравнений

[illegible]

Будем считать, что степени многочленов фиксированные, а коэффициенты меняются; тогда система уравнений определяет точку в произведении проективных пространств $\mathbb{P}^{m_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathbb{P}^{m_{N-2}}(\mathbb{R})$. Выражение “общая поверхность” означает, что поверхность определяется точкой из дополнения $\mathbb{P}^{m_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathbb{P}^{m_{N-2}}(\mathbb{R}) \setminus Z$, где Z – объединение счетного числа некоторых алгебраических множеств.

3.2. Поверхности типа КЗ. Напомним сначала проективную классификацию вещественных поверхностей типа КЗ (см. подробности в [16]). Если $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ неособая вещественная поверхность типа КЗ, вложенная в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ полной линейной системой, то для нее определены инварианты $k, n, a, t(-), \delta_h, \delta_\varphi, \delta_{\varphi, h}$ (см. [16]). Напомним их определения. Инвариант $k \in \mathbb{N}$ определяется условием таким, чтобы $h \in k^{-1} \cdot l \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ был примитивным элементом, где $l \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – класс когомологий, определенный гиперплоским сечением. Инвариант $n \in \mathbb{N}$ равен h^2 . Заметим, что n четное и $N = (1/2)nk^2 + 1$.

Обозначим через $\mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R})$ множество неособых вещественных поверхностей типа КЗ в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ с фиксированными инвариантами n, k ; тогда оно образует несвязное вещественно-аналитическое многообразие. На нем действует группа

$\mathrm{PGL}(N+1, \mathbb{R})$ автоморфизмов $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$, возможно, переставляя компоненты связности. Факторпространство

$$\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R}) / \mathrm{PGL}(N+1, \mathbb{R})$$

дает многообразие модулей вещественных проективных поверхностей типа КЗ с фиксированными инвариантами n, k . Пусть $X \in \mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R})$; тогда определена четверка $(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi)$, где Q – билинейная форма, заданная $\sim$ -произведением, $\varphi = g^*$ – инволюция на $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Эта четверка в [16] названа *целочисленной поляризованной инволюцией*. Две поверхности $X_1, X_2 \in \mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R})$ называются в [16] *грубо проективно эквивалентными*, если при проекции $\mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ они попадают в одну компоненту связности. Для грубо проективно эквивалентных поверхностей $X_1, X_2 \in \mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R})$ четверки $(H^2(X_1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi)$, $(H^2(X_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi)$, очевидно, изоморфны.

С помощью теоремы Торелли для поверхностей типа КЗ и эпиморфности для них отображения периодов в [16] устанавливается обратное утверждение, т.е. если четверки $(H^2(X_1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi)$, $(H^2(X_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi)$ изоморфны, то поверхности X_1, X_2 грубо проективно эквивалентны. Более того, показано, что для каждой целочисленной поляризованной инволюции (L, Q, h, φ) , удовлетворяющей соответствующим условиям, существует поверхность $X \in \mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R})$, для которой четверка $(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi)$ изоморфна данной четверке (L, Q, h, φ) . Для поверхности $X \in \mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R})$ инварианты $a, t_{(-)}, \delta_h, \delta_\varphi, \delta_{\varphi,h}$ определяются следующим образом. Пусть $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\pm}$ – инвариантная и антиинвариантная относительно φ подгруппы $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$; тогда

$$a = \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_+ \oplus H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_-,$$

$(t_{(+)}, t_{(-)})$ – сигнатура формы Q на $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_+$. Заметим, что $t_{(+)} = 1$,

$$\begin{aligned} \delta_h &= \begin{cases} 0, & \text{если } h \cdot x \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \text{при } x \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_-, \\ \delta_\varphi &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \cdot \varphi(x) \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \text{при } x \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \\ \delta_{\varphi,h} &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \cdot \varphi(x) \equiv h \cdot x \pmod{2} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad \text{при } x \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

Заметим, что для любых поверхностей $X_1, X_2 \in \mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R})$ тройки $(H^2(X_1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h)$, $(H^2(X_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h)$ изоморфны. Оказывается, что если $0 < t_{(-)} < 18 - \delta_h$, то по инвариантам $a, t_{(-)}, \delta_h, \delta_\varphi, \delta_{\varphi,h}$ восстанавливается вся четверка $(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi)$ (см. [16]).

Для поверхности $X \in \mathcal{H}_{n,k}(\mathbb{R})$ без вещественных точек $a = 10$, $t_{(-)} = 9$, $\delta_\varphi = 0$ (см. п. 3.4). В [16] кратко объяснено, как доказать обратное утверждение. Предложенный способ доказательства довольно сложный, но В.В. Никулин не нашел другого, поэтому мы сначала приведем простое доказательство этого утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если для вещественной КЗ-поверхности $a = 10$, $t_{(-)} = 9$, $\delta_\varphi = 0$, то $X(\mathbb{R}) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из аналога неравенства Гарнака–Тома (см. [5])

