Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Солдатов, Об индексе операторов с конечным символом, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 4, 171–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/im258>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:42:57

УДК 517.9

А. П. Солдатов

Об индексе операторов с концевым символом

В [1] изучен класс одномерных сингулярных интегро-функциональных уравнений, тесно связанный с эллиптическими краевыми задачами на плоскости в областях с кусочногладкой границей. Критерий фредгольмовости этих уравнений формулируется в терминах так называемого концевого символа. Последний представляет собой полу-почти-периодическую матрицу-функцию, которая ставится в соответствие рассматриваемому уравнению. В данной работе подобная ситуация изучается с более общей точки зрения.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Операторы типа свертки и C^μ -мультипликаторы

Пусть $C^\mu = C^\mu(\mathbb{R})$, $0 < \mu < 1$, — банахово пространство комплексных функций на действительной прямой с нормой

$$|\varphi|_{C^\mu} = \sup_t |\varphi(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}. \quad (1.1)$$

Наряду с C^μ будут также рассматриваться и пространства $C^{n+\mu}$, $n = 1, 2, \dots$, дифференцируемых функций φ , принадлежащих C^μ вместе со своими производными $\varphi^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Относительно нормы

$$|\varphi|_{C^{n+\mu}} = \sum_{i=0}^n |\varphi^{(i)}|_{C^\mu}$$

пространство $C^{n+\mu}$ является банаховой алгеброй по умножению с соответствующей оценкой $|\varphi\psi| \leq |\varphi| |\psi|$ для нормы произведения.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\mu)$ обозначает банахову алгебру всех ограниченных в C^μ линейных операторов. Операторы сдвига, отражения и комплексного сопряжения

$$(P_s\varphi)(t) = \varphi(t+s), \quad (T\varphi)(t) = \varphi(-t), \quad (J\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}, \quad (1.2)$$

играющие ниже важную роль, изометричны в C^μ . Последние два оператора инволютивны и определяют в $\mathcal{L}$ инволюции (т.е. изоморфизмы алгебры, совпадающие со своим обратным) по формуле

$$N^\vee = TNT, \quad \overline{N} = JNJ. \quad (1.3)$$

Обозначим $\mathcal{S}$ класс функций $\varphi(t) \in C^\infty$, убывающих на ∞ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени t . Пусть $f \in \mathcal{S}'$ – обобщенная функция медленного роста [2]. Ее преобразование Фурье

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \quad \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} \varphi(t) dt,$$

называется C^μ -мультипликатором, если действующий в $\mathcal{S}$ оператор свертки $\varphi \rightarrow f * \varphi$ ограничен по C^μ -норме (1.1). Явное описание C^μ -мультипликаторов было дано Тейблсоном [3] в терминах образа Фурье пространства $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ суммируемых функций.

Более употребительны L^p -мультипликаторы, их связь с операторами R в $L^p(\mathbb{R})$, коммутирующими с операторами сдвига:

$$RP_s = P_s R, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

детально изучена Хермандером [4]. Аналогичная связь с C^μ -мультипликаторами является предметом рассмотрения в данном параграфе.

Обозначим $\mathcal{R}_1$ множество всех операторов $R \in \mathcal{L}$ со свойством (1.4). Очевидно, $\mathcal{R}_1$ является замкнутой подалгеброй $\mathcal{L}$. Примерами R могут служить сами операторы P_s , а также операторы свертки $\varphi \rightarrow f * \varphi$ с суммируемыми функциями $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$(f * \varphi)(t_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t_0 - t) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t_0 - t) dt. \quad (1.5)$$

Из последнего выражения непосредственно видно, что оператор свертки ограничен в C^μ , причем

$$|f * \varphi|_{C^\mu} \leq |f|_{L^1} |\varphi|_{C^\mu}. \quad (1.6)$$

Как и в теории обобщенных функций, понятие свертки можно расширить. Каждому оператору $R \in \mathcal{R}_1$ поставим в соответствие ограниченный линейный функционал $\sigma R \in (C^\mu)^*$ по правилу

$$\langle \sigma R, \varphi \rangle = (RT\varphi)(0). \quad (1.7)$$

В силу (1.4) функционалом $f = \sigma R$ оператор R полностью определяется:

$$(R\varphi)(s) = \langle f, TP_s \varphi \rangle. \quad (1.8)$$

В случае $f \in L^1$ относительно естественного вложения $L^1 \subseteq (C^\mu)^*$ соотношение (1.8) переходит в (1.5).

Сужение линейного функционала $f \in (C^\mu)^*$ на C_0^∞ определяет обобщенную функцию, которую обозначим тем же символом. При этом формула (1.8) для $\varphi \in C_0^\infty$ соответствует свертке

$$R\varphi = f * \varphi \in C_0^\infty, \quad (1.9)$$

принятой в теории обобщенных функций [2]. По этой причине R называем *оператором типа свертки* и в общем случае. Для произвольного $f \in (C^\mu)^*$ можно лишь утверждать, что оператор (1.8) непрерывен из C^μ в пространство ограниченных функций на прямой. Опишем в терминах $(C^\mu)^*$ свойство ограниченности R в C^μ .

Сопряженные к (1.2) операторы, которые также изометричны в $(C^\mu)^*$, удобно обозначать теми же символами:

$$P_s^* = P_{-s}, \quad T^* = T, \quad J = J^*.$$

Аналогичное соглашение используем и для операторов умножения $\varphi \rightarrow a\varphi$, полагая $\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle$.

ЛЕММА 1. Для $f \in (C^\mu)^*$ оператор (1.8) ограничен в C^μ тогда и только тогда, когда

$$\|f\| = |f|_{(C^\mu)^*} + \sup_{0 < s \leq 1} s^{-\mu} |P_s f - f|_{(C^\mu)^*} < \infty,$$

при этом нормы $|R|_{\mathcal{L}}$ и $\|\sigma R\|$ эквивалентны. Если функция a принадлежит $C^{1+\mu}$ и $\|f\| < \infty$, то

$$\|af\| \leq |a|_{C^{1+\mu}} \|f\|, \quad (1.10)$$

так что оператор R с $\sigma R = af$ принадлежит $\mathcal{R}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первого утверждения с учетом изометричности P_s и T непосредственно следует из определений.

Выписывая равенство

$$\langle P_s(af) - af, \varphi \rangle = \langle f, aP_{-s}\varphi - a\varphi \rangle = \langle f, (a - P_{-s}a)P_{-s}\varphi \rangle + \langle P_s f - f, a\varphi \rangle,$$

получим

$$|P_s(af) - af|_{(C^\mu)^*} \leq |f|_{(C^\mu)^*} |P_s a - a|_{C^\mu} + |P_s f - f|_{(C^\mu)^*} |a|_{C^\mu}.$$

Разность

$$(P_s a - a)(t) = a(t + s) - a(t)$$

можем представить в форме свертки от производной a' по формуле

$$P_s a - a = h_s * (a'), \quad h_s(t) = \begin{cases} 1, & -s \leq t \leq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Отсюда согласно (1.6)

$$|P_s a - a|_{C^\mu} \leq s |a'|_{C^\mu}.$$

Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, легко получим (1.10).

Для комплексного числа ζ , $\operatorname{Re} \zeta = 0$, функция $e^{\zeta t}$ принадлежит C^μ , так что оператору R можем поставить в соответствие функцию

$$(mR)(\zeta) = (Re^{\zeta t})(0) \quad (1.12)$$

на мнимой оси, которую назовем *мультипликатором* R . Название мотивируется тем, что отображение m является гомоморфизмом $\mathcal{R}_1$ в алгебру ограниченных функций с поточечными операциями.

В самом деле, из (1.4), (1.12) непосредственно следует, что для фиксированного ζ функция $e_\zeta(t) = e^{\zeta t}$ является собственной функцией оператора R , отвечающей собственному значению $\lambda = (mR)(\zeta)$. Отсюда же выводится оценка

$$|(mR)(\zeta)| \leq |R|_{\mathcal{L}}, \quad \operatorname{Re} \zeta = 0. \quad (1.13)$$

Согласно (1.7) и (1.13) отображения m и σ связаны соотношением

$$(mR)(\zeta) = \langle \sigma R, e^{-\zeta t} \rangle; \quad (1.14)$$

в частности, для $f = \sigma R \in L^1$ мультипликатором служит (комплексное) преобразование Фурье

$$(\mathcal{F}f)(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\zeta t} dt. \quad (1.15)$$

Заметим, что инволюции (1.3) инвариантны на алгебре $\mathcal{R}_1$ и связаны с отображениями σ и m соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma(R^\vee) &= T(\sigma R), & \sigma \bar{R} &= J(\sigma R), \\ m(R^\vee)(\zeta) &= (mR)(-\zeta), & (m\bar{R})(\zeta) &= \overline{(mR)(\bar{\zeta})}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Алгебра $\mathcal{R}_1$ всех операторов типа свертки слишком широка для наших целей. Обозначим C_0^μ класс функций $\varphi \in C^\mu(\mathbb{R})$ с компактным носителем. Пусть $(C^\mu)_0^*$ имеет аналогичный смысл для функционалов $f \in (C^\mu)^*$. Таким образом, $f \in (C^\mu)_0^*$ равносильно тому, что $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всех функций $\varphi \in C^\mu$, обращающихся в нуль на некотором компактном отрезке I прямой $\mathbb{R}$. Этот факт можем выразить также равенством $f = \chi f$, где $\chi \in C_0^\infty$ и $\chi(t) \equiv 1$ в окрестности I . Рассмотрим билинейную форму

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \psi(t) dt,$$

имеющую смысл для любой пары функций $\varphi, \psi \in C^\mu$, одна из которых принадлежит C_0^μ .

Операторы R свертки (1.5), для которых $f = \sigma R \in L^1$, согласно (1.16) обладают свойством

$$(R\varphi, \psi) = (\varphi, R^\vee \psi), \quad \varphi, \psi \in C_0^\mu. \quad (1.17)$$

Это же справедливо и для $R = P_s$. В последнем случае, очевидно, $P_s^* = P_s^\vee = P_{-s}$.

Обозначим $\tilde{\mathcal{R}}$ класс всех операторов $R \in \mathcal{R}_1$, для которых $\sigma R \in (C^\mu)_0^*$ и выполнено (1.17). Нетрудно видеть, что $\tilde{\mathcal{R}}$ является подалгеброй $\mathcal{R}_1$. Пусть $\tilde{\mathcal{R}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{R}}$

состоит из всех операторов R с $\sigma R \in C_0^\infty$. Банаховы алгебры, полученные замыканием $\tilde{\mathcal{R}}$ и $\tilde{\mathcal{R}}_0$ в $\mathcal{R}_1$, обозначим соответственно $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_0$. Заметим, что в силу (1.6) и плотности C_0^∞ в L^1 операторы свертки (1.5) с $f \in L^1$ принадлежит $\mathcal{R}_0$. Если $f = \sigma R \in (C^\mu)_0^*$, то $f = \chi f$ для подходящей срезающей функции $\chi \in C_0^\infty$. Поскольку отображение $\zeta \rightarrow \chi(t)e^{\zeta t}$ аналитично $\mathbb{C} \rightarrow C^\mu$, в соответствии с (1.14) отсюда следует аналитичность мультипликатора $(mR)(\zeta)$ на всей плоскости.

В силу (1.13) и соображений плотности отсюда заключаем, что m является гомоморфизмом $\mathcal{R}$ в алгебру C непрерывных и ограниченных на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$ функций. В случае $R \in \mathcal{R}_0$ мультипликатор mR принадлежит подалгебре C функций, исчезающих на ∞ , которую обозначим C_0 .

ТЕОРЕМА 1. *Гомоморфизм $m: \mathcal{R} \rightarrow C$ взаимно однозначен, алгебра $\mathcal{R}$ коммутативна и $\mathcal{R}_0$ является ее идеалом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in (C^\mu)_0^*$, $f_0 \in C_0^\infty$, рассматриваемых как обобщенные функции, определена операция свертки, обладающая свойствами [2] коммутативности и ассоциативности:

$$f * (f_0 * \varphi) = f_0 * (f * \varphi) = f_1 * \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty,$$

где положено $f_1 = f * f_0 \in C_0^\infty$. Следовательно, если $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ и $R_0, R_1 \in \tilde{\mathcal{R}}_0$ определяют $\sigma R = f$ и $\sigma R_j = f_j$, $j = 0, 1$, то с учетом (1.9)

$$RR_0\varphi = R_0R\varphi = R_1\varphi.$$

В частности, оператор $R_2 = RR_0 - R_0R$ принадлежит $\tilde{\mathcal{R}}$ и $R_2\varphi = 0$, $\varphi \in C_0^\infty$. Аналогичным свойством обладает и $R_2^\vee$, так что с учетом (1.17) $(R_2\varphi, \psi) = 0$ для любых $\varphi \in C_0^\mu$, $\psi \in C_0^\infty$. Следовательно, $R_2\varphi = 0$, $\varphi \in C_0^\mu$. Поскольку $\sigma R \in (C^\mu)_0^*$, отсюда $R_2 = 0$.

Аналогично проверяется, что и $R_0R - R_1 = 0$. Таким образом, алгебра $\tilde{\mathcal{R}}$ коммутативна, а $\tilde{\mathcal{R}}_0$ является ее идеалом. В силу соображений плотности это доказывает вторую часть теоремы.

Пусть $R \in \mathcal{R}$. Элемент $f = \sigma R \in (C^\mu)^*$ можно рассматривать как медленно растущее распределение $f \in \mathcal{S}'$. Покажем, что его преобразование Фурье $\hat{f}$ является обычной функцией и связано с мультипликатором (1.14) соотношением

$$\langle f, e^{i\xi} \rangle = \hat{f}(\xi). \quad (1.18)$$

В случае $f \in (C^\mu)_0^*$ это соотношение хорошо известно [2]. Пусть $R_n \in \tilde{\mathcal{R}}$ и $R_n \rightarrow R$ по операторной норме. Тогда mR_n стремится к mR в C (т.е. по $\sup$ -норме) и, в частности, $(mR_n)(i\xi) \rightarrow (mR)(i\xi)$ в $\mathcal{S}'$. Поскольку $f_n = \sigma R_n$ сходится к $f = \sigma R$ в $\mathcal{S}'$ и преобразование Фурье непрерывно в $\mathcal{S}'$, то, аналогично, $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ в $\mathcal{S}'$. Поэтому остается (1.18) записать для f_n и перейти к пределу.

Пусть теперь $mR = 0$ для некоторого $R \in \mathcal{R}$. Тогда в силу (1.14), (1.18) функционал $f = \sigma R$ как элемент $\mathcal{S}'$ равен нулю, т.е. $\langle f, \varphi \rangle = 0$, $\varphi \in C_0^\infty$. Согласно (1.9) отсюда $R\varphi = 0$, $\varphi \in C_0^\infty$. Этим же свойством обладает и оператор $R^\vee$. В силу соображений плотности соотношение (1.17) справедливо для всех $R \in \mathcal{R}$. Отсюда заключаем, что

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in C_0^\mu. \quad (1.19)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на применении леммы 1. Согласно этой лемме подпространство $\sigma\mathcal{R} = X \subseteq (C^\mu)^*$ банахово относительно нормы $\|\cdot\|$, причем $\sigma\mathcal{R} = \tilde{X}$ плотно в X . Зафиксируем функцию $\chi(t) \in C_0^\infty$, тождественно равную 1 в окрестности $t = 0$, и рассмотрим последовательность $\chi_n(t) = \chi(nt)$, которая, очевидно, равномерно ограничена в $C^{1+\mu}$. На основании (1.10) операторы умножения $f \rightarrow \chi_n f$ равномерно ограничены в $\mathcal{L}(X)$. С другой стороны, для $f \in \tilde{X} \subseteq (C^\mu)_0^*$ и достаточно больших n выполнено равенство $\chi_n f = f$. Поскольку $\tilde{X}$ плотно в X , отсюда заключаем, что $\|\chi_n f - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $f \in \chi$. В частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \chi_n \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in C^\mu.$$

С учетом (1.19) отсюда $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in C^\mu$, что завершает доказательство теоремы.