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$$

получаем, что для поверхности типа КЗ выполняется неравенство

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq 24 - 2a.$$

Формула Лефшеца о неподвижных точках дает равенство

$$\chi(X(\mathbb{R})) = 2t_{(-)} - 18.$$

Так как $a = 10$, $t_{(-)} = 9$, то получаем неравенство $\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq 4$ и равенство $\chi(X(\mathbb{R})) = 0$. Тогда из ориентируемости $X(\mathbb{R})$ вытекают две возможности: или $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, или $X(\mathbb{R})$ – тор. Пусть $X(\mathbb{R})$ – тор; тогда гомоморфизм

$$f^*: H^2(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

мономорфен (см. [21] или [8]), поэтому из равенства

$$w_2(X(\mathbb{C})) = f^*w_2(Y) + [X(\mathbb{R})]^* = 0$$

и условия $\delta_\varphi = 0$ получаем равенство $w_2(Y) = 0$, так как равенство $\delta_\varphi = 0$ равносильно равенству $[X(\mathbb{R})]^* = 0$. По теореме Рохлина о сигнатуре из равенства $w_2(Y) = 0$ получаем сравнение $\sigma(Y) \equiv 0 \pmod{16}$. Следовательно (см. [19]),

$$\sigma(X(\mathbb{C})) = 2\sigma(Y) + \chi(X(\mathbb{R})) \equiv 0 \pmod{32},$$

но на самом деле $\sigma(X(\mathbb{C})) = -16$. Полученное противоречие показывает, что $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. Предложение доказано.

Заметим теперь, что из результатов [16] следует, что при $n \equiv 2 \pmod{4}$ существует только одна четверка (с точностью до изоморфизма) (L, Q, h, φ) с инвариантами $a = 10$, $t_{(-)} = 9$, $\delta_\varphi = 0$, для нее $\delta_h = 1$, $\delta_{\varphi, h} = 1$, а при $n \equiv 0 \pmod{4}$ существуют две такие четверки, для них δ_h равно 0 или 1, $\delta_{\varphi, h} = 1$. Таким образом, при $n \equiv 2 \pmod{4}$ существует только одна компонента связности многообразия модулей $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, точкам которой отвечают поверхности без вещественных точек (обозначим ее через $M_{n,k}$), а при $n \equiv 0 \pmod{4}$ таких компонент две (обозначим их через $M_{n,k}^{(0)}$, $M_{n,k}^{(1)}$), причем $\delta_h = 0$ для поверхностей из $M_{n,k}^{(0)}$. Но нужно иметь в виду следующее. В [16] под $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ понимается алгебраическое многообразие над $\mathbb{R}$ такое, что

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N = \text{Proj } \mathbb{C}[z_0, \dots, z_N].$$

Поэтому при нечетном N имеются два вещественных проективных пространства, первое равно $\text{Proj } \mathbb{R}[z_0, \dots, z_N]$, а второе определяется парой $(\mathbb{P}^N(\mathbb{C}), g)$, где антигомоморфная инволюция g не имеет неподвижных точек; например, можно положить

$$g(z_0, z_1, \dots, z_{N-1}, z_N) = (-\bar{z}_1, \bar{z}_0, \dots, -\bar{z}_N, \bar{z}_{N-1}).$$

Первое вещественное проективное пространство мы будем обозначать через $\mathbb{P}^N$, а второе через $\tilde{\mathbb{P}}^N$. Если рассмотреть доказательство теоремы о грубой проективной классификации вещественных поверхностей типа КЗ в [16], то не видно, в каком вещественном проективном пространстве находится конкретная КЗ-поверхность без вещественных точек, если $n \equiv 0 \pmod{4}$, а k нечетное. Заметим, что при остальных n, k можно считать, что поверхность вложена в обычное проективное пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $n \equiv 0 \pmod{4}$ и k нечетное; тогда справедливы утверждения:

- 1) если $X \in M_{n,k}^{(0)}$, то X можно вложить линейной системой $|kh|$ в $\mathbb{P}^N$, где $N = (1/2)nk^2 + 1$;
- 2) если $X \in M_{n,k}^{(1)}$, то X нельзя вложить в $\mathbb{P}^N$, а только в $\tilde{\mathbb{P}}^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\text{Pic } X_{\mathbb{C}} \subset H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-), \quad \text{Pic } X \subset H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-), \quad kh \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G,$$

то X можно вложить в $\mathbb{P}^N$ в том и только том случае, если существует элемент $\mathbf{h} \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ такой, что $\alpha(\mathbf{h}) = h$. Если $X \in M_{n,k}^{(0)}$, то $h = d + \varphi(d)$, где $d \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$, поэтому $d_3^{0,2}(h) = 0$, где

$$d_3^{0,2}: H^0(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \rightarrow H^3(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))$$

– дифференциал из спектральной последовательности $\Pi(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$. Следовательно, существует элемент $\mathbf{h} \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ такой, что $\alpha(\mathbf{h}) = h$, а поэтому X можно вложить в $\mathbb{P}^N$.

Пусть теперь $X \in M_{n,k}^{(1)}$; будем доказывать от противного, что X нельзя вложить в $\mathbb{P}^N$. Итак, пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ и H – гиперплоское сечение X такое, что $[H(\mathbb{C})]^* = kh$. Так как H является кривой без вещественных точек нечетного рода N , то из предложения 1.1 следует, что дифференциал

$$d_2^{0,1}: H^0(G, H^1(H(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^2(G, H^0(H(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$$

ненулевой. Применим двойственность Пуанкаре; тогда получим, что не равен нулю дифференциал

$$d_2^{0,1}: H^0(G, H_1(H(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^2(G, H_2(H(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$$

из спектральной последовательности для эквивариантных гомологий (см. [21]). Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца; тогда получим, что не равен нулю дифференциал

$$d_2^{0,3}: H^0(G, H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus H(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus H(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)).$$

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus H(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)) & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus H(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)) \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ H^0(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \end{array} \quad (3.1)$$

Так как $\delta_h = 1$, то класс когомологий $kh \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G$ определяет ненулевой элемент $[kh]$ группы $H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))$. Образующая группы $H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus H(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2))$ переходит при гомоморфизме i^* в элемент $[kh]$. Следовательно, нижний дифференциал в диаграмме (3.1) не равен тождественно нулю, что противоречит равенству $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$. Предложение доказано.

Пусть X – поверхность типа КЗ без вещественных точек; тогда

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = \text{rk } H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_- - a = 12 - 10 = 2.$$

Так как $\mathbf{t}_X^3 = 0$, то ядро дифференциала

$$d_3^{0,2}: H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \rightarrow H^3(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = \mathbb{F}_2$$

является подгруппой индекса 2 в $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_-$, а ядро дифференциала

$$d_3^{2,2}: H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \rightarrow H^5(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = \mathbb{F}_2$$

является одномерным подпространством. Обозначим через C множество элементов $c \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_-$ таких, что $d_3^{0,2}(c) \neq 0$. Тогда имеет место

ЛЕММА 3.3. *Если X – поверхность типа КЗ без вещественных точек, то выполняется равенство*

$$\alpha(R^{-1}(t_X^2)) = 2C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму, строки в которой точны,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G & \xrightarrow{d_3^{0,2}} & H^3(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) & \rightarrow & 0 \\
\downarrow R & & \downarrow R & & \cong \downarrow R & & \\
0 \rightarrow \mathbb{F}_2 t_X^2 & \rightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G & \xrightarrow{d_3^{0,2}} & H^3(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \rightarrow 0
\end{array}$$

Так как ненулевой элемент $t_X^2 \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ определяется равенством $\alpha(t_X^2) = 0$, то элемент $c \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G$ принадлежит множеству $\alpha(R^{-1}(t_X^2))$ тогда и только тогда, когда c – четный элемент и $(1/2)c$ не принадлежит подгруппе $\alpha(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-))$, т.е. $d_3^{0,2}((1/2)c) \neq 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть X – поверхность типа КЗ без вещественных точек; тогда класс $2h$ принадлежит $\alpha(R^{-1}(t_X^2))$, если и только если X принадлежит $M_{n,k}^{(1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что инвариант k для поверхности X равен 1, так как имеем открытые вложения $M_{n,1} \subset M_{n,k}$, $M_{n,1}^{(i)} \subset M_{n,k}^{(i)}$. В силу леммы 3.3 достаточно показать, что $d_3^{0,2}(h) \neq 0$, если и только если $X \in M_{n,1}^{(1)}$, т.е. X нельзя вложить в $\mathbb{P}^N$, если и только если $X \in M_{n,1}^{(1)}$. Осталось применить предложение 3.2. Лемма доказана.

Заметим, что из теоремы 2.2 и леммы 3.4 вытекает, что каждая поверхность $X \in M_{n,k}^{(1)}$ принадлежит второму типу, впрочем, это также следует из предложения 3.2, так как многообразие $\tilde{\mathbb{P}}^N$ принадлежит второму типу. Действительно, группа $\text{Pic}(\tilde{\mathbb{P}}^N \otimes \mathbb{C}) = \text{Pic } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ равна $\mathbb{Z}$ и порождается гиперплоскостью, но этот элемент не принадлежит $\text{Pic } \tilde{\mathbb{P}}^N$, так как в противном случае базис вещественных сечений этого расслоения определил бы изоморфизм $\tilde{\mathbb{P}}^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^N$, которого не может быть. А тогда следствие 2.10 дает для поверхности $X \in M_{n,k}^{(1)}$ равенство $W(X) = (\mathbb{Z}/2)^{\rho_0(X)} \oplus \mathbb{Z}/4$.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $X \in M_{n,k}(M_{n,k}^{(i)})$; тогда в любой окрестности U точки X существует точка $X' \in U$ такая, что число Лефшеца $\rho_0(X')$ равно любому наперед взятому числу ρ_0 , удовлетворяющему неравенствам $1 \leq \rho_0 \leq 11$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Четверку $(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi)$ обозначим через (L, Q, h, φ) и рассмотрим пространство периодов, которое в [16] обозначено через $\mathcal{L}_{\varphi}^+ \times \mathcal{L}_{\varphi, h}^-$. Напомним его определение. Пусть $L^{\pm}$ – инвариантная и антиинвариантная относительно φ подгруппы L ; тогда $h \in L^-$. Обозначим через L_h^- ортогональное дополнение h в L^- относительно формы Q ; тогда форма Q на L^+ , L_h^- имеет сигнатуру $(1, 9)$, $(1, 10)$ соответственно. Следовательно, можно определить пространства Лобачевского