В качестве приложения свойства коммутативности алгебры $\mathcal{R}$ отметим формулу дифференцирования:

$$(R\varphi)' = R\varphi', \quad R \in \mathcal{R}, \quad (1.20)$$

справедливую для любых $\varphi \in C^{1+\mu}$.

В самом деле, в обозначениях (1.11) имеем

$$P_s R\varphi - R\varphi = R(P_s \varphi - \varphi) = R[h_s * \varphi'].$$

Поскольку $RR_s = R_s R$, где $\sigma R_s = h_s$, то

$$s^{-1}(P_s R\varphi - R\varphi) = s^{-1}h_s * (R\varphi').$$

Остается заметить, что правая часть сходится к $R\varphi'$ по $\sup$ -норме при $s \rightarrow \infty$.

Важным примером элемента $\tilde{\mathcal{R}}$ служит оператор S свертки с функцией

$$(\sigma S)(t) = \frac{f_0(t)}{t}, \quad f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad f_0(0) = -\frac{1}{\pi i}. \quad (1.21)$$

В этом случае интеграл (1.5) сингулярный и понимается в смысле главного значения по Коши. В силу ограниченности в C^μ сингулярного оператора с ядром Коши [5] имеем оценку

$$|S\varphi|_{C^\mu[-1,1]} \leq C|\varphi|_{C^\mu(\mathbb{R})}.$$

С учетом (1.4) и изометричности P_s отсюда следует ограниченность оператора S в C^μ .

Свойство (1.17) также проверяется без труда. Согласно (1.14) мультипликатором $(mS)(\zeta)$ служит комплексное преобразование Фурье (1.15), где интеграл сингулярный. Последнее условие в (1.21) обеспечивает свойство

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm i\infty} (mS)(\zeta) = \pm 1. \quad (1.22)$$

В самом деле, пусть функция $\tilde{f}_0(t)$ равна $-1/(\pi i)$ при $|t| \leq 1$ и равна нулю при $|t| > 1$. Тогда $[f_0(t) - \tilde{f}_0(t)]/t \in L^1$. Поэтому

$$(mS)(i\xi) - \frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{\sin \xi t}{t} dt \rightarrow 0$$

при $\xi \rightarrow +\infty$, откуда следует (1.22).

В силу (1.16) для операторов $S^\vee$ и $\bar{S}$ пределы (1.22) противоположного знака. В действительности можно утверждать, что

$$S^2 - 1, S + S^\vee, S + \bar{S} \in \tilde{\mathcal{R}}_0. \quad (1.23)$$

Последние два включения следуют непосредственно из (1.16), (1.21), а первое легко получается [1] из общих свойств преобразования Фурье обобщенных функций.

Очевидно, мультипликатором конечной линейной комбинации $\sum c_s P_s$ операторов сдвига является тригонометрический полином $\sum c_s e^{\zeta s}$. Поэтому отображение m переводит элементы замкнутой алгебры, порожденной P_s , $s \in \mathbb{R}$, в почти периодические функции на мнимой оси. Согласно (1.22) присоединение к этой алгебре оператора S приводит к полу-почти-периодическим функциям, для которых $x(\zeta) - x_\pm(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm i\infty$ с некоторыми почти периодическими функциями $x_\pm$.

Рассмотрим алгебры операторов типа свертки в семействе весовых пространств. Условимся под $\rho(t) = e^{\nu t}$, $\rho(t) = e^{\nu|t|}$, $\nu \in \mathbb{R}$, понимать также операторы $\varphi \rightarrow \rho\varphi$ весового умножения. Аналогичный смысл имеет весовое пространство $\rho C^\mu = \{\varphi \mid \rho^{-1}\varphi \in C^\mu\}$ с перенесенной нормой. Очевидно,

$$\begin{aligned} e^{-|\nu||t|} C^\mu &= (e^{\nu t} C^\mu) \cap (e^{-\nu t} C^\mu), \\ e^{|\nu||t|} C^\mu &= (e^{\nu t} C^\mu) + (e^{-\nu t} C^\mu) \end{aligned}$$

с эквивалентностью соответствующим нормам пересечения и суммы двух банаховых пространств [7]. В частности, любой оператор R , ограниченный в каждом из пространств $e^{\pm\nu t} C^\mu$, ограничен в пространствах $e^{\pm\nu|t|}$ их суммы и пересечения, причем

$$|e^{\nu|t|} R e^{-\nu|t|}|_{\mathcal{L}} \leq \max[|e^{\pm\nu t} R e^{\mp\nu t}|_{\mathcal{L}}]. \quad (1.24)$$

Зафиксируем $r > 0$ и обозначим $\mathcal{R}_1\{r\}$ класс операторов $R \in \mathcal{L}(e^{r|t|} C^\mu)$, которые обладают свойством (1.4) и для которых норма

$$|R| = \sup_{|\nu| \leq r} |e^{-\nu t} R e^{\nu t}|_{\mathcal{L}} \quad (1.25)$$

конечна. Относительно этой нормы $\mathcal{R}_1\{r\}$ является банаховой алгеброй. Очевидно, весовые преобразования $R \rightarrow e^{-\nu t} R e^{\nu t}$ являются гомоморфизмами $\mathcal{R}_1\{r\} \rightarrow \mathcal{R}_1$, равномерно ограниченными по $|\nu| \leq r$.

Соотношение (1.7) для $R \in \mathcal{R}_1\{r\}$ определяет линейный функционал σR , непрерывный на $e^{r|t|} C^\mu$, а равенство (1.12) – функцию $(mR)(\zeta)$ в полосе $|\operatorname{Re} \zeta| \leq \nu$, при этом

$$\sigma(e^{-\nu t} R e^{\nu t}) = e^{-\nu t} \sigma R, \quad m(e^{-\nu t} R e^{\nu t})(\zeta) = (mR)(\zeta + \nu). \quad (1.26)$$

Убедимся, что в действительности $\sup$ в (1.25) можно брать по $\nu = \pm r$. Более того, если оператор $R \in \mathcal{L}(e^{r|t|} C^\mu)$ коммутирует с оператором сдвига и ограничен в $e^{\pm r t} C^\mu$, то он принадлежит $\mathcal{R}_1\{r\}$ с оценкой норм

$$|R|_{\mathcal{R}_1\{r\}} \leq M \max[|e^{\pm r t} R e^{\pm r t}|_{\mathcal{L}}].$$

В силу (1.26) и леммы 1 эта оценка сводится к оценке

$$\|e^{-\nu t} f\| \leq M \max[\|e^{\pm r t} f\|], \quad |\nu| \leq r.$$

Выберем пару функций $\chi_{\pm} \in C^{\infty}$ со свойством $\chi_{+}(t) \equiv 1$ ($\chi_{+}(t) \equiv 0$) в окрестности $+\infty$ ($-\infty$), и пусть $\chi_{-} = 1 - \chi_{+}$. Тогда

$$\chi_{\pm}(t)e^{-\nu t} f(t) = a_{\pm}(t)e^{\pm r t} f(t),$$

где $a_{+}(t) = \chi_{+}(t)e^{(-\nu-r)t}$, $a_{-}(t) = \chi_{-}(t)e^{(-\nu+r)t}$ удовлетворяет условиям леммы 1. Отсюда оценка получается непосредственно.

Аналогичным образом убеждаемся, что алгебра $\tilde{\mathcal{R}}$ содержится в $\mathcal{R}_1\{r\}$ при любом r . Как и выше, главный интерес будут представлять замкнутые подалгебры $\mathcal{R}_0\{r\}$ и $\mathcal{R}\{r\}$, полученные замыканием в $\mathcal{R}_1\{r\}$ соответственно $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}$. В силу (1.13), (1.26) отображение m осуществляет непрерывный гомоморфизм $\mathcal{R}\{r\}$ в алгебру непрерывных и ограниченных функций в полосе $|\operatorname{Re} \zeta| \leq \nu$, аналитических внутри нее. Эту алгебру обозначим $C\{r\}$, аналогичный смысл имеет ее подалгебра $C_0\{r\}$ исчезающих на бесконечности функций, которой принадлежат мультипликаторы операторов $R \in \mathcal{R}_0\{r\}$.

Из определения видно, что $\mathcal{R}\{r\}$ можно рассматривать как подалгебру $\mathcal{R}$. Поэтому теорема 1 распространяется на $\mathcal{R}\{r\}$, точнее, в ее формулировке обозначения алгебр можно снабдить символом $\{r\}$.

Рассмотрим подробнее алгебру $M_0 \subseteq C_0$ мультипликаторов операторов $R \in \mathcal{R}_0$, которая является банаховой относительно “перенесенной” нормы $|mR| = |R|_{\mathcal{L}}$. Аналогичный смысл имеет $M_0\{r\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $x(\zeta) - 1 \in M_0$ и функция $x(\zeta)$ обратима в C (т.е. $x(\zeta) \neq 0$, $\operatorname{Re} \zeta = 0$), то $x^{-1}(\zeta) - 1 \in M_0$. Аналогичным свойством обладает и $M_0\{r\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим W_0 алгебру преобразований Фурье (1.15) функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, относительно перенесенной нормы $|\mathcal{F}f| = |f|_{L^1}$ она банахова. В силу (1.6) и плотности C_0^{∞} в L^1 имеем вложения $W_0 \subseteq M_0 \subseteq C_0$, причем каждое из них плотно. Утверждение теоремы для W_0 составляет классический результат Винера [2]. В общем случае воспользуемся теоремой Гельфанда [6] об обратимости элементов коммутативной банаховой алгебры A , которой можно придать следующую формулировку. Заданный на A функционал h назовем *мультипликативным*, если он линеен и $h(x_1 x_2) = h x_1 h x_2$ для всех $x_1, x_2 \in A$. Каждый такой функционал обязательно непрерывен на A [6]. Теорема Гельфанда утверждает, что обратимость x в A равносильна условию $h x \neq 0$ для всех мультипликативных функционалов h .

Пусть h – произвольный мультипликативный функционал на $\mathbb{C} \oplus M_0$, отличный от нуля на M_0 . Обозначим h_0 его сужение на $\mathbb{C} \oplus W_0$. Тогда найдется такая точка ζ_0 , $\operatorname{Re} \zeta_0 = 0$, что

$$h_0 x = x(\zeta_0), \quad x \in \mathbb{C} \oplus W_0. \quad (1.27)$$

Это вытекает из подобного описания всех мультипликативных функционалов на $\mathbb{C} \oplus W_0$ (см., например, [6]). На основании плотности W_0 в C_0 отсюда следует,

что (1.27) справедливо и для $x \in \mathbb{C} \oplus M_0$. Поэтому в силу теоремы Гельфанда условие $x(\zeta) \neq 0$, $\operatorname{Re} \zeta = 0$, необходимо и достаточно для обратимости x в $\mathbb{C} \oplus M_0$.

Доказательство второго утверждения теоремы аналогично доказательству первого, нужно лишь использовать винеровскую алгебру $W_0\{r\}$ -образов преобразования Фурье (1.15) функций $f(t) \in e^{r|t|}L^1$.

§ 2. Операторы с конечным символом

Обозначим $C_{0,c}^\mu$ замыкание в C^μ класса C_0^μ функций с компактным носителем. Обозначение объясняется тем, что указанное подпространство можно описать условием

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\varphi|_{C^\mu[s, s+1]} = 0. \quad (2.1)$$

Заметим, что $C_{0,c}^\mu$ инвариантно относительно умножения на функции из C^μ и, в частности, на весовые функции $e^{\zeta|t|}$ и $e^{\zeta t}$, $\operatorname{Re} \zeta = 0$.

Обозначим C_c^μ расширение $C_{0,c}^\mu$ на два измерения гладкими функциями, постоянными в окрестности $\pm\infty$. Аналогичным образом определяются пространства $C_{0,c}^{n+\mu}$ и $C_c^{n+\mu}$ по отношению к $C^{n+\mu}$.

Введем класс $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1(C^\mu)$ операторов $N \in \mathcal{L}(C^\mu)$, для которых $e^{-\zeta|t|}Ne^{\zeta|t|}$ инвариантны в $C_{0,c}^\mu$ и C_c^μ при любом ζ , $\operatorname{Re} \zeta = 0$. Очевидно, $\mathcal{K}_1$ является замкнутой подалгеброй $\mathcal{L}$. Каждому $N \in \mathcal{K}_1$ можем поставить в соответствие матрицу-функцию $\hat{N}(\zeta)$ размерности (2×2) , $\operatorname{Re} \zeta = 0$, по правилу

$$l[e^{-\zeta|t|}Ne^{\zeta|t|}\psi] = \hat{N}(\zeta)\ell\psi, \quad \psi \in C_c^\mu, \quad (2.2)$$

где положено $\ell\psi = (\psi(-\infty), \psi(+\infty))$ для $\psi \in C_c^\mu$.

Эту функцию назовем *концевым символом оператора* N . Из определения видно, что отображение $N \rightarrow \hat{N}$ является гомоморфизмом $\mathcal{K}_1$ в алгебру матриц-функций на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$ (с поточечными операциями).

Очевидно, операторы $N \in \mathcal{L}$ с образом $\operatorname{Im} N \subseteq C_{0,c}^\mu$ принадлежат $\mathcal{K}_1$ и имеют нулевой конечный символ. Ниже особое значение будет иметь класс $\mathcal{T}_0$ компактных операторов $C^\mu \rightarrow C_{0,c}^\mu$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{T}_0$ является замкнутым идеалом $\mathcal{K}_1$.

Простейшим примером элементов $\mathcal{K}_1$ служат операторы умножения $\varphi \rightarrow a\varphi$ на функции $a \in C_c^\mu$. Очевидно, их конечный символ представляет собой постоянную диагональную матрицу

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a(-\infty) & 0 \\ 0 & a(+\infty) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Постоянный конечный символ

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

имеет также оператор отражения T , как это следует из определений (1.2), (2.2).