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\varphi}^+ &= \{\omega_+ \in L^+ \otimes \mathbb{R} \mid \omega_+^2 > 0\} / \mathbb{R}^*, \\
\mathcal{L}_{\varphi, h}^- &= \{\omega_- \in L_h^- \otimes \mathbb{R} \mid \omega_-^2 > 0\} / \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

Эти пространства мы будем также обозначать через $\mathcal{L}^+$, $\mathcal{L}^-$. Поверхность X определяет точку $([\omega_+], [\omega_-]) \in \mathcal{L}^+ \times \mathcal{L}^-$. Действительно, пусть ω – ненулевая форма из одномерного пространства

$$H^0(X, \Omega^2) = H^0(X(\mathbb{C}), \Omega^2)^G \subset (L^+ \otimes \mathbb{C}) \oplus (L_h^- \otimes \mathbb{C}).$$

Тогда она удовлетворяет условиям

$$\varphi(\omega) = \bar{\omega}, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega \cdot \bar{\omega} > 0.$$

Из условия $\varphi(\omega) = \bar{\omega}$ получаем разложение $\omega = \omega_+ + i\omega_-$, где $\omega_+ \in L^+ \otimes \mathbb{R}$, $\omega_- \in L_h^- \otimes \mathbb{R}$. А из условий $\omega^2 = 0$, $\omega \cdot \bar{\omega} > 0$ получаем условия $\omega_+^2 = \omega_-^2 > 0$. Факторклассы $[\omega_+]$, $[\omega_-]$ определяют точки из $\mathcal{L}^+$, $\mathcal{L}^-$ соответственно. Пусть U – маленькая окрестность точки X в $M_{n,k}(M_{n,k}^{(i)})$; тогда для каждой точки $X' \in U$ определен канонический изоморфизм

$$(H^2(X'(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi) = (H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), Q, h, \varphi) = (L, Q, h, \varphi).$$

Поэтому предыдущая конструкция определяет отображение периодов $U \rightarrow \mathcal{L}^+ \times \mathcal{L}^-$, которое по локальной теореме Торелли для КЗ-поверхностей является диффеоморфизмом на окрестность точки $([\omega_+], [\omega_-])$ в $\mathcal{L}^+ \times \mathcal{L}^-$. Применим теперь теорему Лефшеца о $(1, 1)$ -классах; тогда получим, что достаточно доказать следующее простое утверждение. Существует точка $([\omega'_+], [\omega'_-]) \in \mathcal{L}^+ \times \mathcal{L}^-$, сколь угодно близкая к точке $([\omega_+], [\omega_-]) \in \mathcal{L}^+ \times \mathcal{L}^-$ и такая, что уравнение $\omega'_- \cdot c = 0$, где $c \in L_h^-$, определяет решетку в L_h^- любого наперед заданного ранга ρ , удовлетворяющего неравенствам $0 \leq \rho \leq 10$. Доказательство этого утверждения мы опускаем, так как фактически оно будет изложено при доказательстве теоремы 3.8. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Для “общей” поверхности $X \in M_{n,k}(M_{n,k}^{(i)})$ справедливы утверждения:

- 1) если $X \in M_{n,k}(M_{n,k}^{(0)})$, то $\text{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{11}$, $W(X) = (\mathbb{Z}/2)^{10} \oplus \mathbb{Z}/8$;
- 2) если $X \in M_{n,k}^{(1)}$, то $\text{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{11}$, $W(X) = (\mathbb{Z}/2)^{11} \oplus \mathbb{Z}/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для “общей” поверхности $X \in M_{n,k}(M_{n,k}^{(i)})$ группа $\text{Pic } X_{\mathbb{C}}$ равна $\mathbb{Z}$ и порождена классом h , причем $h \in \text{Pic } X$ для $X \in M_{n,k}(M_{n,k}^{(0)})$, а $h \notin \text{Pic } X$ для $X \in M_{n,k}^{(1)}$ (см. предложение 3.2). Таким образом, для “общей” поверхности $X \in M_{n,k}(M_{n,k}^{(i)})$ имеем $\rho_0(X) = 11$, причем X принадлежит второму типу, если и только если $X \in M_{n,k}^{(1)}$. Осталось применить предложение 2.7 и следствие 2.10. Предложение доказано.

Далее нам потребуется следующая арифметическая

ЛЕММА 3.7. Пусть $V = \mathbb{Z}^n (n > 1)$, решетка $W \subset V$ состоит из векторов $(k_1, \dots, k_n)$ с четной координатой k_1 и $\omega_1, \dots, \omega_n$ — действительные числа. Тогда для любого натурального числа m , удовлетворяющего неравенствам $1 \leq m < n$, существуют наборы чисел $\omega'_1, \dots, \omega'_n, \omega''_1, \dots, \omega''_n$, сколь угодно близкие соответственно к числам $\omega_1, \dots, \omega_n$ и такие, что все решетки

$$\begin{aligned} V' &= \{(k_1, \dots, k_n) \in V \mid \omega'_1 k_1 + \dots + \omega'_n k_n = 0\}, \\ V'' &= \{(k_1, \dots, k_n) \in V \mid \omega''_1 k_1 + \dots + \omega''_n k_n = 0\}, \\ W' &= V' \cap W, \quad W'' = V'' \cap W \end{aligned}$$

имеют ранг m , причем $W'' = V''$, а $W' \subset V'$ — подгруппа индекса 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем выбрать иррациональные числа $\alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$, сколь угодно близкие соответственно к $\omega_{m+2}, \dots, \omega_n$ и такие, что числа $1, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда положим $\omega'_i = \omega''_i = \alpha_i$ при $i \geq m+2$. Мы можем выбрать рациональные числа

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p'_2}{q}, \frac{p''_2}{q}, \frac{p_3}{q}, \dots, \frac{p_{m+1}}{q},$$

сколь угодно близкие к $\omega_1, \dots, \omega_{m+1}$ ($p'_2/q, p''_2/q$ близки к ω_2) и такие, что числители p_1, p'_2 нечетные, а числители $p''_2, p_3, \dots, p_{m+1}$ четные. Тогда положим

$$\begin{aligned} \omega'_i &= \omega''_i = \frac{p_i}{q} \quad \text{при } i = 1, 3, \dots, m+1, \\ \omega'_2 &= \frac{p'_2}{q}, \quad \omega''_2 = \frac{p''_2}{q}. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно проверить, что наборы чисел $\omega'_1, \dots, \omega'_n, \omega''_1, \dots, \omega''_n$ искомые. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $X \in M_{n,k}(M_{n,k}^{(0)})$; тогда в любой окрестности U точки X существуют точки X', X'' такие, что числа Лефшеца $\rho_0(X'), \rho_0(X'')$ равны любому наперед взятому числу ρ_0 , удовлетворяющему неравенствам $1 \leq \rho_0 \leq 10$, причем поверхность X' принадлежит первому типу, а поверхность X'' принадлежит второму типу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем применять обозначения из доказательства теоремы 3.5. Пусть V — ортогональная проекция L^- на $L_n^- \otimes \mathbb{R}$, а W — ортогональная проекция $L^- \setminus C$, где C — множество элементов $c \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_- = L^-$ таких, что $d_3^{0,2}(c) \neq 0$. Тогда V — решетка ранга 11, а $W \subset V$ — подрешетка индекса 2, так как $h \notin C$. Пусть $e_1 \in V$ — проекция примитивного элемента $c \in C$; тогда e_1 — также примитивный элемент. Дополним e_1 до базиса $e_1, e_2, \dots, e_{11}$ решетки V . Этот базис задает изоморфизм $V = \mathbb{Z}^{11}$, при котором решетка W переходит в решетку,

описанную в лемме 3.7. Если $c \in L^-$ и $c_h \in V$ – его проекция, то $\omega_- \cdot c = \omega_- \cdot c_h$. Отсюда следует, что ранг решеток

$$\{v \in V \mid \omega_- \cdot v = 0\}, \quad \{w \in W \mid \omega_- \cdot w = 0\}$$

равен $11 - \rho_0(X)$, причем поверхность X принадлежит второму типу, если и только если вторая решетка равна первой. Пусть $\omega_i = \omega_- \cdot e_i$, $1 \leq i \leq 11$, $v = k_1 e_1 + \dots + k_{11} e_{11}$; тогда $\omega_- \cdot v = \omega_1 k_1 + \dots + \omega_{11} k_{11}$. Перейдем к доказательству существования поверхностей X' , X'' . Пусть $m = 11 - \rho_0$ и $\omega'_1, \dots, \omega'_{11}$, $\omega''_1, \dots, \omega''_{11}$ – наборы чисел, которые дает лемма 3.7. Эти наборы задают элементы $\omega'_-, \omega''_- \in L_h^- \otimes \mathbb{R}$ такие, что

$$\omega'_- \cdot e_i = \omega'_i, \quad \omega''_- \cdot e_i = \omega''_i, \quad 1 \leq i \leq 11.$$

Положим

$$\omega'_+ = \left(\frac{\omega'^2_-}{\omega_+^2} \right)^{1/2} \omega_+, \quad \omega''_+ = \left(\frac{\omega''^2_-}{\omega_+^2} \right)^{1/2} \omega_+;$$

тогда точки $([\omega'_+], [\omega'_-]), ([\omega''_+], [\omega''_-]) \in \mathcal{L}^+ \times \mathcal{L}^-$ определяют требуемые поверхности X' , X'' . Теорема доказана.

3.3. Отображение Альбанезе. Пусть X – компактное келерово многообразие, $x_0 \in X$ – фиксированная точка; тогда определено отображение Альбанезе $\mu: X \rightarrow A$. Напомним его определение. Если $V = \Omega^1(X)^*$ – двойственное пространство к пространству голоморфных 1-форм на X , а также $U = H_1(X, \mathbb{Z})/\text{Tors}$, то имеется вложение $U \subset V$, заданное интегрированием:

$$u \mapsto u(\omega) = \int_u \omega,$$

и многообразие Альбанезе A равно V/U . Тогда отображение Альбанезе $\mu: X \rightarrow A$ устроено следующим образом:

$$\mu(x) = \int_{x_0}^x \omega \mod U.$$

Пусть теперь $g: X \rightarrow X$ – антиголоморфная инволюция, т.е. вещественная структура; тогда на многообразии Альбанезе возникает вещественная структура $\theta: A \rightarrow A$ из антилинейной инволюции $\theta: V \rightarrow V$, определенной правилом:

$$\theta(v)(\omega) = \overline{v(g^*(\omega))},$$

где $v \in V$, $\omega \in \Omega^1(X)$, а черта означает комплексное сопряжение. Заметим, что $\theta(U) = U$, как и должно быть, а точнее, гомоморфизм $\theta: U \rightarrow U$ совпадает с гомоморфизмом

$$g_*: H_1(X, \mathbb{Z})/\text{Tors} \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})/\text{Tors}.$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{\theta} & A \end{array} \quad (3.2)$$