Важным примером элементов $\mathcal{K}_1$ служат операторы типа свертки $R \in \mathcal{R}_1$ с $\sigma R \in (C^\mu)_0^*$. В самом деле, если функция $\varphi \in C^\mu$ тождественно равна нулю в

окрестности $-\infty$ ($+\infty$), то $R\varphi$ также обладает этим свойством. Следовательно, если

$$\varphi(t) \equiv \begin{cases} c_1 e^{-\zeta|t|} = c_1 e^{\zeta t} & \text{в окрестности } -\infty, \\ c_2 e^{-\zeta|t|} = c_2 e^{\zeta t} & \text{в окрестности } +\infty, \end{cases}$$

то с учетом равенства $Re_\zeta = (mR)(\zeta)e_\zeta$, $e_\zeta(t) = e^{\zeta t}$, получим аналогичное соотношение

$$(R\varphi)(t) \equiv \begin{cases} c_1(mR)(\zeta)e^{-\zeta|t|} & \text{в окрестности } -\infty, \\ c_2(mR)(\zeta)e^{-\zeta|t|} & \text{в окрестности } +\infty. \end{cases}$$

В результате приходим к соотношению (2.2) с диагональной матрицей

$$\hat{R}(\zeta) = \begin{pmatrix} (mR)(\zeta) & 0 \\ 0 & (mR)(-\zeta) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

для функций ψ , постоянных в окрестности $\pm\infty$. В силу соображений плотности это соотношение распространяется на произвольные $\psi \in C_c^\mu$.

Поскольку алгебра $\mathcal{K}_1$ замкнута, в соответствии с определением § 1 заключаем, что алгебра $\mathcal{R}$ содержится в $\mathcal{K}_1$ с конечным символом (2.5) для ее элементов.

Важно заметить, что

$$\chi R - R\chi, \chi_0 R, R\chi_0 \in \mathcal{T}_0 \quad (2.6)$$

для любых $R \in \mathcal{R}_0$ и функций $\chi_0 \in C_0^\infty$, $\chi'(t) \in C_0^\infty$.

В самом деле, в силу соображений плотности можно считать $R \in \tilde{\mathcal{R}}_0$. В этом случае каждый из интегральных операторов (2.6) имеет ядром функцию из $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Зафиксируем пару функций $\chi_\pm \in C^\infty$ со свойством

$$\begin{aligned} \chi_\pm(t) &\equiv 1 \quad \text{в окрестности } \pm\infty, \\ \chi_\pm(t) &\equiv 0 \quad \text{в окрестности } \mp\infty \end{aligned} \quad (2.7)$$

и обозначим $\mathcal{K}_0$ совокупность всех операторов вида

$$U = \chi_+ R_1 + \chi_- R_2 + (\chi_+ R_3 + \chi_- R_4)T + N_0 \quad (2.8)$$

с $R_j \in \mathcal{R}_0$, $N_0 \in \mathcal{T}_0$, которые называем *операторами типа Винера–Хопфа* и обозначаем $U, V, \dots$

В силу (2.6) класс $\mathcal{K}_0$ является подалгеброй $\mathcal{K}_1$, содержащей операторы R и RT , $R \in \mathcal{R}_0$. Обозначим далее $\mathcal{K}$ множество всех $N \in \mathcal{K}_1$ со свойством $NU, UN \in \mathcal{K}_0$ для любого $U \in \mathcal{K}_0$. Очевидно, $\mathcal{K}$ является подалгеброй $\mathcal{K}_1$, для которой по определению $\mathcal{K}_0$ служит идеалом. Из (2.6) и теоремы 1 также следует, что $\mathcal{R}$ является подалгеброй $\mathcal{K}$.

В силу (2.3)–(2.5) конечными символами операторов $U \in \mathcal{K}_0$ являются (2×2) -матрицы с элементами из M_0 . Удобно для алгебры этих матриц сохранить то же обозначение M_0 . Аналогичное соглашение принимаем и для алгебры матриц над C и C_0 .

ТЕОРЕМА 3. *Алгебры $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$ замкнуты в $\mathcal{K}_1$, отображение $N \rightarrow \hat{N}$ непрерывно переводит $\mathcal{K}$ в C и индуцирует изоморфизм $\mathcal{K}_0/\mathcal{T}_0 \cong M_0$.*

Доказательство основывается на оценке

$$|R|_{\mathcal{L}} \leq |\chi_{\pm} R + N_0|_{\mathcal{L}}, \quad (2.9)$$

справедливой для любых $R \in \mathcal{R}_0$, $N_0 \in \mathcal{T}_0$. В силу соображений плотности ее достаточно установить для $R \in \mathcal{R}_0$.

Очевидно, норма (1.1) функции φ совпадает с точной верхней гранью ее норм в $C^\mu(I)$ по всем компактным отрезкам I прямой. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие $I \subseteq \mathbb{R}$ и функция $\varphi \in C^\mu$, что

$$|R\varphi|_{C^\mu(I)} \geq (1 - \varepsilon)|R|_{\mathcal{L}}, \quad |\varphi|_{C^\mu} < 1. \quad (2.10)$$

Поскольку $R\varphi = f * \varphi$, $f \in C_0^\infty$, сужение $R\varphi$ на I не зависит от поведения φ вне некоторого компактного отрезка I_0 .

Поэтому в дополнение к (2.10) функцию φ можно выбрать с компактным носителем. Операторы сдвига $(P_s\psi)(t) = \psi(t + s)$ изометричны и коммутируют с R , поэтому

$$|R\varphi|_{C^\mu(I)} = |R\varphi_s|_{C^\mu(I_s)}, \quad (2.11)$$

где положено $\varphi_s = P_{-s}\varphi$, $I_s = \{t + s, t \in I\}$. Согласно (2.7) найдется такое s_- , что $\chi \equiv 1$ на I_s , $s \leq s_-$. В силу (2.10), (2.11) отсюда имеем

$$|\chi - R\varphi_s|_{C^\mu(I_s)} \geq (1 - \varepsilon)|R|_{\mathcal{L}}, \quad |\varphi_s|_{C^\mu} < 1, \quad (2.12)$$

для всех $s \leq s_-$.

Поскольку все φ_s принадлежат $C_{0,c}^\mu$ и оператор N_0 компактен в $C_{0,c}^\mu$, найдутся такая последовательность φ_{s_n} , $s_n \rightarrow -\infty$, и функция $\psi \in C_{0,c}^\mu$, что $N_0\varphi_{s_n}^n \rightarrow \psi$ по C^μ -норме. В оценке

$$|N_0\varphi_{s_n}|_{C^\mu(I_s)} \leq |N_0\varphi_{s_n} - \psi|_{C^\mu(I_s)} + |\psi|_{C^\mu(I_s)}$$

первое слагаемое справа стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по s . В силу (2.1) при $s = s_n$ второе слагаемое также стремится к нулю. Поэтому с учетом (2.12) для достаточно больших n получим

$$|(\chi - R + N_0)\varphi_s|_{C^\mu(I_s)} \geq (1 - 2\varepsilon)|R|_{\mathcal{L}}, \quad s = s_n.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, в результате приходим к оценке (2.9) для χ_- . Случай χ_+ рассматривается аналогично.

Обратимся к оператору U в разложении (2.8). В силу (2.6)

$$\begin{aligned} \chi_- U \chi_- &= \chi_- R_1 + N_1, & \chi_+ U \chi_+ &= \chi_+ R_2 + N_2, \\ \chi_- U T \chi_- &= \chi_- R_3 + N_3, & \chi_+ U T \chi_+ &= \chi_+ R_4 + N_4 \end{aligned}$$

с некоторыми $N_j \in \mathcal{T}_0$. Поэтому на основании (2.9) приходим к оценке

$$|R_j|_{\mathcal{L}} \leq K|U|_{\mathcal{L}} \quad (2.13)$$

с постоянной K , равной максимуму C^μ -норм функций $\chi_\pm$. Из этой оценки непосредственно следует, что разложение (2.8) единственно и алгебра $\mathcal{K}_0$ замкнута.

Из (2.3)–(2.5) с учетом (1.16) выводим, что концевой символ оператора (2.8) представляет собой матрицу

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} mR_1 & mR_3 \\ mR_4^\vee & mR_2^\vee \end{pmatrix} \in M_0. \quad (2.14)$$

Поэтому гомоморфизм $N \rightarrow \widehat{N}$ переводит $\mathcal{K}_0$ на все M_0 , и в силу (2.13) непрерывно. Как уже отмечалось, его ядром служит $\mathcal{T}_0$. Таким образом, утверждение теоремы, относящееся к $\mathcal{K}_0$, установлено полностью.

Из замкнутости $\mathcal{K}_0$ и определения $\mathcal{K}$ следует и замкнутость алгебры $\mathcal{K}$. Остается показать, что концевые символы элементов $\mathcal{K}$ принадлежат C и отображение $N \rightarrow \widehat{N}$ непрерывно $\mathcal{K} \rightarrow C$.

Выберем четную функцию $q \in C_0^\infty$ со свойством

$$\int_{\mathbb{R}} q(t) dt = 1, \quad q \geq 0, \quad (2.15)$$

и положим $q_n(t) = nq(nt)$, $n = 1, 2, \dots$

Функции q_n называются *усредняющим ядром* [2]. Согласно (1.16) мультипликаторы операторов $Q_n\varphi = q_n * \varphi$, $Q\varphi = q * \varphi$ являются четными функциями переменной ζ и связаны соотношением

$$(mR_n)(\zeta) = (mR)\left(\frac{\zeta}{n}\right).$$

В силу (2.14) имеем $(mQ)(0) = 1$, так что $(mQ_n)(\zeta) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на каждом компактном отрезке прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$.

По определению для любого $N \in \mathcal{K}$ оператор NQ_n принадлежит $\mathcal{K}_0$. В силу (2.5) и четности функции mQ_n концевые символы операторов NQ_n и N связаны равенством

$$(NR_n)^\wedge = (mR_n)\widehat{N}. \quad (2.16)$$

В силу отмеченного свойства локально равномерной сходимости mQ_n и непрерывности $(NQ_n)^\wedge(\zeta)$ отсюда следует и непрерывность функции $\widehat{N}(\zeta)$.

Согласно (2.6), (2.15) операторы Q_n равномерно ограничены:

$$|Q_n|_{\mathcal{L}} \leq |q_n|_{L^1} = 1. \quad (2.17)$$

Согласно (2.14), (1.13) из (2.13) выводим

$$|\widehat{U}_{ij}| \leq K|U|_{\mathcal{L}}, \quad \operatorname{Re} \zeta = 0, \quad i, j = 0, 1.$$

Применяя эту оценку к $U = NR_n$, в соответствии с (2.17) получаем

$$|\widehat{N}_{ij}(\zeta)| |(mQ_n)(\zeta)| \leq K|N|_{\mathcal{L}}.$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ отсюда приходим к оценке, доказывающей ограниченность отображения $N \rightarrow \widehat{N}$ из $\mathcal{K}$ в C .

В соответствии с определением (2.8) важное значение имеют критерии принадлежности операторов классу $\mathcal{T}_0$. Очевидно, $\mathcal{T}_0$ содержит интегральные операторы с ядрами из $C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, а также пределы в $\mathcal{L}$ таких операторов. На этом основан следующий критерий. Условимся объединение классов Гёльдера $C^{\mu+\varepsilon}$ по $\varepsilon > 0$ обозначать $C^{\mu+0}$.

ЛЕММА 2. Пусть функция $k(t_0, t) \in C^{\mu+0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ обращается в нуль вне некоторой полосы $|t - t_0| \leq q$ и равномерно стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$ в этой полосе. Тогда интегральный оператор K с ядром $k(t_0, t)$ принадлежит $\mathcal{T}_0$. Если дополнительно $k(t, t) \equiv 0$, то $\mathcal{T}_0$ принадлежит и интегральный оператор K^0 с ядром $k(t_0, t)/(t - t_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\chi(t)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\chi(t) \equiv 1$ при $|t| \leq q$. Тогда $k(t_0, t)$ не изменяется от умножения на $\chi(t_0 - t)$. Поэтому так же, как в случае оценки (1.6) для свертки (1.5) и соответствующей оценки для “сингулярной” свертки с функцией (1.21), убеждаемся, что операторы $K, K^0 \in \mathcal{L}$ и их нормы допускают оценки

$$|K|_{\mathcal{L}} \leq C|k|_{C^\nu}, \quad |K^0|_{\mathcal{L}} \leq C|k|_{C^\mu},$$

где $\mu < \nu \leq \mu + \varepsilon$, а $C > 0$ зависит только от q (в первой оценке можно, очевидно, взять и $\nu = \mu$).

Поэтому достаточно установить, что $k(t_0, t)$ можно приблизить в C^ν функциями из $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, удовлетворяющими тем же условиям леммы. Рассмотрим сначала этот вопрос на прямой $\mathbb{R}$.

Норма в C^μ , которую в соответствии с (1.1) обозначим $|\varphi|_\mu = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_\mu$, обладает следующим интерполяционным свойством:

$$\{\varphi\}_\nu \leq (2|\varphi|_0)^{1-\nu/\mu} \{\varphi\}_\mu^{\nu/\mu}, \quad 0 < \nu < \mu. \quad (2.18)$$

В самом деле, для любого $s > 0$ имеем

$$\{\varphi\}_\nu \leq \max[2|\varphi|_0 s^{-\nu}, \{\varphi\}_\mu s^{\mu-\nu}].$$

Остается заметить, что правая часть здесь достигает минимума при $2|\varphi|_0 s^{-\nu} = \{\varphi\}_\mu s^{\mu-\nu}$, который в точности равен величине в правой части (2.18).

Пользуясь этим свойством, покажем, что функцию $a(t) \in C^\mu$, стремящуюся к нулю при $t \rightarrow \infty$, можно приблизить по норме C^ν , $\nu < \mu$, функциями из $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Выберем функцию $\chi \in C_0^\infty$, тождественно равную 1 в окрестности $t = 0$, и положим $\chi_n(t) = \chi(t/n)$. Тогда последовательность χ_n ограничена в C^μ и сходится к нулю по $\sup$ -норме.

Далее воспользуемся известной конструкцией приближения с помощью свертки с усредняющим ядром $q_n(t) = nq(nt)$, где q принадлежит C_0^∞ и удовлетворяет (2.15). Очевидно, свертка $q_n * (\chi_n a)$ принадлежит C_0^∞ для всех n . Разность $q_n * (\chi_n a) - a$ в силу (2.15) можем записать в форме интеграла

$$\int_{\mathbb{R}} \left[(\chi_n a) \left(t_0 - \frac{t}{n} \right) - (\chi_n a)(t_0) \right] q(t) dt + (\chi_n a)(t_0) - a(t_0).$$

Поскольку q имеет компактный носитель, отсюда $|q_n * a - a|_0 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, согласно (2.17)

$$|q_n * (\chi_n a) - a|_\mu \leq (1 + |\chi_n|_\mu) |a|_\mu.$$

Поэтому на основании (2.18) последовательность $q_n * (\chi a)$ стремится к a в C^μ при любом $0 < \nu < \mu$.

Возвращаясь к функции $k(t_0, t)$, положим

$$k_n(t_0, t_0 + s) = \int_{\mathbb{R}} q_n(t_0 - t) \chi_n(t) k(t, t_0 + s) dt.$$

Очевидно, функция $k_n(t_0, t)$ удовлетворяет тем же условиям леммы, что и $k(t_0, t)$, и принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся в том, что последовательность k_n стремится к k в $C^\nu(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Лемму 2 можем дополнить еще одним близким критерием.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $k(t_0, t)$ принадлежит $C^{\mu+0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и равномерно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ в каждой полосе $|t - t_0| \leq q$. Тогда для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ интегральный оператор $\mathcal{K}$ с ядром $k(t_0, t)f(t_0 - t)$ принадлежит $\mathcal{T}_0$.

В самом деле, оператор K ограничен в C^μ и его норма допускает оценку

$$|K|_{\mathcal{L}} \leq |k|_{C^\mu} |f|_{l_1}.$$

Поэтому в силу соображений плотности можно считать $f \in C_0^\infty$. В этом случае, обозначая $k(t_0, t)f(t_0 - t)$ снова $k(t_0, t)$, оказываемся в условиях леммы 2.

В качестве применения леммы 2 рассмотрим функциональный оператор

$$(A\varphi)(t) = a(t)\varphi[t + \Delta(t)], \quad (2.19)$$

где $a \in C_c^\mu$, $\Delta \in C_c^{1+\mu}$. Очевидно, он ограничен в C^μ и инвариантен в $C_{0,c}^\mu$. В частности, A инвариантен в $C_{0,c}^\mu$. Оператор $e^{-\zeta|t|} A e^{\zeta|t|}$ принадлежит к тому же типу с коэффициентом

$$a_\zeta(t) = a(t)e^{\zeta|\Delta(t)|} \in cC^\mu.$$

В соответствии с (2.2) отсюда заключаем, что $A \in \mathcal{K}_1$ и

$$\hat{A}(\zeta) = \begin{pmatrix} a(-\infty)e^{\zeta\Delta(-\infty)} & 0 \\ 0 & a(+\infty)e^{-\zeta\Delta(+\infty)} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Заметим, что условие $\Delta \in C_c^{1+\mu}$ равносильно тому, что $\Delta \in C_c^\mu$, $\Delta' \in C_{0,c}^\mu$. Если производная

$$1 + \Delta'(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.21)$$

то функция $s + \Delta_1(s) = t$, обратная к $s = t + \Delta(t)$, удовлетворяет тем же условиям. В самом деле, функции Δ_1 и Δ связаны соотношениями

$$\Delta_1(\zeta) = -\Delta[s + \Delta_1(s)], \quad \Delta'_1(s) = -\frac{\Delta'[s + \Delta_1(s)]}{1 + \Delta'[s + \Delta_1(s)]}. \quad (2.22)$$

Поскольку отношение

$$\frac{|t_1 + \Delta(t_1) - t_2 - \Delta(t_2)|}{|t_1 - t_2|}$$

ограничено равномерно по t_1, t_2 сверху и снизу положительными постоянными, этим же свойством обладает и $s + \Delta_1(s)$. Поэтому отображение $\varphi(s) \rightarrow \varphi[s + \Delta_1(s)]$ ограничено в C^μ и инвариантно в C_c^μ и $C_{0,c}^\mu$. С учетом (2.22) отсюда следуют включения $\Delta_1 \in C_c^\mu$, $\Delta'_1 \in C_{0,c}^\mu$.

ЛЕММА 3. Пусть $a \in C_c^{\mu+0}$, $\Delta \in C_c^{1+\mu+0}$ с некоторым $\varepsilon > 0$ и выполнено условие (2.21). Тогда $A \in \mathcal{K}$, причем $AS - SA \in \mathcal{T}_0$, где S – оператор свертки с функцией (1.21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО принадлежности A к $\mathcal{K}$ сводится к проверке того, что $\chi_{\pm}RA, A\chi_{\pm}R \in \mathcal{K}_0$ для любого $R \in \mathcal{R}_0$. В силу соображений плотности можно считать, что $R \in \tilde{\mathcal{R}}_0$, т.е. $f = \sigma R \in C_0^\infty$. Пусть $R_{\pm}$ – операторы свертки с функциями

$$f_{\pm}(t) = a(\pm\infty)f[t + \Delta(\pm\infty)]. \quad (2.23)$$

Достаточно показать, что

$$\chi_{\pm}RA - \chi_{\pm}R_{\pm}, A\chi_{\pm}R - \chi_{\pm}R_{\pm} \in \mathcal{T}_0. \quad (2.24)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\chi_{\pm}RA\varphi)(t_0) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{\pm}(t_0)f(t_0-t)a(t)\varphi[t + \Delta(t)] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{\pm}(t_0)f[t_0-s-\Delta_1(s)]a_1(s)\varphi(s) ds, \end{aligned}$$

где $a_1(s) = [1 + \Delta_1'(s)]a[s + \Delta_1(s)] \in C_c^{\mu+0}$. В силу (2.22) $\Delta_1(\pm\infty) = -\Delta(\pm\infty)$, так что согласно (2.23) оператор $\chi_{\pm}RA - \chi_{\pm}R_{\pm}$ можем представить в виде суммы двух интегральных операторов K_1 и K_2 с ядрами

$$\begin{aligned} k_1(t_0, s) &= \chi_{\pm}(t_0)[f(t_0-s-\Delta_1(s)) - f(t_0-s-\Delta_1(\pm\infty))]a_1(s), \\ k_2(t_0, s) &= \chi_{\pm}(t_0)f(t_0-s-\Delta_1(\pm\infty))[a_1(s) - a_1(\pm\infty)], \end{aligned}$$

удовлетворяющими условиям леммы 2.

Аналогично доказывается и второе включение в (2.24). Что касается второго утверждения леммы, то оно устанавливается совершенно аналогично с использованием второй части леммы 2.

Как и в § 1, операторы с конечным символом можно рассматривать и в семействе весовых пространств. Основную роль здесь играют пространства $e^{-\nu|t|}C^\mu$, которые с возрастанием ν монотонно убывают (в смысле вложений банаховых пространств). При этом $e^{-\nu|t|}C^\mu$ при $\nu > 0$ содержится в $C_{0,c}^\mu$ и плотно в нем. Ясно также, что билинейная форма

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\psi(t) dt \quad (2.25)$$

непрерывна на произведении пространств $e^{-\nu_j|t|}C^\mu$, $j = 1, 2$, при $\nu_1 + \nu_2 > 0$.

Зафиксируем $r > 0$ и обозначим $\mathcal{K}_1\{r\}$ совокупность всех операторов, которые:

- 1) равномерно ограничены в семействе пространств $e^{-\nu|t|}C^\mu$, $|\nu| \leq r$;
- 2) операторы $e^{-\zeta|t|}Ne^{\zeta|t|}$ инвариантны в $C_{0,c}^\mu$ и C_c^μ при любом ζ , $|\operatorname{Re} \zeta| \leq \nu$;
- 3) существует такой оператор N' , удовлетворяющий условиям 1) и 2), что

$$(N\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, N'\varphi) \quad (2.26)$$

для любых $\varphi_j \in e^{-\nu_j|t|}C^\mu$, $|\nu_j| \leq r$, $\nu_1 + \nu_2 > 0$.

Оператор N' определяется по N однозначно и называется *союзным* к N . Очевидно, относительно нормы

$$|N|_{\mathcal{L}\{r\}} = \max \left[\sup_{|\nu| \leq r} |e^{-\nu|t|} N e^{\nu|t|}|_{\mathcal{L}}, \sup_{|\nu| \leq r} |e^{-\nu|t|} N' e^{\nu|t|}|_{\mathcal{L}} \right] \quad (2.27)$$

класс $\mathcal{K}_1\{r\}$ является банаховой алгеброй, на которой линейное отображение $N \rightarrow N'$ изометрично и инволютивно в том смысле, что $(N_1 N_2)' = N_2' N_1'$ и $(N')' = N$.

Равенство (2.2) в рассматриваемом случае определяет матрицу-функцию $\hat{N}(\zeta)$ в полосе $|\operatorname{Re} \zeta| \leq r$, которую также называем конечным символом. Очевидно, отображение $N \rightarrow \hat{N}$ является гомоморфизмом на $\mathcal{K}_1\{r\}$. Из определения видно также, что весовое преобразование

$$N \rightarrow e^{-\zeta_0|t|} N e^{\zeta_0|t|}, \quad |\operatorname{Re} \zeta_0| \leq r, \quad (2.28)$$

является гомоморфизмом $\mathcal{K}_1\{r\} \rightarrow \mathcal{K}_1$, причем

$$(e^{-\zeta_0|t|} N e^{\zeta_0|t|})^\wedge(\zeta) = \hat{N}(\zeta + \zeta_0), \quad \operatorname{Re} \zeta = 0. \quad (2.29)$$

Очевидно, операторы умножения $a \in C_c^\mu$ и отражения T принадлежат $\mathcal{K}_1\{r\}$, причем $a' = a$, $T' = T$ и их конечные символы определяются (2.3), (2.4).

Утверждается, что оператор $R \in \mathcal{R}\{r\}$ также принадлежит $\mathcal{K}_1\{r\}$, причем его союзный оператор

$$R' = R^\vee, \quad (2.30)$$

а конечный символ $\hat{R}$ определяется (2.5).

В самом деле, в силу (1.17), (1.24), (1.25) и соображений плотности оператор $R \in \mathcal{R}$ удовлетворяет условиям 1), 3) определения $\mathcal{K}_1\{r\}$ с выражением (2.30) для союзного оператора. В частности, для формы (2.27) имеем оценку

$$|R|_{\mathcal{L}\{r\}} \leq |R|_{\mathcal{R}\{r\}}.$$

Проверка условия 2) осуществляется совершенно аналогично случаю $\mathcal{K}_1$. Таким образом, для $R \in \mathcal{R}$ утверждение установлено. В общем случае остается воспользоваться указанной оценкой и соотношениями плотности.

Пусть $\mathcal{T}_0\{r\}$ состоит из операторов $N \in \mathcal{K}_1\{r\}$, для которых $e^{-\nu|t|} N e^{\nu|t|}$, $e^{-\nu|t|} N' e^{\nu|t|} \in \mathcal{T}_0$ при $|\nu| \leq r$. Очевидно, $\mathcal{T}_0\{r\}$ является замкнутым идеалом $\mathcal{K}_1\{r\}$. С учетом (2.30) соотношение (2.6) распространяется на $\mathcal{R}_0\{r\}$ и $\mathcal{T}_0\{r\}$. Следовательно, исходя из $\mathcal{R}_0\{r\}$ и $\mathcal{T}_0\{r\}$, аналогично предыдущему можно ввести в $\mathcal{K}_1\{r\}$ подалгебру $\mathcal{K}\{r\}$ и ее идеал $\mathcal{K}_0\{r\}$.

ТЕОРЕМА 4. *Алгебры $\mathcal{K}_0\{r\}$ и $\mathcal{K}\{r\}$ замкнуты в $\mathcal{K}_1\{r\}$, а отображение $N \rightarrow \hat{N}$ непрерывно переводит $\mathcal{K}\{r\}$ в $C\{r\}$ и осуществляет изоморфизм $\mathcal{K}_0\{r\}/\mathcal{T}_0\{r\} \cong M_0\{r\}$.*

Отображение (2.28) действует из $X\{r\}$ в X , где X — любой из символов $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}$, а отображение $N \rightarrow N'$ переводит $X\{r\}$ на себя, причем

$$(N')^\wedge(\zeta) = N^\nabla(-\zeta), \quad (2.31)$$

где ∇ означает символ матричного транспонирования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с утверждения второй части теоремы. Для $X = \mathcal{T}_0$ оно очевидно. Если $R \in \widetilde{\mathcal{R}}_0$, то

$$e^{-\zeta_0|t|} R e^{\zeta_0|t|} = \chi_+(e^{-\zeta_0 t} R e^{\zeta_0 t}) + \chi_-(e^{\zeta_0 t} R e^{-\zeta_0 t}) + K, \quad (2.32)$$

где оператор K удовлетворяет условиям компактности леммы 2. Поскольку отображение (2.28) оставляет операторы $\chi_{\pm}$ и T неподвижными, отсюда с учетом соображений плотности следует включение $e^{-\zeta_0|t|} U e^{\zeta_0|t|} \in \mathcal{K}_0$ для любого $U \in \mathcal{K}_0\{r\}$. Далее, соотношение (2.31) для операторов $\chi_{\pm}$ и T очевидно. В силу (2.5), (2.30) это верно и по отношению к R , а значит, и к общему оператору $U \in \mathcal{K}_0\{r\}$. Что касается случая $X = \mathcal{K}$, то утверждение теоремы для него легко следует из определений.

Покажем теперь, что для $R \in \mathcal{R}_0\{r\}$, $N_0 \in \mathcal{T}_0\{r\}$ оценка (2.9) справедлива по отношению к нормам (1.25), (2.27). Согласно (2.32) имеем

$$e^{-\nu|t|}(\chi_{\pm} R + N_0) e^{\nu|t|} = \chi_{\pm}(e^{\mp \nu t} R e^{\pm \nu t}) + N_{\pm}$$

с некоторыми $N_{\pm} \in \mathcal{T}_0$. На основании (2.9), (1.25) и (2.27) отсюда следует требуемая оценка

$$|R|_{\mathcal{R}\{r\}} \leq |\chi_{\pm} R + N_0|_{\mathcal{L}\{r\}}. \quad (2.33)$$

Пользуясь этой оценкой, дальнейшие рассуждения можем провести совершенно так же, как при доказательстве теоремы 3.

Заметим, что лемма 2 сохраняет свою силу и для $\mathcal{T}_0\{r\}$, поскольку преобразования (2.29) и $N \rightarrow N'$ не меняют типа операторов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^0$. Это же касается и следствия леммы 2 в предположении $f(t) \in e^{r|t|} L^1$. Отсюда заключаем, что лемма 3 справедлива и по отношению к $\mathcal{K}\{r\}$.

В заключение распространим определения операторных алгебр на семейства, отвечающие пространствам $C^{n+\mu}$ дифференцируемых функций.

Пусть $\mathcal{L}^n$ означает пространство всех операторов, ограниченных в семействе $C^{i+\mu}$, $0 \leq i \leq n$. Относительно нормы

$$|N|_{\mathcal{L}^n} = \max_{i=0,1,\dots,n} |N|_{\mathcal{L}(C^{i+\mu})}$$

это пространство является банаховой алгеброй.

Важно заметить, что в силу (1.20) алгебра $\mathcal{R}$ изометрически вкладывается в $\mathcal{L}^n$:

$$|R|_{\mathcal{L}} = |R|_{\mathcal{L}^n}, \quad R \in \mathcal{R}. \quad (2.34)$$

Функция $|t|$ не дифференцируема при $t = 0$. Поэтому для определения весовых пространств гладких функций зададимся функцией $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойством

$$\sigma(t) \equiv |t| \quad \text{в окрестности } \pm \infty. \quad (2.35)$$

Очевидно, при $n = 0$ пространства $e^{-\nu\sigma} C^{n+\mu}$ и $e^{-\nu|t|} C^{n+\mu}$ совпадают с эквивалентностью соответствующих норм.

Обозначим $\mathcal{K}_1^n\{r\}$ ($\mathcal{T}_0^n\{r\}$) множество всех операторов $N \in \mathcal{K}_1\{r\}$ ($N \in \mathcal{T}_0\{r\}$), равномерно ограниченных (компактных) в семействе $e^{-\nu\sigma} C^{i+\mu}$, $|\nu| \leq r$,

$i = 0, 1, \dots, n$. Относительно соответствующей нормы, получающейся из (2.27) заменой $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^n$, класс $\mathcal{K}_1^n\{r\}$ является банаховой алгеброй, а $\mathcal{T}_0^n\{r\}$ – ее замкнутым идеалом.

В силу (2.30), (2.34) алгебра $\mathcal{R}\{r\}$ вложена в $\mathcal{K}_1^n\{r\}$. Поэтому, исходя из $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{T}_0^n\{r\}$, аналогично предыдущему можем определить в $\mathcal{K}_1^n\{r\}$ подалгебру $\mathcal{K}^n\{r\}$ и ее идеал $\mathcal{K}_0^n\{r\}$.