Она будет коммутативной тогда и только тогда, когда $\mu(g(x_0)) = 0$. Если x_0 – вещественная точка, т.е. $g(x_0) = x_0$, то это равенство выполняется, и диаграмма (3.2) коммутативна. Но далее мы предполагаем, что на X нет вещественных точек.

Обозначим через $A^\pm$ инвариантную и антиинвариантную подгруппы A относительно инволюции θ , это компактные коммутативные группы Ли. Через $A_0^\pm$ будем обозначать связные компоненты, содержащие нуль. Тогда существует изоморфизм

$$A^\pm = A_0^\pm \oplus (\mathbb{Z}/2)^d,$$

где $d = \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, U)$ (см. [4]). Заметим также, что $A_0^\pm = V^\pm/U^\pm$, где $V^\pm, U^\pm$ – инвариантные и антиинвариантные подгруппы V, U относительно инволюции θ .

ЛЕММА 3.9. Положим $a_0 = \mu(g(x_0))$; тогда $a_0 \in A^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \theta(a_0) &= \theta(\mu(g(x_0))) = \theta\left(\int_{x_0}^{g(x_0)} \omega \bmod U\right) \\ &= \theta\left(\int_{x_0}^{g(x_0)} \omega\right) \bmod U = \overline{\int_{x_0}^{g(x_0)} g^*(\omega)} \bmod U \\ &= \int_{x_0}^{g(x_0)} g^*(\omega) \bmod U = \int_{g(x_0)}^{x_0} \omega \bmod U = - \int_{x_0}^{g(x_0)} \omega \bmod U = -a_0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь отображение $g_A: A \rightarrow A$, определенное равенством $g_A(a) = \theta(a) + a_0$; тогда из леммы 3.9 вытекает, что $g_A: A \rightarrow A$ – антиголоморфная инволюция, т.е. вещественная структура. Неподвижные точки инволюции g_A будем называть *вещественными*, множество которых обозначим через $A(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 3.10. Множество $A(\mathbb{R})$ непустое тогда и только тогда, когда $a_0 \in A_0^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $A(\mathbb{R})$ непустое тогда и только тогда, когда существует элемент $a \in A$ такой, что $\theta(a) + a_0 = a$, т.е. $a_0 = a - \theta(a)$. Осталось заметить, что выполняется равенство $A_0^- = (1 - \theta)A$. Лемма доказана.

Заметим также, что если $a_0 \in A_0^-$, то a_0 делится на 2 в A_0^- и выполняется равенство

$$A(\mathbb{R}) = A^+ + \frac{a_0}{2}.$$

Отметим еще, что определен канонический гомоморфизм групп

$$\delta: A^- \rightarrow H^2(G, U) \quad (3.3)$$

следующим образом. Пусть $a \in A^-$; соединим точку 0 с точкой a кривой Γ_a в A и рассмотрим цикл $\Gamma_a + \theta(\Gamma_a)$. Он определяет инвариантный класс гомологий $[\Gamma_a + \theta(\Gamma_a)] \in H_1(A, \mathbb{Z}) = U$, который определяет класс когомологий $\delta(a) \in H^2(G, U)$.

ЛЕММА 3.11. *Ядро гомоморфизма (3.3) равно A_0^- .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим группу второго порядка $G^- = \{1, -\theta\}$; тогда из точной последовательности G^- -модулей

$$0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow A \rightarrow 0$$

получаем следующую точную последовательность групп:

$$0 \rightarrow U^{G^-} \rightarrow V^{G^-} \rightarrow A^{G^-} \xrightarrow{\delta} H^1(G^-, U) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} U^{G^-} &= U^-, & V^{G^-} &= V^-, & A^{G^-} &= A^-, \\ H^1(G^-, U) &= H^2(G, U), & V^-/U^- &= A_0^-, \end{aligned}$$

а гомоморфизм (3.3) совпадает с гомоморфизмом δ в точной последовательности (3.4). Лемма доказана.

Определим теперь канонический класс когомологий

$$\delta_X \in H^2(G, H_1(X, \mathbb{Z})/\text{Tors}) = H^2(G, U).$$

Пусть Γ – кривая в X , соединяющая точку x_0 с точкой $g(x_0)$; тогда цикл $\Gamma + g(\Gamma)$ задает класс когомологий δ_X .