Поскольку с возрастанием n норма $|\cdot|_{\mathcal{L}^n\{r\}}$ возрастает, оценка (2.33) справедлива и для этой нормы. Поэтому теорема 4 сохраняет свою силу и для операторных алгебр с символом n . В конкретных ситуациях проверка принадлежности $\mathcal{K}^n$ или $\mathcal{T}_0^n$ основана на индукции и формуле дифференцирования.

ЛЕММА 4. Пусть $N \in X^{n-1}\{r\}$, $n \geq 1$, где X – любой из символов $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{T}_0$, и для $\varphi \in C^{n+\mu}$ справедлива формула

$$(N\varphi)' = N_1\varphi + N_0\varphi' \quad (2.36)$$

с некоторыми $N_0, N_1 \in X^{n-1}\{r\}$. Тогда оператор N принадлежит $X^n\{r\}$. В частности, если в условиях леммы 2 $k(t_0, t) \in C^{n+\mu+0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и равномерно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ в полосе $|t - t_0| \leq q$ вместе с частными производными

$$k_i(t_0, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial t} \right)^i k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.37)$$

то K и K^0 принадлежат $\mathcal{T}_0^n\{r\}$.

Аналогично, если в условиях леммы 3 функции a, Δ принадлежат $C_c^{n+\mu+0}$, то $A \in \mathcal{K}^n\{r\}$ и $AS - SA \in \mathcal{T}_0^n\{r\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первого утверждения достаточно провести для $X = \mathcal{K}_1$ и $X = \mathcal{T}_0$. В этом случае утверждение следует непосредственно из определений.

При $n = 0$ остальные утверждения леммы, как было отмечено выше, справедливы. В случае $n \geq 1$ запишем оператор K леммы 2 в форме

$$(K\varphi)(t_0) = \int_{\mathbb{R}} k(t_0, t_0 - t)\varphi(t_0 - t) dt.$$

Дифференцируя это равенство под знаком интеграла, приходим к соотношению (2.36) для $N = K$, где $N_0 = K$, а $N_1 = K_1$ определяется функцией $k_1(t_0, t)$ из (2.37). Поэтому остается воспользоваться индукцией по n . Для оператора K^0 леммы 2 рассуждения аналогичны. Точно так же рассматриваются и утверждения леммы 3.

Все дальнейшие рассуждения удобно вести в рамках “векторного” случая, когда C^μ состоит из m -вектор-функций. Соответственно этому операторы $N \in \mathcal{K}$ представляют собой операторную $(m \times m)$ -матрицу с элементами из алгебры $\mathcal{K}$ “скалярного” случая. Очевидно, символ $\hat{N} \in C$, записываемый по-прежнему в виде блочной (2×2) -матрицы, представляет собой непрерывную и ограниченную $(2m \times 2m)$ -матриц-функцию на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$.

Для m -вектор-функций φ и ψ под $\varphi(t)\psi(t)$ под знаком интеграла (2.25) понимается скалярное произведение $\varphi_1(t)\psi_1(t) + \dots + \varphi_m(t)\psi_m(t)$. В частности, для

матрицы-функции $a(t)$ можем записать $[a(t)\varphi(t)]\psi(t) = \varphi(t)[a^\nabla(t)\psi(t)]$, так что союзным к a служит оператор умножения на a^∇ . Заметим, что соотношение (2.31) сохраняет свою силу и в рассматриваемом случае, нужно лишь учесть правило транспонирования:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^\nabla = \begin{pmatrix} x_{11}^\nabla & x_{21}^\nabla \\ x_{12}^\nabla & x_{22}^\nabla \end{pmatrix},$$

блочных матриц.

§ 3. Формула индекса

Напомним [6] некоторые обозначения, связанные с обратимостью элементов в банаховой алгебре. Пусть A – банахова алгебра с единицей, которая обозначается 1 . Множество обратимых в ней элементов открыто и является группой по умножению. Связную компоненту этого множества, содержащую 1 , назовем *единичной*, она является подгруппой группы обратимых элементов. Ненулевой элемент $x \in A$ назовем *делителем нуля*, если $xu = 0$ или $yx = 0$ для некоторого ненулевого $y \in A$. Если $x \neq 0$ является пределом делителей нуля, то x назовем *обобщенным делителем нуля*. Очевидно, такие элементы не могут быть обратимыми.

В соответствии с соглашением в конце § 2 алгебру $(n \times n)$ -матриц с элементами из A также обозначаем символом A , значение n порядка матриц будет видно из контекста.

Пусть A_0 – некоторый (двусторонний) замкнутый идеал A такой, что можно ввести банахову факторалгебру A/A_0 . Условимся говорить, что x *обратим в A по модулю A_0* , если существует такой $y \in A$, что $xy - 1, yx - 1 \in A_0$. Другими словами, класс смежности $[x] = x + A_0$ обратим в A/A_0 , все обратимые к x по модулю A_0 элементы отличаются друг от друга слагаемыми из A_0 .

Аналогичную терминологию используем и в других случаях. Например, x и y коммутируют по модулю A_0 , если $xy - yx \in A_0$; элемент x является делителем нуля по модулю A_0 , если $xu \in A_0$ или $yx \in A_0$ для некоторого $y \notin A_0$, обобщенные делители нуля по модулю A_0 понимаются как пределы (по норме A) этих элементов.

В качестве иллюстрации рассмотрим банахову алгебру C непрерывных и ограниченных на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$ матриц-функций и ее идеал C_0 , фигурирующие в § 2.

ЛЕММА 5. Пусть x обратим в C по модулю C_0 . Тогда существует такой $y \in M_0$, что $x + y$ обратим в C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $xx_1 - 1$ и $x_1x - 1$ принадлежат C_0 для некоторого $x_1 \in C$. Поэтому матрица-функция $x(\zeta)$ обратима в C в окрестности $\pm i\infty$, т.е. существует такое $\Delta > 0$, что

$$\inf_{|\operatorname{Im} \zeta| \geq \Delta} |\det x(\zeta)| > 0. \quad (3.1)$$

Выберем функцию $x_0(\zeta) \in C$, которая совпадает с $x(\zeta)$ при $|\operatorname{Im} \zeta| \geq \Delta$ и для которой $\det x_0(\zeta) \neq 0$ при $|\operatorname{Im} \zeta| \leq \Delta$. Тогда функция x_0 обратима в C и $y_0 = x_0 - x \in C_0$. Поскольку алгебра M_0 плотно вложена в C_0 , то, приближая y_0 элементами $y \in M_0$, приходим к обратимости $x + y$.

Пусть X – банахово пространство и $\mathcal{L}(X)$ – банахова алгебра всех ограниченных в X операторов. По теореме Банаха [6] обратимость N в $\mathcal{L}(X)$ равносильна тому, что $\text{Ker } N = 0$ и $\text{Im } N = X$.

Оператор $N \in \mathcal{L}$ называется *фредгольмовым* (или *нётеровым*), если ядро $\text{Ker } N$ конечномерно, образ $\text{Im } N$ замкнут и факторпространство $X/\text{Im } N$ также конечномерно. Разность

$$\text{ind } N = \dim(\text{Ker } N) - \dim(X/\text{Im } N)$$

называется *индексом* N . По теореме Банаха размерность $\dim(X/\text{Im } N)$ совпадает с $\dim(\text{Ker } N^*)$, где N^* – сопряженный оператор, действующий в сопряженном банаховом пространстве X^* .

Известные свойства фредгольмовых операторов [8] в принятой выше терминологии можно выразить следующим образом: фредгольмовость оператора N равносильна его обратимости по модулю $\mathcal{T}(X)$ компактных операторов, а индекс $\text{ind } N$ как целочисленная функция локально постоянна и обладает свойством $\text{ind}(N_1 N_2) = \text{ind } N_1 + \text{ind } N_2$.

Комплексную функцию Ind , заданную на множестве обратимых элементов банаховой алгебры A (включая алгебры матриц над A), назовем *индексом Коши*, если:

- i) функция Ind непрерывна;
- ii) $\text{Ind } 1 = 0$, $\text{Ind}(a_1 a_2) = \text{Ind } a_1 + \text{Ind } a_2$;
- iii) $\text{Ind} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \text{Ind } a + \text{Ind } b$.

Элементы a, b диагональной матрицы в последнем условии могут быть матрицами над A (различных порядков).

Если A_0 – замкнутый идеал, то аналогично вводится индекс Коши в A по модулю A_0 определенных на множестве обратимых в A по модулю A_0 элементов с дополнительным условием

- iv) $\text{Ind } a = \text{Ind}(a + a_0)$, $a_0 \in A_0$.

Очевидно, в этом случае Ind индуцируется некоторым индексом Коши в A/A_0 .

Индекс $\text{ind } N$ фредгольмовых операторов можно охарактеризовать как целочисленный индекс Коши в $\mathcal{L}(X)$ по модулю $\mathcal{T}(X)$.

Основная цель данного параграфа – дать критерий фредгольмовости и описать индекс операторов из банаховой алгебры $\mathcal{K} = \mathcal{K}(C^\mu)$, введенной в § 2. Центральным результатом будет сформулирован с помощью специального индекса Коши в алгебре C матриц-функций, который сейчас построим.

Пусть V обозначает линейное пространство всех непрерывных скалярных функций на прямой $\mathbb{R}$ (с произвольным поведением на ∞). Рассмотрим пару $\mathbb{R}$ -линейных комплексных функционалов $L^\pm$ на V со следующими свойствами:

$$|L^\pm h| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|; \quad (3.2)$$

$$L^\pm h = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha+2\alpha} h(\pm t) dt; \quad (3.3)$$

$$L^\pm(t^n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Неравенство (3.2) содержательно лишь для ограниченных функций h , а соотношение (3.3) предполагается только для функций, для которых предел в правой части существует. Из (3.3), в частности, следует

$$L^\pm h = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) \quad (3.5)$$

при условии, что предел справа существует. С учетом (3.4) это свойство можно расширить: если $h(t) - p^\pm(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$ для некоторых многочленов $p^\pm$, то $L^\pm h = p^\pm(0)$.

Существование линейных функционалов $L^\pm$ указанного вида легко обосновывается с помощью леммы Цорна так же, как при доказательстве теоремы Хана–Банаха о продолжении [6].

Для обратимой в C матрицы-функции $x(\zeta)$, $\operatorname{Re} \zeta = 0$, положим по определению

$$\operatorname{Ind} x = \frac{1}{2\pi i} (L^+ - L^-) [\ln \det x(it)], \quad (3.6)$$

где $\ln$ означает некоторую непрерывную ветвь. Поскольку $L^+ - L^-$ обращается в нуль на константах, это определение корректно.

Очевидно, условия ii), iii) определения индекса Коши выполнены. Если $x \rightarrow 1$ в C , то функция $\ln \det x$ ограничена и ее подходящая ветвь стремится к нулю по суп-норме. Поэтому условие i) непрерывности Ind вытекает из оценки (3.2).

Согласно (3.5) формула (3.6) переходит в формулу

$$\operatorname{Ind} x = \frac{1}{2\pi i} \ln \det x(\zeta) \Big|_{-i\infty}^{+i\infty} \quad (3.7)$$

при условии, что существуют пределы $x(\pm i\infty) = \lim_{\zeta \rightarrow \pm i\infty} x(\zeta)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть оператор N обратим в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{K}_0$, т.е.

$$MN - 1, NM - 1 \in \mathcal{K}_0 \quad (3.8)$$

для некоторого $M \in \mathcal{K}$. Тогда фредгольмовость N равносильна условию

$$\det \hat{N}(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta = 0, \quad (3.9)$$

выполнение которого обеспечивает обратимость $\hat{N}$ в C и обратимость N в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{K}_0$. При этом существует такой индекс Коши Ind_* в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{K}_0$, что

$$\operatorname{ind} N = \operatorname{Ind}_* N - \operatorname{Ind} \hat{N}. \quad (3.10)$$

Доказательство проведем сначала для операторов $N = 1 + U$, $U \in \mathcal{K}_0$. В этом случае (3.10) принимает вид

$$\operatorname{ind}(1 + U) = -\operatorname{Ind}(1 + U)^\wedge, \quad (3.11)$$

где значение Ind справа вычисляется по формуле (3.7).

Согласно теореме 3 концевой символ осуществляет гомоморфизм $\mathcal{K}_0$ на M_0 с ядром $\mathcal{T}_0$; в частности, банахова алгебра $A = \mathbb{C} \oplus M_0$ изоморфна $(\mathbb{C} \oplus \mathcal{K}_0)/\mathcal{T}_0$.

Пусть условие (3.9) выполнено для $N = 1 + U$. Тогда в силу теоремы 2 функция $1 + \widehat{U}$ обратима в A , так что оператор $1 + U$ обратим в $\mathbb{C} \oplus \mathcal{K}_0$ по модулю $\mathcal{T}_0$ и, следовательно, фредгольмов. Из этих же соображений заключаем, что индекс $\text{ind}(1 + U)$ операторов, обратимых в $\mathbb{C} \oplus \mathcal{K}_0$ по модулю $\mathcal{T}_0$, определяет некоторый целочисленный индекс Коши в A , который обозначим $\widetilde{\text{Ind}}$. Соответственно этому (3.11) сводится к равенству $\widetilde{\text{Ind}} = -\text{Ind}$ индексов Коши.

Функция Ind устанавливает взаимно однозначное соответствие между связными компонентами группы обратимых элементов банаховой алгебры $B = \mathbb{C} \oplus C_0$ и множеством $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Алгебра A плотно вложена в B , причем согласно теореме 2 для элементов из A обратимость в A равносильна их обратимости в B . Отсюда следует [1], что указанное свойство Ind распространяется и на A . Таким образом, равенство $\widetilde{\text{Ind}} = -\text{Ind}$ сводится к проверке того, что $\widetilde{\text{Ind}} u = -1$ для некоторого $u \in A$ с $\text{Ind} u = 1$.

Такой элемент u всегда существует [1], например, матрицу-функцию $u(\zeta)$ можно взять диагональной вида $\text{diag}(u_1, 1, \dots, 1)$ с $u_1(\zeta) = (\zeta + i)/(\zeta - i)$.

Операторы $1 + U$, $U \in \mathcal{K}_0$, тесно связаны с интегральными уравнениями Винера–Хопфа на полуоси; далее воспользуемся рассуждениями, впервые примененными М. Г. Крейном [9] для этих уравнений. Предположим, что оператор $N = 1 + U$ фредгольмов, но условие (3.9) нарушено. Выберем такие последовательности $U_k, V_k \in \mathcal{K}_0$, сходящиеся к U по операторной норме, что $(1 + U_k)^\wedge, (1 + V_k)^\wedge$ обратимы в C и

$$\text{Ind}(1 + U_k)^\wedge \neq \text{Ind}(1 + V_k)^\wedge, \quad k = 1, 2, \dots$$

С другой стороны, в силу непрерывности ind должно быть

$$\text{ind}(1 + U_k) = \text{ind}(1 + V_k) = \text{ind}(1 + V)$$

при больших k . Применяя к $1 + U_k$ и $1 + V_k$ формулу (3.11), приходим к противоречию с предыдущим неравенством.