ТЕОРЕМА 3.12. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) класс когомологий $\mathbf{t}_X^2 \in H^2(X; G, \mathbb{Z})$ не равен нулю;
- 2) класс когомологий $\delta_X \in H^2(G, H_1(X, \mathbb{Z})/\text{Tors})$ равен нулю;
- 3) множество $A(\mathbb{R})$ непустое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{g_A} & A \end{array}$$

Она будет коммутативной, соответствующая проверка аналогична доказательству леммы 3.9, поэтому мы ее опускаем. Из этой коммутативной диаграммы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H^1(A, \mathbb{Z})) & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & H^2(G, H^0(A, \mathbb{Z})) \\ \cong \downarrow \mu^* & & \cong \downarrow \mu^* \\ H^0(G, H^1(X, \mathbb{Z})) & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & H^2(G, H^0(X, \mathbb{Z})) \end{array}$$

в которой вертикальные гомоморфизмы являются изоморфизмами. Поэтому равенство $\mathbf{t}_X^2 = 0$ равносильно равенству $\mathbf{t}_A^2 = 0$. По теореме 1.7 равенство $\mathbf{t}_A^2 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда множество $A(\mathbb{R})$ пустое. Итак, доказана эквивалентность первого и третьего условий теоремы. Осталось заметить, что из лемм 3.10, 3.11 вытекает равносильность второго и третьего условий. Теорема доказана.

3.4. Поверхности без вещественных точек. Далее X – неособая вещественная проективная поверхность без вещественных точек. Пусть $L = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{Tors}$, Q – билинейная форма на L , заданная $\smile$ -произведением, $\varphi: L \rightarrow L$ – инволюция, индуцированная вещественной структурой $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Тогда для тройки (L, Q, φ) определены инварианты a , $t_{(-)}$, δ_φ . Заметим, что $\delta_\varphi = 0$, так как класс когомологий $[X(\mathbb{R})]^* \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ является характеристическим классом квадратичной формы $x \cdot g^*(x)$ на $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, а у нас $[X(\mathbb{R})]^* = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. Пусть X – поверхность без вещественных точек; тогда $t_{(-)} = (1/2)h^{1,1} - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из разложения Ходжа

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{0,2} \oplus H^{1,1}$$

получаем разложение

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}) = H \oplus H_{\mathbb{R}}^{1,1},$$

где $H = \{\omega + \bar{\omega} \mid \omega \in H^{2,0}\}$, $H_{\mathbb{R}}^{1,1} = H^{1,1} \cap H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$.

Пусть H_+ , $H_+^{1,1}$ – инвариантные относительно инволюции φ подпространства H , $H_{\mathbb{R}}^{1,1}$ соответственно. Тогда квадратичная форма $Q(x, x)$ на H_+ положительно определена, а на $H_+^{1,1}$ отрицательно определена. Следовательно, $t_{(-)} = h_+^{1,1}$, где $h_+^{1,1} = \dim H_+^{1,1}$. Но из формулы Лефшеца о неподвижных точках

$$\chi(X(\mathbb{R})) = 2 + 2h_+^{1,1} - h^{1,1} = 0.$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. Пусть X – поверхность без вещественных точек и $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$; тогда

$$a = \frac{1}{2}h^2 - 1,$$

где $h^2 = \text{rk } H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Так как $H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = 0$, то $\Pi_{\infty}^{3,2} = 0$. Из равенства $t_X^3 = 0$ следует, что дифференциалы $d_3^{p,2}$, $d_3^{p,4}$ ненулевые, поэтому

$$\dim \Pi_{\infty}^{3,2} = \dim \Pi_2^{3,2} - 2.$$

Осталось заметить, что $\dim \Pi_2^{3,2} = h^2 - 2a$. Предложение доказано.

Итак, для поверхности без вещественных точек с $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$ выполняются равенства

$$a = \frac{1}{2}h^2 - 1, \quad t_{(-)} = \frac{1}{2}h^{1,1}, \quad \delta_{\varphi} = 0. \quad (3.5)$$

Выполнение этих равенств не является достаточным условием отсутствия вещественных точек на поверхности с $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$. Например, для квадрики $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ равенства (3.5) выполняются, но $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ – вещественный тор. Заметим, что если $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и выполняются условия (3.5), то обязательно множество $X(\mathbb{R})$ является вещественным тором. Для доказательства этого факта нужно повторить начало доказательства предложения 3.1. Тогда получим неравенство

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq 4$$

и равенство $\chi(X(\mathbb{R})) = 0$. А из условия $\delta_{\varphi} = 0$ следует, что множество $X(\mathbb{R})$ ориентируемое (см. [1] или [9]). Если использовать все доказательство предложения 3.1, то получим следующее его обобщение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. Пусть вещественная проективная поверхность X удовлетворяет условиям

$$H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0, \quad w_2(X(\mathbb{C})) = 0, \quad \sigma(X(\mathbb{C})) \equiv 16 \pmod{32}.$$