Итак, для операторов вида $N = 1 + U$, $U \in \mathcal{K}_0$, утверждение теоремы полностью установлено. Обратимся к общему случаю. Пусть оператор N обратим в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{K}_0$. Тогда его концевой символ удовлетворяет условию (3.1) и, следовательно, условие (3.9) равносильно обратимости $\widehat{N}$ в C . Применим к концевому символу оператора M в (3.8) лемму 3.1. Тогда существует такой $u_0 \in \mathcal{K}_0$, что $\widehat{M} + \widehat{u}_0$ обратим в C . Заменяя M на $M + U_0$, не ограничивая общности, можем считать, что $\widehat{M}$ обратим в C .

Пусть выполнено условие (3.9). Тогда оно выполнено и для операторов $1 + U_1 = MN$, $1 + U_2 = NM$. По доказанному выше найдутся такие $V_i \in \mathcal{K}_0$, что $(1 + V_i)^\wedge$ являются обратными к $(1 + U_i)^\wedge$. Следовательно, $1 + V_i$ служат обратными к $1 + U_i$ в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{T}_0$, а операторы $(1 + V_1)M$ и $M(1 + V_2)$ являются соответственно левым и правым обратными к N и $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{T}_0$. Таким образом, оператор N обратим в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{T}_0$ и, в частности, фредгольмов.

Обратно, пусть оператор N фредгольмов. По доказанному выше оператор M также фредгольмов, так что это верно и по отношению к $MN = 1 + U$. Таким образом, $\det(1 + U_1)^\wedge(\zeta) \neq 0$, $\operatorname{Re} \zeta = 0$, так что и $\det \widehat{N}(\zeta) \neq 0$, $\operatorname{Re} \zeta = 0$.

Пусть оператор N обратим в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{K}_0$ и $U \in \mathcal{K}_0$ выбран так, чтобы $(N + U)^\wedge$ был обратим в $\mathcal{C}$. Положим по определению

$$\operatorname{Ind}_* N = \operatorname{Ind}(N + U) + \operatorname{Ind}(N + U)^\wedge. \quad (3.12)$$

Это определение корректно, т.е. не зависит от выбора U . В самом деле, если M выбран так же, как выше, то в силу (3.11)

$$\operatorname{ind}(N + U)M + \operatorname{Ind}[(N + U)M]^\wedge = 0$$

и, значит, величина в правой части (3.12) равна $-\operatorname{Ind}_* M - \operatorname{Ind} \widehat{M}$ для любого U . Очевидно, так определенная функция Ind_* удовлетворяет всем условиям i)–iv) индекса Коши в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{K}_0$.

Возникает вопрос, насколько необходимо основное требование (3.8) оператора N для его фредгольмовости? В конкретных ситуациях для ответа на этот вопрос полезно использовать понятие обобщенных делителей нуля. Именно в тех случаях, когда нарушение условия (3.9) влечет принадлежность N к классу обобщенных делителей нуля в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{I}_0$, можно говорить о необходимости этого условия для фредгольмовости N .

Различные примеры алгебр, каждый необратимый элемент которых является обобщенным делителем нуля, приведены в [1].

§ 4. Операторы нормального типа

Рассмотрим сингулярный оператор $S \in \mathcal{K}$ свертки с функцией $s(t)$ из (1.21). Обозначим $\mathcal{P}$ множество всех операторов $A \in \mathcal{K}$, коммутирующих с S по модулю $\mathcal{K}_0$:

$$AS - SA \in \mathcal{K}_0. \quad (4.1)$$

Пример таких операторов доставляет лемма 4. Очевидно, $\mathcal{P}_0$ является замкнутой подалгеброй $\mathcal{K}$, содержащей $\mathcal{K}_0$. Заметим, что в силу (1.23) инволюции (1.3) инвариантны на $\mathcal{P}$. Особенно существенны первые два включения в (1.23), которые запишем в форме

$$S^2 - 1, ST + TS \in \mathcal{K}_0. \quad (4.2)$$

Из них следует, что линейные отображения $N \rightarrow N_{(j)}$ по формулам

$$2N_{(0)} = N + SNS, \quad 2N_{(1)} + (N - SNS)T \quad (4.3)$$

переводят $\mathcal{K}$ в $\mathcal{P}$. В частности, алгебра $\mathcal{P}$ и оператор T порождают все $\mathcal{K}$. Заметим, что для $A \in \mathcal{P}$ операторы $A - A_{(0)}$, $A_{(1)}$ принадлежат $\mathcal{K}_0$.

Положим для краткости

$$2S^\pm = 1 \pm S.$$

Если $A, B \in \mathcal{P}$, то в силу (4.2)

$$(AS^+ + S^-)(BS^+ + S^-) - (ABS^+ + S^-) \in \mathcal{K}_0.$$

Поэтому равенство

$$\text{Ind } A = \text{Ind}_*(AS^+ + S^-) \quad (4.4)$$

определяет индекс Коши в $\mathcal{P}$ по модулю $\mathcal{K}_0$. При проверке условия iii) определения индекса Коши существенно то, что оператор S задается скалярной функцией $s(t)$ в (1.21).

Рассмотрим в $\mathcal{K}$ сингулярный оператор вида

$$N = AS^+ + BS^-, \quad A, B \in \mathcal{K}. \quad (4.5)$$

По определению отнесем его к нормальному виду, если операторная (2×2) -матрица

$$C = \begin{pmatrix} A_{(0)} & B_{(1)}^\vee \\ A_{(1)} & B_{(0)}^\vee \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

обратима в $\mathcal{P}$ по модулю $\mathcal{K}_0$.

Заметим, что в случае $A, B \in \mathcal{P}$ эта матрица сводится к диагональной:

$$C - \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B^\vee \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_0. \quad (4.7)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть оператор (4.6) нормального типа. Тогда N обратим в $\mathcal{K}$ по модулю $\mathcal{K}_0$ и

$$\text{Ind}_* N = \text{Ind } C. \quad (4.8)$$

В частности, при условии фредгольмовости формула индекса (3.10) переходит в формулу

$$\text{ind } N = \text{Ind } C - \text{Ind } \hat{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K = \mathcal{K}/\mathcal{K}_0$, $P = \mathcal{P}/\mathcal{K}_0$ и обозначим $s = S + \mathcal{K}_0$, $t = T + \mathcal{K}_0 \in K$. Тогда (4.1) означает, что P состоит из элементов $x \in K$, коммутирующих с s , а (4.2) переходят в соотношения

$$s^2 = t^2 = 1, \quad st + ts = 0. \quad (4.9)$$

Аналогично (4.3) соответствуют линейные соотношения $x \rightarrow x_{(j)}$ из K в P по формулам

$$2x_{(0)} = x + sxs, \quad 2x_{(1)} = (x - sxs)t,$$

а определение (4.4) индекса Коши в P примет вид

$$\text{Ind } a = \text{Ind}_*(as^+ + s^-). \quad (4.10)$$

Несколько отступая от общего соглашения, алгебру (2×2) -матрицы над K обозначим $K_{(2)}$, аналогичный смысл имеет $P_{(2)}$. При этом “скалярные” матрицы $(s\delta_{ij})$ и $(t\delta_{ij})$ отождествляются с s и t . Любой элемент $x \in K$ единственным

образом представляется в виде $x = x_{(0)} + x_{(1)}$. Поставим ему в соответствие (2×2) -матрицу из $P_{(2)}$ по формуле

$$x^\# = \begin{pmatrix} x_{(0)} & x_{(1)} \\ x_{(1)}^\vee & x_{(0)}^\vee \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Нетрудно видеть, что отображение $x \rightarrow x^\#$ осуществляет изоморфизм алгебры K на замкнутую подалгебру $P_{(2)}$, выделяемую условием

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y^\vee \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = y, \quad y \in K_{(2)}. \quad (4.12)$$

В силу (4.9), (4.11)

$$x^\# \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \tilde{x} \end{pmatrix},$$

где положено $x = x_{(0)} + x_{(1)}t$, $\tilde{x} = x_{(0)} - x_{(1)}t$. Поскольку $\tilde{x} = sxs$, отсюда заключаем, что обратимость x равносильна обратимости $x^\#$, причем в силу свойств i)–iii) индекса Коши

$$\text{Ind}_* x^\# = 2 \text{Ind}_* x. \quad (4.13)$$

Обратимся к элементу

$$x = as^+ + bs^-, \quad a, b \in K.$$

По условию он нормального типа, т.е. матрица

$$c = \begin{pmatrix} a_{(0)} & b_{(1)} \\ a_{(1)}^\vee & b_{(0)}^\vee \end{pmatrix}$$

обратима. Согласно (4.10)

$$(s^\pm)^\# = \begin{pmatrix} s^\pm & 0 \\ 0 & s^\mp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s^-.$$

Поэтому

$$x^\# = a^\#(s^+)^\# + b^\#(s^-)^\# = cs^+ + \tilde{c}s^-, \quad (4.14)$$

где $\tilde{c}$ определяется по $y = c$ левой частью (4.12). Элементы $c, \tilde{c}$ принадлежат $P_{(2)}$ и свойством обратимости обладают одновременно.

В соответствии с (4.14) отсюда заключаем, что обратимость x равносильна обратимости c и

$$\text{Ind}_* x^\# = \text{Ind}_*(cs^+ + \tilde{c}s^-). \quad (4.15)$$

Поскольку

$$cs^+ + \tilde{c}s^- = (cs^+ + s^-)s(\tilde{c}^\vee s^+ + s^-)s,$$

и в силу (4.12) индексы Коши c и $\tilde{c}^\vee$ совпадают, из (4.13), (4.15) в соответствии с (4.10) приходим к соотношению $\text{Ind}_* x = \text{Ind}_* c$, доказывающему (4.8).

Отметим некоторые свойства индекса Коши (4.4), облегчающие его вычисления в конкретных ситуациях.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A обратим в $\mathcal{P}$ по модулю $\mathcal{K}_0$. Тогда диагональные элементы $\hat{A}_{11}$, $\hat{A}_{12}$ блочной матрицы $\hat{A}$ обратимы в C по модулю C_0 и в обозначениях (1.3), (3.6) справедливы соотношения

$$\text{Ind } A^\vee = -\text{Ind } A + \text{Ind}_* A, \quad (4.16)$$

$$\text{Ind } \bar{A} = -\overline{\text{Ind } A} + \overline{\text{Ind}_* A}, \quad (4.17)$$

$$\text{Ind } A = -\frac{1}{2\pi i} (L^+ h_1 - L^- h_2) + \text{целое число}, \quad (4.18)$$

где $h_j(t) \equiv \ln \det A_{jj}(it)$ в окрестности ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях доказательства теоремы 5 имеем

$$s(a^\vee s^+ + s^-)s = s^+ + as^- = a(a^{-1}s^+ + s^-),$$

откуда в соответствии с (4.10) следует (4.16).

Рассмотрим в алгебре C матриц-функций $x(\zeta)$ инволюцию сопряжения $\bar{x}(\zeta) = \overline{x(\zeta)}$, фигурирующую в (1.16). Непосредственно из определения (2.6) следует, что

$$\bar{N}^\wedge = (\hat{N})^-. \quad (4.19)$$

По определению операторы $L^\pm$ в (3.5) линейны над полем $\mathbb{R}$, поэтому в соответствии с (4.18) имеем

$$\text{Ind } \bar{x} = \frac{1}{2\pi i} (L^+ - L^-) \left[\overline{\ln \det x(-\zeta)} \right] = \overline{\text{Ind } x}. \quad (4.20)$$

Согласно (1.3) индексы операторов N и $\bar{N}$ совпадают, так что из (3.6), (4.19) выводим аналогичное равенство

$$\text{Ind}_* \bar{N} = \overline{\text{Ind}_* N} \quad (4.21)$$

для индекса Коши Ind_* .

Согласно (1.23) разность $\bar{S}^\pm - S^\mp$ принадлежит $\mathcal{K}_0$, и поэтому, как и выше, в обозначениях доказательства теоремы 5 получаем

$$\bar{a}s^+ + s^- = \overline{as^- + s^+} = \bar{a}(a^{-1}s^+ + s^-),$$

с учетом (4.10), (4.21) отсюда следует (4.17).

Обратимся к последнему утверждению теоремы. В силу (1.22), (2.5)

$$\hat{S}(\zeta) \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \text{Im } \zeta \rightarrow \pm i\infty. \quad (4.22)$$

По условию $AS - SA \in \mathcal{K}_0$ и, следовательно, $(AS - SA)^\wedge \in C_0$. С учетом (4.22) отсюда следует, что $\hat{A}_{12}, \hat{A}_{21} \in C_0$ при $\text{Im } \zeta \rightarrow \infty$. Поскольку A обратим в $\mathcal{K}/\mathcal{K}_0$, матрица-функция $\hat{A}(\zeta)$ обратима в C/C_0 и, следовательно, этим свойством обладают и ее диагональные элементы $\hat{A}_{11}, \hat{A}_{22}$.

Рассмотрим оператор $N = AS^+ + S^- + U$, где $U \in \mathcal{K}_0$ с обратимым конечным символом. В силу (4.22)

$$\lim_{\zeta \rightarrow i\infty} \left[\widehat{N} - \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \lim_{\zeta \rightarrow -i\infty} \left[\widehat{N} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Поэтому для непрерывных ветвей $\ln \det A_{11}$ и $\ln \det A_{22}$ соответственно в окрестности $+i\infty$ и $-i\infty$ найдутся такие целые числа k_1 и k_2 , что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} [\ln \det \widehat{N}(\zeta) - \ln \det \hat{A}_{11}(\zeta)] &\rightarrow k_1 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow i\infty, \\ \frac{1}{2\pi i} [\ln \det \widehat{N}(\zeta) - \ln \det \hat{A}_{22}(\zeta)] &\rightarrow k_2 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow -i\infty. \end{aligned}$$

С учетом (3.5), (3.6) и (4.4) отсюда вытекает (4.18).

В качестве следствия теоремы докажем, что если в условиях леммы 4 оператор (2.19) обратим, то его индекс Коши $\text{Ind } A$ вычисляется по формуле

$$\text{Ind } A = \frac{1}{2\pi i} \ln \det a(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (4.23)$$

В самом деле, рассмотрим сначала случай $a \equiv 1$. В этом случае $A_{11}(\zeta) = e^{\zeta \Delta(-\infty)}$, $\hat{A}_{22}(\zeta) = e^{-\zeta \Delta(+\infty)}$ и в силу (3.6), (4.18) индекс Коши $\text{Ind } A$ является целым числом.

Из (3.6) также следует, что $\text{Ind } \hat{A} = 0$. Так как оператор A обратим, его индекс $\text{ind } A$ равен нулю. Таким образом, $\text{Ind}^* A = 0$, и формула (4.17) приводит к равенству $\text{Ind } \bar{A} = -\text{Ind } A$. Поскольку $\bar{A} = A$, отсюда следует искомое равенство $\text{Ind } A = 0$.

Обратимся теперь к оператору умножения $A = a$. Обозначим Q банахову алгебру $C_0^{\mu+0}$ матриц-функций, и пусть индекс Коши $\widehat{\text{Ind}}$ в Q определяется правой частью (4.23). В силу (4.18) разность $\widehat{\text{Ind}} - \text{Ind}$ является целочисленным индексом Коши в Q . Поскольку группа обратимых элементов Q связна, то этот индекс равен нулю.

В важном для приложений частном случае, когда (4.6) является оператором умножения, условие принадлежности оператора (4.5) к нормальному виду оказывается и необходимым для его фредгольмовости. При этом формула индекса приобретает особенно законченную форму.