Тогда из равенств (3.5) следует, что $X(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Далее мы будем предполагать, что X – вещественная иррациональная геометрически-линейчатая поверхность. Это означает, что $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$ – комплексная иррациональная геометрически-линейчатая поверхность, т.е. существует сюръективный морфизм $\pi: X_{\mathbb{C}} \rightarrow C$ на неособую кривую рода больше 0 такой, что для каждой точки $y \in C$ слой $(X_{\mathbb{C}})_y$ изоморфен $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Если мы рассмотрим отображение Альбанезе $\mu: X_{\mathbb{C}} \rightarrow A(X_{\mathbb{C}})$, то кривая C совпадает с образом $\mu(X_{\mathbb{C}})$, а проекция $\pi: X_{\mathbb{C}} \rightarrow C$ совпадает с отображением $\mu: X_{\mathbb{C}} \rightarrow \mu(X_{\mathbb{C}})$. Таким образом, если $\mu: X \rightarrow A$ – отображение Альбанезе для вещественной поверхности из п. 3.3 и E – его образ, то $C = E_{\mathbb{C}}$ и проекция $\pi: X_{\mathbb{C}} \rightarrow C$ совпадает с отображением $\mu: X_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$.

Поверхность X не имеет вещественных точек, но кривая E может иметь вещественные точки. Рассмотрим только случай, когда $E(\mathbb{R}) = \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.16. Пусть X – вещественная иррациональная линейчатая поверхность, $\mu: X \rightarrow E$ – соответствующая проекция, q – род кривой E и $E(\mathbb{R}) = \emptyset$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) X принадлежит второму типу;
- 2) выполняются равенства $\text{Br}(X) = 0$, $W(X) = (\mathbb{Z}/2)^q \oplus \mathbb{Z}/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая E принадлежит второму типу, поэтому поверхность X также принадлежит второму типу. Пусть $F = E(\mathbb{C})/G$; тогда $H^1(E(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^1(F, \mathbb{F}_2)$. Положим $h^1(F) = \dim H^1(F, \mathbb{F}_2)$; тогда $h^1(F) = q + 1$. Действительно, для эйлеровой характеристики $\chi(F)$ имеем равенства

$$\begin{aligned} \chi(F) &= \frac{1}{2}\chi(E(\mathbb{C})) = 1 - q, \\ \chi(F) &= 2 - h^1(F). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что гомоморфизм

$$\mu^*: H^1(E(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \quad (3.6)$$

является изоморфизмом. Для этого рассмотрим гомоморфизм спектральных последовательностей $\mu^*: \Pi(E(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \Pi(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Заметим, что гомоморфизм

$$\mu^*: \Pi_2^{p,q}(E(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \Pi_2^{p,q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом при $q = 0, 1$, а в силу теоремы 3.12 равенство $t_E^2 = 0$ равносильно равенству $t_X^2 = 0$. Следовательно, гомоморфизм

$$\mu^*: \Pi_{\infty}^{p,q}(E(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \Pi_{\infty}^{p,q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом при $p = 0, q = 1$ и $p = 1, q = 0$, поэтому гомоморфизм (3.6) также будет изоморфизмом. Из равенств

$$H^1(Y, \mathbb{F}_2) = H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^1(E(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = H^1(F, \mathbb{F}_2)$$

получаем равенство $h^1(Y) = q + 1$. Так как $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, то $\rho_0(X) = 0$, поэтому из предложения 2.7 получаем равенство $\text{Br}(X) = 0$. Из точной последовательности Куммера имеем равенство

$$H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) / H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = {}_2\text{Br}(X) = 0,$$

поэтому

$$k^1(X) = \dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = h^1(Y) = q + 1.$$

Осталось применить теорему 2.9. Предложение доказано.

Список литературы

1. Виро О. Я. Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет // УМН. 1986. Т. 41. № 3. С. 45–67.
2. Grothendick A. Le groupe de Brauer // Dix Exposés sur la Cohomologie des Schemas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 46–188.
3. Калинин И. С. Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 2. С. 91–110.
4. Краснов В. А. Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 365–373.
5. Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
6. Краснов В. А. Отображение Альбанезе для GMZ-многообразий // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 5. С. 739–747.
7. Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 47. № 2. С. 268–297.
8. Краснов В. А. О классах когомологий, определенных вещественными точками вещественной алгебраической GM-поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 210–221.
9. Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 210–221.
10. Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
11. Краснов В. А. Этальные и эквивариантные когомологии вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 165–186.

12. *Lefschetz S.* On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications of Abelian varieties // Trans. Amer. Math. Soc. 1921. V. 22. P. 327–482.
13. *Manin Y. I.* Le groupe de Brauer–Grothendick en géometrie diophantienne // Actes du Congrès Intern. Math. Nice. 1971. V. 1. P. 401–411.
14. *Милн Дж.* Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
15. *Мойшезон Б. Г.* Об алгебраических классах гомологий на алгебраических многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 2. С. 225–268.
16. *Никulin В. В.* Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 111–177.
17. *Nikulin V. V.* On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic geometry and its applications. Yaroslavl', 1992. P. 114–136.
18. *Parimala R., Sujatha R.* Levels of non-real function fields of real rational surfaces // Amer. J. Math. 1991. V. 113. № 4. P. 757–779.
19. *Розлин В. А.* Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 6. № 4. С. 58–64.
20. *Sujatha R.* Witt groups of real projective surfaces // Math. Ann. 1990. V. 288. P. 89–101.
21. *Харламов В. М.* Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{RP}^3$ // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 4. С. 55–68.

Поступило в редакцию
4.II.1998