ТЕОРЕМА 7. *Оператор*

$$N = (a_0 + a_1 T)S^+ + (b_0 + b_1 T)S^- + U, \quad (4.24)$$

где $a_j, b_j \in C_c^{\mu+0}$, $U \in \mathcal{K}_0$, *фредгольмов тогда и только тогда, когда*

$$\det \begin{pmatrix} a_0(t) & b_1(t) \\ a_1^\vee(t) & b_0^\vee(t) \end{pmatrix} \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad (4.25)$$

$$\det \widehat{N}(\zeta) \neq 0, \quad \text{Re } \zeta = 0.$$

При выполнении этих условий

$$\text{ind } N = \frac{1}{2\pi i} \ln \det \begin{pmatrix} a_0(t) & b_1(t) \\ a_1(-t) & b_0(-t) \end{pmatrix} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2\pi i} \ln \det \widehat{N}(\zeta) \Big|_{-i\infty}^{+i\infty}. \quad (4.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор (4.24) можем записать в форме (4.5) с $A = a_0 + a_1T + U$, $B = b_0 + b_1T + U$, при этом в $\mathcal{P}/\mathcal{K}_0$ оператор (4.6) совпадает с оператором умножения $c(t)$, фигурирующим под знаком $\det$ в (4.25). Соответственно с учетом (4.23) формула индекса (4.8) переходит в (4.26).

Остается показать, что первое условие в (4.25), гарантирующее принадлежность оператора (4.24) к нормальному типу, необходимо для его фредгольмовости. Это можно осуществить с помощью замечания к теореме 4. Однако проще воспользоваться приемом, использованным при ее доказательстве, с той разницей, что за основу берется формула индекса (4.26). Возможность соответствующей аппроксимации в C^ν , $\nu < \mu + \varepsilon$, для операторов умножения из $C_c^{\mu+0}$, обосновывается с помощью леммы 2.

§ 5. Операторы в семействе пространств

Для операторов из класса $\mathcal{K}\{r\}$, введенного в § 2, результаты § 3, 4 могут быть существенно дополнены. Они опираются на следующее простое предложение [1].

ЛЕММА 6. Пусть заданы банаховы пространства X_j , $j = 0, 1$, и Y , причем X_0 вложено в X_1 . Пусть билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ограничена и невырождена на $X_j \times Y$. Пусть задана тройка фредгольмовых операторов $N_j \in \mathcal{L}(X_j)$ и $N' \in \mathcal{L}(Y)$, причем $N_0 = N_1|_{X_0}$ и выполнено соотношение двойственности $\langle N_1x, y \rangle = \langle x, N'y \rangle$, $x \in X_1$, $y \in Y$. Пусть этими же свойствами обладают операторы $M_j \in \mathcal{L}(X_j)$ и $M' \in \mathcal{L}(Y)$. Тогда из равенств

$$\operatorname{ind} N_j + \operatorname{ind} M_j = -(\operatorname{ind} N' + \operatorname{ind} M'), \quad j = 0, 1,$$

следует, что $\operatorname{Ker} N_0 = \operatorname{Ker} N_1$, а образ $\operatorname{Im} N_j$ представляет собой ортогональное дополнение к $\operatorname{Ker} N'$ в пространстве X_j относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В частности, $\operatorname{ind} N_j = -\operatorname{ind} N'$, $j = 0, 1$.

Для формулировки основного результата рассмотрим подробнее алгебру $C\{r\}$ матриц-функций $x(\zeta)$, которые непрерывны и ограничены в полосе $|\operatorname{Re} \zeta| \leq r$ и аналитичны внутри нее. Напомним, что $C_0\{r\}$ выделяется из нее условием $x(\zeta) \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Im} \zeta| \rightarrow \infty$ равномерно в этой полосе. Имеет место следующий аналог леммы 4.

ЛЕММА 7. Пусть матрица-функция $x(\zeta)$ обратима в $C\{r\}$ по модулю $C_0\{r\}$. Тогда для любого $0 < r_0 < r$ существует такой $y \in M_0\{r\}$, что $x + y$ обратима в $C\{r_0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по условию $xx_1 - 1, x_1x - 1 \in C_0\{r\}$ для некоторого $x_1 \in C\{r\}$, найдется такое $\Delta > 0$, что выполнено условие (3.1) в полосе:

$$\inf_{|\operatorname{Re} \zeta| \leq r, |\operatorname{Im} \zeta| \geq \Delta} |\det x(\zeta)| > 0. \quad (5.1)$$

Поэтому множество E нулей функции $\det x(\zeta)$ в строго внутренней полосе $|\operatorname{Re} \zeta| \leq r_0$ конечно. Выберем рациональную матрицу-функцию $R(\zeta)$ с полюсами в E , $R(\infty) = 1$, так, чтобы функция $x_0 = xR$ принадлежала $C\{r\}$ и была обратимой в $C\{r_0\}$. Запишем $x = x_0 + y_0$ с некоторой $y_0 \in C_0\{r\}$. Как и при

доказательстве леммы 4, остается приблизить в $C_0\{r\}$ функцию y_0 элементами $y \in M_0\{r\}$.

Определение индекса Коши Ind в $C\{r\}$, данное в § 3, можно расширить на функции со свойством (5.1). Пусть ломаная Γ_ν образована отрезками и лучами прямых с вершинами $\pm i\infty$, $\pm 2i\Delta$ и $\nu \pm i\Delta$. Если $\det x(\zeta)$ не имеет нулей на прямой $\text{Re } \zeta = \nu$, $|\nu| < r$, то по определению полагаем

$$\text{Ind}(x \mid \Gamma_\nu) = \text{Ind } x_\nu, \quad (5.2)$$

где функция $x_\nu(\zeta) \in C$ определяется проекцией сужения $x \mid \Gamma_\nu$ на мнимую ось, т.е. $x_\nu(i\xi) = x(s+i\xi)$, $s+i\xi \in \Gamma_\nu$. Заметим, что это определение не зависит от выбора $\Delta > 0$ в (5.1). Оно удобно тем, что при $\nu_1 < \nu_2$ разность

$$\text{Ind}(x \mid \Gamma_{\nu_2}) - \text{Ind}(x \mid \Gamma_{\nu_1}) = s(\nu_1, \nu_2), \quad (5.3)$$

где $s(\nu_1, \nu_2)$ означает число нулей в полосе $\nu_1 < \text{Re } \zeta < \nu_2$ (включая их кратности).

В самом деле, из (5.2) и принципа аргумента аналитических функций следует, что непрерывные ветви логарифма функций $\det x_{\nu_j}$ связаны соотношением

$$\ln \det x_{\nu_2}(it) - \ln \det x_{\nu_1}(it) = 2\pi i k_\pm, \quad \pm t \geq \Delta,$$

с некоторыми целыми $k_\pm$, причем разность $k_+ - k_-$ равна $s(\nu_1, \nu_2)$. С учетом (3.5), (3.6) отсюда приходим к (5.3).

В случае, когда существуют пределы $\lim x(\zeta)$ при $\text{Im } \zeta \rightarrow \pm\infty$, $|\text{Re } \zeta| \leq r$, определение (5.2) совпадает с индексом Коши сужения $x(\zeta)$ на прямую $\text{Re } \zeta = \nu$:

$$\text{Ind}(x \mid \Gamma_\nu) = \text{Ind } x(\zeta + \nu). \quad (5.4)$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть оператор N обратим в $\mathcal{K}\{r\}$ по модулю $\mathcal{K}_0\{r\}$, т.е.

$$MN - 1, NM - 1 \in \mathcal{K}_0\{r\} \quad (5.5)$$

для некоторого $M \in \mathcal{K}\{r\}$. Пусть функция $\det \hat{N}(\zeta)$ не имеет нулей в полосе $\nu_1 < \text{Re } \zeta < \nu_2$, $|\nu_j| \leq r$. Тогда пространство X (X') решений однородного уравнения $N\varphi = 0$ ($N'\varphi = 0$), рассматриваемого в объединении семейства $e^{-\nu|t|}C^\mu$ ($e^{\nu|t|}C^\mu$), $\nu_1 < \nu < \nu_2$, конечномерно и содержится в пересечении этого семейства. Неоднородное уравнение $N\varphi = f$ разрешимо в классе $e^{-\nu t}C^\mu$, $\nu_1 < \nu < \nu_2$, тогда и только тогда, когда

$$(f, \psi) = 0 \quad \text{для всех} \quad \psi \in X'. \quad (5.6)$$

При этом

$$\dim X - \dim X' = \text{Ind}_* N - \text{Ind}(\hat{N} \mid \Gamma_\nu). \quad (5.7)$$

Если N обратим в $\mathcal{K}^n\{r\}$ по модулю $\mathcal{K}_0^n\{r\}$, то X содержится в пересечении семейства $e^{-\nu\sigma}C^{i+\mu}$, $\nu_1 < \nu < \nu_2$, $i = 0, 1, \dots, n$, а условие (5.6) необходимо и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения $N\varphi = f$ в классе $e^{-\nu\sigma}C^{i+\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на три этапа.

1) Предположим, что $\widehat{M}$ и $\widehat{N}$ обратимы в $C\{r\}$. Тогда, повторяя соответствующие рассуждения теоремы 5, убеждаемся, что операторы M и N обратимы в $\mathcal{K}\{r\}$ по модулю $\mathcal{T}\{r\}$. По определению класса $\mathcal{T}\{r\}$, данному в § 2, отсюда заключаем, что все операторы

$$1 - MN, \quad 1 - NM, \quad 1 - M'N', \quad 1 - N'M'$$

компактны в семействе $e^{-\nu|t|}C^\mu$, $|\nu| \leq r$. Выбирая в качестве X_0, X_1 и Y подходящие тройки пространств из семейств весовых пространств, отсюда с помощью леммы 6 приходим к справедливости всех утверждений теоремы. Остановимся только подробнее на формуле индекса (5.7). По предположению правая часть (5.3) равна нулю, так что правая часть (5.7) не зависит от ν . Поэтому остается заметить, что при $\nu = 0$ формула (5.7) является следствием (3.10).

2) Пусть $N = 1 + U$. В этом случае согласно теореме 4 к операторам $N_\nu = e^{-\nu|t|}Ne^{\nu|t|}$, $N'_\nu = e^{\nu|t|}N'e^{-\nu|t|} \in \mathcal{K}$, $\nu_1 < \nu < \nu_2$, можем применить теорему 5. С учетом (2.29), (2.31) из этой теоремы заключаем, что индексы этих операторов даются формулой

$$\text{ind } N_\nu = -\text{ind } N'_\nu = -\frac{1}{2\pi i} \ln \det \widehat{N}(\zeta + \nu) \Big|_{-i\infty}^{+i\infty}.$$

Величина справа здесь не зависит от ν и в силу (5.4) совпадает с правой частью (5.7). Поэтому, применяя к операторам $N = 1 + U$ и $M = 1$ лемму 6 для подходящих троек пространств, приходим к справедливости теоремы. Отметим, что для $U \in \mathcal{K}_0^n\{r\}$ в этих рассуждениях использован аналог теоремы 5 для пространства $C^{i+\mu}$, который устанавливается совершенно аналогично случаю $n = 0$.

3) Общий случай. Пусть $|\nu_j| < r_0 < r$, $j = 1, 2$. На основании леммы 7 выбор M в (5.5) подчиним условию обратимости $\widehat{M}$ в $C\{r_0\}$. Из тех же соображений найдется оператор N_1 , концевой символ которого обратим в $C\{r_0\}$ и $N_1 - N \in \mathcal{K}_0\{r\}$. На основании случая 1), примененного к паре N_1, M в $\mathcal{K}\{r_0\}$, операторы M и M' фредгольмовы в семействе $e^{-\nu|t|}$, $|\nu| \leq r_0$, причем их индексы противоположны, не зависят от ν и даются соответствующей формулой (5.7). Поэтому остается к $1 + U = MN$ применить разобранный выше случай 2).

Введем классы

$$\dot{C}^\mu = \bigcap_{\nu < 0} e^{-\nu|t|}C^\mu, \quad \circ C^\mu = \bigcup_{\nu > 0} e^{-\nu|t|}C^\mu, \quad (5.8)$$

между которыми заключено пространство C^μ .

Очевидно, билинейная форма $(,)$ определена на произведении $\dot{C}^\mu \times \circ C^\mu$ $(\circ C^\mu \times \dot{C}^\mu)$, и для конечномерного пространства $Y \subseteq \circ C^\mu$ ($Y \subseteq \dot{C}^\mu$) обозначим $Y^\perp$ его ортогональное дополнение в $\dot{C}^\mu$, $(\circ C^\mu)$ относительно этой формы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть оператор N обратим в $\mathcal{K}\{r\}$ по модулю $\mathcal{K}_0\{r\}$ при некотором $r > 0$. Тогда ядра операторов $N | \dot{C}^\mu$, $N' | \dot{C}^\mu$ конечномерны и

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(N | \dot{C}^\mu) &= [\operatorname{Ker}(N' | \dot{C}^\mu)]^\perp, \\ \operatorname{Im}(N' | \dot{C}^\mu) &= [\operatorname{Ker}(N | \dot{C}^\mu)]^\perp, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} X_0 &= [\operatorname{Ker}(N | \dot{C}^\mu)] \ominus [\operatorname{Ker}(N | \dot{C}^\mu)], \\ X'_0 &= [\operatorname{Ker}(N' | \dot{C}^\mu)] \ominus [\operatorname{Ker}(N' | \dot{C}^\mu)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

связаны соотношением

$$\dim X_0 + \dim X'_0 = s, \quad (5.11)$$

где s – число нулей функции $\det \hat{N}(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $0 < r_0 < r$ столь малым, чтобы $\det \hat{N}(\zeta) \neq 0$ при $0 < |\operatorname{Re} \zeta| \leq r_0$, и применим теорему 10 для двух случаев $\nu_1 = -r_0$, $\nu_2 = 0$ и $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = r_0$.

При некоторых дополнительных предположениях ядро $\operatorname{Ker}(N | \dot{C}^\mu)$ можно описать явно. Введем класс

$$\dot{C}^{\mu*} = \dot{C}^\mu \oplus \{\chi_\pm(t)e^{-\zeta|t|}p_\pm(t); \operatorname{Re} \zeta = 0, p_\pm - \text{многочлены}\}, \quad (5.12)$$

где $\{\varphi_i, i \in I\}$ означает пространство конечных линейных комбинаций функций φ_i . Напомним, что $\chi_\pm \in C^\infty$ здесь определяются условиями (2.7). Очевидно, класс $\dot{C}^{\mu*}$ занимает промежуточное положение между $\dot{C}^\mu$ и $\dot{C}^\mu$.

В соответствии с определением (5.12) функции $\varphi \in \dot{C}^{\mu*}$ для каждого ζ , $\operatorname{Re} \zeta = 0$, можем поставить в соответствие $2m$ -вектор-многочлен $P_\zeta \varphi = (p_-, p_+)$, для которого разность $\varphi(t) - e^{-\zeta|t|}(p_- \chi_- + p_+ \chi_+)$ содержит только линейные комбинации функций $\chi_\pm(t)e^{\tilde{\zeta}(t)}\tilde{p}_\pm(t)$ с $\tilde{\zeta} \neq \zeta$. Ясно, что многочлен $P_\zeta \varphi$ отличен от нуля только для конечного числа точек ζ . Удобно под $\deg P_\zeta \varphi$ понимать степень многочлена $P_\zeta \varphi$, степень нулевого многочлена полагается равной -1 .

ТЕОРЕМА 11. Пусть оператор N обратим в $\mathcal{K}\{r\}$ по модулю $\mathcal{K}_0\{r\}$ при некотором r . Предположим, что N инвариантен в классе $\dot{C}^{\mu*}$ и действует в нем по правилу

$$P_\zeta N \varphi = \sum_{k \geq 0} \frac{\hat{N}^{(k)}(\zeta)}{k!} (P_\zeta \varphi). \quad (5.13)$$

Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ – все нули функции $\det \hat{N}(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$ с кратностями соответственно $s_1, \dots, s_r$.

Тогда любое решение $\varphi \in \dot{C}^{\mu*}$ уравнения $N \varphi = f$ с правой частью $f \in \dot{C}^{\mu*}$ принадлежит $\dot{C}^{\mu*}$, причем

$$\deg P_\zeta \varphi \leq \begin{cases} \deg P_\zeta f, & \zeta \neq \zeta_i, \\ s_i + \deg P_\zeta f, & \zeta = \zeta_i, \quad i = 1, \dots, r. \end{cases} \quad (5.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс $2m$ -вектор-многочленов $p(t), q(t), \dots$. Для целого k обозначим $D^{(k)}p$ производную $p^{(k)}(t)$ порядка k при $k \geq 0$ и результат $(-k)$ -кратного интегрирования $p(\zeta)$ от 0 до t при $k < 0$. С каждой $(2m \times 2m)$ -матрицей-функцией $x(u)$, мероморфной в окрестности $u = 0$, свяжем линейную операцию

$$x(D) = \sum_k c_k D^{(k)}$$

в классе многочленов, где c_k — коэффициенты лорановского разложения $x(u)$ по степеням u .

Нетрудно проверить, что $(yx)(D) = y(D)x(D)$ для любой матрицы-функции $y(u)$, аналитической в окрестности $u = 0$.

Для $y(u) = \hat{N}(\zeta + u)$ линейную операцию в правой части (5.13) можем записать в форме $y(D) = \hat{N}(\zeta + D)$. Поэтому уравнение

$$\hat{N}(\zeta + D)q_\zeta = p_\zeta, \quad p_\zeta = P_\zeta f,$$

всегда разрешимо: в качестве q можно взять $\hat{N}^{-1}(\zeta + D)p$. При этом степень $\deg q_\zeta$ подчиняется неравенству (5.14).

Пусть $\varphi_1 \in \overset{*}{C}^\mu$ и $P_\zeta \varphi_1 = q_\zeta$ при каждом ζ . Тогда согласно (5.13) функция $N(\varphi - \varphi_1)$ принадлежит $\overset{\circ}{C}^\mu$. Таким образом, теорему достаточно установить в предположении $f \in \overset{\circ}{C}^\mu$.

В окрестности $u = 0$ функцию $\hat{N}(\zeta_i + u)$ можем представить в форме

$$\hat{N}(\zeta_i + u) = y_1(u) \begin{pmatrix} u^{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u^{\ell_{2m}} \end{pmatrix} y_2(u)$$

с некоторыми неотрицательными целыми $\ell_i \geq 0$, $\ell_1 + \dots + \ell_{2m} = s_i$, где матрицы-функции y_1, y_2 аналитичны в этой окрестности и их определители всюду отличны от нуля.

Соответственно этому

$$\hat{N}(\zeta_i + D) = y_1(D) \begin{pmatrix} D^{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D^{\ell_{2m}} \end{pmatrix} y_2(D),$$

где операции $y_i(D)$ обратимы с обратными $y_j^{-1}(D)$. Следовательно, однородное уравнение

$$\hat{N}(\zeta_i + D)q = 0 \tag{5.15}$$

имеет в точности s_i линейно независимых решений $q_{i,1}, \dots, q_{i,s_i}$, причем степени этих многочленов не превосходят $s_i - 1$.

Выберем функции $f_{ij} \in \overset{*}{C}^\mu$ по условию

$$P_\zeta \varphi_{ij} = \begin{cases} 0, & \zeta \neq \zeta_i, \\ q_{ij}, & \zeta = \zeta_i. \end{cases}$$

Очевидно, семейство $\{\varphi_{ij}\}$ линейно независимо по модулю $\overset{\circ}{C}^\mu$. Положим для краткости

$$Z = \overset{\circ}{C}^\mu \oplus \{\varphi_{ij}\}$$

и запишем

$$\begin{aligned} \text{Ker}(N | Z) &= Z_0 \oplus \text{Ker}(N | \overset{\circ}{C}^\mu), \\ \text{Im}(N | Z) &= Y_0 \oplus \text{Im}(N | \overset{\circ}{C}^\mu). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Пространство Z является расширением $\overset{\circ}{C}^\mu$ на s измерений, и согласно (5.15) оператор N действует из Z в $\overset{\circ}{C}^\mu$. Поэтому индекс оператора $N | Z$ равен $s + \text{ind}(N | \overset{\circ}{C}^\mu)$, как это следует из общих свойств фредгольмовых операторов. Следовательно, в обозначениях (5.16)

$$\dim Z_0 + \dim Y_0 = s. \quad (5.17)$$

Из (5.10), (5.16) имеем $\dim Z_0 \leq \dim X_0$, так что с учетом (5.11), (5.17) должно быть $\dim Y_0 \geq \dim X'_0$. Если последнее неравенство строгое, то существует ненулевая функция $f_0 \in Y_0$, ортогональная X'_0 . Поскольку образ $\text{Im}(N | Z)$ ортогонален $\text{Ker } N' | \overset{\circ}{C}^\mu$, в соответствии с (5.10) отсюда следует ортогональность f_0 ядру $\text{Ker}(N' | \overset{\bullet}{C}^\mu)$. Согласно следствию к теореме 10 это означает, что $f_0 \in \text{Im}(N | \overset{\circ}{C}^\mu)$, что противоречит прямой сумме во втором равенстве (5.16).

Итак, $\dim Z_0 = \dim X_0$, $\dim Y_0 = \dim X'_0$. В частности, можно считать $Z_0 = X_0$. Предыдущие рассуждения, примененные к $f = N\varphi$, показывают, что $f \in \text{Im}(N | Z)$. Следовательно, $N\varphi = N\varphi_1$ для некоторого $\varphi_1 \in Z$. Таким образом, $\varphi - \varphi_1$ принадлежит ядру $N | \overset{\bullet}{C}^\mu$, которое, как показано выше, совпадает с ядром $N | Z$.

Теорема 11 описывает асимптотику решений уравнений $N\varphi = f$ в окрестности $\pm\infty$. Для операторов Винера–Хопфа этот вопрос (в классах C с весом) был изучен в [10].

Обсудим более подробно условие теоремы 11. Обозначим $\mathcal{K}_*$ множество операторов N , которые принадлежат $\mathcal{K}\{r\}$ при некотором $r > 0$, инвариантны в классе $\overset{*}{C}^\mu$ и действуют в нем согласно (5.13). Поскольку $x(D)y(D) = (xy)(D)$ для аналитических функций $x(u)$, $y(u)$, множество $\mathcal{K}_*$ является подалгеброй $\mathcal{K}\{r\}$. Принадлежность операторов $N \in \mathcal{T}_0\{r\}$ классу $\mathcal{K}_*$, очевидно, равносильно тому, что N переводит $\overset{*}{C}^\mu$ в $\overset{\circ}{C}^\mu$. Класс $\mathcal{K}_* \cap \mathcal{T}_0\{r\}$ этих операторов обозначим $\mathcal{T}_*$, он является идеалом алгебры $\mathcal{K}_*$.

Рассмотрим вопрос о принадлежности $\mathcal{K}_*$ операторов R типа свертки и функциональных операторов (2.19).

ЛЕММА 8. *Имеет место включение*

$$\mathcal{R}\{r\} \subseteq \mathcal{K}_*. \quad (5.18)$$

Кроме того, в предположении

$$a, \Delta' \in \overset{\circ}{C}^{\mu+\varepsilon} \oplus \{\chi_{\pm}\}, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.19)$$

оператор A принадлежит $\mathcal{K}_*\{r\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная мультипликатора mR , $R \in \mathcal{R}\{r\}$, на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$ вычисляется по формуле

$$(mR)^{(k)}(\zeta) = [R(t^k e^{\zeta t})](0). \quad (5.20)$$

При $k = 0$ эта формула совпадает с определением (1.12). В силу соображений плотности ее достаточно установить для $R \in \tilde{\mathcal{R}}$, когда функционал $f = \sigma R$ имеет компактный носитель. Пусть “срезающая” функция $\chi \in C_0^\infty$ подобрана по условию $\chi f = f$. Тогда $(R\varphi)(0) = \langle Tf, \chi\varphi \rangle$ и, в частности,

$$(mR)(\zeta) = \langle Tf, \chi e_\zeta \rangle, \quad e_\zeta(t) = e^{\zeta t}.$$

Поскольку отображение $\zeta \rightarrow \chi e_\zeta$ действует из $\mathbb{C}$ в C^μ , то (5.20) получается прямым дифференцированием последнего равенства.

Основываясь на формуле (5.20), покажем далее, что

$$Rpe_\zeta = [(mR)(\zeta + D)p]e_\zeta \quad (5.21)$$

для любого многочлена p . Это равенство для многочленов $p \equiv \text{const}$ нулевой степени очевидно. В общем случае имеем

$$(Rpe_\zeta)(s) = (RP_s pe_\zeta)(0).$$

Подставляя разложение

$$(P_s pe_\zeta)(t) = e^{\zeta s} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{p^{(k)}(s)}{k!} t^k \right) e^{\zeta t},$$

в соответствии с (5.20) и определением операции $x(D)$ приходим к справедливости (5.21).

Обратимся к доказательству (5.18). В соответствии с (5.13) и видом (2.5) концевго символа оператора R необходимо доказать, что для любой пары многочленов $p_{\pm}$ и точки ζ , $\operatorname{Re} \zeta = 0$, разность

$$R[(\chi_{-p_-} + \chi_{+p_+}(t)e^{-\zeta|t|}](s) - (\chi_{-q_-} + \chi_{+q_+}(s)e^{-\zeta|s|}) \quad (5.22)$$

принадлежит $\overset{\circ}{C}^\mu$, где положено $q_- = (mR)(\zeta + D)p_-$, $q_+ = (mR)(-\zeta - D)p_+$. Запишем $\varphi(t) = (\chi_{-p_-} + \chi_{+p_+})(t)e^{-\zeta|t|}$, и пусть ψ имеет аналогичный смысл по отношению к $q_{\pm}$. Тогда по определению (2.7) функций $\chi_{\pm}$ имеем

$$\varphi(t) - p_{\mp}(t)e^{\pm\zeta t} \in (e^{\pm r t} C^\mu) \cap C^\mu. \quad (5.23)$$

Поскольку

$$q_+ = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} (mR)^{(k)}(-\zeta)(-p_+)^{(k)} = \sum_{k \geq 0} \frac{(mR)^{(k)}(-\zeta)}{k!} p_+^{(k)},$$

с учетом (5.21) из (5.23) выводим

$$R\varphi - q_{\mp}(t)e^{\pm\zeta t} \in (e^{\pm r t} C^{\mu}) \cap C^{\mu}.$$

Остается заметить, что эти включения равносильны (5.22).

Пусть выполнено условие (5.19) второй части леммы. Для оператора $A = a$ утверждение леммы очевидно, поскольку класс $\overset{\circ}{C}^{\mu}$ выдерживает умножение на функции из $\overset{*}{C}^{\mu}$. Поэтому можно считать $a \equiv 1$. Как и выше, рассмотрим функцию $A\varphi$ для $\varphi(t)(\chi_{-}p_{-} + \chi_{+}p_{+})(t)e^{-\zeta|t|}$. Согласно (5.13) и (2.19) необходимо показать, что

$$\begin{aligned} (\chi_{-}p_{-} + \chi_{+}p_{+})[t + \Delta(t)]e^{-\zeta|t+\Delta(t)|} - (\chi_{-}q_{-} + \chi_{+}q_{+})(t)e^{-\zeta|t|} &\in \overset{\circ}{C}^{\mu}, \\ q_{\pm} &= x_{\pm}(\zeta + D)p_{\pm}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где положено $x_{\pm}(\zeta) = e^{\mp\zeta\Delta(\pm\infty)}$.

В окрестности $-\infty$ функция в любой части (5.24) совпадает с

$$\begin{aligned} p_{-}(t + \Delta(t))e^{\zeta[t+\Delta(t)]} - q_{-}(t)e^{\zeta t} \\ = e^{\zeta t} \sum_{k \geq 0} \frac{p_{-}^{(k)}(t)}{k!} [\Delta^k(t)e^{\zeta\Delta(t)} - \Delta^k(-\infty)e^{\zeta\Delta(-\infty)}] \chi_{-}(t). \end{aligned}$$

Очевидно, выражение в квадратных скобках в правой части этого соотношения принадлежит $\overset{\circ}{C}^{\mu}$. Поэтому $\overset{\circ}{C}^{\mu}$ принадлежит и левая часть (5.24) в окрестности $-\infty$. Аналогично рассматривается это соотношение и в окрестности $+\infty$.

В силу леммы 8 пересечение $\mathcal{H}_0\{r\} \cap \mathcal{H}_*$ состоит из операторов вида (2.8), где $N_0 \in \mathcal{T}_*$. Заметим, что из (5.19) следует и принадлежность функции Δ тому же классу, так что (5.19) перекрывает условия леммы 3.

В обозначениях (2.35) аналогично (5.12) можем ввести класс

$$\overset{*}{C}^{n+\mu} = \overset{\circ}{C}^{n+\mu} \oplus \{\chi_{\pm}e^{-\zeta\sigma}p_{\pm}\}, \quad \operatorname{Re} \zeta = 0, \quad (5.25)$$

где $\overset{\circ}{C}^{n+\mu}$ есть объединение $e^{-\nu\sigma}C^{n+\mu}$ по $\nu > 0$. С учетом последнего утверждения теоремы 10 аналогичный теореме 11 результат справедлив и по отношению к классу $\overset{*}{C}^{n+\mu}$.

Как и выше, обозначим $\mathcal{H}_*^n$ множество операторов N , которые принадлежат $\mathcal{H}_*^n\{r\}$ при некотором $r > 0$, инвариантны в классе $\overset{*}{C}^{n+\mu}$ и действуют в нем по формуле (5.13). Нетрудно видеть, что в правой части (5.18) леммы 8 класс $\mathcal{H}_*$ можно заменить на $\mathcal{H}_*^n$. Аналогичным образом, если условия (5.19) выполняются по отношению к $\overset{\circ}{C}^{n+\mu+0}$, то $A \in \mathcal{H}_*^n$.

Список литературы

1. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы. М.: ВШ, 1991.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1968.
3. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.
4. *Хермандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: ИЛ, 1962.
5. *Мухомеловичи Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
7. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
8. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
9. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения Винера–Хопфа на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1983. Т. 13. № 5. С. 3–120.
10. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1970.

Институт прикладной математики
и автоматизации РАН, г. Нальчик

Поступило в редакцию
19.XI.1997